Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Ю.В. Трубников
М.Н. Подоксенов

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2015

УДК 512.64(075.8)+514.12(075.8)
ББК 22.143я73+22.151.54я73
Т77

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 29.06.2015 г.

Авторы: профессор кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук **Ю.В. Трубников;** заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксенов**

Р е ц е н з е н т:
профессор кафедры автоматизации технологических процессов и производств УО «ВГТУ», доктор физико-математических наук
Л.В. Корниенко

Трубников, Ю.В.

Т77 Квадратичные формы. Приведение уравнения кривой и поверхности второго порядка к каноническому виду : методические рекомендации / Ю.В. Трубников, М.Н. Подоксенов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2015. – 32 с.

Методические рекомендации подготовлены в соответствии с учебными программами по курсам: «Аналитическая геометрия и преобразования плоскости» для студентов II курса математического факультета, обучающихся по специальности «Математика и информатика», и «Прикладная математика» для студентов I курса математического факультета, обучающихся по специальности «Программное обеспечение информационных технологий». Излагаются примеры решения задач и задания для самостоятельного решения. Данные задания также могут быть использованы для обеспечения самостоятельной работы студентов математического факультета.

УДК 512.64(075.8)+514.12(075.8)
ББК 22.143я73+22.151.54я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ …………………………………………………………………….. 4

§1. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ……………………...……...……. 5

§ 2. САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР …………………………… 8

§ 3. БИЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА …… 13

§ 4. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ …………………………………………………… 14

§ 5. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВОЙ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ………... 17

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ……….....…… 29

ПРИЛОЖЕНИЯ ……………………………………………………… 31

ЛИТЕРАТУРА ……………………………………………………….. 32

ВВЕДЕНИЕ

В данных методических рекомендациях излагаются примеры решения задач на приведение квадратичной формы к диагональному виду и приведение уравнения кривой и поверхности второго порядка к каноническому виду. Кратко дается теоретический материал по линейной алгебре: собственные числа и собственные векторы оператора, самосопряжённый оператор, билинейные функции и квадратичные формы. Этот теоретический материал применяется для приведения уравнений кривых и поверхностей II порядка к каноническому виду. Предлагаются примеры решения задач и справочные материалы: классификация кривых и поверхностей второго порядка. В завершение приводится список задач для самостоятельного решения или решения на практических занятиях. Данное издание рекомендуется использовать для организации самостоятельной работы студентов математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Компьютерная безопасность» и «Программное обеспечение информационных технологий», а также для проведения практических занятий.

§ 1. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

***Определение* 1.** Пусть V – векторное пространство, а $\mathcal{A}: V \to V$ – линейный оператор, действующий в нем. Число λ называется *собственным числом или собственным значением оператора* $\mathcal{A}$, если существует ненулевой вектор $\mathbf{u}$, такой что

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \tag{1}$$

В этом случае $\mathbf{u}$ называется *собственным вектором оператора* $\mathcal{A}$, *соответствующим числу* λ.

Мы рассмотрим только операторы, действующие в трехмерном евклидовом векторном пространстве V^3, элементами которого являются векторы из геометрического пространства. Поэтому векторы будут обозначаться со стрелочкой. При этом всё сказанное будет верно с небольшими изменениями и для операторов, действующих в V^2 (элементами которого являются векторы на плоскости). Пусть $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ – ортонормированный базис пространства V^3. Матрицу оператора $\mathcal{A}$ относительно этого базиса обозначим $\mathbf{A}$. Пусть (x, y, z) – координаты вектора $\vec{\mathbf{u}}$ относительно данного базиса. Тогда равенство (1) можно переписать в координатах:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Если перемножить матрицы и перенести все члены в левую часть, получим систему однородных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + (a_{22}-\lambda)y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}-\lambda)z = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Как известно, она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{3}$$

Раскрывая определитель, мы получим кубическое уравнение относительно λ, которое *называется характеристическим уравнением оператора* $\mathcal{A}$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни этого уравнения.

Подставим λ_1 в систему (2) и найдем ненулевое решение (x_1, y_1, z_1). Тогда $\vec{\mathbf{u}}_1(x_1, y_1, z_1)$ есть собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, соответствующий числу λ_1. Затем, подставляя по очереди λ_2 и λ_3, находим соответствующие им собственные векторы $\vec{\mathbf{u}}_2(x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{\mathbf{u}}_3(x_3, y_3, z_3)$. При этом каждый из векторов определяется с точностью до умножения на ненулевую постоянную, т.е. вектор $k\vec{\mathbf{u}}_i(x_i, y_i, z_i)$ будет решением системы (2) для $\lambda = \lambda_i$ при любом $k \neq 0$. Но нам достаточно иметь хотя бы одно решение для каждого из собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Кубическое уравнение (3) обязательно имеет хотя бы одно действительное решение λ_1, а λ_2 и λ_3 могут быть комплексными (при этом они обязательно будут комплексно сопряжены друг к другу: $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$). В этом случае оператор $\mathcal{A}$ будет иметь только один (с точностью до пропорциональности) действительный собственный вектор $\vec{\mathbf{u}}_1(x_1, y_1, z_1)$.

Напомним, что если a, b, c – корни кубического уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

то его можно преобразовать к виду

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0 .$$

Если же кубическое уравнение имеет только два действительных корня a и b, то его можно преобразовать к виду

$$(x-a)(x-b)^2 = 0 \qquad (\text{или } (x-a)^2(x-b) = 0).$$

В этом случае говорят, что корень b (или a) имеет кратность 2. Если кубическое уравнение имеет только один корень a, то его можно преобразовать к виду

$$(x-a)^3 = 0.$$

Тогда говорят, что корень a имеет кратность 3.

Уравнение (3) тоже может иметь кратные корни. Пусть, например, корень λ_1 имеет кратность 1, а корень λ_2 – кратность 2. При подстановке λ_2 в (2) может получится система уравнений, имеющая ранг 2. Тогда у оператора $\mathcal{A}$ будет только два линейно независимых собственных вектора $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$. При подстановке λ_2 в (2) может получиться система линейных уравнений, имеющая ранг 1. Тогда мы можем найти два неколлинеарных собственных вектора $\vec{\mathbf{u}}_2$ и $\vec{\mathbf{u}}_3$, координаты которых удовлетворяют этой системе. Тогда любой вектор $\vec{\mathbf{u}}$, компланарный с $\vec{\mathbf{u}}_2$ и $\vec{\mathbf{u}}_3$, будет собственным вектором для оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному числу λ_2. Мы можем записать, что оператор $\mathcal{A}$ имеет собственные векторы

$$\vec{\mathbf{u}}_1(x_1, y_1, z_1),$$

$$\vec{\mathbf{u}} = k\vec{\mathbf{u}}_2 + l\vec{\mathbf{u}}_3 = (kx_2 + lx_3,\ ky_2 + ly_3,\ kz_2 + lz_3),\ \ k, l \in \boldsymbol{R}.$$

Пусть уравнение (3) имеет один трехкратный корень λ_1. Тогда при подстановке его в (2) можем получить систему уравнений ранга 2, 1 или 0. В первом случае оператор будет иметь один (с точностью до пропорциональности) собственный вектор $\vec{\mathbf{u}}_1$, а во втором – бесконечно много собственных векторов, и все они будут иметь вид

$$\vec{\mathbf{u}} = k\vec{\mathbf{u}}_2 + l\vec{\mathbf{u}}_3,\ \ k, l \in \boldsymbol{R},$$

где $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$ – два произвольных неколлинеарных вектора, координаты которых удовлетворяют системе (2). Случай, когда при подстановке трехкратного корня система (2) будет иметь ранг 0, возможен лишь тогда, когда матрица $\mathbf{A}$ пропорциональна единичной: $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{E}$. Тогда любой вектор для оператора $\mathcal{A}$ будет собственным.

Найденные собственные числа и собственные векторы для оператора $\mathcal{A}$ называются также собственными числами и собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$. Однако когда речь идет об операторе, надо помнить, что его матрица зависит от выбора базиса в пространстве V^3 и, соответственно, собственные векторы относительно другого базиса будут иметь другие координаты. Собственные числа оператора не зависят от выбора базиса и, поэтому, коэффициенты характеристического многочлена тоже не зависят от этого.

***Пример* 1.** *Найти собственные числа и собственные векторы оператора* $\mathcal{A}: V^3 \to V^3$, *если относительно заданного в пространстве* V^3 *базиса он определяется матрицей*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Составим матрицу $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Найдем собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ из уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Вычислив определитель, получим уравнение

$$(-8-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0.$$

Отсюда находим корни $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$.

2. Подставим в матрицу (4) значение $\lambda_1 = -8$:

$$\mathbf{A} + 8\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Составим однородную систему уравнений по этой матрице:

$$\begin{cases} 9y + 3z = 0, \\ 2y + 10z = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим единственное решение $y=z=0$. Получается, что в качестве вектора $\vec{\mathbf{u}}_1$ нужно взять нулевой? Нет! У нас отсутствует какое-либо ограничение на переменную x. Поэтому можем взять $\vec{\mathbf{u}}_1(1, 0, 0)$.

3. Подставим в матрицу (4) значение $\lambda_2 = 4$ и по получившейся матрице составим однородную систему линейных уравнений:

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} -12x = 0, \\ -3y + 3z = 0, \\ 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

Второе и третье уравнения пропорциональны. Поэтому одно из них можем вычеркнуть. Из оставшихся уравнений находим, что $x=0$, $y=z$. Поэтому в качестве второго собственного вектора можем взять $\vec{\mathbf{u}}_2(0, 1, 1)$.

4. Для $\lambda_3 = -1$ аналогично находим $\vec{\mathbf{u}}_3(0, 1, 1)$.

***Ответ*:** $\lambda_1 = -8$, $\vec{\mathbf{u}}_1(1, 0, 0)$;
$\lambda_2 = 4$, $\vec{\mathbf{u}}_2(0, 1, 1)$;
$\lambda_3 = -1$, $\vec{\mathbf{u}}_3(0, -3, 2)$.

Во второй главе будет разобран еще один пример решения подобной задачи, причем, в этом примере одно из собственных чисел будет иметь кратность 2.

§ 2. САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

***Определение* 2.** Пусть E^3 – евклидово векторное пространство. Оператор $\mathcal{B}: E^3 \to E^3$ называется *сопряженным к оператору* $\mathcal{A}: E^3 \to E^3$, если для любых векторов $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in V^3$ выполнено

$$(\mathcal{A}\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot (\mathcal{B}\vec{\mathbf{v}}).$$

(точка обозначает скалярное произведение векторов). Тогда обозначаем $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$. Оператор $\mathcal{A}$ *называется самосопряженным*, если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

Если $\mathbf{A}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ относительно ортонормированного базиса ($\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$), то матрицей оператора $\mathcal{A}^*$ относительно того же базиса будет $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Поэтому для матрицы самосопряженного оператора относительно ортонормированного базиса должно быть выполнено $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$. Значит, *матрица самосопряжённого оператора является симметрической* (относительно ОНБ).

Оказывается, что *собственные числа самосопряженного оператора являются действительными, а собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны друг другу*. Поэтому характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

для самосопряжённого оператора (т.е. для симметрической матрицы) всегда имеет три действительных корня, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. При этом мы в любом случае можем найти 3 линейно независимых собственных вектора оператора $\mathcal{A}$ (это будет показано на примере). Это означает, что существует базис пространства V^3, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Пусть $(\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3)$ – базис в V^3, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, и λ_1, λ_2, λ_3 – соответствующие собственные числа. Тогда имеем

$$\begin{cases} \mathcal{A}\vec{\mathbf{u}}_1 = \lambda_1\vec{\mathbf{u}}_1 \\ \mathcal{A}\vec{\mathbf{u}}_2 = \qquad \lambda_2\vec{\mathbf{u}}_2 \\ \mathcal{A}\vec{\mathbf{u}}_3 = \qquad\qquad \lambda_3\vec{\mathbf{u}}_3. \end{cases}$$

Это означает, что относительно базиса $(\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3)$ оператор $\mathcal{A}$ имеет диагональную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Поскольку векторы $k\vec{\mathbf{u}}_1$, $l\vec{\mathbf{u}}_2$, $m\vec{\mathbf{u}}_3$ тоже будут собственными для любых ненулевых $k, l, m \in \boldsymbol{R}$, мы можем в качестве базисных выбрать единичные векторы

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \frac{\vec{\mathbf{u}}_1}{|\vec{\mathbf{u}}_1|},\ \ \vec{\mathbf{e}}_2 = \frac{\vec{\mathbf{u}}_2}{|\vec{\mathbf{u}}_2|},\ \ \vec{\mathbf{e}}_3 = \frac{\vec{\mathbf{u}}_3}{|\vec{\mathbf{u}}_3|}.$$

Тогда базис $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ будет ортонормированным.

***Пример* 2.** *Самосопряженный оператор* $\mathcal{A}\colon V^3 \to V^3$ *действует по формулам*:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\vec{\mathbf{i}} = \qquad 2\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}, \\ \mathcal{A}\vec{\mathbf{j}} = 2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}, \\ \mathcal{A}\vec{\mathbf{k}} = -\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}}. \end{cases}$$

Путём выбора нового ортонормированного базиса в пространстве V^3, *привести матрицу оператора* $\mathcal{A}$ *к диагональному виду*.

Решение. 1 шаг. Составим матрицу $\mathbf{A}$ оператора $\mathcal{A}$ относительно базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ и матрицу $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

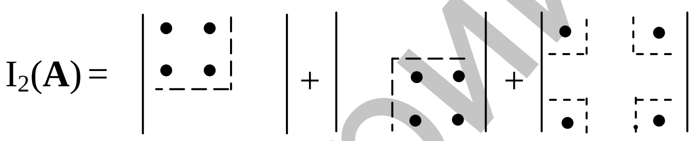
(матрица оператора выписывается по принципу: строчка – в столбец; но в нашем случае матрица симметрическая). Определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ можно вычислить непосредственно, но зачастую это приводит к очень длительным вычислениям. Поэтому удобнее использовать следующую формулу:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3 + (\operatorname{tr}\mathbf{A})\lambda^2 - \mathrm{I}_2(\mathbf{A})\lambda + \det\mathbf{A}. \tag{7}$$

Здесь $\operatorname{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ – след матрицы $\mathbf{A}$ (т.е. сумма её диагональных элементов), а

$$\mathrm{I}_2(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

сумма диагональных миноров второго порядка матрицы $\mathbf{A}$. Схематично последнюю формулу можно изобразить так:



В нашем случае находим $\operatorname{tr}\mathbf{A} = 0 + 3 + 0 = 3$, $\det\mathbf{A} = 5$,

$$\mathrm{I}_2(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

Получаем характеристическое уравнение

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0. \tag{8}$$

Один из корней мы можем найти подбором: $\lambda_1 = -1$. Затем делим характеристический многочлен на $\lambda - \lambda_1$:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 & \lambda + 1 \\ \cline{2-2} -\ \ \lambda^3 + \lambda^2 \qquad\qquad & \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ \cline{1-1} -4\lambda^2 - 9\lambda \quad\ & \\ -\ \ -4\lambda^2 - 4\lambda \quad\ & \\ \cline{1-1} -5\lambda - 5 & \\ -\ \ -5\lambda - 5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Значит уравнение (8) эквивалентно следующему:

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0. \tag{9}$$

Теперь находим оставшиеся корни: $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$. Мы видим, что у нас есть кратный корень: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

2 шаг. Найдём собственный вектор $\vec{\mathbf{u}}_3$, соответствующий собственному числу $\lambda_3 = 5$. Для этого составляем матрицу $\mathbf{A}-5\mathbf{E}$ и по ней составляем систему линейных однородных уравнений:

$$\mathbf{A}-5\mathbf{E}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & -2 & -5\end{pmatrix}, \qquad \begin{cases}-5x+2y-z=0,\\ 2x-2y-2z=0,\\ -x-2y-5z=0.\end{cases}$$

В данном конкретном случае удобно избавиться от неизвестного y, для чего следует второе уравнение прибавить к первому и вычесть его же из третьего уравнения:

$$\begin{cases}-3x-3z=0,\\ 2x-2y-2z=0,\\ -3x-3z=0.\end{cases}$$

Первое и третье уравнения получились одинаковыми, поэтому третье уравнение можем вычеркнуть, и можем первое уравнение разделить на –3, а второе разделить его на 2:

$$\begin{cases}x+z=0,\\ x-y-z=0.\end{cases}$$

Одну из неизвестных мы можем перенести вправо и придать ей произвольное ненулевое значение (пусть это будет $z=-1$). Затем найдем значения оставшихся неизвестных.

$$\begin{cases}x=1,\\ x-y=-1,\\ z=-1.\end{cases} \qquad \begin{cases}x=1,\\ y=2,\\ z=-1.\end{cases}$$

Итак, мы нашли $\vec{\mathbf{u}}_3(1,2,-1)$.

3 шаг. Найдем собственные векторы для $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Наша задача: найти для каждого из чисел λ_1 и λ_2 в отдельности свой собственный вектор $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$, так чтобы эти векторы были перпендикулярны друг другу.

$$\mathbf{A}-(-1)\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{cases}x+2y-z=0,\\ 2x+4y-2z=0,\\ -x-2y+z=0.\end{cases}$$

Получившаяся система уравнений имеет ранг 1, т.е. все уравнения системы пропорциональны, поэтому второе и третье уравнения можем вычеркнуть. *В случае самосопряженного оператора система уравнений, соответствующая двукратному корню всегда имеет ранг* 1. Итак, у нас есть только одно уравнение:

$$x+2y-z=0. \qquad (10)$$

Подбором мы можем найти $\vec{\mathbf{u}}_1(1,\ 0,\ 1)$, $\vec{\mathbf{u}}_2(0,\ 1,\ 2)$. Тогда общий вид всех собственных векторов, соответствующих $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, будет

$$\vec{\mathbf{u}} = k\vec{\mathbf{u}}_1 + l\vec{\mathbf{u}}_2 = (k,\ l,\ k+2l),\ \ k, l \in \boldsymbol{R}. \tag{11}$$

Если бы задача формулировалась так же, как в примере 1 из §10 приложения, то на этом следовало бы закончить. Но для самосопряженного оператора требуется еще найти ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов. Поэтому повторимся ещё раз: нам надо найти для каждого из чисел λ_1 и λ_2 в отдельности свой собственный вектор, при этом $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$ должны быть перпендикулярны друг другу. Поэтому мы поступаем так. Только вектор $\vec{\mathbf{u}}_1(1,\ 0,\ 1)$ мы находим подбором. Неизвестный вектор $\vec{\mathbf{u}}_2(x,\ y,\ z)$ должен удовлетворять условию (9.6), но *дополнительно должно выполняться условие ортогональности*:

$$\vec{\mathbf{u}}_1(1, 0, 1) \cdot \vec{\mathbf{u}}_2(x, y, z) = 0.$$

Итак, $\vec{\mathbf{u}}_2(x, y, z)$ мы находим из системы

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0\,, \\ \vec{\mathbf{u}}_1(1, 0, 1) \cdot \vec{\mathbf{u}}_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Второе условие в координатах имеет вид $x + z = 0$. Поэтому мы имеем систему для нахождения $\vec{\mathbf{u}}_2$:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ x \quad + \quad z = 0. \end{cases}$$

Находим $y = -x$, $z = -x$. Поэтому можем взять $\vec{\mathbf{u}}_2(1,-1,-1)$.

Теперь нормируем найденные векторы, т.е мы найдём единичные векторы, коллинеарные найденным собственным векторам:

$$|\vec{\mathbf{u}}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \vec{\mathbf{e}}_1 = \frac{\vec{\mathbf{u}}_1}{|\vec{\mathbf{u}}_1|} \qquad \vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$|\vec{\mathbf{u}}_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}, \qquad \vec{\mathbf{e}}_2 = \frac{\vec{\mathbf{u}}_2}{|\vec{\mathbf{u}}_2|} \qquad \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$|\vec{\mathbf{u}}_3| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \qquad \vec{\mathbf{e}}_3 = \frac{\vec{\mathbf{u}}_3}{|\vec{\mathbf{u}}_3|} \qquad \vec{\mathbf{e}}_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

***Ответ*:** Относительно нового базиса, составленного из векторов

$$\vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right),\ \vec{\mathbf{e}}_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right),$$

матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

§ 3. БИЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА

***Определение* 3.** Пусть L – векторное пространство. *Билинейной функцией, определённой на* L называется отображение $f: L\times L \to \boldsymbol{R}$, сопоставляющее каждой паре векторов $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ число $f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$, и при этом линейное по обоим аргументам; т.е. должны выполняться свойства

1. $f(\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}) = f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}}) + f(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$; $f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}+\vec{\mathbf{z}}) = f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) + f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}})$;

2. $f(\lambda\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \lambda f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = f(\vec{\mathbf{x}}, \lambda\vec{\mathbf{y}})$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$.

Билинейная функция называется *симметрической*, если $f(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ $\forall\, \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in L$.

Пусть L^3 – трёхмерное векторное пространство, $\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ – базис в нём. Пусть $\vec{\mathbf{x}}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{\mathbf{y}}(y_1, y_2, y_3)$ – произвольные векторы. Тогда по свойствам линейности

$$f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = f(x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3\vec{\mathbf{e}}_3,\ y_1\vec{\mathbf{e}}_1 + y_2\vec{\mathbf{e}}_2 + y_3\vec{\mathbf{e}}_3) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j\, f(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j).$$

***Определение* 4.** Обозначим $a_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $i, j = 1, 2, 3$. Это числа, которые не зависят от координат векторов $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$, а зависят только от выбора базиса. Они называются *коэффициентами билинейной функции в данном базисе*.

Тогда билинейная функция выглядит так:

$$f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i y_j = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 +$$
$$+ a_{23}x_2y_3 + a_{31}x_3y_1 + a_{32}x_3y_2 + a_{33}x_3y_3.$$

Из коэффициентов билинейной функции составляется матрица, которая называется *матрицей этой билинейной функции в данном базисе*. Если билинейная функция является симметрической, то

$$a_{ji} = f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ij},\ i, j = 1, 2, 3.$$

Это означает, что матрица симметрической билинейной функции является симметрической матрицей. Симметрическая билинейная функция в трёхмерном пространстве выглядит так:

$$f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 +$$
$$+ a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2). \tag{13}$$

В двумерном пространстве:

$$f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1).$$

***Определение* 5.** Пусть $f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ – симметрическая билинейная функция. Тогда функция одного векторного аргумента $k: L \to \boldsymbol{R}$, которая определяется формулой $k(\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}})$, называется *квадратичной формой*. При этом билинейная функция $f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ называется *полярной к квадратичной форме* $k(\mathbf{x})$. *Матрицей квадратичной формы* называется матрица полярной ей симметрической билинейной функции.

Для того чтобы узнать, как выглядит квадратичная форма в L^3, надо в (9.8) подставить $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}}$:

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \qquad (14)$$

Если квадратичная форма задана в пространстве V^3, где координаты обозначаются (x, y, z), то

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz. \qquad (15)$$

Обратим особое внимание на то, что при составлении матрицы квадратичной формы коэффициенты при xy, xz, yz следует делить пополам и каждое из полученных чисел записывается в матрицу дважды. Например, коэффициент a_{12} записывается также и на место с номерами 21:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В матричном виде квадратичную форму (14) можно записать так:

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = X^{\mathrm{T}}\mathbf{A}X = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

§ 4. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

***Определение* 6.** Пусть в евклидовом векторном пространстве V^3 выбран ортонормированный базис, (x, y, z) – координаты, $k(\vec{\mathbf{x}})$ – квадратичная форма, имеющая вид (15), $\mathbf{A}$ – ее матрица.

Если в пространстве выбрать другой ОНБ, то тем же векторам будут соответствовать другие координаты, а значение функции для этих векторов должно остаться прежним. Поэтому выражение (15) должно иметь другой вид. Пусть $\mathbf{C}$ – матрица перехода к новому базису, (x', y', z') – новые координаты (см. §4 главы 7), а $\mathbf{A}'$ – матрица квадратичной формы $k(\vec{\mathbf{x}})$ относительно новых координат. Тогда матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ связаны между собой формулой

$$\mathbf{A}' = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{C} \qquad (16)$$

(принимаем это без доказательства). Если новые координаты тоже являются декартовыми, то $\mathbf{C}$ – ортогональная матрица, т.е. $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{-1}$; в этом случае $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. Именно по этому закону изменяется матрица линейного оператора при переходе к новому базису. Поэтому мы можем сопоставить квадратичной форме (15) оператор, $\mathcal{A}: V^3 \to V^3$, определяемый матрицей $\mathbf{A}$ относительно системы координат (x, y, z). Тогда в любой декартовой системе координат квадратичная форма $k(\vec{\mathbf{x}})$ и поставленный ей в соответствие оператор будут иметь одинаковые матрицы (т.к. законы преобразования матриц одинаковы). Поскольку матрица $\mathbf{A}$ является симметрической, то оператор $\mathcal{A}$ будет самосопряженным.

Матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ можно привести к диагональному виду (9.2) с помощью выбора подходящего ортонормированного базиса $\mathcal{B}' = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$. Если сохранить прежнее начало координат, то этот базис определит в пространстве новую систему координат (x', y', z'), относительно которой матрица квадратичной формы будет иметь такой же диагональный вид, а, значит, сама квадратичная форма *<u>будет иметь диагональный вид</u>*

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2. \tag{17}$$

В задачах на приведение квадратичной формы к каноническому виду обязательно нужно выписать формулы перехода от старых координат (x, y, z) к новым координатам (x', y', z'):

$$X' = \mathbf{C}^{-1} X, \tag{18$'$}$$

или формулы перехода от новых координат к старым:

$$X = \mathbf{C} X', \tag{19$'$}$$

где $\mathbf{C}$ – матрица перехода, а X и X' – координатные столбцы:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Напомним, если переход от одного аффинного базиса $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ к другому аффинному базису $\mathcal{B}' = (\vec{\mathbf{e}}_1', \vec{\mathbf{e}}_2', \vec{\mathbf{e}}_3')$ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{e}}_1' = c_{11}\vec{\mathbf{e}}_1 + c_{21}\vec{\mathbf{e}}_2 + c_{31}\vec{\mathbf{e}}_3, \\ \vec{\mathbf{e}}_2' = c_{12}\vec{\mathbf{e}}_1 + c_{22}\vec{\mathbf{e}}_2 + c_{32}\vec{\mathbf{e}}_3, \\ \vec{\mathbf{e}}_3' = c_{13}\vec{\mathbf{e}}_1 + c_{23}\vec{\mathbf{e}}_2 + c_{33}\vec{\mathbf{e}}_3, \end{cases} \tag{20}$$

то матрица С составляется следующим образом:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Тогда в развернутом виде формулы (9.14′) имеют вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y = c_{12}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'. \end{cases} \tag{19}$$

Предположим, что старая и новая системы координат являются декартовыми. Тогда, как уже отмечалось, матрица $\mathbf{C}$ перехода от старой системы координат к новой будет ортогональной, т.е. $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{-1}$. Поэтому формулы (18) принимают вид $X' = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} X$ и составляются особенно просто:

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{21}y + c_{31}z, \\ y' = c_{12}x + c_{22}y + c_{32}z, \\ z' = c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z. \end{cases} \tag{18}$$

Для решения задач, связанных с приведением уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду, нам понадобятся именно формулы (9.14), выражающие старые координаты через новые.

***Пример* 3.** В пространстве V^3 квадратичная форма $k(\vec{\mathbf{x}})$ определяется относительно декартовой системы координат (x, y, z) формулой

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = 3y^2 + 4xy - 2xz - 4yz.$$

С помощью выбора новой системы координат (x', y', z') привести $k(\vec{\mathbf{x}})$ к диагональному виду.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы $k(\vec{\mathbf{x}})$ относительно системы координат (x, y, z). Имеем $3 = a_{22}$, $4 = 2a_{12}$, $-2 = 2a_{13}$, $-4 = 2a_{23}$, а т.к. x^2 и y^2 отсутствуют, то $a_{11} = a_{33} = 0$. Итак,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что матрица $\mathbf{A}$ совпадает с матрицей из примера 1. Находим собственные числа и соответствующие им собственные векторы

$$\lambda_1 = -1, \quad \vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\lambda_2 = -1, \quad \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\lambda_3 = 5, \quad \vec{\mathbf{e}}_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right),$$

Тогда, если выбрать новую систему координат (x', y', z') с тем же началом, но определяемую базисом $\mathcal{B}' = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$, то квадратичная форма $k(\vec{\mathbf{x}})$ примет диагональный вид

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = -x'^2 - y'^2 + 5z'^2.$$

Новые координаты выражаются через старые по формулам:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x \qquad\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{2}}z, \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}y - \dfrac{1}{\sqrt{3}}z, \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}x + \dfrac{2}{\sqrt{6}}y - \dfrac{1}{\sqrt{6}}z,. \end{cases}$$

Старые координаты выражаются через новые по формулам:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z', \\ y = \qquad\quad - \dfrac{1}{\sqrt{3}}y' + \dfrac{2}{\sqrt{6}}z', \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{3}}y' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}z'. \end{cases} \tag{22}$$

§ 5. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВОЙ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

***Определение* 7.** *Общее уравнение поверхности второго порядка* имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + c = 0. \tag{23}$$

Выражение, записанное в первой строке, называется *квадратичной частью уравнения*, выражение $2a_1x + 2a_2y + 2a_3z$ называется *линейной частью уравнения*, а c называется *свободным членом*.

Квадратичная часть уравнения (9.18) представляет собой квадратичную форму. Обозначим её $k(\vec{\mathbf{x}})$. Найдем новую систему координат (x', y', z'), относительно которой квадратичная форма $k(\vec{\mathbf{x}})$ имеет диагональный вид (9.12). Для того чтобы узнать, какой при этом вид примет линейная часть уравнения, необходимо найти формулы вида (9.14), выражающие старые координаты x, y, z через новые координаты x', y', z', и подставить их в линейную часть. Обратите внимание на то, что *подстановку нужно делать только в линейную часть уравнения*; какой вид примет квадратичная часть при такой подстановке мы можем написать сразу – это вид (9.12). В итоге мы получим выражение вида

$$\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + \lambda_3z'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + 2b_3z' + c' = 0\,.$$

Теперь применим преобразование, которое называется *методом вы-*

деления полных квадратов или *методом Лагранжа*. Предположим, что ни одна из величин $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, b_1, b_2, b_3$ не равна нулю. Тогда последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\lambda_1\left(x'^2+2\frac{b_1}{\lambda_1}x'+\frac{b_1^2}{\lambda_1^2}\right)-\frac{b_1^2}{\lambda_1}+\lambda_2\left(y'^2+2\frac{b_2}{\lambda_2}y'+\frac{b_2^2}{\lambda_2^2}\right)-\frac{b_2^2}{\lambda_2}+$$
$$+\lambda_3\left(z'^2+2\frac{b_3}{\lambda_3}z'+\frac{b_3^2}{\lambda_3^2}\right)-\frac{b_3^2}{\lambda_3}+c'=0.$$

Если «свернуть» полные квадраты, и обозначить свободный член

$$d=c'-\frac{b_1^2}{\lambda_1}-\frac{b_2^2}{\lambda_2}-\frac{b_3^2}{\lambda_3},$$

то получим уравнение

$$\lambda_1\left(x'+\frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2+\lambda_3\left(z'+\frac{b_3}{\lambda_3}\right)^2+d=0.$$

Сделаем теперь замену координат

$$\begin{cases} x''=x'+b_1/\lambda_1, \\ y''=y'+b_2/\lambda_2, \\ z''=z'+b_3/\lambda_3. \end{cases}$$

Эта замена эквивалентна переносу начала координат (параллельному переносу координатных осей) в точку $O'(-b_1/\lambda_1, -b_2/\lambda_2, -b_3/\lambda_3)_{Ox'y'z'}$. Подчеркнём, что координаты точки O' указаны относительно системы $Ox'y'z'$. Теперь наше уравнение принимает вид

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+\lambda_3(z'')^2+d=0. \tag{24}$$

Проведенные нами преобразования справедливы и в том случае, когда какая-либо из величин b_1, b_2, b_3 равна нулю; например, при $b_1=0$ получим $x''=x'$. Если $\lambda_1=0$, то избавиться в уравнении от слагаемого $2b_1x'$ нам не удастся. Тогда мы пока оставляем координату x' без изменения. Аналогично при $\lambda_2=0$ оставляем пока без изменения координату y', при $\lambda_3=0$ – координату z'.

Предположим теперь, что только одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ равно нулю. Тогда мы можем считать, что именно $\lambda_3=0$ (если это не так, мы поменяем порядок обозначения переменных). После выделения полных квадратов получим уравнение вида

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+2b_3z'+d=0, \tag{25}$$

где $d=c'-b_1^2/\lambda_1-b_2^2/\lambda_2$. Затем мы вынесем $2b_3$ за скобки из двух последних слагаемых:

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+2b_3(z'+d/2b_3)=0$$

и совершим замену координат $z''= z' + d/2b_3$. Обратите внимание на то, что ***делать замену*** $z''=2b_3z'+d$ ***нельзя***, т.к. это не будет эквивалентно переходу к новой декартовой системе координат. После замены получим уравнение вида

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2=-2b_3z''. \qquad (26)$$

При этом мы выписываем замену координат:

$$\begin{cases} x''=x'+b_1/\lambda_1, \\ y''=y'+b_2/\lambda_2, \\ z''=z'+d/2b_3. \end{cases}$$

Эта замена означает перенос начала координат в точку $O'(-b_1/\lambda_1,-b_2/\lambda_2,-d/2b_3)_{Ox'y'z'}$.

Предположим, что среди чисел λ_1, λ_2, λ_3 только одно отлично от нуля. Тогда мы можем считать, что именно $\lambda_1\neq 0$. После выделения полных квадратов может получиться уравнение вида

$$\lambda_1(x'')^2+2b_2y'+2b_3z'+d=0. \qquad (27)$$

Это наиболее сложный случай. Здесь необходимо сделать такую замену, чтобы вместо двух переменных y' и z' осталась одна переменная y''. При этом, искомая замена переменных должна осуществляться с помощью ортогональной матрицы. Этим требованиям удовлетворяет замена

$$\begin{aligned} y'' &= (b_2/k)y'+(b_3/k)z', \\ z'' &= -(b_2/k)y'-(b_3/k)z', \end{aligned}$$

где $k=\sqrt{(b_2)^2+(b_3)^2}$. Осуществив ее, получим уравнение

$$\lambda_1(x'')^2+2ky''+d=0. \qquad (28)$$

Подобное уравнение может получиться и сразу после выделения полных квадратов. В примере 6 мы разберем, какую именно следует совершить замену координат, с тем, чтобы получить сразу уравнение (28) вместо (27). Затем, мы избавляемся от свободного члена, так же как и в уравнении (25) и получаем уравнение вида

$$\lambda_1(x'')^2=-2ky''. \qquad (29)$$

Итак, любое уравнение кривой второго порядка может быть приведено путем перехода к новой декартовой системе координат к уравнению типа (25), (26) или (29). Если вернуться к исходным обозначениям для координат, эти уравнения примут соответственно вид

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+d=0;$$

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=-2b_3z;$$

$$\lambda_1x^2=-2ky.$$

Далее, в зависимости от знаков величин $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, b_3, d$, эти уравнения могут быть легко преобразованы к одному из канонических уравнений поверхностей второго порядка.

Этот же метод можно применить и для приведения к каноническому виду уравнения кривой второго порядка. Как это можно сделать показывает следующий пример.

Пример 4. *Относительно декартовой системы координат Oxy на плоскости кривая определяется уравнением*

$$3y^2 - 4xy + 4x + 2y - 1 = 0. \tag{30}$$

Путем перехода к новой декартовой системе координат привести уравнение кривой к каноническому виду и определить тип кривой. Изобразить кривую в системе координат Oxy.

Решение. Пусть

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = 3y^2 - 4xy$$

есть квадратичная часть уравнения кривой. Составим матрицу $\mathbf{A}$ квадратичной формы $k(\vec{\mathbf{x}})$ и матрицу $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение можно составить, раскрыв определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ и приравняв его к нулю. Но можно воспользоваться также следующей формулой для характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{A})\lambda + \det\mathbf{A} = 0.$$

В нашем случае получаем уравнение

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$. Составим матрицы $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}$ и $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

По этим матрицам составляем системы уравнений для нахождения собственных векторов $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$:

$$\begin{cases} -4x - 2y = 0, \\ -2x - y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 0, \\ -2x + 4y = 0. \end{cases}$$

Им удовлетворяют соответственно векторы $\vec{\mathbf{u}}_1(1,-2)$, $\vec{\mathbf{u}}_2(2, 1)$. Затем находим $|\vec{\mathbf{u}}_1| = \sqrt{5}$, $|\vec{\mathbf{u}}_2| = \sqrt{5}$. Поэтому в качестве новых базисных векторов берем

$$\vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \ \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

Матрица перехода к новому базису $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2)$ имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем формулы, связывающие старые и новые координаты:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y', \end{cases} \qquad (31) \qquad\qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y', \end{cases} \qquad (31')$$

Относительно новых координат квадратичная форма $k(\vec{\mathbf{x}})$ принимает вид

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 4x'^2 - y'^2.$$

Для того чтобы выяснить, как преобразуется линейная часть уравнения мы в линейную часть уравнения (30) подставим выражения (31′). Получаем уравнение

$$4x'^2 - y'^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 1 = 0.$$

Раскрываем скобки, приводим подобные:

$$4x'^2 - y'^2 + 2\sqrt{5}y' - 1 = 0.$$

Выделим полный квадрат по y':

$$4x'^2 - \left(y'^2 - 2\sqrt{5}y' + (\sqrt{5})^2\right) + \left(\sqrt{5}\right)^2 - 1 = 0.$$

$$4x'^2 - \left(y' - \sqrt{5}\right)^2 + 5 - 1 = 0.$$

Теперь делаем замену переменных:

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' - \sqrt{5}, \end{cases}$$

которая означает перенос начала координат в точку $O'(0, \sqrt{5})_{Ox'y'}$. Получаем уравнение

$$4(x'')^2 - (y'')^2 = -4.$$

Его можно преобразовать к каноническому виду

$$-(x'')^2 + \frac{(y'')^2}{4} = 1. \qquad (32)$$

Данное уравнение определяет гиперболу, действительная ось которой направлена вдоль оси $O'y''$, а полуоси равны 1 и 2.

Для того чтобы изобразить кривую в исходной системе координат, сперва необходимо изобразить оси новой системы координат. С помощью формул (9.26) находим координаты точки O' в системе Oxy:

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=2\,,\quad y=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=1\,.$$

Итак $O'(2,\,1)_{Oxy}$. Направление координатных осей $O'x''$ и $O'y''$ задаётся соответственно векторами $\vec{\mathbf{u}}_1(1,-2)$ и $\vec{\mathbf{u}}_2(2,\,1)$. Мы откладываем эти векторы от точки O' и затем проводим оси.

Напомним, что для изображения гиперболы сперва необходимо нарисовать фундаментальный прямоугольник (который ограничен линиями $|x''|=1$, $|y''|=2$) и провести асимптоты, которые проходят через диагонали этого прямоугольника. Теперь мы вписываем обе ветви гиперболы в усеченные углы, образованные асимптотами и сторонами прямоугольника. Поскольку действительная ось гиперболы направлена вдоль $O'y''$, мы выбираем ту пару углов, которая расположена вдоль этой оси.

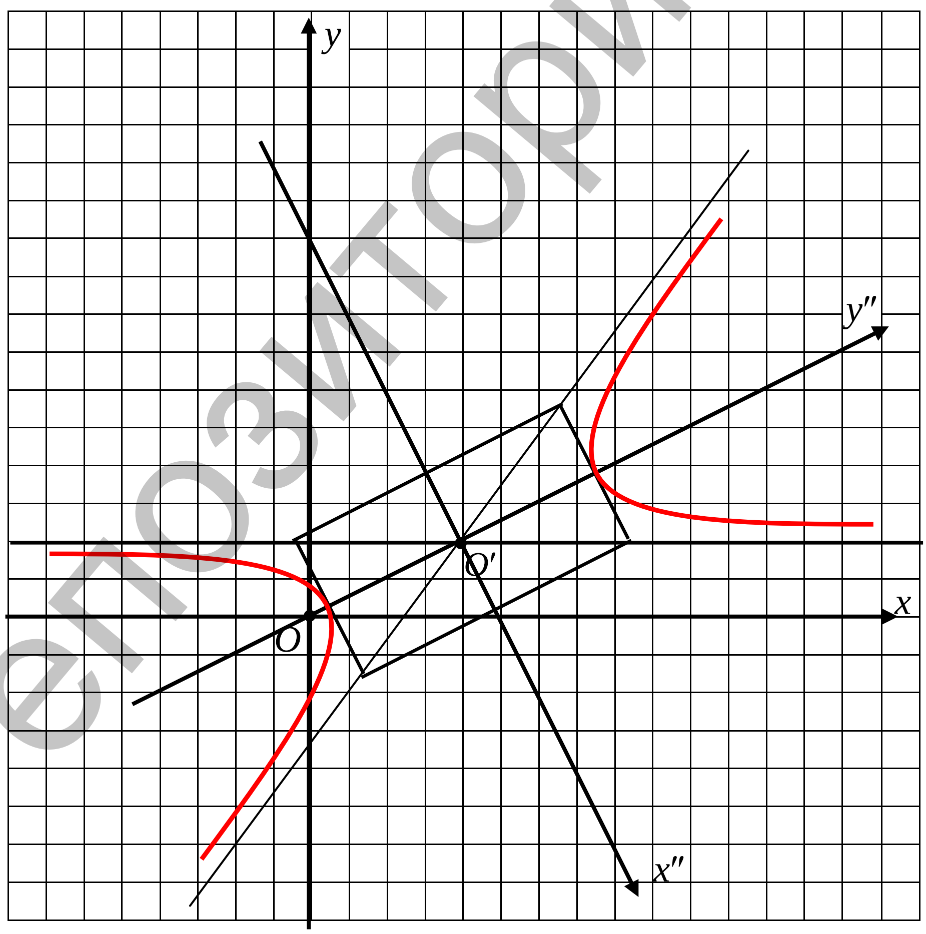


Рис. 1

***Пример* 5.** *Относительно декартовой системы координат Oxyz в пространстве поверхность определяется уравнением*

$$3y^2+4xy-2xz-4yz+2x+4y=0\,.$$

С помощью выбора новой декартовой системы координат привести уравнение поверхности к каноническому виду.

Решение. Квадратичная часть уравнения совпадает с квадратичной формой из примера 3: $k(\vec{\mathbf{x}})=3y^2+4xy-2xz-4yz$. Мы уже выяснили, что с помощью выбора нового ОНБ в пространстве, мы можем привести эту квадратичную форму к виду

$$k(\vec{\mathbf{x}})=-x'^2-y'^2+5z'^2,$$

и при этом формулы замены координат имеют вид (22). Подставляем эту замену в линейную часть уравнения $2x+4y$, а квадратичную часть пишем сразу в новых координатах:

$$-x'^2-y'^2+5z'^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)+14\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)=0\,.$$

Раскрываем скобки, приводим подобные:

$$-x'^2-y'^2+5z'^2+\sqrt{2}x'-4\sqrt{3}y'+5\sqrt{6}z'=0\,.$$

Выделяем полные квадраты:

$$-\left(x'^2-\sqrt{2}x'+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{2}-\left(y'^2+4\sqrt{3}y'+\left(2\sqrt{3}\right)^2\right)+12+$$
$$+5\left(z'^2+\sqrt{6}z'+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\right)-\frac{15}{2}=0\,.$$

$$-\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(y'+2\sqrt{3}\right)^2+5\left(z'+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+5=0\,.$$

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x''=x'-\sqrt{2}/2\,, \\ y''=y'+2\sqrt{3}\,, \\ z''=z'+\sqrt{6}/2\,. \end{cases}$$

Она означает перенос начала координат в точку $O'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-2\sqrt{3},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)_{Ox'y'z'}$.

После замены получаем уравнение

$$-(x'')^2-(y'')^2+5(z'')^2=-5\,.$$

Делим его на -5 и окончательно получаем каноническое уравнение

$$\frac{(x'')^2}{5}+\frac{(y'')^2}{5}-(z'')^2=1\,.$$

Это уравнение задаёт Однополостный гиперболоид. Дополнительно можем найти координаты точки O' в исходной СК. Для этого подставим найденные выше её координаты в (22). Получим $O'(-2, 1, 3)_{Oxyz}$.

В следующем примере мы рассмотрим случай, когда все числа λ_1, λ_2, λ_3 различные. Это самый простой случай.

***Пример* 6.** Относительно декартовой системы координат $Oxyz$ в пространстве поверхность определяется уравнением

$$4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+6x-6y=0.$$

С помощью выбора новой декартовой системы координат привести уравнение поверхности к каноническому виду.

Решение. Составляем матрицу $\mathbf{A}$ квадратичной части уравнения матрицу $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&2&-2\\2&-2&3\end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}4-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&-2\\2&-2&3-\lambda\end{pmatrix}.$$

Находим коэффициенты характеристического многочлена:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}=4+2+3=9,$$

$$\mathrm{I}_2(\mathbf{A})=\begin{vmatrix}4&0\\0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&-2\\-2&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&2\\2&3\end{vmatrix}=8+2+8=18,$$

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}4&0&2\\0&2&-2\\2&0&1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}4&2\\2&1\end{vmatrix}=2\cdot 0=0$$

(мы прибавили к третьей строке вторую, а затем раскрыли определитель по второму столбцу). Составляем характеристическое уравнение в соответствии с формулой (7):

$$-\lambda^3+9\lambda^2-18\lambda+0=0\quad\Leftrightarrow\quad\lambda(\lambda^2-9\lambda+18)=0.$$

Отсюда $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.

$$\mathbf{A}-0\mathbf{E}=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&2&-2\\2&-2&3\end{pmatrix},\qquad \begin{cases}4x+2z=0,\\2y-2z=0,\\2x-2y+3z=0.\end{cases}$$

Для данной системы наиболее удобным является следующий способ решения: из первого и второго уравнений выразить x и y через z, а потом подставить в третье уравнение для проверки

$$\begin{cases}x=-0{,}5z,\\y=z,\\-z-2z+3z=0.\end{cases}$$

Затем придаём z произвольное ненулевое значение, например, $z=2$ и находим $x=-1$, $y=2$. $\vec{\mathbf{u}}_1(-1, 2, 2)$.

$$\mathbf{A}-3\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x \quad + \quad 2z=0,\\ \quad -y-2z=0,\\ 2x-2y \quad\; =0.\end{cases}$$

$$\mathbf{A}-6\mathbf{E}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & -4 & -2\\ 2 & -2 & -3\end{pmatrix}. \qquad \begin{cases} -2x \quad + \quad 2z=0,\\ \quad -4y-2z=0,\\ 2x-2y-3z=0.\end{cases}$$

Данные системы решаются таким же способом (проделайте это самостоятельно). Мы находим $\vec{\mathbf{u}}_2(2, 2, -1)$, $\vec{\mathbf{u}}_3(2, -1, 2)$. Теперь нормируем найденные собственные векторы, и результат оформляем следующим образом, указывая каждому из собственных чисел соответствующий ему собственный вектор.

$$\lambda_1=0, \quad \vec{\mathbf{u}}_1(-1, 2, 2), \quad \vec{\mathbf{e}}_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\lambda_2=3, \quad \vec{\mathbf{u}}_2(2, 2, -1), \quad \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\lambda_3=6, \quad \vec{\mathbf{u}}_3(2, -1, 2), \quad \vec{\mathbf{e}}_3\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Это является обязательным требованием к оформлению решения в контрольной работе. Составляем матрицу перехода, выписывая координаты новых базисных векторов в столбцы.

$$\mathbf{C}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Данная матрица получилась симметрической. Поэтому она является сама к себе обратной: $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{E}$. По этой же причине формулы прямой и обратной замены координат выглядят одинаково:

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{3}(-x+2y+2z),\\ y'=\dfrac{1}{3}(2x+2y-z),\\ z'=\dfrac{1}{3}(2x-y+2z).\end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{1}{3}(-x'+2y'+2z'),\\ y=\dfrac{1}{3}(2x'+2y'-z'),\\ z=\dfrac{1}{3}(2x'-y'+2z').\end{cases}$$

Квадратичную часть уравнения в новых координатах мы выписываем сразу, а в линейную часть необходимо сделать подстановку.

$$0x'^2+3y'^2+6z'^2+\frac{6}{3}(-x'+2y'+2z')-\frac{6}{3}(2x'+2y'-z')=0,$$

$$3y'^2+6z'^2-6x'+6z'=0.$$

Делим данное уравнение на 3 и выделяем полный квадрат по z'; коэффициент при x' выносим за скобку.

$$y'^2 + 2(z'^2 + z' + \frac{1}{4}) - \frac{2}{4} - 2x' = 0,$$

$$y'^2 + 2\left(z' + \frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(x' + \frac{1}{4}\right).$$

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x' + 1/4, \\ y'' = y', \\ z'' = z' + 1/2. \end{cases}$$

Она означает перенос начала координат в точку $O'(-1/4, 0, -1/2)_{Ox'y'z'}$. После замены получаем уравнение

$$(y'')^2 + 2(z'')^2 = 2x'' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(y'')^2}{2} + (z'')^2 = x''.$$

Мы получили каноническое уравнение *эллиптического параболоида*, осью которого является $O'x''$.

В следующем заключительном примере мы рассмотрим самый сложный случай, когда ноль является собственным числом кратности 2.

***Пример* 7.** Относительно декартовой системы координат $Oxyz$ поверхность определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 8x + 4y - 5 = 0.$$

С помощью перехода к новой декартовой системе координат привести уравнение поверхности к каноническому виду и определить тип поверхности.

Решение. Пусть $k(\vec{\mathbf{x}}) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$ – квадратичная часть уравнения поверхности. Составим матрицу квадратичной формы $k(\vec{\mathbf{x}})$ и матрицу $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Находим коэффициенты характеристического многочлена:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = 1 + 1 + 4 = 6,$$

а поскольку, очевидно, $\mathrm{rank}\,\mathbf{A} = 1$ (т.к. все строки в $\mathbf{A}$ пропорциональны), то $\mathrm{I}_2(\mathbf{A}) = 0$ и $\det\mathbf{A} = 0$. Составляем характеристическое уравнение в соответствии с формулой (8):

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 6) = 0.$$

Значит, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$. Для собственного числа $\lambda_3 = 6$ обычным образом находим собственный вектор $\vec{\mathbf{u}}_3(1, 1, 2)$.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ система уравнений для нахождения собственных векторов имеет ранг 1:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ 2x + 2y + 4z = 0. \end{cases}$$

Поэтому, так же, как и в примере 1, оставляем первое уравнение

$$x + y + 2z = 0, \tag{33}$$

а остальные уравнения отбрасываем. Этому уравнению удовлетворяет, например, вектор $\vec{\mathbf{u}}_1(1,-1, 0)$. Если мы воспользуемся таким вектором $\vec{\mathbf{u}}_1$, то получим после замены уравнение вида (27). После этого потребуется решать проблему дополнительной замены координат. Наша цель: совершить замену координат так, чтобы после замены в уравнении не осталось координаты x' или координаты y' (поскольку в квадрате у нас будет только одна координата z'). Если координаты вектора $\vec{\mathbf{u}}_1(x, y, z)$ будут удовлетворять дополнительному условию $a_1x + a_2y + a_3z = 0$, то после замены в уравнении не останется x', а если этому условию будут удовлетворять координаты $\vec{\mathbf{u}}_2$, то после замены не останется y'. В нашем случае данное условие выглядит так: $4x + 2y = 0$. Поэтому координаты вектора будем искать из системы

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ 4x + 2y \quad\ = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2z, \\ y = -2x. \end{cases}$$

Подходит вектор $\vec{\mathbf{u}}_1(2,-4, 1)$. Вектор $\vec{\mathbf{u}}_2(x, y, z)$ тоже должен удовлетворять условию (9.28), но дополнительно он должен быть ортогонален $\vec{\mathbf{u}}_1$, т.е. должно выполняться $\vec{\mathbf{u}}_2(x, y, z)\cdot \vec{\mathbf{u}}_1(2,-4, 1) = 0$. Итак, координаты $\vec{\mathbf{u}}_2(x, y, z)$ мы ищем из системы

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ 2x - 4y + z = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ -6y - 3z = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3y, \\ z = -2y. \end{cases}$$

Подходит вектор $\vec{\mathbf{u}}_2(3, 1,-2)$. Теперь нормируем найденные собственные векторы, и результат оформляем следующим образом.

$$\lambda_1 = 0, \quad \vec{\mathbf{u}}_1(2,-4, 1), \quad \vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}\right),$$

$$\lambda_2 = 0, \quad \vec{\mathbf{u}}_2(3, 1,-2), \quad \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\right),$$

$$\lambda_3 = 6, \quad \vec{\mathbf{u}}_3(1, 1, 2), \quad \vec{\mathbf{e}}_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Выражение старых координат через новые мы можем выписать сразу, не составляя матрицы перехода.

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{21}}x' + \dfrac{3}{\sqrt{14}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z', \\ y = -\dfrac{4}{\sqrt{21}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{14}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z', \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{21}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{14}}y' + \dfrac{2}{\sqrt{6}}z'. \end{cases}$$

Квадратичную часть уравнения в новых координатах мы выписываем сразу, а в линейную часть необходимо сделать подстановку.

$$6z'^2 + 8\left(\frac{2}{\sqrt{21}}x' + \frac{3}{\sqrt{14}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'\right) + 4\left(-\frac{4}{\sqrt{21}}x' + \frac{1}{\sqrt{14}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'\right) - 5 = 0,$$

$$6z'^2 + \frac{28}{\sqrt{14}}y' + \frac{12}{\sqrt{6}}z' - 5 = 0,$$

$$3z'^2 + \sqrt{14}y' + \sqrt{6}z' - 2{,}5 = 0.$$

Выделим по z' полный квадрат:

$$3\left(z'^2 + \frac{\sqrt{6}}{3}z' + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2} + \sqrt{14}y' - 2{,}5 = 0,$$

$$3\left(z' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{14}y' - 2{,}5 = 0,$$

$$3\left(z' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \sqrt{14}\left(y' - \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = 0.$$

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' - \dfrac{3}{\sqrt{14}}, \\ z'' = z' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \end{cases}$$

которая означает перенос начала координат в точку $O'\left(0, \dfrac{3}{\sqrt{14}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)_{Ox'y'z'}$.

В результате получаем уравнение

$$3(z'')^2 = -\sqrt{14}y''.$$

Его можно преобразовать к каноническому виду $(z'')^2 = -2py''$, где $p = \dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

Это уравнение определяет параболический цилиндр, ось которого направлена вдоль отрицательного направления координатной оси $O'y''$, а образующие параллельны оси $O'x''$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Кривые второго порядка

С помощью перехода к новой декартовой СК на плоскости привести уравнение кривой 2 порядка к каноническому виду (при этом обязательно выписать замену координат) и изобразить кривую в исходной СК.

1. $5x^2+4xy+8y^2+32x+56y+80=0$.
2. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.
3. $-2x^2+8xy+4y^2+8x-4y+7=0$.
4. $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$.
5. $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$.
6. $x^2-2xy+y^2+2x-2y-7=0$.

II. Поверхности второго порядка

С помощью перехода к новой декартовой СК в пространстве привести уравнение поверхности 2 порядка к каноническому виду (при этом обязательно выписать замену координат).

Задачи без кратных собственных чисел.

1. $5x^2+3y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz+4x+8y+12z-4=0$.
2. $2xz+4x-6y+8z-2=0$.
3. $4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+8x-4y+8z=0$.
4. $x^2+2y^2+z^2-2xz+2x-4y+2z=0$.
5. $2x^2-3y^2+2z^2-8xz+4x-6y+8z-\dfrac{35}{3}=0$.
6. $x^2-z^2+4xy-4xz+6x+3y=0$.

Задачи с кратными собственными числами.

7. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz+8x+4y-5=0$.
8. $3x^2+3z^2-4xy+2xz+4yz+8y+8z-6=0$.
9. $3y^2-4xy-2xz+4yz+4x+2y=0$.
10. $-x^2+2y^2-z^2-4xy+2xz-4yz+4y+8z+4=0$.
11. $x^2+y^2+9z^2+2xy+6xz-6yz+22x+33z=0$.
12. $x^2+9y^2+z^2-6xy+2xz-6yz-33y+22z=0$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Список кривых второго порядка

Название кривой	Каноническое уравнение кривой
1. Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Мнимый эллипс (∅)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
3. Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
4. Пара пересекающихся прямых	$a^2x^2-b^2y^2=0$
5. Пара мнимых прямых пересекающихся в действительной точке	$a^2x^2+b^2y^2=0$
6. Парабола	$y^2=2px$,
7. Пара параллельных прямых	$x^2=a^2$
8. Пара мнимых параллельных прямых	$x^2=-a^2$
9. Пара совпадающих прямых	$x^2=0$

Приложение 2

Список поверхностей второго порядка

Название поверхности	Ее каноническое уравнение
1. Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
2. Мнимый эллипсоид (Ø)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$
3. Мнимый конус (точка)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
4. Двуполостной гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
5. Однополосной гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
6. Конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
7. Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$
8. Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$
9. Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
10. Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
11. Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
12. Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
13. Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
14. Параболический цилиндр	$x^2=2py$
15. Пара параллельных плоскостей	$x^2=a^2$
16. Пара совпадающих плоскостей	$x^2=0$
17. Пара мнимых параллельных плоскостей	$x^2=-a^2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов, А.В. Аналитическая геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1978.
2. Погорелов, А.В. Геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1984.
3. Атанасян, Л.С. Геометрия / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1986. – Ч. I.
4. Базылев, В.Т. Геометрия / В.Т. Базылев, К.И. Дуничев [и др.]. – М.: Просвещение, 1974. – Ч. I.
5. Атанасян, Л.С. Геометрия / Л.С. Атанасян. – М.: Просвещение, 1973. – Ч. I.
6. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1981.
7. Постников, М.М. Аналитическая геометрия / М.М. Постников. – М.: Наука, 1973.
8. Постников, М.М. Лекции по геометрии. Семестр I: Аналитическая геометрия / М.М. Постников. – М.: Наука, 1986.
9. Александров, А.Д. Геометрия / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – М.: Наука, 1990.
10. Дадаян, А.А. Алгебра и геометрия / А.А. Дадаян, В.А. Дударенко. – Минск: Вышэйшая школа, 1989.
11. Базылев, В.Т. Сборник задач по геометрии / В.Т. Базылев [и др.]. – М.: Просвещение, 1980.
12. Атанасян, Л.С. Сборник задач по геометрии / Л.С. Атанасян, В.А. Атанасян. – М.: Просвещение, 1973. – Ч. 1.
13. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / под ред. А.С. Феденко. – Минск: Изд-во Университетское, 1989, 1999.
14. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1987.
15. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. – М.: Наука, 1965.
16. Кострикин, А.И. Линейная алгебра и геометрия / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. – М.: Наука, 1986.
17. Тышкевич, Р.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – Минск: Вышэйшая школа, 1976.
18. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия: учеб. пособие: в 2 ч. / М.В. Милованов, М.М. Толкачов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – Минск: Вышэйшая школа, 1987.
19. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. – М.: Изд-во МГУ, 1969.
20. Кононов, С.Г. Аналитическая геометрия: учеб. пособие / С.Г. Кононов. – Минск: БГУ, 2014.
21. Березкина, Л.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие / Л.Л. Березкина. – Минск: РИВШ, 2012.