Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

С.М. Бородич, Т.В. Кавитова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2015

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
Б83

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 23.10.2015 г.

Авторы: старшие преподаватели кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.М. Бородич, Т.В. Кавитова**

Рецензент:
доцент кафедры математики и информационных технологий УО «ВГТУ», кандидат физико-математических наук *В.С. Денисов*

Научный редактор: доцент кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук *Т.Л. Сурин*

Бородич, С.М.
Б83 Теория вероятностей и математическая статистика : методические рекомендации / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2015. – 51 с.

Настоящее учебное издание содержит краткий теоретический материал и демонстрационные примеры, помогающие лучше усвоить основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики. Оно может использоваться для организации самостоятельной работы студентов, а также при проведении практических занятий.

Предназначается для студентов, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная информатика» дневной формы обучения.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ………...…………………... 5

Часть I. Случайные события и их вероятности ………………….. 6

1.1. Случайные события. Пространство элементарных событий ….. 6

1.2. Отношения между событиями ……………………………………. 7

1.3. Алгебраические операции над событиями ………………....... 7

1.4. Вероятность события. Классическое определение вероятности 9

1.5. Некоторые сведения из комбинаторики ………………………… 10

1.6. Геометрическое определение вероятности …………………….. 11

1.7. Формулы сложения вероятностей ……………………………….. 12

1.8. Условная вероятность. Формула умножения вероятностей …… 13

1.9. Независимые события ……………………………………….…... 13

1.10. Формула полной вероятности ………………………………….. 14

1.11. Формула Байеса (формула гипотез) ……………………………. 15

1.12. Схема Бернулли. Формула Бернулли ………………………….. 16

1.13. Предельные теоремы в схеме Бернулли ……………………. 16

Часть II. Случайные величины ………………………………………. 18

2.1. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины …………………………………………………………. 18

2.2. Закон распределения дискретной случайной величины. Основные дискретные распределения ………………….……………………… 19

2.3. Функция распределения случайной величины …………….…. 20

2.4. Непрерывные случайные величины ……………………………... 21

2.5. Основные непрерывные распределения ………………………… 22

2.6. Понятие многомерной случайной величины ……………………. 24

2.7. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины 24

2.8. Функция распределения многомерной случайной величины ... 25

2.9. Непрерывная двумерная случайная величина ………………..…… 26

2.10. Условные законы распределения компонент двумерных случайных величин ……………………………………………………………….. 27

2.11. Независимые случайные величины ……………………...……… 29

2.12. Функции случайных величин. Закон распределения функции одной случайной величины ……….. 30

2.13. Числовые характеристики случайных величин ………………. 31

Часть III. Предельные теоремы теории вероятностей …………. 35

3.1. Неравенства Маркова и Чебышева ……………………………… 35

3.2. Теоремы Чебышева и Бернулли ………………………………. 36

3.3. Центральная предельная теорема ……………………………….. 37

Часть IV. Элементы математической статистики ………………. 37
4.1.Выборка. Статистическое распределение выборки и её графическое представление ……………………………..………………………… 37
4.2. Эмпирическая функция распределения ………………………… 40
4.3. Числовые характеристики выборки …………………………...... 41
4.4. Точечные оценки неизвестных параметров распределения ….. 42
4.5. Метод максимального правдоподобия ………………………........ 44
4.6. Интервальное оценивание. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения …………………….................... 45
4.7. Проверка гипотез о виде закона распределения. Критерий согласия χ^2 Пирсона ……………………………………….…………….. 47

Литература ……………………………………………….…………… 50

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» является составной частью цикла математических дисциплин, из которых складывается фундамент математического образования современного специалиста.

Настоящее учебное издание адресуется прежде всего студентам математического факультета, обучающимся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная информатика». Учебным планом для указанных специальностей отводится сравнительно немного аудиторного времени для освоения курса теории вероятностей и математической статистики. Поэтому студентам приходится значительную часть времени уделять самостоятельной работе. Оказать существенную помощь в самостоятельном овладении основными методами и приёмами изучаемой дисциплины, в первую очередь, и призвано данное издание. Как источник необходимого теоретического материала оно может использоваться также при проведении практических занятий.

Методические рекомендации состоят из четырёх разделов: «Случайные события и их вероятности», «Случайные величины», «Предельные теоремы теории вероятностей», «Элементы математической статистики». Материал каждой последующей части опирается на понятия, определяемые в предыдущих частях. Краткое изложение теоретического материала сопровождается демонстрационными примерами, способствующими лучшему пониманию и усвоению учебной дисциплины.

В конце издания помещён список литературы, изучение которой поможет студентам подробнее разобраться в отдельных вопросах курса.

Часть I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Случайные события. Пространство элементарных событий

Случайным событием (или просто: *событием*) называется любой факт, который может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта, эксперимента, наблюдения).

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступит в данном испытании, и *невозможным*, если оно заведомо в данном испытании не произойдёт.

Достоверное событие будем обозначать буквой Ω, а невозможное – символом $\varnothing$.

Пример 1.1. Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A — выпадение 4 очков, событие B – выпадение чётного числа очков, событие C – выпадение 7 очков, событие D – выпадение целого числа очков. Событие C – невозможное, а событие D – достоверное. ●

Простейшие события, являющиеся непосредственными (теоретически возможными) исходами данного эксперимента и обладающие тем свойством, что в результате эксперимента происходит одно и только одно из них, называются *элементарными событиями (элементарными исходами)*.

Для любого события A в данном эксперименте можно выделить совокупность элементарных событий, при наступлении которых происходит это событие. Такие элементарные события называются *благоприятствующими событию A*. Таким образом, любое событие, связанное с данным экспериментом, можно представить как совокупность всех благоприятствующих этому событию элементарных исходов.

Пример 1.2. Испытание: один раз бросают игральную кость. Здесь 6 элементарных событий: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$. Событие ω_i означает, что в результате бросания кости выпало i очков, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Пусть событие A – это выпадение чётного числа очков. Тогда благоприятствующими событию A будут элементарные события $\omega_2, \omega_4, \omega_6$, и значит, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. ●

Очевидно, что достоверное событие представляется совокупностью всех элементарных событий.

Множество всех элементарных событий данного эксперимента называется *пространством элементарных событий* и обозначается, как и достоверное событие, буквой Ω.

1.2. Отношения между событиями

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании. В противном случае события называются *совместными*.

События $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называются *попарно несовместными* (по-другому: *взаимоисключающими*), если любые два из них несовместны.

Говорят, что событие A *влечёт* событие B, и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$, если при наступлении события A обязательно происходит и событие B.

События и отношения между ними можно иллюстрировать с помощью *диаграмм Венна*. При этом пространство элементарных исходов (достоверное событие) Ω изображается прямоугольником, элементарные исходы – точками этого прямоугольника, а случайные события – областями внутри него. На рис. 1 показано отношение $A \subset B$.

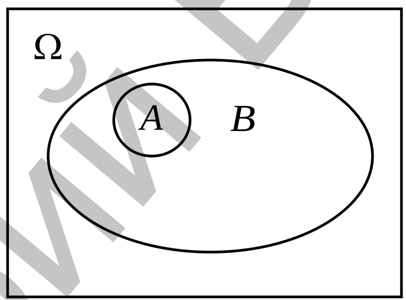


Рис. 1

Пример 1.3. Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A – выпадение 2 очков, событие B – выпадение чётного числа очков. При наступлении события A наступает и событие B, т.е. $A \subset B$. ●

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то события A и B называют *эквивалентными (равносильными, равными)*; записывают: $A = B$.

1.3. Алгебраические операции над событиями

Суммой событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие A, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Записывают:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \text{ или } A = \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

Произведением событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие A, состоящее в появлении каждого из этих событий. Пишут:

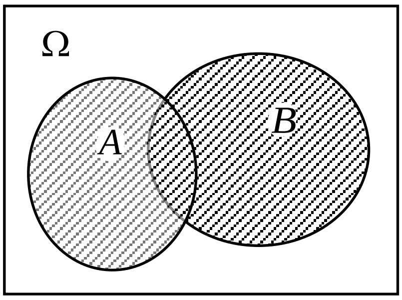
$$A = A_1 A_2 \ldots A_n \quad \text{или} \quad A = \prod_{i=1}^{n} A_i .$$

Разностью двух событий A и B называется событие C, состоящее в том, что событие A произошло, а событие B не произошло. Записывают:

$$C = A - B.$$

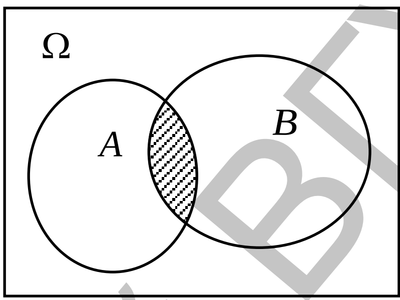
Событие $\overline{A} = \Omega - A$ называется *дополнительным (противоположным)* к событию A. Оно заключается в непоявлении события A. Очевидно, что $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$.

На рисунках 2–5 с помощью диаграмм Венна представлены сумма, произведение и разность событий A и B, а также событие, противоположное событию A (соответствующие области заштрихованы).



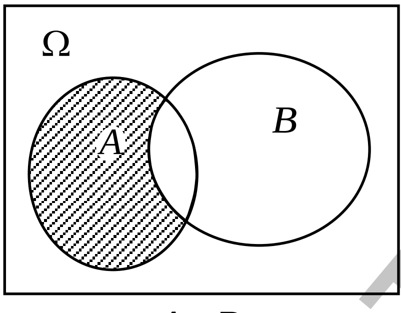
$A + B$

Рис. 2



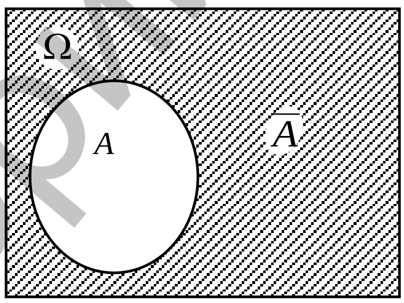
AB

Рис. 3



$A - B$

Рис. 4



$\overline{A}$

Рис. 5

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

$A + B = B + A$, $\quad AB = BA$,

$(A + B) + C = A + (B + C)$, $\quad (AB)C = A(BC)$,

$(A + B)C = AC + BC$, $\quad AB + C = (A + C)(B + C)$,

$A + A = A$, $\quad AA = A$,

$A + \Omega = \Omega$, $\quad A\Omega = A$,

$A + \varnothing = A$, $\quad A\varnothing = \varnothing$,

$A + \overline{A} = \Omega$, $\quad A\overline{A} = \varnothing$,

$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

Пример 1.4. Испытание: один раз бросают игральную кость. В этом случае $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где ω_i – элементарный исход, заключающийся в выпадении i очков. Рассмотрим следующие события:

A – выпало чётное число очков, т.е. $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$;

B – выпало число очков, большее 3, т.е. $B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Найдём $A + B$, AB, $A - B$ и $\overline{A}$:

$$A+B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_5,\omega_6\},\qquad AB=\{\omega_4,\omega_6\},$$
$$A-B=\{\omega_2\},\qquad \overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}.\ \bullet$$

1.4. Вероятность события. Классическое определение вероятности

Вероятность события – это числовая характеристика степени возможности его появления в рассматриваемом опыте. Вероятность события A обозначается символом $P(A)$.

Рассмотрим так называемую *классическую вероятностную модель*, которая используется для описания опытов с конечным числом равновозможных элементарных исходов.

Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие.

Пусть пространство элементарных событий эксперимента состоит из конечного числа элементарных событий, причём все они равновозможны. Пусть A – произвольное событие, связанное с данным экспериментом. *Вероятность (классическая вероятность) события* A определяется формулой

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|},\qquad (1.1)$$

где $|\Omega|$ – число всех элементарных событий, $|A|$ – число элементарных событий, благоприятствующих событию A.

Из определения (1.1) вытекают следующие свойства вероятности:

1. $0\le P(A)\le 1$;
2. $P(\Omega)=1$;
3. $P(\varnothing)=0$;
4. Если A и B – несовместные события (т.е. $AB=\varnothing$), то
$$P(A+B)=P(A)+P(B);$$
5. $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Пример 1.5. Из урны, содержащей 6 белых и 8 чёрных шаров (шары отличаются лишь цветом), наугад вынимают один шар. Какова вероятность события A, заключающегося в том, что вынутый шар будет белым?

Решение. Число всех элементарных событий в данном опыте совпадает с общим числом шаров в урне: $|\Omega|=6+8=14$. Число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно 6, т.е. $|A|=6$. Таким образом, по формуле (1.1) имеем

$$P(A)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}.\ \bullet$$

1.5. Некоторые сведения из комбинаторики

Пусть имеется множество, состоящее из n различных элементов.

Размещением из n элементов по m $(0 < m \le n)$ называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Число размещений из n элементов по m обозначается A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 1.6. В турнире участвуют 20 команд. Сколькими способами могут быть распределены первые 3 места, если делёж мест исключён?

Решение. Искомое число способов равно числу размещений из 20 элементов по 3, т.е. $A_{20}^3 = \dfrac{20!}{17!} = 18 \cdot 19 \cdot 20 = 6840$. ●

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!.$$

Пример 1.7. Сколькими способами можно расположить на полке в ряд 5 различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов, т.е. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. ●

Сочетанием из n элементов по m $(0 \le m \le n)$ называется любое подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 1.8. В группе из 25 студентов нужно выбрать трёх дежурных. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Искомое число способов равно числу сочетаний из 25 элементов по 3, т.е.

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!22!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 23 \cdot 4 \cdot 25 = 2300. \ ●$$

Легко заметить, что имеют место формулы:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad A_n^m = C_n^m \cdot P_m.$$

Принцип умножения. Если некоторое действие может быть выполнено за k этапов, причём число возможных способов осуществления

i-го этапа равно n_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$, то общее число N_k способов осуществления указанного действия вычисляется по формуле

$$N_k = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Пример 1.9. Найти количество всех трёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что: а) в каждом числе все цифры различны; б) числа могут содержать одинаковые цифры.

Решение. Последовательно выбираем первую, вторую и третью цифры.

а) Первую цифру можно выбрать 5 способами, вторую (после того, как выбрана первая) – 4 способами и третью (после выбора первых двух) – 3 способами. Согласно принципу умножения имеем: $N_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

б) Каждую из трёх цифр можно выбрать 5 способами. В силу принципа умножения имеем: $N_3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. ●

1.6. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда пространство элементарных событий Ω не является конечным множеством.

Рассматривается некоторый случайный эксперимент с бесконечным числом равновозможных элементарных исходов. Допустим, что каждому элементарному исходу ставится в соответствие некоторая точка на прямой, плоскости или в пространстве, причём разным исходам соответствуют разные точки. Пусть Ω – множество всех таких точек. Таким образом, рассматриваемый эксперимент можно интерпретировать как случайный выбор точки $X \in \Omega$, а множество Ω – как пространство его элементарных исходов. Случайным событиям данного эксперимента соответствуют различные подмножества множества Ω, при этом подмножество A интерпретируется как случайное событие, заключающееся в том, что $X \in A$.

Будем предполагать, что и для самого множества Ω, и для всех рассматриваемых его подмножеств определена мера μ (длина, площадь, объём), причём предполагаем, что мера $\mu(\Omega)$ конечна.

Геометрической вероятностью события A называется число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Пример 1.10. На линии связи длиной 10 км произошёл разрыв. Найти вероятность того, что разрыв произошёл не далее, чем в 2-х км от начала линии. Предполагается равная возможность разрыва в любых точках линии связи.

Решение. $\Omega=[0,10]$, $A=[0,2]$. По формуле геометрической вероятности находим $P(A)=\dfrac{2}{10}=0{,}2$. ●

Геометрическая вероятность обладает всеми перечисленными в пункте 1.4 свойствами классической вероятности. Однако имеются также и отличия в свойствах этих вероятностей. Например, если классическая вероятность события равна нулю, то это событие невозможно, а для геометрической вероятности это, вообще говоря, не так: геометрическая вероятность любого элементарного исхода равна нулю.

1.7. Формулы сложения вероятностей

Как известно (см. пункты 1.4, 1.6), вероятность суммы двух несовместных событий *A* и *B* равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1.2)$$

Эта формула легко обобщается на случай *n* попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n$:

$$P(A_1+\ldots+A_n)=P(A_1)+\ldots+P(A_n). \qquad (1.3)$$

Теорема 1.1. Для любых событий *A* и *B* имеет место формула

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.4)$$

Теорема 1.2. Для любых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеет место формула

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+$$
$$+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n). \qquad (1.5)$$

Замечание 1.1. Формулы (1.2)-(1.5) часто называют *формулами сложения вероятностей*. ●

Пример 1.11. Правильная монета подбрасывается 2 раза. Найти вероятность события *A*, означающего появление герба хотя бы один раз.

Решение. Обозначим события: A_1 – появление герба при первом подбрасывании, A_2 – появление герба при втором подбрасывании. Ясно, что

$$A=A_1+A_2.$$

Согласно классическому определению вероятности,

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}, \quad P(A_1A_2)=\frac{1}{4}.$$

Используя теорему 1.1, находим искомую вероятность:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}. \; ●$$

1.8. Условная вероятность. Формула умножения вероятностей

Пусть A и B – два события, причём $P(B) \neq 0$.

Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется величина

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (1.6)$$

Из формулы (1.6) следует равенство

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B), \qquad (1.7)$$

называемое *формулой (теоремой) умножения вероятностей*.

Формула (1.7) обобщается на случай n событий:

Теорема 1.3. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таковы, что $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) \neq 0$. Тогда

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2)\ldots P(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Пример 1.12. В урне находится 5 белых, 4 синих и 3 чёрных шара. Наудачу последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что 1-й шар будет белым, 2-й – синим, 3-й – чёрным?

Решение. Введём обозначения событий: A_1 – первый вынутый шар – белый, A_2 – второй – синий, A_3 – третий – чёрный. Находим $P(A_1) = \frac{5}{12}$, $P(A_2 \mid A_1) = \frac{4}{11}$, $P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{3}{10}$. В силу теоремы 1.3

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}. \ \bullet$$

1.9. Независимые события

События A и B, вероятности которых $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$, называются *независимыми*, если

$$P(A \mid B) = P(A) \ \text{ и } \ P(B \mid A) = P(B). \qquad (1.8)$$

Замечание 1.2. Легко доказать, что если выполняется одно из равенств (1.8), то выполняется и другое. ●

Теорема 1.4. События A и B, имеющие ненулевую вероятность, являются независимыми тогда и только тогда, когда

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (1.9)$$

С учётом теоремы 1.4 можно дать также следующее определение независимости событий, распространяющееся и на события с нулевой вероятностью.

События A и B называются *независимыми*, если для них выполнено равенство (1.9).

События $A_1, \ldots, A_n$ называют *независимыми в совокупности* (или просто: *независимыми*), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и всевозможные произведения остальных.

Формула (1.9) распространяется на *n* событий, независимых в совокупности:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы.

Из независимости событий в совокупности следует их попарная независимость. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пример 1.13. На плоскость бросают правильный тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, зелёный, синий цвета, а в раскраске четвёртой грани присутствуют все эти три цвета. Рассмотрим следующие события: A – тетраэдр упадёт на грань, содержащую красный цвет; B – зелёный цвет; C – синий цвет. Покажем, что события A, B и C попарно независимы, однако не являются независимыми в совокупности.

Поскольку каждый цвет есть на двух гранях из четырёх, то

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Два цвета присутствуют только в раскраске одной грани. Поэтому

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$P(AB) = P(A)P(B),\quad P(BC) = P(B)P(C),\quad P(AC) = P(A)P(C),$$

т.е. события A, B и C попарно независимы.

Легко видеть также, что

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(BC) = \frac{1}{8},$$

и значит, события A, B и C не являются независимыми в совокупности. ●

1.10. Формула полной вероятности

Говорят, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующие полную группу, называются *гипотезами*.

Теорема 1.5. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу. Тогда для любого события A имеет место формула

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A\,|\,H_i),$$

называемая *формулой полной вероятности*.

Пример 1.14. В первой коробке содержится 20 ламп, из них 18 стандартных; во второй коробке – 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлечённая из первой коробки, будет стандартной.

Решение. Введём обозначения событий: A – из первой коробки извлечена стандартная лампа, H_1 – лампа, переложенная из второй коробки в первую, была стандартной, H_2 – эта лампа была нестандартной. Тогда

$$P(H_1) = \frac{9}{10},\quad P(H_2) = \frac{1}{10},\quad P(A\,|\,H_1) = \frac{19}{21},\quad P(A\,|\,H_2) = \frac{18}{21}.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(A) = P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)P(A\,|\,H_2) = \frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21} + \frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21} = 0{,}9. \bullet$$

1.11. Формула Байеса (формула гипотез)

Теорема 1.6. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу. Тогда условная вероятность события H_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ при условии, что в результате эксперимента произошло событие A, может быть вычислена по формуле

$$P(H_k\,|\,A) = \frac{P(H_k)P(A\,|\,H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A\,|\,H_i)}.$$

Эта формула называется *формулой Байеса* (*формулой гипотез*).

Пример 1.15. В условиях примера 1.14 лампа, извлечённая наудачу из первой коробки после того, как в неё переложили лампу из второй, оказалась стандартной. Какова вероятность того, что из второй коробки в первую переложили нестандартную лампу?

Решение. Определим вероятность события (гипотезы) H_2 при условии, что событие A (извлечённая из первой коробки лампа стандартна) уже произошло:

$$P(H_2\,|\,A) = \frac{P(H_2)P(A\,|\,H_2)}{P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)P(A\,|\,H_2)} = \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21}}{0{,}9} = \frac{2}{21}. \bullet$$

1.12. Схема Бернулли. Формула Бернулли

Пусть проводится серия n испытаний, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A. При этом предполагается, что вероятность наступления события A в каждом отдельном испытании не зависит от исходов других испытаний и равна одному и тому же числу p $(0 < p < 1)$. Такая последовательность испытаний называется *схемой Бернулли*.

Вероятность того, что в n испытаниях, проведённых по схеме Бернулли, событие A произойдёт ровно k раз $(0 \le k \le n)$, находится по *формуле Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (q = 1 - p). \tag{1.10}$$

Пример 1.16. Правильная монета подбрасывается 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 3 раза.

Решение. Здесь $n = 10$, $k = 3$, $p = \dfrac{1}{2}$, $q = 1 - p = \dfrac{1}{2}$. По формуле Бернулли находим искомую вероятность:

$$P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}\ . \bullet$$

1.13. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Использование формулы Бернулли (1.10) при больших значениях n затруднительно в вычислительном плане. Возникает необходимость в отыскании приближённых формул для вычисления вероятности $P_n(k)$. Такие формулы дают нам предельные теоремы.

Теорема 1.7 (теорема Пуассона). Пусть при неограниченном увеличении числа n испытаний $(n \to \infty)$ вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю $(p \to 0)$, причём $np = \lambda$ – постоянная величина. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{1.11}$$

Из равенства (1.11) при больших n и малых p вытекает приближённая *формула Пуассона*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Эту формулу обычно используют, когда $p < 0{,}1$, а $np < 10$.

Пример 1.17. Завод отправил на базу 500 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. Так как $n = 500$, $p = 0{,}002$, то $\lambda = 500 \cdot 0{,}002 = 1$. По формуле Пуассона находим

$$P_{500}(3) = \frac{1}{3!} e^{-1} \approx 0{,}06. \bullet$$

Теорема 1.8 (локальная теорема Муавра – Лапласа). Если вероятность p появления события A в каждом из n испытаний постоянна и отлична от 0 и 1, то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (1.12)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ (функция Гаусса).}$$

Приближение тем точнее, чем больше n.

Для вычисления значений функции $\varphi(x)$ используется специальная таблица.

Пример 1.18. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна $0{,}7$. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена 160 раз.

Решение. Здесь $n = 200$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$, $k = 160$. Применим формулу (1.12). Вычисляем:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = \sqrt{42} \approx 6{,}48, \quad \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{160 - 200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{42}} \approx \frac{20}{6{,}48} \approx 3{,}09.$$

По таблице находим $\varphi(3{,}09) \approx 0{,}0034$. Следовательно,

$$P_{200}(160) \approx \frac{1}{6{,}48} \cdot 0{,}0034 \approx 0{,}0005. \bullet$$

Обозначим через $P_n(k_1, k_2)$ вероятность того, что в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, событие A наступит не менее k_1 и не более k_2 раз.

Теорема 1.9 (интегральная теорема Муавра – Лапласа). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (1.13)$$

где

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \ \textit{(нормированная функция Лапласа)}. \quad (1.14)$$

Значения функции $\Phi_0(x)$ находятся по таблице. Отметим некоторые важные свойства этой функции:

1. $\Phi_0(x)$ – нечётная функция, т.е. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$;
2. $\Phi_0(x)$ монотонно возрастает;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi_0(x) = 0{,}5$.

Пример 1.19. Вероятность получения с конвейера изделия высшего сорта равна $0{,}9$. Определить вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий от 520 до 535 изделий (включительно) будут изделиями высшего сорта.

Решение. Здесь $n = 600$, $k_1 = 520$, $k_2 = 535$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. Искомую вероятность вычислим по формуле (1.13). Имеем:

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{520 - 600 \cdot 0{,}9}{\sqrt{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -\frac{20}{\sqrt{54}} \approx -2{,}72,$$

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{535 - 600 \cdot 0{,}9}{\sqrt{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -\frac{5}{\sqrt{54}} \approx -0{,}68.$$

Пользуясь таблицей значений функции $\Phi_0(x)$, находим

$$\Phi_0(-2{,}72) = -\Phi_0(2{,}72) \approx -0{,}4967, \quad \Phi_0(-0{,}68) = -\Phi_0(0{,}68) \approx -0{,}2517.$$

Следовательно,

$$P_{600}(520, 535) \approx -0{,}2517 + 0{,}4967 = 0{,}2450. \ \bullet$$

Часть II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины

Переменная величина, которая в зависимости от исхода опыта, т.е. в зависимости от случая, принимает различные действительные значения, называется *случайной величиной* (сокращённая запись: с.в.).

Случайные величины будем обозначать прописными латинскими буквами (при необходимости с индексами): X, Y_1, Z_i и т.д., а их возможные значения – соответствующими строчными буквами с индексами: $x_1, x_2, \ldots, y_{11}, y_{12}, \ldots, z_{i1}, z_{i2}, \ldots$.

Пример 2.1. Опыт: однократное бросание игральной кости.

1) С.в. X – число выпавших очков. Возможные значения с.в. X: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_6 = 6.$

2) С.в. Y принимает значение 0, если выпало чётное число очков, и значение 1, если число выпавших очков нечётное. Возможные значения с.в. Y: $y_1 = 0,\ y_2 = 1$. ●

Различают два основных типа случайных величин: *дискретные* и *непрерывные* случайные величины.

Дискретной случайной величиной называют с.в., которая принимает отдельные, изолированные друг от друга возможные значения. Очевидно, что множество возможных значений дискретной с.в. является конечным или счётным (т.е. его элементы могут быть занумерованы натуральными числами).

Непрерывной случайной величиной называют с.в., которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. (Более строгое определение непрерывной с.в. будет дано ниже.)

Законом распределения случайной величины называется любое правило (таблица, функция, график), позволяющее находить вероятности произвольных событий, связанных с этой с.в. (например, вероятность того, что она примет какое-то значение или попадёт в какой-то интервал).

Замечание 2.1. Вместо термина «закон распределения» часто употребляют более простой термин «распределение». ●

2.2. Закон распределения дискретной случайной величины. Основные дискретные распределения

Пусть X – дискретная с.в., которая принимает значения $x_1,\ x_2,\ \ldots$.

Законом распределения дискретной с.в. X называется соответствие между возможными значениями x_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ и их вероятностями $p_i = P(X = x_i)$; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) или графически.

При табличном задании закона распределения дискретной с.в. первая строка содержит возможные значения с.в., а вторая – их вероятности:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Такую таблицу обычно называют *рядом распределения*. Так как события $X = x_1,\ X = x_2,\ \ldots,\ X = x_n$ несовместны и образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Если множество возможных значений с.в. X счётно, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится, причём $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Закон распределения дискретной с.в. можно изобразить графически. Для этого в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а затем соединяют их отрезками. Полученную ломаную называют *многоугольником распределения*.

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся на практике законы распределений дискретных случайных величин.

Биномиальное распределение. Дискретная с.в. X имеет *биномиальное распределение* (или *распределена по биномиальному закону*), если она принимает значения $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ с вероятностями

$$p_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $0 < p < 1,\ q = 1 - p$.

Как видим, вероятности p_k находятся по формуле Бернулли, полученной в пункте 1.12. Таким образом, случайную величину X, распределённую по биномиальному закону, можно рассматривать как число появлений события A в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли; при этом p – вероятность наступления события A в каждом из испытаний.

Распределение Пуассона. Дискретная с.в. X имеет *распределение Пуассона* (или *распределена по закону Пуассона*), если она принимает значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Отметим, что распределение Пуассона возникло в теореме Пуассона (п. 1.13) как предельное распределение для числа появлений события A в n испытаниях схемы Бернулли, когда $n \to \infty$, а $p \to 0$ так, что $np = \lambda$ – постоянная величина.

Геометрическое распределение. Дискретная с.в. X имеет *геометрическое распределение*, если она принимает значения $k = 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$p_k = P(X = k) = pq^{k-1},$$

где $0 < p < 1,\ q = 1 - p$.

Геометрическое распределение также связано со схемой Бернулли: по этому закону распределена с.в. X, равная числу испытаний, проведённых до первого появления события A.

2.3. Функция распределения случайной величины

Функцией распределения с.в. X называется функция $F(x)$, которая для любого $x \in \mathbf{R}$ равна вероятности события $X < x$:

$$F(x) = P(X < x).$$

Теорема 2.1. Функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1$ для любого $x \in \mathbf{R}$;
2. $F(x)$ – неубывающая функция на **R**;
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
4. $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;
5. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$.

2.4. Непрерывные случайные величины

Выше было дано понятие непрерывной с.в. Приведём теперь более строгое определение.

Случайная величина *X* называется *непрерывной* с.в., если существует такая неотрицательная, интегрируемая по Риману на интервале $(-\infty, +\infty)$ функция $p(x)$, что при всех $x \in \mathbf{R}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt,$$

где $F(x)$ – функция распределения с.в. *X*. Функция $p(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* (*плотностью распределения* или просто *плотностью*) случайной величины *X*.

Функция распределения непрерывной с.в. непрерывна на всей числовой оси.

Теорема 2.2. Плотность распределения вероятностей непрерывной с.в. обладает следующими свойствами:

1. $p(x) \ge 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$;
2. $P(a \le X < b) = \int_a^b p(x)dx$ при $a < b$;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ (условие нормировки);
4. $F'(x) = p(x)$ в точках непрерывности функции $p(x)$;
5. $P(x \le X < x + \Delta x) = p(x)\Delta x + o(\Delta x)$ в точках непрерывности $p(x)$.

Теорема 2.3. Если *X* – непрерывная с.в., то для любого $x_0 \in \mathbf{R}$

$$P(X = x_0) = 0.$$

Следствие. Для непрерывной с.в. *X* справедливы равенства

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b).$$

2.5. Основные непрерывные распределения

Равномерное распределение. Непрерывная с.в. X имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a,\ b]$, если её плотность распределения задана формулой

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } \ x \in [a,\ b], \\ 0 & \text{при } \ x \notin [a,\ b]. \end{cases}$$

Находим функцию распределения с.в. X, распределённой по равномерному закону:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } \ a \le x \le b, \\ 1 & \text{при } \ x > b. \end{cases}$$

Графики плотности $p(x)$ и функции распределения $F(x)$ для равномерного распределения на отрезке $[a, b]$ изображены на рис. 6.

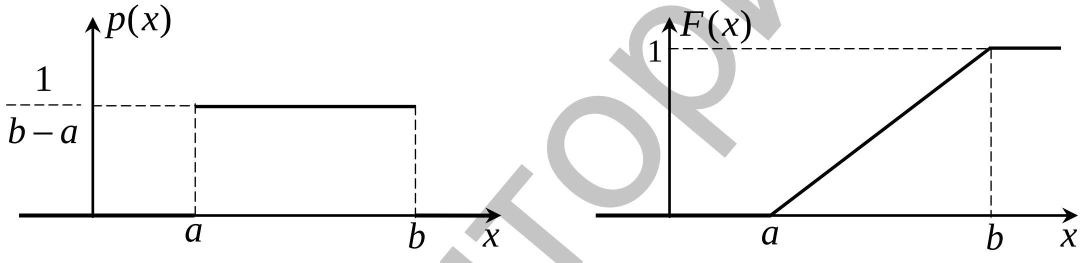


Рис. 6

Показательное распределение. Непрерывная с.в. X имеет *показательное* (*экспоненциальное*) распределение, если её плотность имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } \ x \ge 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Для функции распределения с.в. X, распределённой по показательному закону, нетрудно получить следующее выражение:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } \ x \ge 0. \end{cases}$$

Графики плотности $p(x)$ и функции распределения $F(x)$ для показательного распределения изображены на рис. 7.

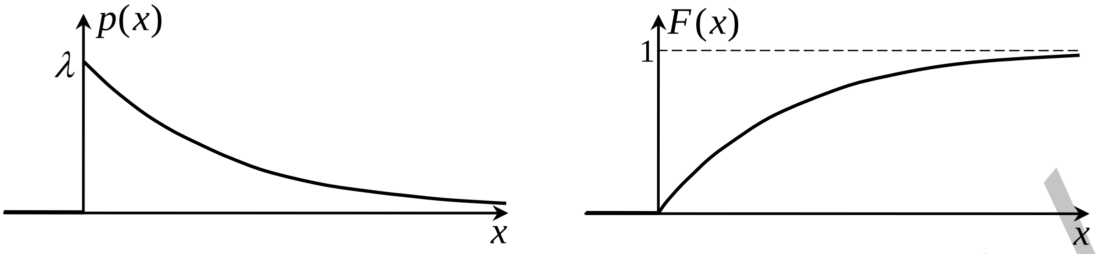


Рис. 7

Нормальное распределение. Непрерывная с.в. X имеет *нормальное* распределение с параметрами $m \in \mathbf{R}$ и $\sigma > 0$, если её плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Функция распределения с.в. X, распределённой по нормальному закону, выражается формулой

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ \text{(\textit{функция Лапласа})}.$$

Замечание 2.2. Функция Лапласа $\Phi(x)$ связана с нормированной функцией Лапласа $\Phi_0(x)$ (п. 1.13, формула 1.14) равенством

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + 0{,}5. \ \bullet$$

Графики плотности и функции распределения для нормального распределения изображены на рис. 8.

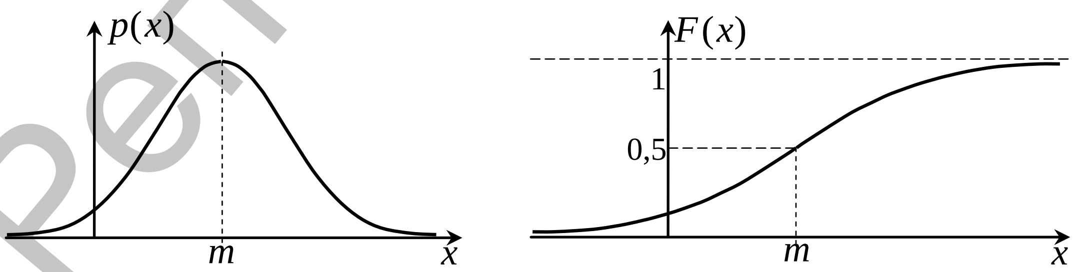


Рис.8

Вероятность попадания с.в. X, распределённой по нормальному закону, в интервал (a, b), находится по формуле

$$P(a < X < b) = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \qquad (2.1)$$

Пример 2.2. Вычислить вероятность попадания с.в. X, распределённой по нормальному закону с параметрами m и σ, в интервал $(m-3\sigma,\ m+3\sigma)$.

Решение. Полагая в формуле (2.1) $a = m-3\sigma,\ b = m+3\sigma$, получаем

$$P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = \Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(3)$$

(здесь была учтена нечётность функции $\Phi_0(x)$). По таблице значений функции $\Phi_0(x)$ находим: $\Phi_0(3) = 0{,}49865$. Следовательно,

$$P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = 0{,}9973.$$

Таким образом, практически достоверно, что с.в. X принимает свои значения в промежутке $(m-3\sigma,\ m+3\sigma)$. Полученный результат называется «правилом трёх σ». ●

2.6. Понятие многомерной случайной величины

Пусть в некотором эксперименте одновременно наблюдается n случайных величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$.

Упорядоченный набор случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *n-мерной (многомерной) случайной величиной* или *n-мерным случайным вектором*.

Одномерные случайные величины X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются *компонентами (составляющими)* n-мерной с.в. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Многомерные случайные величины могут быть *дискретными*, *непрерывными* и *смешанными* в зависимости от типа их компонент. В первом случае все компоненты многомерной с.в. являются дискретными случайными величинами, во втором – непрерывными. Компонентами смешанной многомерной с.в. являются случайные величины разных типов.

2.7. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины

Рассмотрим дискретную двумерную с.в. (X, Y). Пусть с.в. X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots$, а с.в. Y – только значения $y_1,\ y_2, \ldots$. Тогда множество возможных значений двумерной с.в. (X, Y) составляют пары значений $(x_i,\ y_j)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ j = 1,\ 2,\ \ldots$.

Через $P(X = x_i,\, Y = y_j)$ будем обозначать вероятность произведения событий $X = x_i$ и $Y = y_j$.

Перечень возможных значений пар компонент $(x_i,\, y_j)$ и соответствующих каждой такой паре вероятностей

$$p_{ij} = P(X = x_i,\, Y = y_j)$$

называется *законом распределения дискретной двумерной с.в.* $(X,\, Y)$.

Если множества возможных значений случайных величин X и Y конечны, то распределение дискретной двумерной с.в. $(X,\, Y)$ можно задать в виде *таблицы совместного распределения*:

$X \backslash Y$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	$\boldsymbol{y_m}$
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	$\boldsymbol{p_{1m}}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\boldsymbol{\ldots}$
x_i	p_{i1}		p_{ij}	$\ldots$	$\boldsymbol{p_{im}}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\boldsymbol{\ldots}$
$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{p_{n1}}$		$\boldsymbol{p_{nj}}$	$\boldsymbol{\ldots}$	$\boldsymbol{p_{nm}}$

Так как события, означающие одновременное выполнение равенств $X = x_i,\, Y = y_j$ $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n;\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m)$, являются попарно несовместными и образуют полную группу, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Одномерные законы распределения отдельных компонент выражаются через вероятности совместных значений по формулам

$$p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\,, \qquad p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\,.$$

2.8. Функция распределения многомерной случайной величины

Функцией распределения n-мерной с.в. $(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$ называется функция $F(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, которая для любых действительных $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ равна вероятности произведения событий $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2,\, \ldots,\, X_n < x_n$:

$$F(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = P(X_1 < x_1,\, X_2 < x_2,\, \ldots,\, X_n < x_n).$$

В частности, для двумерной с.в. $(X,\, Y)$ функция распределения определяется равенством

$$F(x, y) = P(X < x,\, Y < y).$$

Геометрически функция распределения $F(x, y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке $M(x, y)$, лежащий левее и ниже её (заштрихованная область на рис. 9).

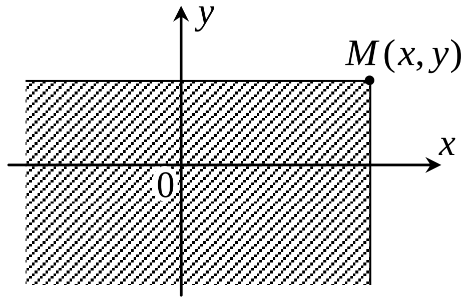


Рис. 9

Теорема 2.4. Функция распределения $F(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x, y) \le 1$ в любой точке $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;
2. $F(x, y)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0$;
4. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$;
5. $\lim\limits_{y \to +\infty} F(x, y) = F_X(x)$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x, y) = F_Y(y)$,

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ – функции распределения случайных величин X и Y, т.е. $F_X(x) = P(X < x)$, $F_Y(y) = P(Y < y)$;

6. $F(x, y)$ непрерывна слева в любой точке $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ по каждому из аргументов x и y.

2.9. Непрерывная двумерная случайная величина

Двумерная случайная величина (X, Y) называется *непрерывной*, если её функция распределения $F(x, y)$ непрерывна в $\mathbf{R}^2$ и существует такая неотрицательная интегрируемая по Риману в бесконечных пределах по каждой из переменных функция $p(x, y)$, что

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} ds \int_{-\infty}^{y} p(s, t) dt.$$

Функция $p(x, y)$ называется *плотностью распределения* (или *совместной плотностью*) двумерной с.в. (X, Y).

Теорема 2.5. Пусть (X,Y) – непрерывная двумерная с.в. с плотностью распределения $p(x,y)$. Тогда:

1. $p(x,y)\ge 0$ при всех $(x,y)\in \mathbf{R}^2$;

2. $P((X,Y)\in G)=\iint\limits_G p(x,y)dxdy$, G – область в $\mathbf{R}^2$;

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(s,t)dt = 1$;

4. $p(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$, если $(x,\ y)$ – точка непрерывности функции $p(x,y)$;

5. $P(x\le X< x+\Delta x,\ y\le Y< y+\Delta y)\approx p(x,y)\Delta x\Delta y$;

6. X и Y – непрерывные случайные величины, причём их плотности $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ выражаются через совместную плотность $p(x,y)$ следующим образом:

$$p_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy,\quad p_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx. \qquad (2.2)$$

Замечание 2.3. По аналогии с двумерным случаем определяется непрерывная n-мерная с.в. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$; её функция распределения имеет вид

$$F(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(t_1,\ \ldots,\ t_n)dt_1\ldots dt_n .$$

Свойства плотности $p(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ аналогичны свойствам плотности $p(x,\ y)$. В частности, плотность распределения одномерной с.в. X_1 выражается через плотность $p(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ следующим образом:

$$p_{X_1}(x_1)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)dx_2dx_3\ldots dx_n . \bullet$$

2.10. Условные законы распределения компонент двумерных случайных величин

Условным законом распределения одной из компонент двумерной с.в. $(X,\ Y)$, называется её закон распределения, найденный при условии, что другая компонента приняла определённое значение (или попала в какой-то определённый интервал).

1. Пусть (X,Y) – дискретная двумерная с.в., компонента X которой принимает значения $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, а компонента Y – значения

$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$. Как известно (см. п. 2.7), закон распределения двумерной с.в. $(X,\ Y)$ задаётся набором вероятностей

$$p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Для краткости записи условную вероятность того, что с.в. X примет значение x_i при условии, что $Y = y_j$, обозначим через $p(x_i \mid y_j)$:

$$p(x_i \mid y_j) = P(X = x_i \mid Y = y_j).$$

Согласно определению условной вероятности (п. 1.8),

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{P(X = x_i,\ Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}.$$

Совокупность условных вероятностей

$$p(x_1 \mid y_j),\ \ p(x_2 \mid y_j),\ \ \ldots,\ \ p(x_n \mid y_j)$$

представляет собой *условный закон распределения с.в. X при условии, что* $Y = y_j$.

Аналогично определяется *условный закон распределения с.в. Y при условии, что* $X = x_i$:

$$p(y_j \mid x_i) = P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(X = x_i,\ Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

где $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

Замечание 2.4. Сумма вероятностей условного закона распределения равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i \mid y_j) = 1, \qquad \sum_{j=1}^{m} p(y_j \mid x_i) = 1.$$

2. Пусть $(X,\ Y)$ – непрерывная двумерная с.в. с совместной плотностью распределения $p(x, y)$. Через $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ обозначаем, как и выше, плотности распределений одномерных случайных величин X и Y.

Условной плотностью с.в. X при условии $Y = y$ называется функция $p_X(x \mid y)$, определяемая соотношением

$$p_X(x \mid y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \qquad (p_Y(y) \neq 0).$$

Аналогично определяется *условная плотность с.в. Y при условии* $X = x$:

$$p_Y(y \mid x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)} \qquad (p_X(x) \neq 0).$$

В силу равенств (2.2) условные плотности можно выразить через совместную плотность следующим образом:

$$p_X(x\,|\,y)=\frac{p(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx}, \qquad p_Y(y\,|\,x)=\frac{p(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy}.$$

Как и любая плотность распределения, условные плотности обладают следующими свойствами:

$$p_X(x\,|\,y)\ge 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_X(x\,|\,y)dx=1,$$

$$p_Y(y\,|\,x)\ge 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_Y(y\,|\,x)dy=1.$$

2.11. Независимые случайные величины

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называются *независимыми* (по-другому: *независимыми в совокупности, взаимно независимыми*), если для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ являются независимыми в совокупности события $X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n$ (см. п. 1.9).

Теорема 2.6. Для независимости случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ выполнялось равенство

$$F(x_1, \ldots, x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot F_{X_n}(x_n),$$

где $F(x_1, \ldots, x_n)$ – функция распределения n-мерной с.в. $(X_1, \ldots, X_n)$, $F_{X_i}(x_i)$ – функция распределения с.в. X_i, $i=1, \ldots, n$.

Теорема 2.7. Непрерывные случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы тогда и только тогда, когда n-мерная с.в. $(X_1, \ldots, X_n)$ непрерывна и её плотность $p(x_1, \ldots, x_n)$ представляется в виде

$$p(x_1, \ldots, x_n)=p_{X_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot p_{X_n}(x_n),$$

где $p_{X_i}(x_i)$ – плотность с.в. X_i, $i=1, \ldots, n$.

Для дискретных случайных величин справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8. Дискретные случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ выполняется равенство

$$P(X_1=x_1, \ldots, X_n=x_n)=P(X_1=x_1)\cdot\ldots\cdot P(X_n=x_n).$$

Замечание 2.5. Из теорем 2.7 и 2.8, в частности, следует:

1. Если компоненты непрерывной с.в. (X,Y) являются независимыми случайными величинами, то их условные плотности равны безусловным:

$$p_X(x\,|\,y)=p_X(x),\qquad p_Y(y\,|\,x)=p_Y(y).$$

2. Если компоненты дискретной с.в. (X,Y) независимы, то их условные законы распределения совпадают с безусловными:

$$p(x_i\,|\,y_j)=p_{i\bullet},\qquad p(y_j\,|\,x_i)=p_{\bullet j}.\ \bullet$$

2.12. Функции случайных величин. Закон распределения функции одной случайной величины

Пусть $X_1,\ \ldots,\ X_n$ – случайные величины, связанные с некоторым опытом, и $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ – действительнозначная функция n действительных переменных, область определения которой содержит все возможные значения n-мерной с.в. $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$. Тогда можно определить с.в. Y, которая принимает свои значения в зависимости от того, какие значения принимают случайные величины $X_1,\ \ldots,\ X_n$, а именно: если в результате опыта случайные величины $X_1,\ \ldots,\ X_n$ приняли значения $x_1,\ \ldots,\ x_n$, то с.в. Y принимает значение $y=f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$. При этом Y называют *функцией случайных величин* $X_1,\ \ldots,\ X_n$ и записывают: $Y=f(X_1,\ \ldots,\ X_n)$.

1. Пусть X — дискретная с.в., принимающая значения $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$. Множество возможных значений с.в. Y составляют все различные числа среди чисел $f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n)$. Пусть y_j – одно из возможных значений с.в. Y. Событие $Y=y_j$ эквивалентно сумме тех событий $X=x_i$, для которых $f(x_i)=y_j$. Поскольку все слагаемые в этой сумме — события несовместные, то

$$P(Y=y_j)=\sum_{i:\,f(x_i)=y_j}P(X=x_i)=\sum_{i:\,f(x_i)=y_j}p_i$$

(суммирование ведётся по всем i, для которых $f(x_i)=y_j$).

2. Пусть X – непрерывная с.в. с плотностью распределения $p_X(x)$. Предположим, что все возможные значения с.в. X составляют интервал $(a,\ b)$ (в частности, $a=-\infty,\ b=+\infty$), а функция $f(x)$ строго монотонна и дифференцируема на интервале $(a,\ b)$. В этом случае множеством всех значений с.в. $Y=f(X)$ также является интервал; обозначим его $(c,\ d)$. Можно доказать, что плотность с.в. Y имеет следующий вид:

$$p_Y(y)=\begin{cases}p_X(f^{-1}(y))\cdot|(f^{-1}(y))'| & \text{при}\ \ y\in(c,\ d),\\ 0 & \text{при}\ \ y\notin(c,\ d),\end{cases}\qquad (2.3)$$

где $f^{-1}(y)$ – функция, обратная функции $f(x)$.

Пример 2.3. Пусть с.в. X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ (см. п. 2.5). Найти плотность распределения с.в. $Y = aX + b$, где $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Решение. В данном случае имеем: $f(x) = ax + b$ – строго возрастающая (при $a > 0$) или строго убывающая (при $a < 0$) на всей числовой оси функция. Находим

$$f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}, \quad (f^{-1}(y))' = \frac{1}{a}.$$

Как легко видеть, множеством возможных значений с.в. Y является интервал $(-\infty, +\infty)$. Согласно формуле (2.3), получаем

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(am+b))^2}{2(|a|\sigma)^2}}.$$

Таким образом, с.в. $Y = aX + b$ также распределена по нормальному закону с параметрами, равными $am + b$ и $|a|\sigma$. ●

Замечание 2.6. Из примера 2.3., в частности, следует: если с.в. X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ, то с.в. $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$ также распределена нормально с параметрами 0 и 1. ●

2.13. Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание. *Математическим ожиданием* (или *средним значением*) *дискретной с.в. X*, имеющей закон распределения $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$, называется число $M(X)$, определяемое формулой

$$M(X) = \sum_i x_i p_i.$$

Математическим ожиданием непрерывной с.в. X с плотностью распределения вероятностей $p(x)$ называется число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx.$$

Теорема 2.9. Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $M(C) = C$, если C – константа (дискретная с.в., принимающая значение C с вероятностью 1);
2. $M(kX) = kM(X)$, если k – константа;
3. $M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$;

4. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n)$ для независимых (в совокупности) случайных величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$;

5. Если $X \geq 0$ (т.е. с.в. *X* принимает только неотрицательные значения), то $M(X) \geq 0$.

Дисперсия. *Дисперсией* с.в. *X* называется число $D(X)$, определяемое формулой

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - M(X))^2\, p_i, & \text{если с.в. } X \text{ дискретная,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2\, p(x) dx, & \text{если с.в. } X \text{ непрерывная.} \end{cases}$$

Теорема 2.10. Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. $D(X) \geq 0$;

2. $D(C) = 0$, если C – константа;

3. $D(kX) = k^2 D(X)$, если k – константа;

4. $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$ для независимых (в совокупности) случайных величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$;

5. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ для независимых случайных величин *X* и *Y*;

6. $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Среднее квадратическое отклонение. *Средним квадратическим отклонением* с.в. *X* называется число

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}.$$

Мода и медиана. *Модой дискретной с.в. X*, принимающей значения $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, называется наиболее вероятное её значение по сравнению с соседними, т.е. такое значение x_m, что

$$P(X = x_m) = \max_{m-1 \leq i \leq m+1} P(x = x_i).$$

Модой непрерывной с.в. X (обозначение: $M_o(X)$) называется точка локального максимума плотности распределения.

Медианой непрерывной с.в. *X* называется число $M_e(X)$, удовлетворяющее условию

$$P(X < M_e(X)) = P(X \geq M_e(X)) = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.4 (биномиальное распределение). Как известно (см. п. 2.2), с.в. *X*, имеющую биномиальное распределение, можно рассматривать как число появлений события *A* в *n* испытаниях, проводимых по схеме

Бернулли (p – вероятность наступления события A в каждом из испытаний). Пусть с.в. X_i – число появлений события A в i-м испытании. Тогда

$$X = X_1 + \ldots + X_n.$$

Каждая с.в. X_i ($i = 1, \ldots, n$) может принимать только два значения: $x_1 = 1$ с вероятностью p и $x_2 = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$. Поэтому

$$M(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$M(X) = M(X_1) + \ldots + M(X_n) = np.$$

В силу независимости исходов испытаний случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы. Поэтому, согласно свойству 4 дисперсии (теорема 2.10),

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

Дисперсию каждой с.в. X_i найдём, используя свойство 6 дисперсии:

$$M(X_i^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p,$$

$$D(X_i) = M(X_i^2) - [M(X_i)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Таким образом,

$$D(X) = npq.$$

Пример 2.5 (распределение Пуассона). Для с.в. X, распределённой по закону Пуассона, последовательно находим:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda;$$

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1 + 1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda,$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Пример 2.6 (геометрическое распределение). Пусть с.в. X имеет геометрическое распределение. Вычисляем:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(q^k)}{dq} = p \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k =$$

$$= p \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p};$$

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (k(k-1) + k) pq^{k-1} =$$

$$= pq\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = pq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^2(q^k)}{dq^2} + M(X) =$$

$$= pq\frac{d^2}{dq^2}\sum_{k=0}^{\infty} q^k + \frac{1}{p} = pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) + \frac{1}{p} = pq\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} =$$

$$= \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2} = \frac{q+1}{p^2},$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{q+1}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Пример 2.7 (равномерное распределение). Для с.в. X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a,\ b]$, находим:

$$M(X) = \int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2};$$

$$M(X^2) = \int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 2.8 (показательное распределение). Пусть с.в. X распределена по показательному закону. Тогда

$$M(X) = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\left.xe^{-\lambda x}\right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = 0 - \left.\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda};$$

$$M(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_0^{+\infty} x^2 de^{-\lambda x} =$$

$$= -\left.x^2e^{-\lambda x}\right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx = 0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Пример 2.9 (нормальное распределение). Пусть с.в. X имеет нормальный закон распределения с параметрами m и σ. Как известно (см. замечание 2.6), с.в. $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ также распределена нормально с параметрами 0 и 1. Найдём сначала математическое ожидание и дисперсию с.в. Y:

$$M(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy = 0$$

(так как интеграл сходится, а подынтегральная функция нечётная);

$$M(Y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y d e^{-\frac{y^2}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{y^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0 + 1 = 1,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = 1 - 0 = 1.$$

Теперь с помощью соответствующих свойств математического ожидания и дисперсии (п. 2.13) находим математическое ожидание и дисперсию с.в. $X = \sigma Y + m$:

$$M(X) = \sigma M(Y) + m = m, \qquad D(X) = \sigma^2 D(Y) = \sigma^2.$$

Часть III. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Неравенства Маркова и Чебышева

Теорема 3.1 (неравенство Маркова). Пусть X – неотрицательная с.в., имеющая математическое ожидание $M(X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Неравенство Маркова можно записать в другой форме:

$$P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Теорема 3.2 (неравенство Чебышева). Пусть X – с.в., имеющая математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Другая форма неравенства Чебышева:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (3.1)$$

Пример 3.1. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что отклонение с.в. X от своего математического ожидания будет меньше $3\sigma_X$.

Решение. Полагая $\varepsilon = 3\sigma_X$ в формуле (3.1), получаем

$$P(|X - M(X)| < 3\sigma_X) \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{(3\sigma_X)^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}8889. \bullet$$

3.2. Теоремы Чебышева и Бернулли

Будем говорить, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ является *последовательностью независимых случайных величин*, если при любом натуральном $n \geq 2$ случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы.

Теорема 3.3 (теорема Чебышева). Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, обладающих математическими ожиданиями $M(X_i)$ и дисперсиями $D(X_i)$, причём дисперсии ограничены в совокупности (т.е. существует такая константа $C > 0$, что $D(X_i) \leq C$, $i = 1, 2, \ldots$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Следствие. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $M(X_i) = m$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \qquad (3.2)$$

Последовательность случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots$ называется *сходящейся по вероятности* к числу b, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Y_n - b\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

(или $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Y_n - b\right| < \varepsilon\right) = 1$); символическая запись:

$$Y_n \xrightarrow{P} b.$$

Замечание 3.1. Соотношение (3.2), выражающее частный случай теоремы Чебышева, можно записать в виде

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} m. \qquad \bullet$$

Теорема 3.4 (теорема Я. Бернулли). Пусть k – число наступлений события A в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

где p – вероятность появления события A в каждом из испытаний.

Таким образом, теорема Бернулли утверждает, что относительная частота $\frac{k}{n}$ сходится по вероятности к вероятности $P(A) = p$.

3.3. Центральная предельная теорема

Теорема 3.5. Пусть $X_1,\ X_2,\ \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих математическое ожидание $M(X_i)=m$ и дисперсию $D(X_i)=\sigma^2>0,\ i=1,\ 2,\ \ldots$. Тогда для любого $x\in\mathbf{R}$

$$P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}<x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \quad (3.3)$$

Замечание 3.2. Соотношение (3.3) означает, что при $n\to\infty$ закон распределения с.в.

$$Z_n=\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

неограниченно приближается к нормальному закону распределения с параметрами 0 и 1 (см. п. 2.5, нормальное распределение). ●

Часть IV. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

4.1. Выборка. Статистическое распределение выборки и её графическое представление

Будем предполагать, что каждый исход некоторого случайного эксперимента характеризуется одним из возможных значений с.в. X. В таком случае говорят, что с.в. X *наблюдается* в данном эксперименте.

Повторив n раз эксперимент в одинаковых условиях, получим последовательность из n наблюдённых значений с.в. X: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Набор чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ называется *выборкой*.

Числа x_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ называются *элементами выборки*, а их количество n — *объёмом выборки*.

Выборку можно упорядочить, расположив её элементы в неубывающем порядке:

$$x_{(1)}\le x_{(2)}\le\ldots\le x_{(n)}.$$

Полученная таким образом последовательность чисел

$$x_{(1)},\ x_{(2)},\ \ldots,\ x_{(n)}$$

называется *вариационным рядом.*

Различные значения с.в. X, представленные в выборке, называются *вариантами*.

Если в выборке объема n варианта x_i встретилась n_i раз, то число n_i называется *частотой*, а число $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ – *относительной частотой (частостью)* этой варианты. Очевидно, что сумма всех частот равна объёму выборки n, а сумма всех относительных частот равна единице.

Статистическим рядом распределения выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Обычно статистический ряд записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит варианты x_i, а вторая — их частоты n_i (или относительные частоты w_i). При этом варианты располагаются в порядке возрастания.

Как правило, статистический ряд распределения составляется в случае, когда наблюдаемая с.в. X является дискретной.

Графически статистический ряд распределения выборки изображается следующим образом. В прямоугольной декартовой системе координат строят точки с координатами $(x_i,\ n_i)$. Последовательно соединив их отрезками, получают ломаную линию, называемую *полигоном частот*. Аналогично строится *полигон относительных частот*.

Пример 4.1. Имеется выборка значений с.в. X объёма $n = 15$:

$$0,\ 3,\ -5,\ -3,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 0,\ 0,\ -3,\ 1,\ -1,\ 0,\ -1.$$

Вариационным рядом для неё будет последовательность

$$-5,\ -3,\ -3,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3.$$

Статистический ряд распределения данной выборки имеет вид

x_i	-5	-3	-1	0	1	3
n_i	1	2	2	5	3	2

или

x_i	-5	-3	-1	0	1	3
w_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

Полигон частот изображён на рис. 10.

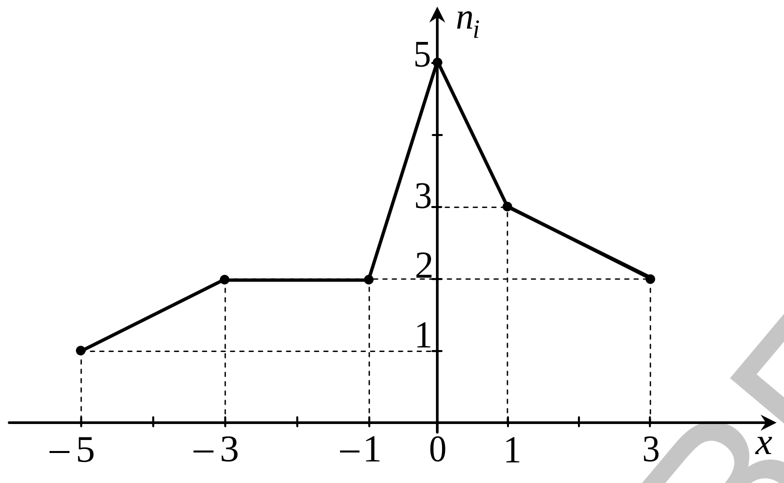


Рис.10

В случае, когда X является непрерывной с.в. или же вариационный ряд имеет большое количество вариант, элементы выборки объединяют в группы (разряды), представляя результаты опытов в виде *интервального (группированного) статистического ряда распределения*. Для этого интервал, содержащий все значения выборки, разбивают на k непересекающихся интервалов

$$[a_0,\ a_1),\ \ [a_1,\ a_2),\ \ \ldots,\ \ [a_{k-1},\ a_k\,].$$

Затем для каждого интервала разбиения определяют *частоту* – количество элементов выборки, попавших в этот интервал: n_i – частота, соответствующая i-му интервалу разбиения $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$. Наряду с частотами находят также *относительные частоты* $w_i=\dfrac{n_i}{n}$ (n – объём выборки). Интервальный статистический ряд записывают в виде таблицы, в первой строке которой содержатся интервалы группировки, а во второй – соответствующие частоты n_i или относительные частоты w_i.

Интервальный статистический ряд распределения изображают с помощью *гистограммы частот*. Для этого на оси абсцисс откладывают интервалы группировки и на них, как на основании, строят прямоугольники с высотами $h_i=\dfrac{n_i}{a_i-a_{i-1}}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$. Аналогично строится *гистограмма относительных частот*.

Пример 4.2. Выборка 100 значений наблюдаемой непрерывной с.в. X представлена в виде следующего интервального статистического ряда распределения:

Интервал	[22, 24)	[24, 26)	[26, 28)	[28, 30)	[30, 32)	[32, 34]
Частота	2	14	34	40	8	2

Построить гистограмму частот.

Решение. В данном случае $a_i - a_{i-1} = 2$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Находим высоты прямоугольников:

$$h_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad h_2 = \frac{14}{2} = 7, \quad h_3 = \frac{34}{2} = 17,$$

$$h_4 = \frac{40}{2} = 20, \quad h_5 = \frac{8}{2} = 4, \quad h_6 = \frac{2}{2} = 1.$$

Гистограмма частот изображена на рис. 11.

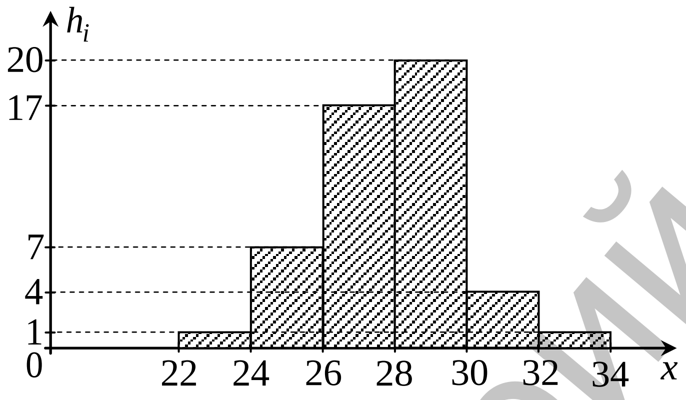


Рис. 11

4.2. Эмпирическая функция распределения

Эмпирической (выборочной) функцией распределения с.в. X называют функцию $F_n^*(x)$, которая при каждом $x \in \mathbf{R}$ равна относительной частоте события $X < x$, т.е.

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число элементов выборки, меньших x.

Эмпирическая функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F_n^*(x) \le 1$ для любого $x \in \mathbf{R}$;
2. $F_n^*(x)$ не убывает на $\mathbf{R}$;
3. $F_n^*(x) = 0$ при $x \le x_{\min}$, $F_n^*(x) = 1$ при $x > x_{\max}$, где $x_{\min}$ и $x_{\max}$ – соответственно наименьший и наибольший элементы выборки;
4. $F_n^*(x)$ непрерывна слева в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$.

График эмпирической функции распределения имеет ступенчатый вид. В промежутках между соседними вариантами выборки $F_n^*(x)$ сохраняет постоянное значение. В точках оси Ox, равных вариантам выборки,

$F_n^*(x)$ претерпевает скачки; величина скачка в точке $x = x_i$ равна относительной частоте варианты x_i.

Пример 4.3. В условиях примера 4.1 найти эмпирическую функцию распределения с.в. X и построить её график.

Решение. В данном случае $n = 15$. По статистическому ряду распределения находим

$$F_{15}^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -5, \\ \dfrac{1}{15} & \text{при} \quad -5 < x \le -3, \\ \dfrac{3}{15} & \text{при} \quad -3 < x \le -1, \\ \dfrac{5}{15} & \text{при} \quad -1 < x \le 0, \\ \dfrac{10}{15} & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ \dfrac{13}{15} & \text{при} \quad 1 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

График $F_{15}^*(x)$ изображён на рис. 12.

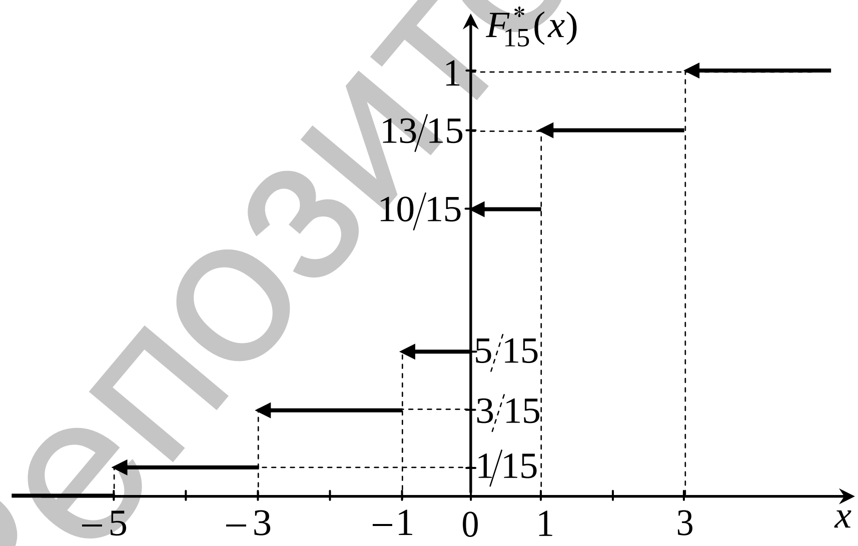


Рис. 12

4.3. Числовые характеристики выборки

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка объёма n.

Выборочным средним $\bar{x}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего $\bar{x}$:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 .$$

Выборочную дисперсию можно вычислять также по формуле

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 .$$

Замечание 4.1. Если выборка представлена статистическим рядом распределения, то значения $\bar{x}$ и $D_в$ находят по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i , \qquad (4.1)$$

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - (\bar{x})^2, \qquad (4.2)$$

где x_i – варианты, n_i – соответствующие им частоты. ●

Замечание 4.2. Для интервального статистического ряда выборочное среднее и выборочную дисперсию также вычисляют по формулам (4.1) и (4.2). В качестве x_i берут середины интервалов ряда, а в качестве n_i – частоты соответствующих интервалов. ●

Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$ определяется формулой

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} .$$

Модой M_o^* выборки называют варианту, имеющую наибольшую частоту. *Медианой* M_e^* выборки называется число, которое делит вариационный ряд

$$x_{(1)},\ x_{(2)},\ \ldots,\ x_{(n)}$$

на две части, содержащие равное число элементов, а именно: если $n = 2k$ $(k \in \mathbf{N})$, то $M_e^* = \dfrac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}$; если $n = 2k+1$, то $M_e^* = x_{(k+1)}$.

4.4. Точечные оценки неизвестных параметров распределения

Пусть $F(x,\ \theta)$ – функция распределения с.в. X, θ – неизвестный параметр. Предполагаем, что общий вид функции $F(x,\ \theta)$ задан.

Пусть в результате n наблюдений за с.в. X получена выборка

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n. \tag{4.3}$$

По выборке требуется найти приближённое значение параметра θ.

Элементы выборки (4.3) можно рассматривать последовательно как частные значения n независимых случайных величин

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,$$

каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и с.в. X.

Любая функция случайных величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ называется *статистикой*.

Пусть $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ – некоторая статистика. Значение $\tilde{\theta}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, принятое статистикой $\tilde{\theta}$ на выборке (4.3), называется её *выборочным значением*.

Важными примерами статистик являются *выборочное среднее*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

и *выборочная дисперсия*

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

Определённые в пункте 4.3 числовые характеристики выборки $\bar{x}$ (выборочное среднее) и $D_в$ (выборочная дисперсия) являются выборочными значениями одноимённых статистик $\overline{X}$ и S^2.

Статистика $\tilde{\theta}$, выборочное значение которой принимается за приближённое значение неизвестного параметра θ, называется его *точечной оценкой* или просто *оценкой*.

Основными свойствами оценок, характеризующими их качество, являются *несмещённость*, *состоятельность* и *эффективность*.

Оценку $\tilde{\theta}$ параметра θ называют *несмещённой*, если

$$M(\tilde{\theta}) = \theta.$$

В противном случае оценка называется *смещённой*.

Оценку $\tilde{\theta}_n = \tilde{\theta}_n(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ параметра θ называют *состоятельной*, если она сходится по вероятности к θ при $n \to \infty$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P(|\tilde{\theta}_n - \theta| \ge \varepsilon) = 0.$$

Несмещённая оценка $\tilde{\theta}$ параметра θ называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещённых оценок параметра θ.

Теорема 4.1. Выборочное среднее $\overline{X}$ является несмещённой и состоятельной оценкой математического ожидания m с.в. X.

Теорема 4.2. Выборочная дисперсия S^2 является смещённой и состоятельной оценкой дисперсии σ^2 с.в. X.

Легко доказать, что

$$M(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Замечание 4.3. Очевидно, статистика

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad (4.4)$$

является несмещённой оценкой дисперсии σ^2. ●

Статистика S_0^2, определённая формулой (4.4), называется *исправленной выборочной дисперсией*.

4.5. Метод максимального правдоподобия

Рассмотрим один из наиболее распространённых методов получения точечных оценок неизвестных параметров распределения – метод максимального правдоподобия.

Предположим, что известен вид закона распределения с.в. X, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон (параметр θ может быть и векторным: $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка наблюдений с.в. X, по которой требуется оценить параметр θ.

Функцией правдоподобия для оценки параметра θ называется функция

$$L(\theta) = p(x_1, \theta)\, p(x_2, \theta) \ldots p(x_n, \theta),$$

где $p(x, \theta)$ – плотность распределения с.в. X, если X – непрерывная с.в., и $p(x, \theta) = P(X = x)$, если с.в. X дискретная.

Метод максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве оценки параметра θ принимается статистика $\tilde{\theta}$ (векторная статистика $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_r)$, если $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$), выборочное значение которой $\tilde{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является точкой максимума функции правдоподобия. Такую оценку называют *оценкой максимального правдоподобия*.

Так как максимум функций $L(\theta)$ и $\ln L(\theta)$ достигается при одном и том же значении θ, то часто при нахождении оценки максимального правдоподобия используют функцию $\ln L(\theta)$.

Пример 4.4. Найти оценку максимального правдоподобия параметра λ распределения Пуассона.

Решение. В данном случае X – дискретная с.в.,

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots \quad (\lambda>0).$$

Составляем функцию правдоподобия:

$$L(\lambda)=\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}\ldots\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda n}\cdot\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\cdot\frac{1}{x_1!\,x_2!\ldots x_n!}.$$

Следовательно,

$$\ln L(\lambda)=-\lambda n+\ln\lambda\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)-\ln(x_1!\,x_2!\ldots x_n!).$$

Ищем точку максимума функции $\ln L(\lambda)$:

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-n+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i=0.$$

Отсюда получаем

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}.$$

Легко видеть, что $\lambda=\bar{x}$ является точкой максимума функции $\ln L(\lambda)$. Таким образом, $\tilde{\lambda}=\overline{X}$ – искомая оценка. ●

4.6. Интервальное оценивание. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Пусть θ – неизвестный параметр распределения с.в. X.

Пусть статистики $\tilde{\theta}_1=\tilde{\theta}_1(X_1,\,\ldots,\,X_n)$ и $\tilde{\theta}_2=\tilde{\theta}_2(X_1,\,\ldots,\,X_n)$ таковы, что интервал $(\tilde{\theta}_1,\,\tilde{\theta}_2)$ содержит (накрывает) истинное значение параметра θ с заданной вероятностью $p=1-\alpha$:

$$P(\tilde{\theta}_1<\theta<\tilde{\theta}_2)=1-\alpha.$$

Тогда интервал $(\tilde{\theta}_1,\,\tilde{\theta}_2)$ называется *доверительным интервалом* для параметра θ, вероятность $p=1-\alpha$ – *доверительной вероятностью (надёжностью)*, а число α – *уровнем значимости*.

Пусть X – нормально распределённая с.в. Тогда:

1. Если среднее квадратическое отклонение σ известно, то доверительный интервал для математического ожидания m имеет вид

$$\left(\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

где n – объём выборки, $\bar{X}$ – выборочное среднее, $u_{\alpha/2}$ находится по таблице значений функции Лапласа $\Phi_0(x)$ (см. п. 1.13) из условия

$$\Phi_0(u_{\alpha/2}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

2. Если среднее квадратическое отклонение σ неизвестно, то доверительный интервал для математического ожидания m имеет вид

$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2,\,n-1}\frac{S_0}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{\alpha/2,\,n-1}\frac{S_0}{\sqrt{n}} \right),$$

где $S_0 = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$ (исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение), $t_{\alpha/2,\,n-1}$ находится по таблице квантилей распределения Стьюдента из условия

$$P\left(T_{n-1} > t_{\alpha/2,\,n-1}\right) = \alpha/2$$

(здесь T_{n-1} – с.в., распределённая по закону Стьюдента с $n-1$ степенью свободы).

Пример 4.5. По результатам 6 независимых наблюдений над нормально распределённой с.в. *X* найдены выборочное среднее $\bar{x} = 5{,}63$ и исправленная выборочная дисперсия $s_0^2 = 0{,}0625$. Требуется найти доверительный интервал для математического ожидания с.в. *X*, соответствующий доверительной вероятности $1-\alpha = 0{,}99$.

Решение. Находим $s_0 = \sqrt{s_0^2} = \sqrt{0{,}0625} = 0{,}25$. В нашем случае $n-1=5$, $\alpha/2 = 0{,}005$. По таблице квантилей распределения Стьюдента находим значение $t_{\alpha/2,\,n-1} = t_{0{,}005;5} = 4{,}03$. Вычисляем

$$t_{\alpha/2,\,n-1}\frac{s_0}{\sqrt{n}} = 4{,}03 \cdot \frac{0{,}25}{\sqrt{6}} \approx 0{,}41.$$

Искомый доверительный интервал таков: $(5{,}63 - 0{,}41;\ 5{,}63 + 0{,}41)$, т.е. $(5{,}22;\ 6{,}04)$. ●

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ нормально распределённой с.в. *X* имеет вид

$$\left(S_0\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}}},\ S_0\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,n-1}}} \right),$$

где $\chi^2_{1-\alpha/2,\,n-1}$ и $\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}$ находятся по таблице квантилей χ^2-распределения из условий

$$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_{1-\alpha/2,\,n-1}) = \alpha/2, \quad P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{\alpha/2,\,n-1}) = \alpha/2$$

(здесь χ^2_{n-1} – с.в., имеющая χ^2-распределение с $n-1$ степенью свободы).

4.7. Проверка гипотез о виде закона распределения. Критерий χ^2 Пирсона

Пусть необходимо проверить гипотезу, состоящую в том, что наблюдаемая в эксперименте с.в. X распределена по некоторому известному закону (нормальному, биномиальному, Пуассона и т.д.). Проверяемая гипотеза называется *нулевой* и обозначается H_0.

Для проверки гипотезы H_0 производится выборка значений с.в. X. Требуется сделать заключение: согласуются ли данные выборки с высказанным предположением. Для этого используют специально подобранную статистику $Z(X_1, \ldots, X_n)$, по выборочному значению которой судят о справедливости гипотезы H_0.

Правило, согласно которому проверяемая гипотеза H_0 принимается или отвергается, называется *критерием согласия*, а статистика $Z(X_1, \ldots, X_n)$, с помощью которой это правило определяется, называется *статистикой критерия*.

Поскольку проверка статистической гипотезы осуществляется на основании выборочных данных, носящих случайный характер, то всегда присутствует возможность ошибочно отвергнуть гипотезу H_0, когда на самом деле она верна. Поэтому заранее задаётся малое число α – вероятность, с которой мы можем позволить себе отвергнуть верную гипотезу H_0. Это число называют *уровнем значимости критерия*. Обычно для α используются стандартные значения: $\alpha = 0{,}001;\ 0{,}005;\ 0{,}01;\ 0{,}05;\ 0{,}1$.

Критериев согласия существует много. Мы рассмотрим наиболее часто используемый на практике критерий согласия – *критерий* χ^2 *Пирсона*.

Предположим, что сформулирована гипотеза H_0, состоящая в том, что с.в. X имеет закон распределения известного вида, зависящий от параметров $\theta_1, \ldots, \theta_r$ (например, нормальный закон с параметрами m и σ или закон Пуассона с параметром λ).

Пусть в результате наблюдений за с.в. X получена выборка объёма n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Для проверки гипотезы H_0 с помощью критерия χ^2 Пирсона поступают следующим образом.

1. Выбирают уровень значимости α.

2. По выборке методом максимального правдоподобия (см. п. 4.5) оценивают параметры предполагаемого закона распределения.

3. Область возможных значений с.в. X разбивают на k непересекающихся множеств $S_1, S_2, \ldots S_k$. Эти множества представляют собой ин-

тервалы в случае, когда X – непрерывная с.в., либо группы отдельных значений, если с.в. X дискретная.

4. Для каждого множества S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, подсчитывают число n_i элементов выборки, попавших в это множество (т.е. находят *эмпирические частоты*).

5. Используя предполагаемый закон распределения с.в. X, вычисляют гипотетические вероятности p_i попадания с.в. X в множества S_i:

$$p_i = P(X \in S_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

6. Находят *теоретические частоты* n_i' попадания значений с.в. X в множества S_i:

$$n_i' = np_i.$$

7. Вычисляют выборочное значение $\chi_в^2$ статистики критерия χ^2 Пирсона – случайной величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}. \qquad (4.5)$$

Применение статистики (4.5) для проверки гипотезы H_0 основано на следующей теореме.

Теорема 4.3. Если гипотеза H_0 верна, то статистика (4.5) критерия χ^2 асимптотически при $n \to \infty$ распределена по закону χ^2 с $\nu = k - r - 1$ степенями свободы, где k – число множеств S_i, r — число параметров предполагаемого распределения, оцененных по выборке.

8. По таблице квантилей χ^2-распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1$ находят значение $\chi_{\alpha,\nu}^2$, удовлетворяющее условию

$$P(\chi_\nu^2 > \chi_{\alpha,\nu}^2) = \alpha.$$

9. Сравнивают значения $\chi_в^2$ и $\chi_{\alpha,\nu}^2$. В соответствии с критерием χ^2 Пирсона гипотеза H_0 принимается, если $\chi_в^2 \le \chi_{\alpha,\nu}^2$ (в этом случае говорят также, что гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений). Если $\chi_в^2 > \chi_{\alpha,\nu}^2$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Замечание 4.4. Необходимым условием применения критерия χ^2 Пирсона является выполнение неравенства $n_i' \ge 5$ для всех множеств S_i. Если для некоторых множеств S_i это условие не выполняется, то их следует объединить с соседними. ●

Пример 4.6. При 50 подбрасываниях монеты герб выпал 20 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять $\alpha = 0{,}10$.

Решение. Пусть с.в. X – число появлений герба при одном подбрасывании; она может принимать лишь два значения: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Гипотеза H_0 (монета симметрична) состоит в том, что

$$P(X = 0) = P(X = 1) = 0{,}5.$$

В данном случае $k = 2$, $S_1 = \{0\}$, $S_2 = \{1\}$, $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}5$. По условию $n_1 = 30$, $n_2 = 20$ (эмпирические частоты). Находим теоретические частоты: $n_1' = n_2' = 50 \cdot 0{,}5 = 25$. Вычисляем выборочное значение статистики χ^2:

$$\chi_в^2 = \frac{(30-25)^2}{25} + \frac{(20-25)^2}{25} = 2.$$

Так как гипотетическое распределение не содержит неизвестных параметров, то $r = 0$, и следовательно, число степеней свободы равно $2 - 0 - 1 = 1$. По таблице квантилей χ^2-распределения находим значение $\chi_{\alpha,\nu}^2 = \chi_{0,10;1}^2 = 2{,}706$. Поскольку $\chi_в^2 < \chi_{\alpha,\nu}^2$, проверяемая гипотеза H_0 принимается, т.е. монету можно считать симметричной. ●

ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин, И.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / И.И. Баврин. – М.: Высш. шк., 2005. – 160 с.

2. Боровков, А.А. Теория вероятностей / А.А. Боровков. – 4-е изд. – М.: УРСС, 2003. – 470 с.

3. Бочаров, П.П. Теория вероятностей. Математическая статистика / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 296 с.

4. Виленкин, Н.Я. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики / Н.Я. Виленкин, В.Г. Потапов. – М.: Просвещение, 1979. – 111 с.

5. Герасимович, А.И. Математическая статистика / А.И. Герасимович, Я.И. Матвеева. – Мн.: Выш. шк., 1978. – 200 с.

6. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

7. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с.

8. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей: учебник / Б.В. Гнеденко. – 8-е изд., испр. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.

9. Емельянов, Г.В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович. – 2-е изд., стер. – СПб. [и др.]: Лань, 2007. – 332 с.

10. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.

11. Максимов, Ю.Д. Математика. Выпуск 8. Математическая статистика: опорный конспект / Ю.Д. Максимов. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. – 96 с.

12. Прохоров, Ю.В. Теория вероятностей / Ю.В. Прохоров, Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1973. – 494 с.

13. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: учеб. пособие для вузов / В.А. Ватутин [и др.] – 2-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 328 с.

14. Чистяков, В.П. Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков. – М.: Агар, 2000. – 255 с.

Учебное издание

БОРОДИЧ Сергей Митрофанович
КАВИТОВА Татьяна Валерьевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

Технический редактор	*Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн	*Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать . .2015. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,96. Уч.-изд. л. 1,48. Тираж 60 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.