Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

М.Н. Подоксёнов, С.А. Прохожий

Сборник индивидуальных заданий по аналитической геометрии и линейной алгебре с примерами решения задач

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2016

УДК 514.12(076.5)+512.64(076.5)
ББК 22.151.54я73+22.143я73
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 24.12.2015 г.

Авторы: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **М.Н. Подоксёнов;** доцент кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **С.А. Прохожий**

Рецензент:
заведующий кафедрой математической кибернетики БГУ,
доктор физико-математических наук, профессор *А.Л. Гладков*

Подоксёнов, М.Н.

П44 Сборник индивидуальных заданий по аналитической геометрии и линейной алгебре с примерами решения задач / М.Н. Подоксёнов, С.А. Прохожий. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – 50 с.

Данное учебное издание подготовлено в соответствии с типовыми учебными программами по курсам «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» и «Аналитическая геометрия и преобразования плоскости» для студентов математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Физика» (по направлениям) и «Компьютерная безопасность». Излагаются теоретический материал и примеры решения задач.

Предлагаемое издание рекомендуется для самостоятельной работы студентов очного и заочного отделений математического факультета, обучающихся по специальностям «Программное обеспечение информационных технологий» и «Прикладная математика».

УДК 514.12(076.5)+512.64(076.5)
ББК 22.151.54я73+22.143я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для организации самостоятельной работы студентов математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Физика» (по направлениям), «Компьютерная безопасность». Перед каждым индивидуальным заданием излагается теоретический материал, знание которого необходимо для решения задания. Данное изложение не является полным и не может заменить конспект лекций или учебник. Теоремы, формулы и рисунки нумеруются в каждом параграфе отдельно. Например, теорема 9.1 – это теорема 1 из параграфа 9. Приводятся также примеры решения задач и советы по поводу возможных особых ситуаций, которые могут возникнуть при решении.

К индивидуальному заданию по геометрии прилагается пример решения нулевого варианта.

Номер варианта выбирается в соответствии с порядковым номером студента по журналу преподавателя. Задания по алгебре и геометрии следует сдавать отдельно в срок, указанный преподавателем. Должны быть решены все задачи. Прежде чем решать задачу, изучите пример её решения. Решение заданий по алгебре обязательно должно включать в себя проверку. Если проверка не получается, следует искать ошибки в решении. В случае возникновения серьёзных трудностей следует проконсультироваться с преподавателем.

§ 1. *Матрицы и определители*

Определение. *Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Матрицу принято обозначать большой буквой латинского алфавита, а её элементы – такой же маленькой буквой с двумя индексами, первый (или верхний) из которых обозначает номер строки, а второй (или нижний) – номер столбца, в которых находится данный элемент.

Например,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Это матрица, состоящая из 2 строк и 4 столбцов. Говорим, что она имеет размер 2×4. В ней $a_{11}=1$, $a_{12}=2$, а $a_{21}=5$.

Определение. Матрица размера $n\times n$ называется *квадратной* матрицей порядка n. Элементы квадратной матрицы, у которых номера строки и столбца совпадают, образуют *главную диагональ*. Если все элементы, стоящие вне диагонали, равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, называется *единичной* и обозначается буквой $\boldsymbol{E}$. Например, единичная матрица порядка 3 имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если все элементы матрицы, стоящие ниже (выше) главной диагонали, равны нулю, то матрица называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*).

Транспонированием матрицы $\boldsymbol{A}$ называется такая перестановка её элементов, при которой каждый элемент a_{ij} меняется местами с элементом a_{ji}. Матрицу, которая получается в результате транспонирования, обозначаем $\boldsymbol{A}^T$. Например, для матрицы (1.1)

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Понятие *определитель* вводится только для квадратных матриц. Определитель матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначается $\det\boldsymbol{A}$. Если вместо круглых скобок вокруг элементов матрицы стоят прямые скобки, то это тоже означает определитель матрицы. Определитель матрицы порядка 2 вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Обозначим M_{ij} – это определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. Он называется *минором, дополнительным к элементу* a_{ij}. Добавим к этому минору знак минус в том случае, когда $i+j$ нечётно. Получившееся число называется *алгебраическим дополнением к элементу* a_{ij}; мы будем обозначать его A_{ij}. Можно записать, что

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Выберем теперь произвольную строку в матрице $\boldsymbol{A}$, и каждый из элементов этой строки умножим на его алгебраическое дополнение, получившиеся числа сложим. Величина, которую мы таким образом вычислили, называется *определителем матрицы* $\boldsymbol{A}$ и обозначается $\det\boldsymbol{A}$ или $|\boldsymbol{A}|$. Результат вычисления не зависит от того, какую из строк матрицы мы выберем. Например, если выбрать первую строку, что получим формулу, которая называется разложением определителя по первой строке:

$$\det\boldsymbol{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Для матрицы порядка 3 эта формула выглядит так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Второе слагаемое мы взяли со знаком минус, потому что 1+2 нечётно.

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2\cdot(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3\cdot(4\cdot 8 - 5\cdot 7) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Свойства определителя (выборочно: список не является полным):

1. Если одна строка или столбец определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

2. Если определитель содержит две одинаковые или пропорциональные строки (два одинаковых или пропорциональных столбца), то он равен нулю.

3. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак.

4. Общий множитель элементов одной строки (столбца) выносится за знак определителя.

В предыдущем примере все элементы третьего столбца кратны трём. Поэтому мы можем вынести множитель 3 за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Если к элементам одной строки (столбца) матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), домноженные на некоторое число, то определитель матрицы не изменится.

Вычтем в нашем примере из второй и третьей строк первую строку (сама первая строка при этом остаётся на своём месте без изменений):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

Мы получили две пропорциональные строки, следовательно, определитель равен нулю.

6. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 9 = -27.$$

Диагональная матрица является частным случаем треугольной. Поэтому её определитель тоже равен произведению диагональных элементов.

§ 2. *Правило Крамера*

Пусть дана система линейных уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных. Мы ограничимся случаем, когда это число равно 3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.1}$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а числа b_1, b_2, b_3 – *свободными членами*. Коэффициенты системы образуют матрицу A, а свободные члены – столбец B:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta = \det\boldsymbol{A}$, а Δ_i – определитель матрицы, которая получается из $\boldsymbol{A}$ заменой i-го столбца на столбец $\boldsymbol{B}$. Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.1 (***правило Крамера***). *Если* $\Delta \neq 0$, *то система линейных уравнений* (2.1) *имеет единственное решение. Его можно найти по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Эта теорема верна и для систем, состоящих из произвольного числа n уравнений и неизвестных. Обратите внимание, что теорема состоит из двух утверждений. Первое предложение о существовании и единственности решения имеет важное самостоятельное значение.

Примеры решения задач

1. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x + 9y = 3, \\ 3x + 5y = 1. \end{cases}$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{-2} = -3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Проверка: $\begin{cases} 5\cdot(-3) + 9\cdot 2 = 3 \text{ – верно}, \\ 3\cdot(-3) + 5\cdot 2 = 1 \text{ – верно}. \end{cases}$

Ответ: (–3, 2).

2. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Ответ: (1, 2, 1).

Задания для самостоятельного решения

Решить систему уравнений с помощью правила Крамера. Выполнить проверку.

1. $\begin{cases} 6x+11y=14, \\ 8x-5y=-1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x+7y=9, \\ 9x-5y=-2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 9x+12y=3, \\ 6x+10y=3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x-11y=-7, \\ 9x-5y=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 6x-7y=2, \\ 8x-5y=7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x+12y=1, \\ 7x+4y=-5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 8x+9y=11, \\ 5x-12y=1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 8x+9y=7, \\ 4x-12y=-2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6x+10y=14, \\ 9x-7y=-1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x+11y=5, \\ 6x+5y=-4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 11x-6y=14, \\ 5x+8y=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 7x-6y=9, \\ 5x+9y=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 12x-9y=3, \\ 10x-6y=3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 11x+6y=7, \\ 5x+9y=-1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 7x+6y=-2, \\ 5x+8y=-7. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 12x-5y=1, \\ 4x-7y=-5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 9x-8y=11, \\ 12x+5y=-1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 9x-8y=7, \\ 12x+4y=2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 10x-6y=14, \\ 7x+9y=1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 11x-4y=5, \\ 5x-6y=-4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 9x+7y=1, \\ 5x-3y=4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x-3y=-4, \\ 9x+7y=-1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 11x+2y=3, \\ 8x-9y=-2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 9x+8y=2, \\ 2x-11y=3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 11x-2y=5, \\ 8x+7y=-2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x-11y=-5, \\ 7x+8y=-2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x-7y=2, \\ 2x+6y=3. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 7x+5y=-2, \\ 6x-2y=3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 11x+6y=5, \\ 3x+2y=3. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x+3y=2, \\ 5x+9y=8. \end{cases}$

§ 3. *Умножение матриц*

В дальнейшем мы будем использовать верхний индекс для номера строки и нижний – для номера столбца с тем, чтобы такой вариант обозначений тоже стал привычным для студентов. Пусть

$$a=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b=\begin{pmatrix}b^1\\ b^2\\ \vdots\\ b^n\end{pmatrix} –$$

строка и столбец, состоящие из одинакового количества элементов. Определим

$$a\cdot b = a_1b^1+a_2b^2+\dots+a_nb^n.$$

Пусть теперь **A** – матрица размера $m\times k$, а **B** – матрица размера $k\times n$, т.е. количество столбцов в матрице **A** равно количеству строк в матрице **B**, или, что то же самое, длина строки матрицы **A** равна высоте столбца в матрице **B**. Тогда мы можем умножать строки матрицы **A** на столбцы матрицы **B**. Пусть $a^i = \begin{pmatrix}a_1^i & a_2^i & \dots & a_n^i\end{pmatrix}$ – i-ая строка матрицы ***A***, а

$$b_j=\begin{pmatrix}b_j^1\\ b_j^2\\ \vdots\\ b_j^n\end{pmatrix}$$ – j-ый столбец матрицы ***B***. Обозначим

$$c_j^i = a^i\cdot b_j = a_1^ib_j^1 + a_2^i b_j^2+\dots + a_n^ib_j^n, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

Числа c_j^i образуют матрицу ***C*** размера $m\times n$, которая называется произведением матриц ***A*** и ***B***:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a^1\cdot b_1 & a^1\cdot b_2 & \dots & a^1\cdot b_n\\ a^2\cdot b_1 & a^2\cdot b_2 & \dots & a^2\cdot b_n\\ \dots & \dots & & \dots\\ a^m\cdot b_1 & a^m\cdot b_2 & \dots & a^m\cdot b_n\end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матриц (выборочно: список не является полным):

1. Умножение матриц не коммутативно. Если определено произведение ***AB***, то произведение ***BA*** может быть не определено. Даже если определены оба произведения, то они могут иметь разный порядок. Например, если ***A*** имеет размер 2×3, а ***B*** имеет размер 3×2, то ***AB*** имеет размер 2×2, а ***BA*** имеет размер 3×3; получается, что эти матрицы вообще нельзя сравнивать.

Даже если оба произведения ***AB*** и ***BA*** определены и имеют одинаковый размер, то может получиться $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. Например,

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

Получается, что $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$, а $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$.

2. Если $\boldsymbol{A}$ – квадратная матрица порядка n, а $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица того же порядка, то $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$.

3. Если $\boldsymbol{O}$ – нулевая матрица (т.е. матрица, все элементы которой нули), то $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$ (если определены соответствующие произведения).

4. Умножение матриц ассоциативно. Если определены произведения $\boldsymbol{AB}$ и $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$, то определены произведения $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$; при этом $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

5. Если имеет смысл $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$, то $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$. Если имеет смысл $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$, то $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

6. $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$, где λ – любое действительное число.

7. Если определено произведение $\boldsymbol{AB}$, то определено $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ и выполнено $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

8. Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – квадратные матрицы одного порядка, то $\det\boldsymbol{AB}=$ $=\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}$.

§ 4. *Обратная матрица. Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы*

Определение. Матрица $\boldsymbol{Y}$ называется <u>*обратной к матрице*</u> $\boldsymbol{A}$, если

$$\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{YA}=\boldsymbol{E}$$

($\boldsymbol{E}$ – единичная матрица). Тогда обозначаем $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}$. Матрица, которая имеет обратную к ней матрицу, называется <u>*обратимой*</u>.

Из определения следует, что матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}^{-1}$ обязательно являются квадратными одного и того же порядка.

***Теорема* 4.1.** *Матрица* $\boldsymbol{A}$ *является обратимой тогда и только тогда, когда она невырождена* (*т.е.* $\det\boldsymbol{A}\neq 0$).

Далее мы будем рассматривать только квадратные матрицы третьего порядка и системы из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Но всё сказанное будет верно и для квадратных матриц произвольного порядка, а также для систем линейных уравнений (СЛУ), содержащих n уравнений и n неизвестных ($n>0$).

Пусть дана СЛУ:

$$\begin{cases} a_1^1x_1+a_2^1x_2+a_3^1x_3=b_1, \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3=b_2, \\ a_1^3x_1+a_2^3x_2+a_3^3x_3=b_3. \end{cases} \tag{4.1}$$

Обозначим

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\boldsymbol{A}$ называется матрицей СЛУ, $\boldsymbol{X}$ – столбец неизвестных, $\boldsymbol{B}$ – столбец свободных членов. Тогда систему (4.1) можно записать в матричном виде так:

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}. \tag{4.2}$$

Предположим, что матрица $\boldsymbol{A}$ не вырождена. Умножим обе части равенства (4.2) слева на обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{EX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}. \tag{4.3}$$

Тем самым, если мы знаем обратную матрицу, мы можем вычислить столбец решений.

Напомним, что минором, дополнительным к элементу a_{ij}, называется определитель матрицы, которая получается из матрицы $\boldsymbol{A}$ вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца; он обозначается M_j^i. Алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} задаётся равенством

$$A_j^i=(-1)^{i+j}M_j^i.$$

Оно отличается от минора только знаком в том случае, когда $i+j$ нечётно.

Теорем 4.2. *Для невырожденной квадратной матрицы* $\boldsymbol{A}$ *порядка* 3

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы составить $\boldsymbol{A}^{-1}$, *мы на место каждого элемента матрицы* $\boldsymbol{A}$ *ставим его алгебраическое дополнение, получившуюся матрицу транспонируем* (*т.е. превращаем строки в столбцы*) *и затем умножаем на* $(\det \boldsymbol{A})^{-1}$.

Пример. Найти решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5, \\ 3x_1-x_2+4x_3=1, \\ -x_1+5x_2-x_3=9. \end{cases}$$

Решение. Составляем матрицу данной системы:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем алгебраические дополнения. При этом стараемся располагать их на листе бумаги так же, как расположены элементы матрицы. При этом важно помнить, что следует поставить знак минус в тех случаях, когда $i+j$ нечётно.

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -19 \qquad A_2^1 = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_3^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_1^2 = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_3^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7 \qquad (4.4)$$

$$A_1^3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_2^3 = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_3^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

После того как уже найдены алгебраические дополнения, мы можем вычислить определитель матрицы $\boldsymbol{A}$ с помощью разложения по первой строке:

$$\det \mathbf{A} = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_1^2 + a_3^1 A_1^3 = 1\cdot(-19) + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 14 = -35$$

(мы умножаем каждый элемент первой строки матрицы на его алгебраическое дополнение и получившиеся числа складываем). Точно так же можно использовать разложение по любой другой строке.

Выписываем матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$, и при этом не забываем, что элементы первой строки в вычислениях (4.4) записываются в первый столбец, второй строки – во второй столбец, третьей строки – в третий столбец:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & -7 \\ 14 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Находим решение по формуле (4.3):

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & -7 \\ 14 & -7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19\cdot 5 - 3\cdot 1 + 7\cdot 9 \\ -1\cdot 5 - 2\cdot 1 - 7\cdot 9 \\ 14\cdot 5 - 7\cdot 1 - 7\cdot 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -35 \\ -70 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым мы нашли, что

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0.$$

Прежде чем писать ответ, делаем проверку:

$$\begin{cases} 1 + 2\cdot 2 - 0 = 5 \ \text{– верно} \\ 3\cdot 1 - 2 + 4\cdot 0 = 1 \ \text{– верно,} \\ -1 + 5\cdot 2 - 0 = 9 \ \text{– верно.} \end{cases}$$

***Ответ*:** $(1, 2, 0)$.

***Если проверка не получается*:**

1. Проверьте, не забыли ли вы поставить знак минус при вычислении алгебраических дополнений там, где $i+j$ нечётно.

2. Проверьте, не забыли ли вы при составлении обратной матрицы выписать алгебраические дополнения по принципу: строка – в столбец.

3. Проверьте, не пропустили ли вы при составлении самой матрицы $\boldsymbol{A}$ где-нибудь знак минус.

4. Проверьте, правильно ли вы переписали условие.

5. Пересчитайте ещё раз алгебраические дополнения.

6. Пересчитайте $\det \boldsymbol{A}$.

7. Если по-прежнему проверка не получается, проверьте правильность составления $\boldsymbol{A}^{-1}$ путём умножения матриц: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$. Если, например, при умножении первой строки матрицы $\boldsymbol{A}$ на второй столбец матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ получается не 0, а другое число, то ошибку следует искать во втором столбце матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$. Аналогично, сделав проверку $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, мы можем определить номер строки в $\boldsymbol{A}^{-1}$, в которой содержится ошибка. Если вместо единичной матрицы получается диагональная матрица, у которой на диагонали стоит не 1, а другое число, то неверно найден $\det \boldsymbol{A}$.

Задания для самостоятельного решения

Решить систему линейных уравнений

а) с помощью правила Крамера;

б) с помощью метода Гаусса (метод излагается в §6);

в) с помощью обратной матрицы.

1. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -3x_1 + 12x_2 - 2x_3 = -7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -11, \\ 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -3, \\ -2x_1 - 7x_2 - 7x_3 = -3, \\ 3x_1 + 12x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 12x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -1, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 12x_2 - 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 - 7x_3 = -10. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 16, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -8, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -8, \\ -2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ -3x_1 - 12x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ 4x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 3, \\ 3x_1 - 12x_2 - 5x_3 = 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8, \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 12x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 12x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -10. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 16, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 15. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2\ , \\ 3x_1 - 4x_2 + 12x_3 = 13, \\ 4x_1 - 4x_2 + 11x_3 = 15. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 = 13, \\ 4x_1 - 11x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 - 13x_3 = -1, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 13x_2 - 7x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -12, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -9, \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -12, \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 14, \\ 4x_1 - 10x_2 + 3x_3 = 16. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 14, \\ 4x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 16. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -6, \\ 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$

§ 5. *Использование обратной матрицы при решении задач на преобразование координат*

Пусть в векторном пространстве L^n вместо базиса $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ выбран новый базис $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$, и нам известно разложение базисных векторов второго базиса по первому базису:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = c_1^1\mathbf{e}_1 + c_1^2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_1^n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_2 = c_2^1\mathbf{e}_1 + c_2^2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_2^n\mathbf{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}'_n = c_n^1\mathbf{e}_1 + c_n^2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_n^n\mathbf{e}_n. \end{cases} \tag{5.1}$$

Пусть $\mathbf{x}(x^1, x^2, \ldots, x^n)_{\mathcal{B}}$ – координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ в первом базисе (назовём их старыми координатами), $\mathbf{x}(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)_{\mathcal{B}'}$ – координаты этого же вектора во втором базисе (новые координаты). Требуется найти связь между этими координатами.

Составим из коэффициентов этого разложения матрицу, выписывая коэффициенты разложения из каждой строки в столбец с тем же номером:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \ldots c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \ldots c_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1^n & c_2^n & \ldots c_n^n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется <u>*матрицей перехода от первого базиса ко второму*</u>. Пишем $\mathcal{B} \xrightarrow{\boldsymbol{C}} \mathcal{B}'$. С её помощью мы можем выписать, как старые координаты вектора выражаются через новые его координаты (т.е. обратную замену координат):

$$\begin{cases} x^1 = c_1^1 x'^1 + c_2^1 x'^2 + \ldots + c_n^1 x'^n, \\ x^2 = c_1^2 x'^1 + c_2^2 x'^2 + \ldots + c_n^2 x'^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = c_1^n x'^1 + c_2^n x'^2 + \ldots + c_n^n x'^n. \end{cases} \tag{5.2}$$

В матричном виде:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}', \tag{5.3}$$

где $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{X}'$ – столбцы, составленные из старых и новых координат (координатные столбцы) вектора $\mathbf{x}$. Из (5.3) автоматически получаем формулы прямой замены координат:

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}. \tag{5.4}$$

В развёрнутом виде эти формулы выглядят так же, как и (5.2), только штрихи у координат стоят в левой части формул, а вместо элементов матрицы $\boldsymbol{C}$ используются элементы матрицы $\boldsymbol{C}^{-1}$.

Если по условию задачи нам известны старые координаты вектора **x**, то (5.2) представляет собой СЛУ, где новые координаты $(x'^1, x'^2,\dots, x'^n)$ являются неизвестными, а $(x^1, x^2,\dots, i^n)$ – это свободные члены. Равенство (5.4) – это решение (5.2) с помощью обратной матрицы.

Пример

В векторном пространстве вместо базиса $\mathcal{B}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ выбран новый базис $\mathcal{B}'=(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

а) Записать формулы перехода от старых координат (x^1, x^2, x^3) к новым координатам (x'^1, x'^2, x'^3) и обратно.

б) Найти новые координаты вектора $\mathbf{a}(\ ,\ ,\ )_{\mathcal{B}'}$, если известны его старые координаты $\mathbf{a}(-7,-2,5)_{\mathcal{B}}$.

Решение. Составим матрицу $\boldsymbol{C}$ перехода к новому базису. Её столбцы – это координатные столбцы векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную к ней матрицу $\boldsymbol{C}^{-1}$:

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 10 \\ 7 & -4 & 9 \\ 11 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Формулы замены координат выглядят так:

$$\begin{cases} x^1 = x'^1 - 4x'^2 + 2x'^3, \\ x^2 = 4x'^1 - 3x'^2 - x'^3, \\ x^3 = x'^1 + 2x'^2 - 2x'^3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'^1 = 4x^1 - 2x^2 + 5x^3, \\ x'^2 = \dfrac{7}{2}x^1 - 2x^2 + \dfrac{9}{2}x^3, \\ x'^3 = \dfrac{11}{2}x^1 - 3x^2 + \dfrac{13}{2}x^3. \end{cases}$$

При составлении первых мы использовали матрицу $\boldsymbol{C}$, а при составлении вторых – матрицу $\boldsymbol{C}^{-1}$. Подставляя координаты вектора **a** во вторые формулы, находим его координаты в новом базисе: $\mathbf{a}(1,2,0)_{\mathcal{B}'}$.

Можно подставить старые координаты $(-7,-2,5)$ в формулы обратной замены. Тогда мы получим СЛУ:

$$\begin{cases} x'^1 - 4x'^2 + 2x'^3 = -7, \\ 4x'^1 - 3x'^2 - x'^3 = -2, \\ x'^1 + 2x'^2 - 2x'^3 = 5. \end{cases}$$

из которой можно найти новые координаты вектора $\mathbf{a}$. Поскольку по условию задачи всё равно следует выписать формулы прямой замены координат, проще воспользоваться именно этими формулами.

Задания для самостоятельного решения

1. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = -4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(-4, 0, 9)$

2. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(1, -4, 2)$

3. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(3, -1, 5)$

4. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = -4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(0, 6, -4)$

5. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = 3\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2. \end{cases}$ $\mathbf{a}(1, -4, -1)$

6. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = -2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(1, 4, -1)$

7. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(-4, 5, -6)$

8. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(-2, 3, 3)$

9. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2. \end{cases}$ $\mathbf{a}(5, -5, 9)$

10. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(3, 1, 3)$

11. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(-2, -2, 5)$

12. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(3, -1, 3)$

13. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(3, 1, -9)$

14. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(2, -3, 0)$

15. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = -2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(0, 4, -9)$

16. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = 4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(-2, -4, 1)$

17. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(3, 5, -1)$

18. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' = 4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(0, -6, 4)$

19. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(3, -1, 2)$

20. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = -2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(2, 2, 7)$

21. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = -2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(-2, -1, 6)$

22. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(-1, -2, 3)$

23. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(0, 3, 2)$

24. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(1, -2, 0)$

25. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(4, 4, -3)$

26. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(-1, 4, 5)$

27. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(1, 3, 6)$

28. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(9, 1, 3)$

29. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(2, 0, 3)$

30. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3. \end{cases}$ $\mathbf{a}(2, 0, 9)$

§ 6. *Решение однородной системы уравнений. Фундаментальная система решений*

Система линейных уравнений (СЛУ) называется *однородной*, если её правая часть состоит только из нулей. В матричном виде однородная СЛУ записывается так: $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$. Пусть n – количество неизвестных, r – ранг матрицы этой системы.

Если $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – два решения системы, то их сумма $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ тоже является решением, и произведение решения на любое число $\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ тоже является решением. Это означает, что *все решения однородной СЛУ образуют векторное* (*линейное*) *пространство*. Размерность этого пространства равна $n - r$. Следовательно, существует базис в пространстве решений, состоящий из $n - r$ линейно независимых решений: $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_{n-r})$. Такой базис называется фундаментальной системой решений.

Произвольное решение X системы может быть разложено по базису:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r}.$$

Если мы будем считать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ произвольными параметрами, то получим общее решение системы.

Примеры решения задачи

***Пример* 1.** Найти общее решение однородной системы линейных уравнений и выписать фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 6x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 14x_4 - 10x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 + 7x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Будем искать решение <u>*методом Гаусса*</u>. Можно совершать преобразования над самой системой уравнений, но для удобства мы составим матрицу этой системы.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & -3 & -1 & -10 & -5 \\ 1 & \mathbf{-1} & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -6 & \mathbf{-1} & -14 & -10 \\ -2 & 1 & 6 & \mathbf{7} & -7 \end{pmatrix}.$$

<u>*Элементарными преобразованиями*</u> строк матрицы называются:

1) перестановка строк;
2) умножение строки на число, не равное нулю;
3) прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на некоторое число;
4) вычёркивание строки, состоящей целиком из нулей.

Элементы, выделенные жирным шрифтом, образуют диагональ. Наша цель – с помощью элементарных преобразований строк матрицы занулить элементы, стоящие ниже диагонали; т.е. мы пытаемся привести матрицу к виду

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Если при этом у нас получается строка, состоящая полностью из нулей, мы её вычеркиваем (на практике, если получим две одинаковые или пропорциональные строки, то можно вычёркивать одну из них; если таких строк будет три – можем вычеркнуть две из них). При этом может возникнуть и любая из двух следующих ситуаций.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Главное – добиться, чтобы мы могли выделить в оставшейся матрице треугольный минор, на диагонали которого все числа не равны нулю. Такой минор составляют обведенные столбцы. Этот минор называется *<u>базисным</u>*. В каждом из случаев, мы можем вместо второго столбца взять первый. Во втором случае мы можем вместо третьего столбца взять четвёртый.

Первым действием мы пытаемся получить нули в первом столбце ниже диагонали. Для этого сначала мы выбираем строку, которую мы поставим на первое место. В ней первый элемент желательно должен быть равен ±1, но точно не ноль. Возможно, для этого потребуется разделить какую-либо строку на целое число. Мы поставим на первое место вторую строку. Затем мы к новой второй строке прибавляем первую, умноженную на (–2), к третьей – первую, умноженную на (–3), а к четвёртой – первую, умноженную на 2. При этом сама первая строка остаётся без изменений. Эти действия обозначаются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -10 & -5 \\ 3 & -6 & -1 & -14 & -10 \\ -2 & 1 & 6 & 7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

Вторым действием мы пытаемся получить нули во втором столбце ниже диагонали. Наши действия уже показаны выше. Возможно, в вашей индивидуальной задаче предварительно надо будет переставить строки или какая-либо строка делится на целое число.

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & -14 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ :2 \\ :7 \end{array} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-2} \end{pmatrix}$$

Мы разделили 3 строку на 2, а 4 строку – на 7. Получили две одинаковые строки. Одну из них можем вычеркнуть. Вторую строку умножим на –1.

Базисный минор обведён. Неизвестные, коэффициенты около которых входят в базисный минор, называются *<u>базисными</u>*, а все остальные – *<u>параметрическими</u>*. Мы вновь возвращаемся к системе линейных уравнений и составляем её по последней матрице. Базисные неизвестные при этом остаются в левой части, а параметрические неизвестные переносим в левую часть. После этого параметрическим неизвестным придаём значения произвольных параметров (можно сразу писать вторую из следующих систем).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 6x_4 + 3x_5, \\ x_2 + x_3 = 2x_4 + x_5, \\ x_3 = x_4 + 2x_5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 6\alpha_1 + 3\alpha_2, \\ x_2 + x_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ x_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_4 = \alpha_1, \\ x_5 = \alpha_2;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Подставляем значение x_3 во второе уравнение и находим x_2; подставляем значение x_2 в первое уравнение и находим x_1:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = 7\alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_2 = -x_3 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \\ x_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_4 = \alpha_1, \\ x_5 = \alpha_2, \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

$X = (7\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ – общее решение системы.

Подставляя вместо α_1 и α_2 конкретные числа, мы будем получать частные решения. Подставляя в общее решение следующие частные значения параметров, получаем решения

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0, \qquad X_1 = (7, 1, 1, 1, 0),$$
$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1, \qquad X_2 = (2, -1, 2, 0, 1).$$

Тогда $\{X_1, X_2\}$ – фундаментальная система решений (базис в пространстве решений). Произвольное частное решение системы можно представить в виде линейной комбинации решений, входящих в фундаментальную систему. Например, $Y = 1 \cdot X_1 - 2X_2 = (3, 3, -3, 1, -2)$ – частное решение. Следующая запись называется <u>*разложением общего решения*</u> по базису:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}.$$

Обязательно следует сделать проверку, подставив решения X_1, X_2 в исходную систему:

$$\begin{cases} 2\cdot 7 - 3\cdot 1 - 1 - 10\cdot 1 - 5\cdot 0 = 0, \\ 7 - 1 - 6\cdot 1 - 3\cdot 0 = 0, \\ 3\cdot 7 - 6\cdot 1 - 1 - 14\cdot 1 - 10\cdot 0 = 0, \\ -2\cdot 7 + 1 + 6\cdot 1 + 7\cdot 1 - 7\cdot 0 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2\cdot 2 - 3\cdot(-1) - 2 - 10\cdot 0 - 5\cdot 1 = 0, \\ 2 - (-1) - 6\cdot 0 - 3\cdot 1 = 0, \\ 3\cdot 2 - 6\cdot(-1) - 2 - 14\cdot 0 - 10\cdot 1 = 0, \\ -2\cdot 2 - 1 + 6\cdot 2 + 7\cdot 0 - 7\cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Если проверка показывает, что хотя бы одно равенство не выполняется, то сдавать ваше решение не следует – нужно искать ошибку.

***Ответ*:**

$X = (7\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ – общее решение системы;

$X_1 = (7, 1, 1, 1, 0)$, $X_2 = (2, -1, 2, 0, 1)$; (X_1, X_2) – фундаментальная система решений;

$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ – разложение общего решения по базису.

***Пример* 2**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$
\begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{c} \\ -2 \ \ -2 \\ \\ \\ \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ \multicolumn{5}{c}{\cancel{0\;\;0\;\;-1\;\;1\;\;3}} \\ \multicolumn{5}{c}{\cancel{0\;\;0\;\;1\;\;-1\;\;-3}} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 3x_1 - 2x_4 - 2x_5, \\ x_3 = x_4 + 3x_5, \end{cases}
\qquad
\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = -3a - 2b - 2c, \\ x_3 = b + 3c, \\ x_1 = a,\ x_4 = b, \\ x_5 = c;\ a, b, c \in \boldsymbol{R}. \end{cases}
$$

Отдельно находим

$$x_2 = \frac{1}{2}(-3a - 2b - 2c - 2x_3) = \frac{1}{2}(-3a - 2b - 2c - 2b - 6c) = \frac{1}{2}(-3a - 4b - 8c).$$

$X = (a;\ 1{,}5a - 2b - 4c;\ b + 3c;\ b;\ c),\ a, b, c \in \boldsymbol{R}$ – общее решение.

$a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\quad X_1 = (1; -1{,}5; 0; 0; 0),$
$a = 0,\ b = 1,\ c = 0,\quad X_2 = (0; -2; 1; 1; 0),$
$a = 0,\ b = 0,\ c = 1,\quad X_3 = (0; -4; 3; 0; 1),$

$\{X_1, X_2, X_3\}$ – фунд. сист. решений (базис в пространстве решений),
$X = aX_1 + bX_2 + cX_3$ – разложение общего решения по базису.

Проверка (нули мы не писали):

$$
\begin{cases} 3\cdot 1 + 2\cdot(-1{,}5) = 0, \\ 3\cdot 1 + 2\cdot(-1{,}5) = 0, \\ 6\cdot 1 + 4\cdot(-1{,}5) = 0, \\ 6\cdot 1 + 4\cdot(-1{,}5) = 0. \end{cases}
\begin{cases} 2\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 = 0, \\ 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 1 = 0, \\ 4\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 5\cdot 1 = 0, \\ 4\cdot(-2) + 5\cdot 1 + 3\cdot 1 = 0. \end{cases}
\begin{cases} 2\cdot(-4) + 2\cdot 3 + 2\cdot 1 = 0, \\ 2\cdot(-4) + 3\cdot 3 - 1 = 0, \\ 4\cdot(-4) + 3\cdot 3 + 7\cdot 1 = 0, \\ 4\cdot(-4) + 5\cdot 3 + 1 = 0. \end{cases}
$$

Советы по поводу особых ситуаций

Если после зануления первого столбца получается $a_{22} = 0$, то на второе место переставляем другую строку, в которой второй элемент не равен нулю:

$$
\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & a & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & a & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \end{pmatrix}.
$$

Если во втором столбце все числа «нехорошие», то можно сделать дополнительное действие с тем, чтобы получить среди них единицу. Например:

$$
\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 6 & * & * & * \\ 0 & 4 & * & * & * \\ 0 & 5 & * & * & * \end{pmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ -1 \\ \\ \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 4 & * & * & * \\ 0 & 5 & * & * & * \end{pmatrix}.
$$

Тем самым вы избежите использования дробных чисел.

Задания для самостоятельного решения

Найти общее решение однородной системы линейных уравнений и выписать фундаментальную систему решений. Сделать проверку. Обязательное требование по оформлению решения: следует переписать теоретический материал, выделенный слева квадратной скобкой.

Обратите внимание, что все коэффициенты в некоторых уравнениях делятся на какое-либо целое число. Тогда следует разделить уравнение на это число. Возможно, после этого данное уравнение окажется самым простым из всех уравнений системы. Тогда будет удобно поставить именно его на первое место.

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 14x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 9x_4 - 13x_5 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 4x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 9x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 8x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 6x_4 - 4x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 10x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_4 + 6x_5 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 - 14x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10x_5 = 0. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 0, \\ -2x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 13x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 9x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 9x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

15. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+5x_4=0,\\ x_1+4x_2-3x_3+8x_4-x_5=0,\\ 2x_1+x_2-2x_3+4x_4+8x_5=0,\\ 3x_1+4x_2-x_3+5x_5=0.\end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+4x_4-x_5=0,\\ 4x_1-3x_2-x_3+8x_4+5x_5=0,\\ 6x_1-2x_2-2x_3+4x_4-2x_5=0,\\ -4x_1+x_2+3x_3+x_5=0.\end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4-2x_5=0,\\ 2x_1-3x_2-x_3-10x_4+5x_5=0,\\ x_1+4x_2-3x_3+6x_4+4x_5=0,\\ 5x_1+3x_2-3x_3-4x_4-6x_5=0.\end{cases}$

18. $\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3+x_4-5x_5=0,\\ -2x_1+x_2+3x_3-7x_5=0,\\ 2x_1-x_3+x_4+3x_5=0,\\ 3x_1+4x_2+5x_3+7x_4-10x_5=0.\end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+2x_4+4x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+6x_4+7x_5=0,\\ 4x_1+3x_2+3x_3+5x_4+10x_5=0,\\ 2x_1+2x_3+2x_4+2x_5=0.\end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-2x_4+2x_5=0\\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4+3x_5=0,\\ 2x_1+2x_2-2x_4+2x_5=0,\\ 5x_1+2x_2-4x_3+4x_5=0.\end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+2x_5=0,\\ 4x_1+9x_2-17x_3+5x_4+13x_5=0,\\ -x_1-3x_2+2x_3-3x_4-5x_5=0,\\ -2x_1-5x_2+7x_3-3x_4-7x_5=0.\end{cases}$

22. $\begin{cases} -3x_1-7x_2+4x_3-9x_4+5x_5=0,\\ x_1+3x_2+3x_4+x_5=0,\\ -5x_1-12x_2+8x_3-19x_4+x_5=0,\\ -2x_2-7x_3+6x_4+x_5=0.\end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+5x_4+4x_5=0,\\ -x_1+3x_2+x_3-7x_4=0,\\ 2x_1-6x_2+5x_3+9x_4+10x_5=0,\\ 3x_1-9x_2-x_3+14x_4+14x_5=0.\end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1+2x_3+x_4-x_5=0,\\ 3x_1-x_2+9x_3+4x_4+2x_5=0,\\ 2x_1+2x_2-2x_3+3x_4-15x_5=0,\\ -2x_1-3x_2+5x_3-5x_4+23x_5=0.\end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_5=0,\\ 3x_1+7x_2-4x_3+x_4+4x_5=0,\\ -x_1+5x_3+2x_4-4x_5=0,\\ -2x_1-x_2+11x_3+3x_4+6x_5=0.\end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+5x_4+3x_5=0\\ 2x_1+2x_2-8x_3-2x_4+2x_5=0,\\ x_1+2x_2-5x_3+2x_4=0,\\ 4x_1+9x_2-17x_3+11x_4+3x_5=0.\end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_4+3x_5=0,\\ 3x_1+7x_2-4x_3-5x_4+9x_5=0,\\ x_1+x_2-7x_3+2x_4+9x_5=0,\\ 5x_1+12x_2-8x_3-x_4+19x_5=0.\end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3-2x_4-10x_5=0,\\ 2x_1+7x_2-8x_3-6x_4-19x_5=0,\\ x_1+6x_2-7x_4-8x_5=0,\\ 3x_1+10x_2-13x_3-8x_4-29x_5=0.\end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_5=0,\\ 3x_1+8x_2-7x_3+8x_5=0,\\ x_1-2x_2-4x_3-3x_4+9x_5=0,\\ -2x_1-8x_2+5x_3-3x_4-3x_5=0.\end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3-x_4+7x_5=0,\\ 4x_1+3x_2-4x_3-6x_4+9x_5=0,\\ 6x_1-7x_3+x_4+20x_5=0,\\ 2x_1+2x_2-x_3-5x_4+2x_5=0.\end{cases}$

§ 7. *Полярная система координат на плоскости*

Определение. Выберем на плоскости произвольные точку O, которую назовём *полюсом*, и луч OP, который назовём *полярной осью*. Пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим $r = OM$, а φ – ориентированный угол между лучами OP и OM (рис. 7.1). Тогда пара (r, φ) называется *полярными координатами точки* M. Совокупность точки O и оси OP называется *полярной системой координат на плоскости*.

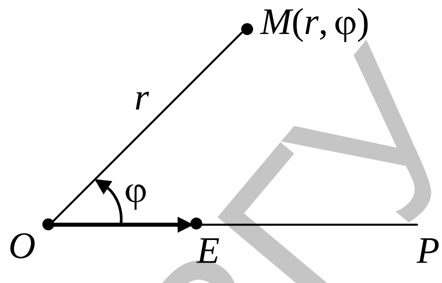

рис. 7.1

Если декартовы координаты могут принимать любое действительное значение, то для полярных есть ограничения. Очевидно, что $0 \le r < +\infty$, а для угла φ обычно договариваются, что $0 \le \varphi < 2\pi$ либо что $-\pi < \varphi \le \pi$. При этом, если $r = 0$, то φ считается неопределённым.

Выберем декартову СК так, чтобы точка O была её началом, а положительное направление оси Ox совпадало с направлением оси OP. Тогда формулы перехода от полярных координат к декартовым

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{7.1}$$

а с другой стороны получаем формулы перехода от декартовых координат к полярным.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{7.2}$$

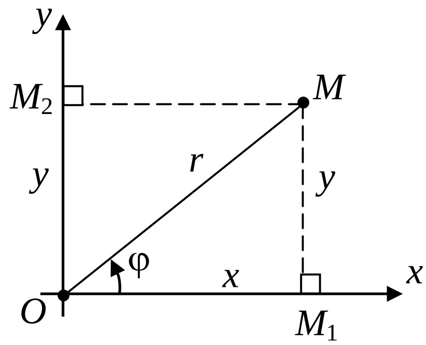

рис. 7.2

Подчеркнём, что знание синуса, косинуса или тангенса в отдельности не позволяет однозначно определить угол φ: два различных угла могут иметь одинаковый синус или одинаковый косинус. Поэтому угол φ следует находить сразу из двух равенств:

$$\cos\varphi = x/r,\ \sin\varphi = y/r$$

либо так: $\varphi = \arccos\dfrac{x}{r}$, если $y \ge 0$; $\varphi = -\arccos\dfrac{x}{r}$, если $y < 0$ (в предположении, что $-\pi < \varphi \le \pi$). Использование арктангенса неудобно: надо оговаривать ещё случай $x = 0$, и поэтому приходится писать 4 равенства.

§ 8. *Уравнение прямой на плоскости*

***Теорема* 8.1. 1.** *Прямая* l*, проходящая через точку* $M_0(x_0, y_0)$*, и имеющая направляющий вектор* $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$*, задаётся уравнением*

$$\frac{x-x_o}{a_1}=\frac{y-y_o}{a_2}, \qquad (8.1)$$

которое называется [*каноническим уравнением прямой*], *или* [*параметрическими уравнениями*]:

$$\begin{cases} x=x_o+a_1t, \\ y=y_o+a_2t,\ t\in \boldsymbol{R}. \end{cases} \qquad (8.2)$$

2. *Прямая, проходящая через точку* $M_o(x_o,y_o)$ *и имеющая вектор нормали* $\vec{\mathbf{n}}(A,B)$, *задаётся в декартовой СК уравнением*

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0 \qquad (8.3)$$

(*уравнение прямой с вектором нормали*).

***Следствие* 8.1.** *Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида*

$$Ax+By+C=0, \qquad (8.4)$$

которое называется *общим уравнением прямой*. *И обратно, любое уравнение вида* (8.4) *на плоскости задаёт прямую; при этом геометрический смысл коэффициентов* A, B *в уравнении* (8.4) *– это координаты вектора нормали к прямой.*

Если в уравнении (8.4) $B\neq 0$, то можно это уравнение переписать так: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$. Обозначим $k=-A/B,\ q=-C/B$ и получим уравнение

$$y=kx+q, \qquad (8.5)$$

которое называется уравнением с угловым коэффициентом. Здесь k называется угловым коэффициентом; $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона прямой к оси Ox.

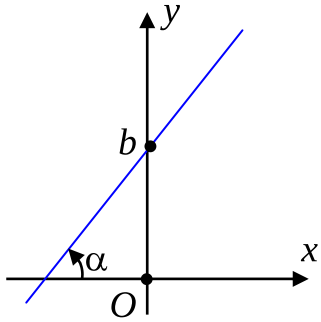

рис. 8.1

Если нам даны две точки на прямой $P(x_1,y_1)$ и $Q(x_2,y_2)$, то мы можем найти угловой коэффициент прямой по формуле $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ и составить уравнение прямой по формуле

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (8.6)$$

§ 9. *Взаимное расположение двух прямых на плоскости*

Пусть две прямые на плоскости заданы общими уравнениями:

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $\vec{\mathbf{n}}_1(A_1,B_1)$ и $\vec{\mathbf{n}}_2(A_2,B_2)$ – это векторы нормали к l_1 и l_2 (следствие 8.1).

***Теорема* 9.1.** **1.** $l_1 || l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;

2. $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

3. $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

4. *угол между* l_1 *и* l_2 *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2|}{|\vec{\mathbf{n}}_1||\vec{\mathbf{n}}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{9.1}$$

§ 10. *Уравнение прямой в нормальной форме. Расстояние от точки до прямой*

Определение. Говорим, что *общее уравнение прямой*

$$Ax + By + C = 0 \tag{8.4}$$

имеет нормальную форму, если $A^2 + B^2 = 1$. Это равносильно тому, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(A, B)$ – единичный.

Если уравнение (8.4) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на $\sqrt{A^2 + B^2}$:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Действительно, тогда получится, что $\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$. Например, если мы имеем уравнение $3x - 4y + 15 = 0$, то мы вычислим $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ и разделим наше уравнение на 5:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3 = 0.$$

Получилось уравнение в нормальной форме.

***Теорема* 10.1.** *Пусть прямая* l *определяется уравнением* (8.4) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки* $M(x_1, y_1)$ *до прямой вычисляется по формуле*

$$h = |Ax_1 + By_1 + C|. \tag{10.1}$$

***Следствие* 10.1.1.** *Если прямая определяется произвольным уравнением вида* (8.4), *то*

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{10.2}$$

§ 11. *Скалярное произведение векторов*

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется *число*

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}). \qquad (11.1)$$

Число $\vec{\mathbf{a}}^2=\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{\mathbf{a}}$.

***Теорема* 11.1.** **1.** *Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*: $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}=|\vec{\mathbf{a}}|^2$.

2. *Для того чтобы ненулевые векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ *были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю:* $\vec{\mathbf{a}}\perp\vec{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=0$.

Если мы знаем, чему равно скалярное произведение векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, и знаем их длины, то мы можем вычислить угол между ними:

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})=\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}. \qquad (11.2)$$

Пусть в пространстве задана декартова СК, $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ – базисные орты. Пусть $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда формулы для вычисления скалярного произведения, скалярного квадрата и длины вектора имеют вид:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3, \qquad (11.3)$$

$$\vec{\mathbf{a}}^2=\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}=a_1^2+a_2^2+a_3^2, \qquad (11.4)$$

$$|\vec{\mathbf{a}}|=\sqrt{\vec{\mathbf{a}}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \qquad (11.5)$$

Из них вытекает формула для вычисления косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})=\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|\cdot|\vec{\mathbf{b}}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (11.6)$$

Если $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{PQ}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Поэтому длина вектора вычисляется по формуле

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (11.7)$$

Эта же величина называется *расстоянием между точками* P и Q.

§ 12. *Векторное произведение*

Определение. *Векторным произведением двух ненулевых векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется такой *вектор* $\vec{\mathbf{c}}$ (рис. 12.1), что

1. $\vec{\mathbf{c}} \perp \vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{c}} \perp \vec{\mathbf{b}}$;
2. тройка $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ – правая;
3. $|\vec{\mathbf{c}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$.

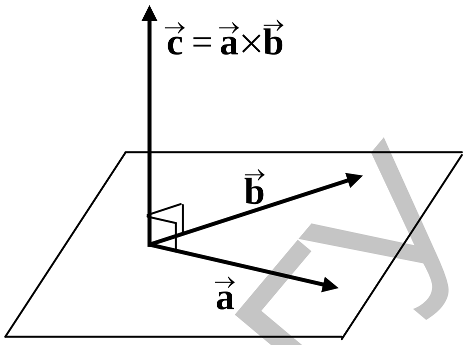

рис. 12.1

Если же среди векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ есть хотя бы один нулевой, то их векторным произведением является $\vec{\mathbf{o}}$.

***Теорема* 12.1.** *Модуль векторного произведения двух векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ *численно равен площади параллелограмма, построенного на направленных отрезках* $\overrightarrow{OA}$ *и* $\overrightarrow{OB}$, *представляющих эти векторы, отложенные из одной точки (рис. 12.2).*

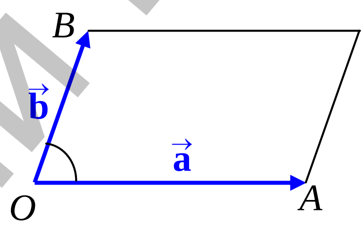

рис. 12.2

***Следствие* 12.1.1** (*третий признак коллинеарности векторов*). *Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору:*

$$\vec{\mathbf{a}} \,||\, \vec{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{o}}.$$

В частности, для любого вектора $\vec{\mathbf{a}}$ *выполнено* $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{o}}$.

***Теорема* 12.2.** *Векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами в декартовой СК* $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, *вычисляется по формуле*:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{k}} =$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{\mathbf{i}} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{\mathbf{j}} + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\mathbf{k}}. \qquad (12.1)$$

§ 13. *Смешанное произведение векторов*

Определение. *Смешанным произведением трёх векторов* $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ называется число $(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}}$. Позже мы выясним, что оно же равно $\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})$. Это позволяет нам использовать обозначение $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}$ без расстановки скобок и знаков. В литературе встречается также такое обозначение: $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$.

***Теорема* 13.1.** *Модуль смешанного произведения трёх векторов* $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}$ *численно равен объему параллелепипеда, построенного на направленных отрезках* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, *представляющих эти векторы, отложенные из одной точки.*

***Следствие* 13.1.1. 1.** $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ компланарны $\Leftrightarrow$ $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} = 0$;

2. тройка $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ правая $\Leftrightarrow$ $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} > 0$;

3. тройка $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ левая $\Leftrightarrow$ $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} < 0$.

***Свойства смешанного произведения*:**

1. *Смешанное произведение не зависит от группировки сомножителей*: $(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})$;

2. *Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке сомножителей*: $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{a}}$.

3. *При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак*: $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} = -\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}} = -\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{a}}$.

4. $(\lambda\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}}(\lambda\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}(\lambda\vec{\mathbf{c}}) = \lambda(\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}})$.

5. $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{d}} + \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{d}}$.

***Теорема* 13.2.** *Смешанное произведение трёх векторов* $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{\mathbf{c}}(c_1, c_2, c_3)$ *в декартовой системе координат вычисляется по формуле*

$$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{13.1}$$

§ 14. *Индивидуальное задание по геометрии*

Требования по оформлению

Номер варианта выбирается в соответствии с порядковым номером студента по журналу преподавателя. Работу следует оформить аккуратно на двух или трёх скреплённых двойных тетрадных листах. Задачи следует писать по порядку номеров и после каждой задачи оставлять несколько строк для возможных исправлений. Поля обязательны.

Работа решается в домашних условиях без ограничения времени и с образцом решения. Поэтому должны быть решены все задачи. В помощь предлагается решение нулевого варианта. Особо следует отметить: в тех задачах, где возможно сделать проверку, следует её обязательно сделать.

На первом листе перед решением первой задачи следует нарисовать табличку для проверки и повторной проверки работы.

1а	1б	2	4	4а	4б	4в	5	6

Ошибки в задачах, если это возможно, следует исправить прямо на месте. В конце работы пишется «Работа над ошибками», где исправляются значительные ошибки в решениях, выявленные при проверке.

Список задач

1. Известны координаты вершин треугольника ΔABC.

а) Составить уравнения стороны AB и высоты CD с угловым коэффициентом. Найти координаты точки D.

б) Вычислить высоту в треугольнике по формуле расстояния от точки до прямой.

2. Даны координаты вершин треугольника ABC. Составить уравнение окружности, описанной вокруг треугольника. При решении использовать уравнение прямой с вектором нормали.

3. Вершина A помещается в полюсе, а две другие имеют заданные полярные координаты.

а) Изобразить ***данный*** треугольник (сделать точный чертёж).

б) Вычислить площадь треугольника.

в) Найти длину BC.

4. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых (параллельны, пересекаются или совпадают). Если прямые пересекаются – найти угол между ними, а если параллельны – расстояние между ними.

5. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $SABC$.

а) Найти объем пирамиды, площадь основания ABC и высоту (с помощью векторного и смешанного произведений).

б) Найти угол $\angle BAC$. Указать, какой вектор перпендикулярен основанию.

в) Изобразить данную пирамиду в декартовой системе координат.

г) Составить уравнение плоскости основания и вычислить высоту по формуле расстояния от точки до плоскости. Сравнить с ранее полученным результатом.

6. В ΔABC проведена высота AD.

а) Найти координаты точки D.

б) Составить уравнение прямой AD.

в) Вычислить $h = |AD|$ по формуле расстояния между точками.

г) Вычислить площадь треугольника по формуле $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|\cdot h$ и проверить результат, вычислив $S_{\Delta ABC}$ с помощью векторного произведения.

6*. В условиях задачи 6 найти координаты точки D, используя методы дифференциального исчисления (для претендующих на отличную оценку).

Индивидуальные варианты

Вариант 1

1. $A(-3, 1)$, $B(9, 5)$, $C(-2, 8)$.

2. $A(-3,-2)$, $B(4,-3)$, $C(1, 6)$.

3. $C(3,-\frac{\pi}{3})$, $B(2,-\pi)$.

4. **а)** $x+1=0,\ x+y-5=0;$ **б)** $2x-2y-5=0,\ -x+y+1=0;$ **в)** $2x+3y-1=0,\ 4x+6y-2=0.$

5. $A(-1, 1, 2)$, $B(-5, 4,-2)$, $C(-1, 2, 3)$, $S(-8,-5, 4)$.

6. $A(1, 4, 3)$, $B(1,-7, 2)$, $C(4, 8,-1)$.

Вариант 2

1. $A(-2,-5)$, $B(1, 7)$, $C(8, 1)$.

2. $A(-6,-6)$, $B(1,-7)$, $C(-2, 2)$.

3. $C(2,-\frac{\pi}{12})$, $B(3, \frac{\pi}{4})$.

4. **а)** $3x-y-3=0,\ x+2y+8=0;$ **б)** $2x+y=0,\ -4x-2y-5=0;$ **в)** $2x-y+1=0,\ -6x+3y-3=0.$

5. $A(0, 2, 2)$, $B(0, 4, 3)$, $C(1, 4, 2)$, $S(7,-1, 7)$.

6. $A(-1,-4,-1)$, $B(3, 8,-3)$, $C(-6,-7, 3)$.

Вариант 3

1. $A(-5,-4)$, $B(10,-1)$, $C(-1,2)$. **2.** $A(-10,-3)$, $B(7,-10)$, $C(2,15)$.

3. $C(1,\frac{\pi}{4})$, $B(2,\frac{5\pi}{12})$.

4. а) $3x+4y=0,$ $8x-6y+5=0;$ **б)** $4x-6y+5=0,$ $-6x+9y+10{,}5=0;$ **в)** $-x+5y+2=0,$ $2x+3y-8=0.$

5. $A(1,1,2)$, $B(1,2,4)$, $C(4,1,4)$, $S(2,-7,3)$.

6. $A(7,-3,-2)$, $B(3,8,3)$, $C(-9,-13,-9)$.

Вариант 4

1. $A(0,1)$, $B(12,-3)$, $C(5,6)$. **2.** $A(3,2)$, $B(2,-5)$, $C(-1,4)$.

3. $C(3,\frac{\pi}{4})$, $B(2,\frac{7\pi}{12})$.

4. а) $3x+y+5=0,$ $x+2y-8=0;$ **б)** $-3x+y+1=0,$ $6x-2y+5=0;$ **в)** $9x-6y-12=0,$ $6x-4y-8=0.$

5. $A(-1,1,-2)$, $B(-1,-2,-1)$, $C(1,-2,0)$, $S(5,-2,-12)$.

6. $A(0,6,5)$, $B(7,1,2)$, $C(-5,4,5)$.

Вариант 5

1. $A(0,2)$, $B(9,-4)$, $C(7,6)$. **2.** $A(3,0)$, $B(1,-4)$, $C(-2,5)$.

3. $C(2,\frac{\pi}{3})$, $B(5,\frac{\pi}{12})$.

4. а) $3x+5y-7=0,$ $4x+y+1=0;$ **б)** $5x-10y+11=0,$ $x-2y+5=0;$ **в)** $-4x+y+2=0,$ $x+4y-4=0.$

5. $A(-5,1,2)$, $B(-5,-2,6)$, $C(-4,4,-2)$, $S(2,12,4)$.

6. $A(-2,5,1)$, $B(-1,6,-4)$, $C(2,0,8)$.

Вариант 6

1. $A(-1,2)$, $B(5,-2)$, $C(6,6)$. **2.** $A(9,5)$, $B(2,12)$, $C(-3,13)$.

3. $B(4,-\frac{\pi}{9})$, $C(1,-\frac{5\pi}{18})$.

4. а) $-2x+3y-11=0,$ $x+5y+8=0;$ **б)** $3x+12y-8=0,$ $2x+8y+10=0;$ **в)** $8x+2y+5=0,$ $x-4y-15=0.$

5. $A(-5,1,2)$, $B(-5,-2,6)$, $C(-4,4,-2)$, $S(2,12,4)$.

6. $A(-1,-1,-1)$, $B(-2,5,1)$, $C(1,-10,4)$.

Вариант 7

1. $A(0,4)$, $B(3,-2)$, $C(-4,-3)$. **2.** $A(-4,-4)$, $B(8,2)$, $C(0,8)$.

3. $B(2,\frac{7\pi}{12})$, $C(3,\frac{11\pi}{12})$.

4. а) $-3x+y-12=0$, $-x+2y-7=0$; **б)** $3x+y-5=0$, $9x+3y-15=0$; **в)** $6x+2y-7=0$; $9x+3y+5=0$.

5. $A(-6,0,1)$, $B(-6,-3,5)$, $C(-5,3,-3)$, $S(1,9,-1)$.

6. $A(5,2,0)$, $B(5,-4,-3)$, $C(-1,8,9)$.

Вариант 8

1. $A(0,-4)$, $B(8,0)$, $C(4,-7)$. **2.** $A(-5,-3)$, $B(7,1)$, $C(-1,9)$.

3. $B(4,-\frac{\pi}{6})$, $C(7,\frac{\pi}{6})$.

4. а) $-3x+5y-1=0$, $-4x+y+1=0$; **б)** $-5x+y-5=0$, $10x-2y-10=0$; **в)** $2x+3y=0$, $3x-2y+9=0$.

5. $A(1,0,-1)$, $B(2,0,4)$, $C(4,2,3)$, $S(10,-11,-8)$.

6. $A(1,-6,3)$, $B(0,2,4)$, $C(-6,-4,-5)$.

Вариант 9

1. $A(0,-3)$, $B(9,0)$, $C(5,-8)$. **2.** $A(-2,-5)$, $B(10,1)$, $C(4,-7)$.

3. $B(3,\pi)$, $C(4,\frac{2\pi}{3})$.

4. а) $4x+3y-12=0$, $x+6y+12=0$; **б)** $x-7y+10=0$, $-3x+21y+10=0$; **в)** $2x-4y-12=0$, $-3x+6y+18=0$.

5. $A(-1,3,0)$, $B(-1,-1,2)$, $C(0,5,-2)$, $S(7,2,6)$.

6. $A(5,8,0)$, $B(2,3,7)$, $C(5,6,-5)$.

Вариант 10

1. $A(0,-3)$, $B(-12,0)$, $C(-2,6)$. **2.** $A(-5,-1)$, $B(7,5)$, $C(-1,-3)$.

3. $C(5,\frac{7\pi}{12})$, $B(2,\frac{5\pi}{6})$.

4. а) $-4x+3y+18=0$, $-x+7y+7=0$; **б)** $x+3y+5=0$, $2x+6y-7=0$; **в)** $x-2y+1=0$, $2x+y+1=0$.

5. $A(1,4,2)$, $B(7,6,3)$, $C(3,4,3)$, $S(6,-7,-7)$.

6. $A(0,3,-5)$, $B(4,-2,0)$, $C(-14,7,-6)$.

Вариант 11

1. $A(-6, 0)$, $B(6, 4)$, $C(-5, 7)$. **2.** $A(-5, 0)$, $B(7, 4)$, $C(1,-2)$.

3. $B(2, \frac{\pi}{3})$, $C(1, \frac{7\pi}{12})$.

4. а) $3x+2y+5=0$, $5x-y+5=0$; **б)** $5x+2y-7=0$, $10x+4y+8=0$; **в)** $\sqrt{2}x-y+2\sqrt{2}=0$, $2x-\sqrt{2}y+4=0$.

5. $A(2, 1, 4)$, $B(3,-1, 2)$, $C(3, 7, 6)$, $S(-7, 6,-7)$.

6. $A(4, 1,-6)$, $B(5, 0, 2)$, $C(-4,-6,-4)$.

Вариант 12

1. $A(-1,-5)$, $B(2, 7)$, $C(8,-3)$. **2.** $A(-6,-3)$, $B(9, 2)$, $C(0, 9)$.

3. $B(3,-\frac{\pi}{2})$, $C(1, \frac{\pi}{4})$.

4. а) $x+3y+11=0$, $2x+y+5=0$; **б)** $4x+7y-28=0$, $16x+28y-8=0$; **в)** $\sqrt{2}x+2y+2\sqrt{2}=0$, $x+\sqrt{2}y+2=0$.

5. $A(1,-1, 0)$, $B(2, 1, 2)$, $C(1, 1, 1)$, $S(3,-2, 7)$.

6. $A(1, 2,-6)$, $B(5,-3,-1)$, $C(-13, 6,-7)$.

Вариант 13

1. $A(-5, 1)$, $B(10,-5)$, $C(2, 4)$. **2.** $A(-5,-2)$, $B(10, 3)$, $C(3,-6)$.

3. $B(1, \frac{3\pi}{4})$, $C(3, \frac{11\pi}{12})$.

4. а) $5x+3y+11=0$, $x+4y-5=0$; **б)** $3x+5y+15=0$, $9x+15y+3=0$; **в)** $x+\sqrt{2}y-2=0$, $\sqrt{2}x-y=0$.

5. $A(-1, 1, 1)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(0, 3, 1)$, $S(6,-2, 6)$.

6. $A(7, 1, 6)$, $B(2, 8, 3)$, $C(5,-4, 6)$.

Вариант 14

1. $A(-6, 1)$, $B(6,-3)$, $C(-1, 6)$. **2.** $A(6, 5)$, $B(4,-9)$, $C(-2, 9)$.

3. $B(5, \frac{3\pi}{4})$, $C(3, \frac{13\pi}{12})$.

4. а) $3x+4y+7=0$, $6x+y+7=0$; **б)** $\sqrt{2}x+y+2=0$, $2x+\sqrt{2}y-2=0$; **в)** $4x+2y-6=0$, $6x+3y-9=0$.

5. $A(-1,-1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(2,-1, 2)$, $S(0,-9, 1)$.

6. $A(-2, 1,-3)$, $B(1, 5,-4)$, $C(-2,-7, 2)$.

Вариант 15

1. $A(-6, 2)$, $B(3,-4)$, $C(1, 6)$. **2.** $A(6, 1)$, $B(2,-7)$, $C(5, 4)$.

3. $B(2,-\frac{\pi}{3})$, $C(3,-\frac{\pi}{6})$.

4. а) $3x-2y+1=0$, $6x+9y+6=0$; **б)** $7x-2y+7=0$, $-28x+8y+21=0$; **в)** $\sqrt{3}x+3y=0$, $-x+\sqrt{3}y+3=0$.

5. $A(2,-1, 1)$, $B(3,-1, 2)$, $C(-2,-5, 4)$, $S(4,-8,-5)$.

6. $A(5, 2, 4)$, $B(-6, 2, 3)$, $C(9, 5, 0)$.

Вариант 16

1. $A(1,-2)$, $B(7, 2)$, $C(8,-6)$. **2.** $A(2, 2)$, $B(-6, 6)$, $C(-7,-1)$.

3. $B(1,-\frac{7\pi}{12})$, $C(2,-\frac{11\pi}{12})$.

4. а) $x-3y+4=0$, $2x-y=0$; **б)** $3x-5y+15=0$, $9x-15y+11=0$; **в)** $\sqrt{5}x-5y+3\sqrt{5}=0$, $-x+\sqrt{5}y-3=0$.

5. $A(-2, 0,-3)$, $B(-2,-3,-2)$, $C(0,-3,-1)$, $S(4,-3,-13)$.

6. $A(-4, 0, 1)$, $B(-8, 3,-3)$, $C(7,-3, 6)$.

Вариант 17

1. $A(2, 5)$, $B(5,-1)$, $C(-2,-2)$. **2.** $A(8, 0)$, $B(-4, 4)$, $C(2,-8)$.

3. $B(5,-\frac{\pi}{4})$, $C(3,-\frac{5\pi}{12})$.

4. а) $5x-3y-9=0$, $x-4y-11=0$; **б)** $-4x+5y-8=0$, $2x-2{,}5y+16=0$; **в)** $-4x+5y-20=0$, $5x+4y=0$.

5. $A(6, 1, 1)$, $B(9, 2, 1)$, $C(6, 2, 3)$, $S(4,-11, 11)$.

6. $A(3,-2, 6)$, $B(6, 4,-3)$, $C(-15,-8, 9)$.

Вариант 18

1. $A(4, 0)$, $B(0,-8)$, $C(6,-6)$. **2.** $A(1,-6)$, $B(4,-5)$, $C(-7,-2)$.

3. $B(2, \frac{3\pi}{4})$, $C(5, \frac{11\pi}{12})$.

4. а) $3x-4y+12=0$, $6x-y=0$; **б)** $20x+30y-15=0$, $4x+6y+3=0$; **в)** $4x+6y+3=0$, $3x-2y-1=0$.

5. $A(1, 0,-2)$, $B(2,-3,-2)$, $C(0, 2, 4)$, $S(2, 4,-6)$.

6. $A(-1, 5, 6)$, $B(6, 2, 1)$, $C(-6, 5, 4)$.

Вариант 19

1. $A(0, 3)$, $B(9, 0)$, $C(5, 8)$. **2.** $A(15, –2)$, $B(–3, 10)$, $C(–10,–7)$.

3. $B(1, \frac{5\pi}{12})$, $C(3, \frac{7\pi}{12})$.

4. а) $-2x+10y-11=0$, $2x+3y-7=0$; **б)** $6x-y-7=0$, $-12x+2y-14=0$; **в)** $\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-1=0$, $4x+9y-6=0$.

5. $A(2, 3, 1)$, $B(6, 3, 0)$, $C(2, 0, 2)$, $S(–1, 3, 5)$.

6. $A(–3, 1,–3)$, $B(–2, 3, 4)$, $C(1,3,–5)$.

Вариант 20

1. $A(–2, 0)$, $B(1,–12)$, $C(8,–6)$. **2.** $A(4, 1)$, $B(2,–3)$, $C(–5,–2)$.

3. $B(2, \frac{11\pi}{12})$, $C(3, \frac{3\pi}{4})$.

4. а) $2x+4y-5=0$, $3x+y+9=0$; **б)** $-2x+3y+6=0$, $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-3=0$; **в)** $10x-5y-1{,}8=0$, $x+2y=0$.

5. $A(2,–2, 4)$, $B(8, 7,12)$, $C(2,–1, 3)$, $S(5, 1, 0)$.

6. $A(0, 3, 4)$, $B(0, 2,–7)$, $C(3,–1, 8)$.

Вариант 21

1. $A(–3, 2)$, $B(9,–2)$, $C(–2,–5)$. **2.** $A(4, 1)$, $B(2,–3)$, $C(–5,–2)$.

3. $B(3, \frac{3\pi}{4})$, $C(4, \frac{7\pi}{12})$.

4. а) $8x+2y-7=0$, $3x+5y+8=0$; **б)** $0{,}6x-0{,}8y-1=0$, $-3x+4y-8=0$; **в)** $9x-2y+18=0$, $4{,}5x-y+9=0$.

5. $A(–1,–2, 2)$, $B(–2,–2,–1)$, $C(0, 4, 4)$, $S(–2,– 6, 6)$.

6. $A(–1, 5, 2)$, $B(4,–7,–2)$, $C(–2, 8, 7)$.

Вариант 22

1. $A(1,–7)$, $B(–2, 5)$, $C(–8,–5)$. **2.** $A(5, 2)$, $B(0,–3)$, $C(– 4,–1)$.

3. $B(5, \frac{5\pi}{12})$, $C(3, \frac{3\pi}{4})$.

4. а) $2x+12y-5=0$, $4x+3y+7=0$; **б)** $-3x+8y-10=0$, $0{,}6x-1{,}6y+5=0$; **в)** $-3x+8y-10=0$, $4x+1{,}5y-5=0$.

5. $A(3,–2, 2)$, $B(3,– 6, 1)$, $C(0,–2, 3)$, $S(3, 1, 6)$.

6. $A(11,–12,–2)$, $B(3, 1,–1)$, $C(–3,–5, 2)$.

Вариант 23

1. $A(5,0)$, $B(-10,3)$, $C(1,6)$. **2.** $A(13,3)$, $B(5,-9)$, $C(-12,-2)$.

3. $B(2,\frac{3\pi}{4})$, $C(3,\frac{\pi}{12})$.

4. а) $4x+6y-7=0$, $-x+5y-6=0$; **б)** $2x-4y-9=0$, $-3x+6y-6=0$; **в)** $8x+3y-10=0$, $1{,}6x+0{,}6y-2=0$.

5. $A(-2,-4,0)$, $B(-1,-4,-3)$, $C(-3,0,0)$, $S(-1,-2,2)$.

6. $A(-5,0,5)$, $B(-2,-7,0)$, $C(-5,3,3)$.

Вариант 24

1. $A(0,2)$, $B(9,-1)$, $C(8,6)$. **2.** $A(8,0)$, $B(-4,4)$, $C(2,-8)$.

3. $B(3,\frac{\pi}{12})$, $C(1,-\frac{\pi}{4})$.

4. а) $6x+2y-9=0$, $-x-2y+5=0$; **б)** $\sqrt{2}x+2y-8=0$, $x+\sqrt{2}y=0$; **в)** $6x-8y+12=0$, $-9x+12y-18=0$.

5. $A(-2,0,3)$, $B(-2,3,4)$, $C(4,-2,2)$, $S(-6,-4,4)$.

6. $A(-5,1,1)$, $B(-9,-3,4)$, $C(6,6,-2)$.

Вариант 25

1. $A(0,-2)$, $B(9,4)$, $C(7,-6)$. **2.** $A(9,1)$, $B(-3,5)$, $C(1,-7)$.

3. $B(3,-\frac{3\pi}{4})$, $C(2,\frac{\pi}{12})$.

4. а) $6x+10y-5=0$, $4x+y-1=0$; **б)** $7x+2y-3=0$, $14x+4y-6=0$; **в)** $6x-8y+12=0$, $-9x+12y-10=0$.

5. $A(1,-1,3)$, $B(0,-5,3)$, $C(2,-1,0)$, $S(5,2,3)$.

6. $A(-3,-1,-4)$, $B(-2,-1,7)$, $C(1,-4,-8)$.

Вариант 26

1. $A(4,0)$, $B(0,8)$, $C(-4,1)$. **2.** $A(-7,-4)$, $B(-5,2)$, $C(1,-10)$.

3. $B(1,\frac{\pi}{4})$, $C(2,\frac{11\pi}{12})$.

4. а) $8x+6y+3=0$, $x+6y+2=0$; **б)** $10x-5y-3=0$, $2x-y-8=0$; **в)** $2x-y-8=0$, $x+2y+15=0$.

5. $A(0,-2,2)$, $B(-1,-1,2)$, $C(8,7,8)$, $S(-4,1,5)$.

6. $A(6,-2,1)$, $B(6,-3,-6)$, $C(0,6,9)$.

Вариант 27

1. $A(-3,4)$, $B(0,-2)$, $C(-7,-3)$. **2.** $A(-3,1)$, $B(-1,5)$, $C(5,-7)$.

3. $B(3, \frac{11\pi}{12})$, $C(2, \frac{\pi}{4})$.

4. а) $2x-6y-11=0,$ $2x-y-1=0;$ **б)** $15x-9y-3=0,$ $10x-6y-2=0;$ **в)** $\sqrt{2}x-4y=0,$ $-x+2\sqrt{2}y+7=0.$

5. $A(-8,0,4)$, $B(-7,-2,4)$, $C(-7,-1,0)$, $S(-9,-1,-2)$.

6. $A(-4,6,5)$, $B(8,3,2)$, $C(-16,-9,-1)$.

Вариант 28

1. $A(-6,0)$, $B(4,2)$, $C(7,-2)$. **2.** $A(-2,-1)$, $B(0,5)$, $C(4,-7)$.

3. $C(5, \frac{7\pi}{12})$, $B(2, \frac{5\pi}{6})$.

4. а) $3x+2y+5=0,$ $5x-y+5=0;$ **б)** $4x+7y-28=0,$ $8x+14y-7=0;$ **в)** $x+\sqrt{2}y-2=0,$ $\sqrt{2}x-y=0.$

5. $A(0,-6,1)$, $B(-3,-4,3)$, $C(0,-5,3)$, $S(4,-6,-1)$.

6. $A(-2,0,2)$, $B(-5,4,-1)$, $C(7,-2,2)$.

Вариант 29

1. $A(8,0)$, $B(0,12)$, $C(-2,-2)$. **2.** $A(-6,-3)$, $B(-2,5)$, $C(3,-10)$.

3. $B(1, \frac{5\pi}{12})$, $C(3, \frac{7\pi}{12})$.

4. а) $2x+4y+5=0,$ $3x+y+9=0;$ **б)** $-2x+3y+6=0,$ $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-2=0;$ **в)** $9x-2y+18=0,$ $4{,}5x-y+9=0.$

5. $A(4,-8,2)$, $B(4,-7,0)$, $C(0,-7,1)$, $S(-2,-9,1)$.

6. $A(3,-8,1)$, $B(2,0,2)$, $C(-4,-6,-7)$.

Вариант 30

1. $A(0,-4)$, $B(-6,2)$, $C(0,4)$. **2.** $A(9,2)$, $B(5,-6)$, $C(-9,-4)$.

3. $C(5, \frac{7\pi}{12})$, $B(2, \frac{5\pi}{6})$.

4. а) $-2x+10y-11=0,$ $2x+3y-7=0;$ **б)** $6x-y-7=0,$ $-12x+2y-14=0;$ **в)** $\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-1=0,$ $4x+9y-6=0.$

5. $A(1,3,-6)$, $B(3,0,-4)$, $C(3,3,-5)$, $S(-1,7,-6)$.

6. $A(3,1,4)$, $B(2,1,-7)$, $C(-1,4,8)$.

Решение нулевого варианта

Прежде чем решать задачи 1 и 2, следует повторить параграф 8 «Уравнение прямой на плоскости».

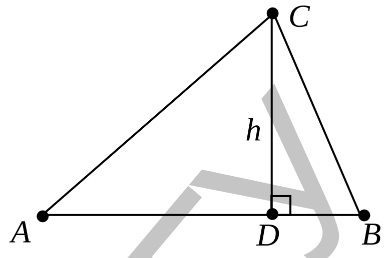

рис. 14.1

1. $A(-1,3)$, $B(11,0)$, $C(9,9)$.

Решение. а) Находим угловой коэффициент прямой AB:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{11-(-1)}=-\frac{1}{4}.$$

Составляем уравнение прямой AB:

$$y-y_A=k_{AB}(x-x_A) \;\Leftrightarrow\; y-3=-\frac{1}{4}(x-(-1)) \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}.$$

Прямые AB и CD перпендикулярны. Поэтому $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=4$. Составляем уравнение прямой CD:

$$y-y_C=k_{CD}(x-x_C) \Leftrightarrow\; y-9=4(x-9) \;\Leftrightarrow\; y=4x-27.$$

Точка D является общей точкой для прямых AB и CD. Значит, её координаты должны удовлетворять одновременно уравнениям этих двух прямых. Поэтому для нахождения координат точки D мы объединяем уравнения прямых AB и CD в одну систему и решаем её.

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}, \\ y=4x-27. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-27=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}, \\ y=4x-27. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7, \\ y=1. \end{cases} \Rightarrow D(7,1).$$

б) Перепишем уравнение прямой AB в общем виде:

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4} \;\Leftrightarrow\; 4y=-x+11 \;\Leftrightarrow\; x+4y-11=0.$$

Применим формулу (10.2) к этому уравнению и к точке C:

$$h=\frac{|9+4\cdot 9-11|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{|34|}{\sqrt{17}}=2\sqrt{17}.$$

Ответ: а) AB: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}$, CD: $y=4x-27$, $D(7,1)$; б) $2\sqrt{17}$.

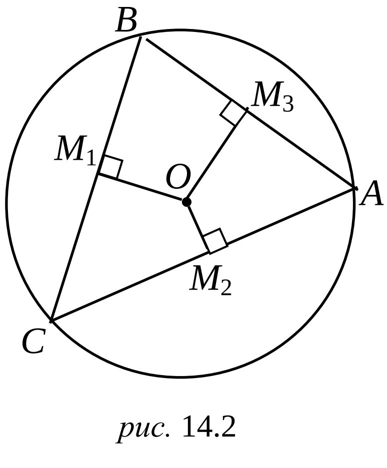

рис. 14.2

2. $A(1,-6)$, $B(-3,0)$, $C(6,9)$.

Решение. Для того чтобы составить уравнение окружности, нам необходимо знать её радиус R и координаты центра $O(a,b)$. Тогда уравнение выглядит так:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Центр окружности, описанной вокруг треугольника, находится на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника. Находим координаты середин $M_1(x_1, y_1)$ и $M_3(x_3, y_3)$ сторон BC и AB:

$$x_1 = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2},\ y_1 = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{0+9}{2} = \frac{9}{2},\ M_1\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

Аналогично находим $M_3(-1,-3)$.

Пусть l_3 – прямая, являющаяся серединным перпендикуляром к AB, а l_1 – к BC. Тогда $\vec{\mathbf{n}}_3 = \overrightarrow{AB}\,(-4, 6) \perp l_3$ и l_3 проходит через M_3. Поэтому её уравнение:

$$-4(x+1) + 6(y+3) = 0.$$

Аналогично $\vec{\mathbf{n}}_1 = \overrightarrow{BC}(9, 9) \perp l_3$. Поэтому уравнение l_1:

$$9\left(x - \frac{3}{2}\right) + 9\left(y - \frac{9}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 6 = 0.$$

Имеем $O = l_1 \cap l_3$. Поэтому, чтобы найти координаты точки O, необходимо решить совместно уравнения l_1 и l_3:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0, \\ -4x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению первое, умноженное на 4:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0, \\ 10y - 10 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $y = 1$, $x = 5$, $O(5, 1)$.

Радиус равен расстоянию от точки O до любой из вершин треугольника. Находим:

$$R = |\overrightarrow{AO}| = \sqrt{(1-5)^2 + (-6-1)^2} = \sqrt{65}.$$

Значит, уравнение окружности:

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 65.$$

Ответ: $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 65$.

3. Прежде чем решать задачу, следует повторить параграф 7 «Полярные координаты».

$B\left(6, \frac{5\pi}{4}\right)$, $C\left(4, \frac{7\pi}{12}\right)$.

Решение. а) Нарисуем чертёж к задаче, построив точки B и C по их полярным координатам (**не следует перерисовывать этот чертёж точка в точку: в вашем варианте свои данные!**).

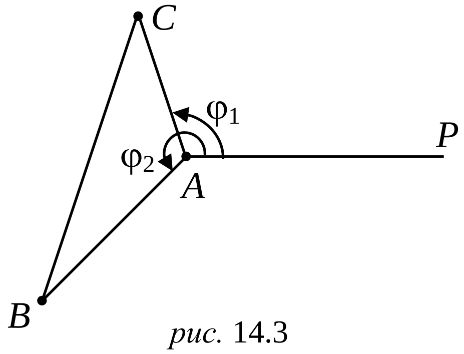

рис. 14.3

б) Из чертежа и геометрического смысла полярных координат находим, что

$$AB = 6, \quad AC = 4, \qquad \angle BAC = |\varphi_2 - \varphi_1| = \frac{5\pi}{4} - \frac{7\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

в) По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC = 36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 76,$$

$$BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

Ответ: б) $6\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{19}$.

4. Прежде, чем решать эту задачу, следует повторить параграф 9 «Взаимное расположение прямых на плоскости».

а) l_1: $2x + y + 5 = 0$, $\quad l_2$: $x - 7y + 11 = 0$.

Решение. Если прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то

$$l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}; \quad l_1 = l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

В нашем случае $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{7}$, поэтому прямые не параллельны и не совпадают. Значит, они пересекаются. Угол между прямыми вычисляется по формуле $\cos\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2|}{|\vec{\mathbf{n}}_1||\vec{\mathbf{n}}_2|}$, где $\vec{\mathbf{n}}_1$ и $\vec{\mathbf{n}}_2$ – векторы нормали к этим прямым. В нашем случае

$$\vec{\mathbf{n}}_1(2, 1),\ \vec{\mathbf{n}}_2(1, -7),\ \vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-7) = -5;$$

$$|\vec{\mathbf{n}}_1| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \ |\vec{\mathbf{n}}_2| = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}.$$

Значит, $\cos\alpha = \frac{|-5|}{\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

б) l_1: $\sqrt{2}x - 2y + 8 = 0$,
l_2: $2x - 2\sqrt{2}y - 15 = 0$.

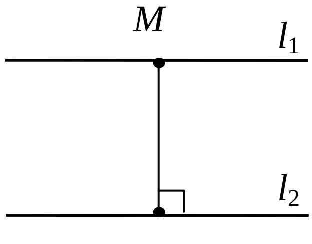

рис. 14.4

Решение. Проверяем прямые на параллельность или совпадение:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-2}{-2\sqrt{2}} \neq \frac{8}{-15}$$

Значит, $l_1 || l_2$. Расстояние между прямыми есть длина их общего перпендикуляра. Расстояние от точки $A(x, y)$ до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, находится по формуле

$$h = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Выберем точку $M \in l_1$. Для этого надо подобрать любые две координаты, удовлетворяющие уравнению l_1. В нашем случае, самый простой выбор: $A(0, 4)$. Расстояние от A до l_2 и будет расстоянием между l_1 и l_2:

$$h = \frac{|2\cdot 0 - 2\sqrt{2}\cdot 4 - 15|}{\sqrt{2^2 + (-2\sqrt{2})^2}} = \frac{8\sqrt{2} + 15}{2\sqrt{3}}.$$

***Ответ*:** а) пересекаются, $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$; б) параллельны, $h = \frac{8\sqrt{2} + 15}{2\sqrt{3}}$.

5. Прежде чем решать задачу, следует повторить параграфы 11–13 «Скалярное произведение», «Векторное произведение», «Смешанное произведение».

$A(4, 0, 1)$, $B(5,-1, 1)$, $C(4, 7,-5)$, $S(7, 5, 2)$.

Решение. а) Находим координаты трёх векторов, лежащих на рёбрах пирамиды и исходящих из одной вершины:

$$\overrightarrow{AB}(1,-1, 0),\ \overrightarrow{AC}(0, 7,-6),\ \overrightarrow{AS}(3, 5, 1).$$

Модуль смешанного произведения этих векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Объём же пирамиды составляет 1/6 от объёма параллелепипеда:

$$V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS}|.$$

Смешанное произведение можно вычислить так:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

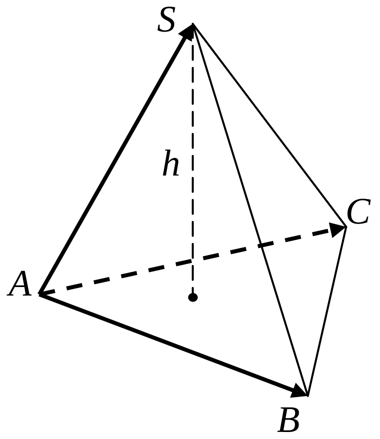

рис. 14.5

Для вычисления площади основания нам понадобится векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Поэтому проще воспользоваться определением смешанного произведения: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS} = (\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AS}$. При этом вероятность арифметической ошибки будет намного меньше. Рекомендуем для проверки правильности вычислений использовать оба способа.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}} = 6\vec{\mathbf{i}} + 6\vec{\mathbf{j}} + 7\vec{\mathbf{k}}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{36+36+49} = \frac{11}{2}.$$

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AS} = 6\cdot 3 + 6\cdot 5 + 7\cdot 1 = 55. \qquad V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AS}| = \frac{55}{6}.$$

С другой стороны, $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}\cdot h$. Отсюда

$$h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{55/2}{11/2} = 5.$$

б) Согласно определению векторного произведения вектор $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ перпендикулярен $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$. Поэтому вектор $\vec{\mathbf{h}} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ будет перпендикулярен основанию пирамиды; $\vec{\mathbf{h}}\,(6, 6, 7)$.

Угол между векторами $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$ ищется по формуле

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = \frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Угол $\angle BAC$ – это есть угол между векторами $\overrightarrow{AB}(1, -1, 0)$ и $\overrightarrow{AC}(0, 7, -6)$.

Поэтому $\cos\angle BAC = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{1\cdot 0 + (-1)\cdot 7 + 0\cdot(-6)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}\,\sqrt{0^2 + 7^2 + (-6)^2}} = \dfrac{-7}{\sqrt{2}\,\sqrt{85}}.$

$$\angle BAC = \arccos\frac{-7}{\sqrt{170}} = \pi - \arccos\frac{7}{\sqrt{170}}$$

в) Построим изображение данной пирамиды в декартовой системе координат $Oxyz$.

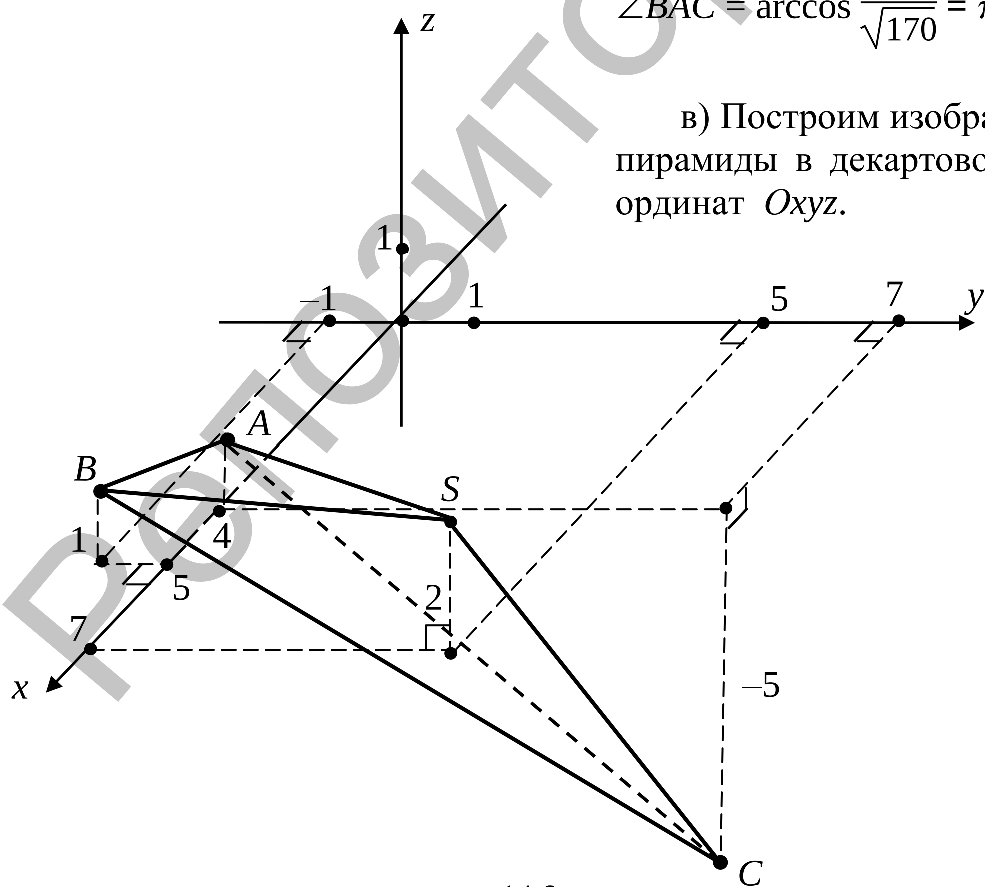

рис. 14.6

г) Мы уже знаем вектор нормали к плоскости основания: $\vec{\mathbf{h}}$ (6, 6, 7). Поэтому уравнение плоскости можно составить так же, как в следующей задаче. Но желательно продемонстрировать знание ещё одного способа составления уравнения плоскости. Плоскость, проходящая через точку $A(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум данным векторам $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$ задаётся уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляем в это уравнение координаты точки A и векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+0 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель по первой строке:

$$6(x-4)+6y+7(z-1)=0 \;\Leftrightarrow\; 6x+6y+7z-31=0$$

(желательно сделать проверку, подставив в это уравнение координаты точек A, B, C). Тогда высота

$$h=\frac{|6\cdot 7+6\cdot 5+7\cdot 2-31|}{\sqrt{6^2+6^2+7^2}}=5,$$

что совпадает с ранее найденным значением высоты.

Ответ: а) $S_{\Delta ABC}=\frac{11}{2}$, $V=\frac{55}{6}$, $h=5$; б) $\angle BAC=\pi-\arccos\frac{7}{\sqrt{170}}$, $\vec{\mathbf{h}}(6,6,7)$;
г) $6x+6y+7z-31=0$, $h=5$.

6. Прежде чем решать эту задачу, следует повторить параграфы «Уравнение плоскости», «Уравнение прямой в пространстве».

$A(9, 5, 1)$, $B(-3, 8, 4)$, $C(9,-13,-8)$.

Решение. а) Пусть π – это плоскость, которая проходит через точку A перпендикулярно стороне BC. Тогда этой плоскости принадлежит высота AD. Поэтому точку можно найти так: $D=\pi\cap BC$.

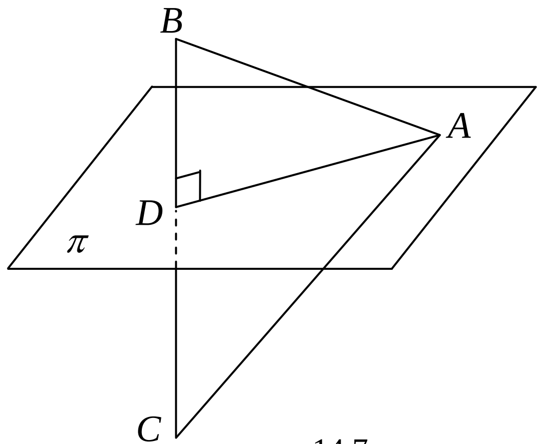

рис. 14.7

Для плоскости π вектор $\overrightarrow{BC}$ служит вектором нормали. Находим $\overrightarrow{BC}(12,-21,-12)$. Координаты этого вектора нацело делятся на 3. Поэтому в качестве вектора нормали к π можем взять $\vec{\mathbf{n}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\vec{\mathbf{n}}(4,-7,-4)$. Уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ перпендикулярно вектору $\vec{\mathbf{n}}(a, b, c)$, имеет вид:

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0.$$

В нашем случае:

$$4(x - 9) - 7(y - 5) - 4(z - 1) = 0, \qquad 4x - 7y - 4z + 3 = 0.$$

Составим уравнение прямой BC. Для неё вектор $\vec{\mathbf{n}}$ будет направляющим:

$$BC: \begin{cases} x = -3 + 4t, \\ y = \ \ 8 - 7t, \\ z = \ \ 4 - 4t. \end{cases} \qquad (*)$$

Поскольку $D = \pi \cap BC$, для нахождения координат точки D нужно решить совместно уравнения π и BC. Подставляем x, y, z из уравнения BC в уравнение π:

$$4(-3 + 4t) - 7(8 - 7t) - 4(4 - 4t) + 3 = 0,$$
$$-12 + 16t - 56 + 49t - 16 + 16t + 3 = 0,$$
$$81t = 81, \quad t = 1.$$

Подставляем это t в уравнение прямой BC и находим $D(1, 1, 0)$.

б) Теперь мы можем составить уравнение прямой AD по точке $A(9, 5, 1)$ и направляющему вектору $\overrightarrow{DA}(8, 4, 1)$:

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}, \qquad \frac{x - 1}{8} = \frac{y - 5}{4} = \frac{z - 1}{1}.$$

в) Вычисляем по формуле расстояния между двумя точками:

$$h = AD = \sqrt{(1-9)^2 + (1-5)^2 + (0-1)^2} = 9,$$

или

$$h = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = 9.$$

г) Находим площадь треугольника по формуле $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}| \cdot h$:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12^2 + (-21)^2 + (-12)^2} \cdot 9 = \frac{243}{2}.$$

Проверим правильность вычислений по формуле $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Сначала находим сам вектор $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, а потом его модуль.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -12 & 3 & 3 \\ 0 & -18 & -9 \end{vmatrix} = -27\cdot\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -27(-\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{j}} - 8\vec{\mathbf{k}})$$

(в процессе вычисления мы воспользовались свойством определителя: общий множитель элементов одной строки можно выносить за знак определителя),

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 27\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-8)^2} = \frac{243}{2}.$$

***Ответ*:** а) $D(1,\ 1,\ 0)$; б) $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z-1}{1}$; в) $h = 9$; г) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{243}{2}$.

6*. Точку D можно найти, как ближайшую к A точку прямой BC, используя методы дифференциального исчисления. Пусть $M(t)$ – произвольная точка прямой BC; её координаты определяются системой $(*)$:

$$M(-3+4t,\ 8-7t,\ 4-4t).$$

Находим квадрат расстояния от точки A до $M(t)$ по формуле расстояния между двумя точками:

$$h^2(t) = (-3+4t)^2 + (8-7t)^2 + (4-4t)^2 = 81t^2 - 162t + 162.$$

Затем ищем наименьшее значение функции $h^2(t)$ с помощью производной:

$$(h^2(t))' = 162t - 162,$$

$$162t - 162 = 0.$$

Получаем, что минимум достигается при $t = 1$. Подставляем это значение t в уравнение прямой BC и находим, что точка $D(1,\ 1,\ 0)$ является ближайшей к точке A на прямой BC.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1975.
2. Дадаян, А.А. Алгебра и геометрия / А.А. Дадаян, В.А. Дударенко. – Минск: Вышэйшая школа, 1989.
3. Тышкевич, Р.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – Минск: Вышэйшая школа, 1976.
4. Погорелов, А.В. Геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1984.
5. Феденко, А.С. Алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие: в 2 ч. / А.С. Феденко, М.В. Милованов, М.М. Толкачов, Р.И. Тышкевич. – Минск: Вышэйшая школа, 1987.
6. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. – М.: Изд-во МГУ, 1969.
7. Кононов, С.Г. Аналитическая геометрия: учебное пособие / С.Г. Кононов. – Минск: БГУ, 2014.
8. Берёзкина, Л.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учебное пособие / Л.Л. Берёзкина. – Минск: РИВШ, 2012.
9. Подоксёнов, М.Н. Аналитическая геометрия. Курс лекций с примерами решения задач / М.Н. Подоксёнов. – Витебск: Изд-во ВГУ, 2007.
10. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.С. Феденко [и др.]; под общ. ред. А.С. Феденко. – Минск: Изд-во Университетское, 1989, [1999 – 2-е изд.].

Учебное издание

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич
ПРОХОЖИЙ Сергей Александрович

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать . .2016. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,91. Уч.-изд. л. 2,21. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.