Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ: МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ, КОМБИНАТОРИКА

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2015

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.122я73
В24

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 23.10.2015 г.

Составители: доценты кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **М.И. Наумик, А.П. Мехович**

Р е ц е н з е н т ы :
заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор *Н.Т. Воробьев;*
заведующий кафедрой автоматизации технологических процессов и производств УО «ВГТУ», доктор технических наук, доцент *А.А. Кузнецов*

В24 **Введение в математику: метод математической индукции, комбинаторика :** методические рекомендации / сост. : М.И. Наумик, А.П. Мехович. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2015. – 42 с.

В предлагаемых методических рекомендациях, предназначенных для студентов первого курса дневной и заочной форм обучения на математическом факультете, разработан весь основной материал по теме «Метод математической индукции, комбинаторика».

Большое количество детально разобранных примеров с подробной теоретической аргументацией позволит студентам различного уровня подготовленности усвоить представленный материал.

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.122я73

Предисловие

Методические рекомендации посвящены теме «Метод математической индукции, комбинаторика».

Метод математической индукции – метод доказательства, который по своему существу связан с понятием числа и в первую очередь имеет наибольшее применение в арифметике, алгебре и теории чисел. Однако понятие числа является основным не только в теории чисел, но и во всей математике, поэтому метод математической индукции широко используется в самых разнообразных ее областях.

Комбинаторика – один из разделов математики, играющий важную роль при решении некоторых современных проблем теории вероятностей, кибернетики, математической логики, теории чисел. Знание комбинаторики необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по теории кодов.

Большое количество детально разобранных примеров с подробной теоретической аргументацией позволит студентам различного уровня подготовленности усвоить представленный материал.

Глава I. Метод математической индукции

§ 1. Алфавит и слова

Алфавитом называется произвольный набор символов, называемых *буквами*. При этом предполагается, что буквы можно воспроизводить в неограниченном количестве, подобно печатным буквам. Набор букв алфавита может быть задан в виде списка конкретных букв, заключенных в фигурные скобки. Можно считать, что в таком списке отсутствуют повторения, – любые две буквы, встречающиеся в алфавите, различны. Будем считать, что каждый алфавит содержит, по крайней мере, одну букву.

Буквы входящие в алфавит U, называются буквами алфавита U. О буквах алфавита U говорят также, что они принадлежат U.

Всякую конечную последовательность букв называют *словом*. Словом в данном алфавите U называется слово, каждая буква которого принадлежит этому алфавиту. Например, слова *a, ba, baab, baaacb* являются словами в алфавите $\{a, b, c\}$. Слова 0, 00, 01, 1, 0101, 1100 можно рассматривать как слова в алфавите $\{0, 1\}$. Так как любая последовательность написанных друг за другом букв алфавита есть слово, то в любом данном алфавите есть сколь угодно длинные слова. Удобно ввести в рассмотрение слово, не содержащее никаких букв; такое слово называется *пустым словом*.

Два слова называют *равными* (графически равными), если они совпадают по написанию, т.е. состоят из одинаковых букв, одинаково расположенных.

Пусть символы A и B, обозначают слова в каком-либо алфавите. Поставим в соответствие паре A, B слова AB, которое получается, если сначала написать слово A, а затем справа приписать к нему слово B. Слово AB называется *композицией* или *сочленением*_слов A и B. Например, если A обозначает слово *bac*, а B слово *aba*, то AB есть слово *bacaba*. Композиция любого слова A с пустым словом считается, по определению, равной слову A.

Легко убедиться, что композиция слов обладает свойством ассоциативности, – для любых трех слов A,B,C композиция слов AB и C равны композиции слов A и BC. Поэтому и ту, и другую композицию будем записывать одинаково: ABC.

Слово B называется *обращением* (*зеркальным образом*) *слова* A, если B состоит из тех вхождений букв, что и A, но записанных в обратном порядке. Например, слово *bac* есть обращение слова *cab*, и наоборот. Слово называется *симметричным*, если оно совпадает со своим обращением; например, слово шалаш, *bab*, 010 суть симметричные слова.

Слово A называется *подсловом слова* B, если найдутся такие слова C и E (возможно пустые), что $B=CAE$. Если A подслово слова B, то говорят, что A входит в B. Для данных слов A и B слово A может иметь вхождение в слово B. Ясно, что пустое слово является подсловом любого слова.

§ 2. Слова в однобуквенном алфавите

Пусть $r = \{ \text{I} \}$ – алфавит, состоящий из одной буквы «I» называемой вертикальной палочкой. Обозначим через N^* множество всех слов в однобуквенном алфавите r. Множеству N^* принадлежит пустое слово, обозначаемое символом O*, слова I, II , III, IIII и т.д. Если n – слово в алфавите r, то и n I – тоже слово в этом алфавите.

Два элемента m и n из N^* называют равными и пишут m=n, если они равны как слова (равны графически). Если слова m и n не равны, то пишут $m \neq n$.

Определение. Пусть m и n – произвольные слова в алфавите r. Композиция слов m и n называется *суммой* m и n и обозначается $m \oplus n$. Операция $\oplus$ называется *операцией сложения*.

Например, композицией слов II и III является слово IIIII. Следовательно II $\oplus$ III=IIIII.

Композиция любого слова n из N^* и пустое слово O* есть, по определению, слово n. Следовательно, $n \oplus$ O*=n, O* $\oplus$ n=n.

Выше отмечалось, что композиция слов обладает свойством ассоциативности. В частности, для любых элементов m и n из N^* верно равенство $m \oplus (n \oplus \text{I}) = (m \oplus n) \oplus \text{I}$ или, поскольку $n \oplus \text{I} = n\text{I}$, $m \oplus n\text{I} = (m \oplus n)\text{I}$. Свойство ассоциативности композиции слов позволяет определить сумму трех слагаемых и более:

$$k \oplus m \oplus n=(k \oplus m) \oplus n,\ k \oplus m \oplus n \oplus l = (k \oplus m \oplus n) \oplus l \text{ и т.д.}$$

Определение. *Произведение двух слов* m и n ($n \neq 0$) называется слово, равное сумме n слагаемых, каждое из которых равно m. Кроме того, полагаем $m \otimes$ O*=O*.

Произведение слов m и n обозначается $m \otimes n$. Операция $\otimes$ называется умножение слов. Таким образом, $m \otimes n = \underbrace{m \oplus m \oplus ... \oplus m}_{n \text{ слагаемых}}$.

Например, для любого m из N^* имеем: $m \otimes$ I=m, $m \otimes$ II = $m \oplus m$, $m \otimes$ III=$m \oplus m \oplus m$ и т.д.

§ 3. Система натуральных чисел

Рассмотрим аксиоматический подход введения натуральных чисел.

Определение. *Системой натуральных чисел* называется алгебра $\langle N, +, \cdot, 0, 1\rangle$, состоящие из некоторого множества N, выделенных в N элементов 0 и 1, бинарных операций + и $\cdot$ (называемого сложением и умножением соответственно), удовлетворяющим следующим условиям (аксиомам):

I. Для любого n из N $n+1 \neq 0$.

II. Для любых m и n из N, если $m+1 = n+1$, то $m = n$.

III. Для любого m из N $m+0 = m$.

IV. Для любых m и n $m+(n+1) = (m+n)+1$.

V. Для любого m из N $m \cdot 0 = 0$.

VI. Для любых m и n из N, $m \cdot (n+1) = mn+m$.

VII. Если A – подмножество множества N такое, что

(a) 0 ™ A,

(b) для любого n, если n ™ A, то $n+1$ ™ A, тогда $A = N$.

Приведенную систему аксиом называют *системой аксиом Пеано*, так как она представляет собой несущественное изменение аксиоматики, предложенной итальянским ученым Пеано.

Условие I означает, что элемент 0 нельзя представить в виде суммы какого-нибудь элемента из N и элемента 1. Условие II означает, что элемент 1 является регулярным слева относительно сложения. Условие III означает, что 0 есть правый нейтральный элемент относительно сложения. Условие IV есть слабая форма ассоциативности сложения. Условие VI есть слабая форма дистрибутивности умножения относительно сложения. Условие VII называется *аксиомой математической индукции*. Из этой аксиомы вытекает, что любое подмножество множества N, содержащее 0 и 1 и замкнутое относительно сложения, совпадает с множеством N. Таким образом, из аксиомы математической индукции следует, что единственной подалгеброй алгебры $\mathcal{N}=\langle N, +, \cdot, 0, 1\rangle$ является сама алгебра $\mathcal{N}$.

Элементы множества N называются натуральными числами. Элементы 0 и 1 называются соответственно *нулем и единицей системы N*.

Для записи чисел 1+1, (1+1)+1, ((1+1)+1)+1, (((1+1)+1)+1)+1, … используется обычная десятичная символика: 2, 3, 4, 5, …

Возникает вопрос: существует ли хотя бы одна система натуральных чисел, т.е. алгебра типа (2, 2, 0, 0), удовлетворяющая аксиомам I – VII? Следующий пример дает положительный ответ на поставленный вопрос.

Рассмотрим множество N^* в однобуквенном алфавите r. Раньше уже были определены операции $\oplus$ и $\otimes$ над словами алфавита r. Пустое слово O* и слово I играют роль нуля и единицы соответственно в алгебре $\mathcal{N}^*=\langle N^*, \oplus, \otimes, O^*, I\rangle$. Эта алгебра удовлетворяет системе аксиом I–VII. В самом деле, для любого n из N^* слово nI не является пустым; следовательно, $n \oplus I \neq O^*$, значит выполнено условие I. Поскольку для любых m,n ™ N^* из графического равенства слов mI и nI следует графическое равенство слов m и n, то выполняется и условие II. Композиция любого слова m из N^* и пустое слово O* есть слово m, $m \oplus$ O*=m, т.е. выполняется условие III. Из свойства ассоциативности композиции слов следует выполнение условия IV. Выполнение условия V непосредственно следует из операции умножения слов. Из графического равенства слов $\underbrace{mm...m}_{n+1\ \text{множителей}}$ и $\underbrace{mm...m}_{n\ \text{множителей}}$ следует равенство $m \otimes (n \oplus 1)=(m \otimes n) \oplus m$, т.е. условие VI также выполняется. Наконец, интуитивно ясно, что в алгебре $\mathcal{N}^*$ выполняется аксиома индукции: если множество $A \subset N^*$ такое, что (a) O*™A и (b) для каждого n, если n™A, то и nI™A, тогда A=N^*. В самом деле обозначим через $A(n)$ предикат «n™A»; запишем в цепочку верных в силу (b) для любого n импликаций:

A(O*)$\to A$(I), A(I)$\to A$(II), …, $A(n)\to A(n$I).

Так как A(O*) истинно, то из первой импликации следует A(I); из истинности A(I) и второй импликации следует истинность A(II) и т.д. Через n+1шагов мы получим истинность $A(n$I) для любого n из N^*.

§ 4. Принцип математической индукции

Аксиома математической индукции является основой метода доказательства по индукции. Доказательство по индукции применимо, когда хотят доказать, что какой-нибудь одноместный предикат с натуральной свободной переменной (одноместное условие) истинен для всех видов натуральных чисел.

Теорема. Пусть $A(n)$ – любой одноместный предикат на множестве N натуральных чисел, удовлетворяющий условиям: (α) $A(0)$ истинно (0 удовлетворяет предикату $A(n)$); (β) для каждого n из N, если $A(n)$ истинно, то истинно $A(n+1)$. Тогда $A(n)$ истинно для любого натурального n.

Доказательство. Пусть A={n™N | $A(n)$}. В силу (α) и (β) выполняются условия: (a) 0 ™ A и (b) для любого n из N, если n ™ A, то n+1 ™ A. По аксиоме VII следует, что A=N. Последнее равенство означает, что любое натуральное число n удовлетворяет условию $A(n)$. Теорема доказана.

Эта теорема есть, в сущности, другая формулировка аксиомы математической индукции, и ее будем называть *принципом математической индукции*.

Принцип математической индукции можно записать в следующем виде:

$(A(0) \wedge \forall n(A(n) \to A(n+1)) \to \forall n\ A(n)$ или в виде $\dfrac{A(0) \wedge \forall n(A(n) \to A(n+1))}{\forall n A(n)}$.

Основные этапы доказательства по индукции:

1) Доказывается, что 0 удовлетворяет условию A;

2) Доказывается, что для всякого n из $A(n)$ следует $A(n+1)$.

Переменную n называют переменной, по которой производится индукция. Часть доказательства «верно, что $A(0)$» называется началом индукции или базисом индукции. Вторая часть доказательства «для любого n из $A(n)$ следует $A(n+1)$» называется индуктивным шагом. Посылка «$A(n)$» называется индуктивным предположением.

Для доказательства утверждения $n(A(n) \to A(n+1))$ берут произвольное натуральное число, обозначают его какой-нибудь буквой, например k, и доказывают импликацию $A(k) \to A(k+1)$ обычным путем: предполагают, что $A(k)$ истинно (индуктивное предположение), и показывают, что тогда истинно $A(k+1)$.

§ 5. Полная индукция

В высказывании Л. Эйлера отмечалось, что индукция может привести и к ошибочным выводам. Например, французский математик XVII века Пьер Ферма, рассматривая числа

$$2^{2^1}+1=5,\quad 2^{2^2}+1=17,\quad 2^{2^3}+1=257,\quad 2^{2^4}+1=65537,$$

пришел к выводу, что при любом натуральном значении n число $2^{2^n}+1$ является простым. Проверить справедливость этого утверждения при $n = 5$ он не смог, так как не сумел выяснить, имеет ли число $2^{32}+1$ нетривиальные делители. Но Эйлеру удалось показать, что это число делится на 641.

В теории чисел доказывается, что если p – простое число, то $2^{p-1}-1$ делится на p. Но ни для одного из простых чисел, меньших 1000, $2^{p-1}-1$ не делится на p^2. Поэтому возникла гипотеза, что вообще ни для одного простого числа p число $2^{p-1}-1$ не делится на p^2. Однако оказалось, что $2^{1093-1}-1$ делится на 1093^2. Существуют примеры, когда число, опровергающее гипотезу, настолько велико, что найти его перебором практически невозможно. Например, первое значение n такое, что число $991n^2+1$ является точным квадратом, насчитывается 29 десятичных знаков. Поэтому, если бы кто-нибудь сформулировал гипотезу: *число* $991n^2+1$ *никогда не является точным квадратом*, то для опровержения этого утверждения ему пришлось бы не под силу самой быстродействующей вычислительной машине (разумеется, опровергающее гипотезу число было найдено иным путем).

Из сказанного выше следует, что угаданный с помощью индукции результат подлежит дедуктивному доказательству. В некоторых случаях такое доказательство можно провести, разобрав конечное число случаев, исчерпывающих все возможности.

Например, чтобы доказать утверждение: *для любого правильного многогранника справедливо соотношение* В – Р + Г = 2, *где* В – *число* *его вершин*, Р – *ребер и* Г – *граней*, достаточно рассмотреть пять случаев: тетраэдр, октаэдр, куб, додекаэдр, икосаэдр – других правильных многогранников не существует. А для этих пяти случаев утверждение проверяются с помощью следующей таблицы:

Название	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	4	6	4
Октаэдр	6	12	8
Куб	8	12	6
Додекаэдр	20	30	12
Икосаэдр	12	30	20

В самом деле, для всех пяти многогранников имеем В – Р + Г = 2.

Такой метод перебора конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называется *полной индукцией*. Несмотря на свое название, этот метод является на самом деле не индуктивным, а дедуктивным – применяя его, мы опираемся на общие положения логики, позволяющие расчленять общий случай на конечное число частных случаев и рассматривать их по отдельности.

§ 6. Доказательство тождеств и неравенств с помощью математической индукции

Метод математической индукции позволяет доказывать тождества и неравенства, одна или обе части которых зависят от натурального числа n. Например, можно сначала убедиться, что доказываемое тождество истинно при $n=1$, а потом записать его при $n=k+1$ и при $n=k$ и вычесть соответствующие части полученных тождеств. Если при этом получится, что разность левых частей тождества равна разности правых частей, то из истинности доказываемого тождества при $n=k$ будет следовать его истинность при $n=k+1$, а тем самым в силу математической индукции и при всех значениях n.

Докажем, например, что при любом n истинно тождество

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}. \qquad (1)$$

При $n=1$ оно принимает вид $1-1/2=1/2$ и поэтому справедливо. Запишем теперь доказываемое тождество $n=k+1$ и при $n=k$:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2} \qquad (2)$$

и

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k}\,. \qquad (3)$$

Вычитая соответствующие части тождеств друг и друга, приходим к истинному равенству

$$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}.$$

Значит, если истинно равенство (3), то истинно равенство (2), а потому в силу математической индукции тождество (1) справедливо для всех значений n.

В других случаях оказывается полезно разделить друг от друга соответствующие части доказываемых тождеств. Например, тождество

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\ldots(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}. \qquad (4)$$

Сразу доказывается, если записать его при $n=k+1$ и при $n=k$ и заметить, что отношения левых и отношение правых частей полученных равенств имеет вид $\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$.

При доказательстве неравенства используются свойства неравенств. Докажем, например, что если $0<a<b$, то для любого натурального значения n истинно неравенство $a^n<b^n$. При $n=1$ справедливость доказываемого неравенства сразу вытекает из условия. Пусть верно, что $a^k<b^k$. Так как $a>0$ и $b>0$, то мы можем умножить обе части этого неравенства на соответствующие части неравенства $a<b$, которое истинно по условию, и получить требуемое неравенство $a^{k+1}<b^{k+1}$. После этого выводим по математической индукции, что $a^n<b^n$ для всех натуральных чисел n.

Точно так же доказывается следующее утверждение, называемое *неравенством Бернулли*:

Если $x>-1$, *то для всех натуральных значений* n *истинно неравенство*

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \qquad (5)$$

В самом деле, при $n=1$ имеем истинное неравенство $1+x \geq 1+x$. Пусть $(1+x)^k \geq 1+kx$. Так как по условию $1+x>0$, то это неравенство не изменит смысла при умножении обеих частей на $1+x$. Получаем

$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$, или $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2$.

Так как $kx^2>0$, то отсюда вытекает: $(1+x)^{k+1}\geq 1+(k+1)x$, откуда в силу математической индукции выводим, что неравенство (5) истинно для всех натуральных n.

§ 7. Метод математической индукции и делимость чисел

С помощью метода математической индукции можно доказать различные утверждения, касающиеся делимости натуральных чисел.

Начнем с доказательства основной теоремы арифметики натуральных чисел: *любое натуральное число* n, *большее* 1, *либо является простым, либо разлагается в произведение простых чисел, причем два разложения отличаются друг от друга лишь порядком множителей.*

Сначала докажем существование разложения на простые множители. При $n=2$ имеем просто число 2, а потом наше утверждение истинно. Пусть любое натуральное число n, меньшее k, либо простое, либо разлагается на простые множители. Докажем, что тогда и само число k либо простое, либо разлагается на простые множители. Если k простое, то наше утверждение истинно. Если же k – составное число, то $k=ab$, где a и b – натуральные числа, меньшие k. По предположению эти числа разлагаются на простые множители. Заменяя их этими разложениями, получаем разложение на простые множители числа k.

Итак, теорема о существовании разложения на простые множители истинна при $n=2$, а из ее истинности для всех натуральных чисел, меньших k, следует, что она истинна и при k. Значит, она истинна при всех натуральных значениях n, больших 1.

А теперь докажем единственность (с точностью до порядка множителей) разложения на простые множители. Для этого нам понадобится следующее свойство простых чисел: если натуральное число n делится на просто число p, то в любом разложении n на простые множители один из множителей равен p. В самом деле, если n делится на p и $n=q_1...q_m$, где $q_1, ..., q_m$ – простые числа, то в силу свойств простых чисел один из множителей $q_1, ..., q_m$, например q_1, должен делиться на p; а так как q_1 – простое число, то он должен совпадать с p.

При $n=2$ получаем просто число 2, которое, очевидно, не имеет иных разложений на простые множители. Пусть все натуральные числа n, меньшие k, имеют единственное разложение на простые множители. Если k – простое число, то оно не разлагается на множители и для него теорема единственности разложения истинна. Если же k – составное число, то оно делится хотя бы на одно простое число p, отличное от k. Тогда в любое разложение числа k на простые множители входит множитель p. Иными словами, любое разложение k на простые множители имеет вид $k = p \times q_2...q_m$, где $q_2...q_m$ – разложение на простые множители числа k/p. Так как k/p – натуральное число, большее 1, но меньшее k, оно по предположению имеет единственное разложение на простые множители. А тогда и k имеет единственное разложение. В силу тогда математической индукции наше утверждение доказано.

Следующее утверждение можно сравнительно просто доказать и непосредственно. Покажем, как оно получается с помощью метода математической индукции.

Если n – натуральное число, то число $n^2 – n$ четное.

При $n = 1$ наше утверждение истинно: $1^2 – 1 = 0$ – четное число. Предположим, что $k^2 – k$ – четное число. Так как $(k+1)^2–(k+1)–(k^2–k)=2k$. А $2k$ – четное число, то и $(k+1)^2–(k+1)$ четное. Итак, четность $n^2 – n$ доказана при $n=1$, а из четности $k^2 – k$ выведена четность $(k+1)^2–(k+1)$. Значит, $n^2 – n$ четно при всех натуральных значениях n.

Точно так же доказывается, что $n^3 – n$ делится на 3 при всех натуральных значениях n. При этом мы используем тот факт, что $(k+1)^3–(k+1)–(k^3–k)=3k^2+3k$ делится на 3.

Рассмотренные примеры приводят к предположению индукции, что $n^m – n$ всегда делится на m. Но уже пример $m=4$, $n=3$ опровергает это утверждение: $3^4 – 3 = 78$ не делится на 4. При $m=5$ снова получаем, что $n^5 – n$ делится на 5 (доказательство этого утверждения опирается на формулу бинома Ньютона). Числа 2, 3 и 5 простые. Поэтому уточним гипотезу: *выражение $n^p – n$, где p – простое число, делится на p*. Это утверждение (малая теорема Ферма) истинно для всех простых чисел p и всех натуральных чисел n. Его доказательство проводится методом математической индукции с использованием формулы бинома Ньютона.

§ 8. Задачи

I. Доказать, что при любом натуральном *n*

1. n^3+5 делится на 6;
2. n^3+11n делится на 6;
3. $n^4+6n^3+11n^2+6n$ делится на 24;
4. 7^n+3n-1 делится на 9;
5. $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133;
6. $2^{5n+3}+5^n3^{n+2}$ делится на 17;
7. $2^{n+5}3^{4n}+5^{3n+1}$ делится на 37;
8. $3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}$ делится на 19;
9. $3^{2n+2}5^{2n}-3^{3n+2}2^{2n}$ делится на 1053;
10. $4^n+15n-1$ делится на 9;
11. $3^{2n+3}+40n-27$ делится на 64;
12. $5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ делится на 8;
13. $10^n+18n-1$ делится на 27;
14. $3^{2n+3}-24n+37$ делится на 64;
15. $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11;
16. $6^{2n}+10\cdot 3^n$ делится на 11;
17. $11^{n+2}+3^{2n+1}4^{2n+1}$ делится на 133;

18. $2^{5n+3}+9\cdot5^n3^n$ делится на 17;
19. $2^{n+5}9^{2n}+5\cdot5^{3n}$ делится на 37;
20. $9\cdot3^{3n}+10\cdot8^n$ делится на 19;
21. $2^{2n}+15n$-1 делится на 9;
22. $27\cdot3^{2n}+40n-27$ делится на 64;
23. $5^n+2\cdot3^{n-1}+1$ делится на 8;
24. $27\cdot9^n-24n+37$ делится на 64;
25. $36^n+9\cdot3^n+3^n$ делится на 11;
26. $4^n+15n-1$ делится на 9;
27. $5\cdot2^n5^n-1+18n-1$ делится на 27.
28. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
29. $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\ldots(1-\frac{1}{(n+1)^2})=\frac{n+2}{2n+2}$;
30. $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$;
31. $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$;
32. $1+x+x^2+\ldots x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $(x\neq1)$;
33. $\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$;
34. $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1+x^{2n+1}}$, $(|x|\neq1)$;
35. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;
36. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
37. $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, $n>1$;
38. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$, $n>1$;
39. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;
40. $1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$;
41. $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$;
42. $1+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;
43. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

44. $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

45. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$;

46. $\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$;

47. $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{x^2}{1-x^4}+\dfrac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\dfrac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$, $|x|\neq 1$;

48. $\dfrac{4^n}{n+1}<\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, где $n>1$;

49. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$, $n>1$;

50. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, $n>1$;

51. $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{3n-2}>1$, $n>1$;

52. $(1+x)^n>1+nx$, где $x>-1$, $x\neq 0$, $n>1$;

53. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n-1}<n$, $n>1$;

54. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n-1}<\dfrac{n}{2}$, $n>1$;

55. $2^n>n^2$, $n\geq 5$;

56. $2^n>n^3$, $n\geq 10$;

57. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, $n>1$;

58. $2^n>2n+1$, $n\geq 3$;

59. $2^n>n$;

60. $n!>2^n$, $n>3$.

Глава II. Комбинаторика

§ 1. Количество *k*-элементных подмножеств данного конечного множества

Символом $n!$ (читается n-факториал) обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно: $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Полагают, что $0! = 1$.

Теорема. Число C_n^k всех k-элементных подмножеств множества из n элементов вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1)$$

Доказательство. Чтобы построить k-элементное подмножество множества из n элементов, нужно к ($к$–1)-элементному подмножеству присоединить один из n–k+1 элементов, которые не входят в это подмножество. Поскольку (k–1)-элементных подмножеств имеется C_n^{k-1} и каждое из них можно сделать k-элементным n–k+1 способами, то таким образом мы получим (n–k+1) C_n^{k-1} подмножеств. Но не все они будут разными, так как каждое k-элементное множество можно так построить k способами: присоединением каждого из k его элементов. Поэтому вычисленное нами число в k раз больше, чем число C_n^k k-элементных подмножеств. Следовательно,

$$kC_n^k = (n-k+1)\ C_n^{k-1}.$$

Отсюда найдем

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)} C_n^{k-2} = \ldots = \frac{(n-k+1)\ldots(n-1)}{k(k-1)\ldots 2} C_n^1.$$

Но число одноэлементных подмножеств множества из n элементов равно количеству элементов, т. е. n. Подставив вместо C_n^1 число n, получим (1).

Теорема доказана.

Произвольное k-элементное подмножество n-элементного множества называется сочетанием из n элементов по k. Порядок элементов в подмножестве не имеет значения. Иногда вместо слова «сочетание» употребляется термин – комбинация из n элементов по k.

Задача 1. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книжки из 5?

Решение. Искомое число способов равно числу трехэлементных подмножеств множества из 5 элементов:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Задача 2. Сколькими способами из 7 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

Решение. Чтобы рассмотреть все возможные комиссии, нужно рассмотреть все возможные 3-элемеитные подмножества множества, состоящего из 7 человек. Искомое число способов равно

$$C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

§ 2. Количество подмножеств данного множества

Выясним, сколько всего подмножеств имеет множество A, состоящее из n элементов (пустое множество также является подмножеством A).

Теорема. Число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n.

Приведем два различных доказательства.

Доказательство 1. Пусть $M_а$ – множество всех подмножеств множества A, которые содержат элемент a. Очевидно, что каждое такое подмножество полностью определено, если указаны все его остальные (кроме a) элементы. Поэтому таких подмножеств будет столько, сколько будет подмножеств в множестве $A' = A \setminus \{a\}$, которое содержит все элементы A, кроме a. Это множество имеет $n–1$ элементов. Поэтому, если q_n – число подмножеств множества из n элементов, то $N(M_а) = q_{n–1}$, где $N(M_а)$ – количество элементов множества $M_а$.

Если $M_а'$ – множество всех подмножеств множества A, не содержащих a, то $N(M_а')$ также будет равно $q_{n–1}$. Поскольку $M(A) = M_а + M_а'$ ($M(A)$ – множество всех подмножеств множества A), то $N(M(A)) = 2q_{n–1}$. Отсюда находим $q_n = 2q_{n–1}$. Таким образом, $q_n = 2q_{n–1} = 2^2q_{n–2} \ldots = 2^{n–1}q_1$. Множество, состоящее из 1 элемента, имеет 2 подмножества (все множество и пустое множество). Поэтому $q_1 = 2$. Следовательно, $q_n = 2^n$.

Доказательство 2. Перенумеруем элементы множества A и для каждого подмножества множества A построим последовательность длины n из нулей и единиц по следующему правилу: на k-м месте пишем 1, если элемент с номером k входит в подмножество, и 0, если элемент с номером k не входит в подмножество. Итак, каждому подмножеству соответствует своя последовательность нулей и единиц. Например, пустому множеству соответствует последовательность из одних нулей. Число всех возможных последовательностей длины n, составленных из нулей и единиц, равно, согласно правилу умножения, $2\cdot2\cdot\ldots\cdot2=2^n$. Следовательно, и число всех подмножеств множества A равно 2^n.

Как было указано выше, удобно считать $0! = 1$. При этом предположении формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

остается в силе и при $k = n$ и при $k = 0$.

Следствие. Имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n .$$

В самом деле, поскольку C_n^k – число k-элементных подмножеств множества из n элементов, то сумма в левой части есть число всех подмножеств.

§ 3. Перестановки данного множества

Множество называется *упорядоченным,* если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n, где n – число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа. Всякое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, переписать все элементы множества в некоторый список (a, b, c, ...), а затем поставить в соответствие каждому элементу номер места, на котором он стоит в списке. Будем обозначать упорядоченное множество, которое получено из множества A, через $\vec{A}$. Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т. е. могут быть получены из того же самого множества), называются *перестановками* этого множества.

Пример. Перестановки множества $A = \{a, b, c\}$ из 3 элементов имеют вид

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Найдем число различных способов, которыми может быть упорядочено данное множество, т. е. число перестановок множества A. Пусть множество A имеет n элементов. Обозначим число его перестановок через P_n.

Теорема. $P_n=n!$.

Доказательство. Выберем некоторый элемент a из множества A. Рассмотрим все перестановки, в которых a имеет номер 1. Число таких перестановок будет равно числу перестановок из n–1 элементов множества A, которые остаются после исключения из множества элемента a. Поэтому число перестановок, для которых a имеет номер 1, равно $P_{n-1.}$ Обозначим через M множество всех перестановок множества A, а через M_a – множество перестановок, в которых a имеет номер 1. Тогда

$$M = M_a \cup M_b \cup \ldots \cup M_f,$$

где $a, b, \ldots, f$ – все элементы множества A. Поскольку никакие 2 множества из множеств M_a, M_b, ..., M_f не имеют общих элементов (напомним, что элементы этих множеств – перестановки, в различных множествах на первом месте стоят различные элементы, следовательно, и соответствующие перестановки будут различными), то

$$N(M)= N(M_a)+N(M_b)+ \ldots + N(M_f).$$

Следовательно,

$$P_n=nP_{n-1}=n!.$$

Задача 1. Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги (обозначим их A, B, C, D)?

Решение. Искомое число способов равно числу способов упорядочения множества, состоящего из 4 элементов, т. е.

P_4=1 2 3 4 = 24.

Задача 2. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение. Четные числа можно расставить на местах с четными номерами (таких мест n) $n!$ способами; каждому способу размещения четных чисел на местах с четными номерами соответствует $n!$ способов размещения нечетных чисел на местах с нечетными номерами. Поэтому общее число перестановок указанного типа по правилу умножения равно $n!n!=(n!)^2$.

§ 4. Упорядоченные подмножества данного множества (размещения)

Рассмотрим теперь упорядоченные подмножества данного множества A. Само множество A считаем неупорядоченным, поэтому каждое его подмножество может быть упорядочено каким-либо возможным способом. Число всех k-элементных подмножеств множества A равно C_n^k. Каждое такое подмножество можно упорядочить k способами. Таким образом получим все упорядоченные k-элементные подмножества множества A Следовательно, их число будет $k!\,C_n^k$.

Теорема. *Число упорядоченных k-элементных подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно*

$$A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Упорядоченные k-элементные подмножества множества из n элементов называются *размещениями* из n элементов по $к$. Различные размещения из n по k отличаются количеством элементов либо их порядком.

Следовательно, число различных размещений из n по k равно

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Задача 1. Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 местах?

Решение. Искомое число способов равно числу размещений из 25 по 4:

$$A_{25}^{4}=25\cdot 24\cdot 23\cdot 22=303600.$$

Задача 2. Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Искомое число способов равно числу 4-элементных упорядоченных подмножеств (дни сдачи экзаменов) множества из 8 элементов, т.е. $A_8^4=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=1680$ способов. Если известно, что последний экзамен будет сдаваться на восьмой день, то число способов равно

$$4\,A_7^3=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840.$$

§ 5. Перестановки с повторениями

Поставим такой вопрос. Сколькими способами можно разложить множество A, состоящее из n элементов, на сумму m подмножеств

$$A=B_1\cup B_2\cup \ldots \cup B_m$$

так, чтобы $N(B_1)=k_1$, $N(B_2)=k_2$, ..., $N(B_m) = k_m$, где $k_1, k_2,\ldots, k_m$ – данные числа (k_i□0, $k_1+ \ldots +k_m=n$)? Множества $B_1, B_2,\ldots, B_m$ не должны иметь общих элементов.

Все описанные выше разбиения множества A на m групп $B_1, B_2,\ldots, B_m$ можно получить так: возьмем произвольное k_1-элементное подмножество B_1 множества A (это можно сделать $C_n^{k_1}$ способами); среди $n - k_1$ оставшихся элементов возьмем k_2-элементное подмножество B_2 (это можно сделать $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами) и т.д. Общее число способов выбора различных множеств $B_1, B_2,\ldots, B_m$ по правилу умножения равно

$$C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}C_{n-k_1-k_2}^{k_3}\ldots C_{n-k_1\ldots-k_{m-1}}^{k_m}=$$

$$=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdot\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\ldots$$

$$\ldots\frac{(n-k_1-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-\ldots-k_m)!}=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

(напомним, что $0! = 1$).

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Пусть k_1, k_2, ..., k_m – целые неотрицательные числа, причем $k_1+k_2+\ldots k_m=n$. Число способов, которыми можно представить множество A из n элементов в виде суммы m множеств B_1, B_2, $\ldots B_m$, число элементов которых составляет соответственно k_1, k_2, ..., k_m равно*

$$C_n(k_1,\ldots,k_m)=\frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}.$$

Числа $C_n(k_1,...,k_m)$ называются *полиномиальными коэффициентами.* Они имеют еще одну очень важную комбинаторную интерпретацию.

Пусть имеется n букв: k_1 – букв a_1, k_2 – букв a_2, ..., k_m – букв a_m ($k_1 + k_2 + ... + k_m = n$). Определим, сколько различных слов можно составить из этих букв. Перенумеруем места, на которых стоят буквы, числами 1, 2, …, n. Каждое слово определяется множествами B_1 (номера мест, где стоит буква a_1, B_2 (номера мест, где стоит буква a_2),..., B_m (номера мест, где стоит буква a_m). Следовательно, число различных слов равно числу способов, которыми можно представить множество $A = \{1, 2, …, n\}$ в виде суммы множеств $B_1, B_2, ..., B_m$, т. е.

$$C_n(k_1,...,k_m) = \frac{n!}{k_1!...k_m!}.$$

Пример 1. Число различных слов, которое получим, переставляя буквы слова «математика», равно

$$\frac{10!}{2!3!2!} = 151200.$$

Пример 2. Число слов, которые можно составить из 12 букв (4 буквы *а,* 4 буквы *б,* 2 буквы *в,* 2 буквы *г*), равно

$$\frac{12!}{4!4!2!2!} = 207900.$$

Утверждение, установленное выше, можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Число различных перестановок, которые можно составить из n элементов, среди которых имеется* $\mathbf{k_1}$ *элементов первого типа,* k_2 *элементов второго типа, ...,* k_m *элементов m-го типа, равно*

$$C_n(k_1,...,k_m) = \frac{n!}{k_1!...k_m!}.$$

В связи с важностью теоремы приведем еще одно доказательство. Рассмотрим одну перестановку и заменим в ней все одинаковые элементы разными. Тогда число различных перестановок, которые можно составить из рассматриваемой нами перестановки, равно $k_1!$ $k_2!...$ $k_m!$. Проделав это для каждой перестановки, получим $n!$ перестановок. Следовательно,

$$C_n(k_1,...,k_m)k_1!...k_m! = n!$$

что и доказывает утверждение теоремы.

§ 6. Сочетания с повторениями

Сочетаниями из m элементов по n элементов с повторениями называются группы, содержащие n элементов, причем каждый элемент принадлежит к одному из m типов.

Например, из трех элементов *a, b, c* можно составить такие сочетания по два с повторениями:

aa, ac, bc, ab, bb, cc.

Теорема. *Число различных сочетаний из m элементов по n с повторениями равно*

$$f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^{n}.$$

Доказательство. Каждое сочетание полностью определяется, если указать, сколько элементов каждого из m типов в него входит. Поставим в соответствие каждому сочетанию последовательность нулей и единиц, составленную по такому правилу: напишем подряд столько единиц, сколько элементов первого типа входит в сочетание, далее поставим нуль и после него напишем столько единиц, сколько элементов второго типа содержит это сочетание и т.д. Например, написанным выше сочетаниям из трех букв по две будут соответствовать такие последовательности:

1100, 1001, 0101, 1010, 0110, 0011.

Таким образом, каждому сочетанию из m по n соответствует последовательность из n единиц и m–1 нулей, и наоборот, по каждой такой последовательности однозначно восстанавливается такое сочетание. Поэтому число сочетаний из m по n с повторениями равно числу последовательностей из n единиц и m–1 нулей, т. е. равно C_{m+n-1}^{m-1}.

Пример 1. Кости домино можно рассматривать как сочетания с повторениями по два из семи цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, Число всех таких сочетаний равно

$$f_7^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Пример 2. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение

$x_1+x_2+\ldots+x_m=n$?

Существует тесная связь между решениями указанного уравнения и сочетаниями из m элементов по n. Если имеем целые неотрицательные числа x_1, x_2, …, x_m такие, что $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$, то можем составить сочетание из m элементов по n, взяв x_1 элементов первого типа, x_2 – второго типа, ..., x_m – m-го типа. Наоборот, имея сочетание из m элементов по n, получим решение уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ (x_1 – число элементов первого типа, x_2 – число элементов второго типа, x_m – число элементов m-го типа) в целых неотрицательных числах. Следовательно, между множеством всех сочетаний из m элементов по n с повторениями и множеством всех целых неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому число решений равно $f_m^n = C_{m+n-1}^n$.

§ 7. Бином Ньютона

Как раскрыть скобки при вычислении выражения $(a + b)^n$? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. *Имеет место равенство*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n, \qquad (1)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Эту теорему иногда называют *биномиальной теоремой,* а числа C_n^k – *биномиальными коэффициентами.* Равенство (1) часто называют *биномом Ньютона,* хотя это название исторически не является справедливым, так как формулу для $(a + b)^n$ знали еще среднеазиатские математики Омар Хайям (1048–1131), Гийас ад-Дин Джемшид ал-Каши (ум. ок. 1430). В западной Европе до Ньютона ее знал Паскаль (1623–1662). Заслуга Ньютона в том, что он обобщил формулу (1) для нецелого показателя n. Формулу (1) можно записать в виде

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Доказательство. Перемножим последовательно $(a+b)$ n раз. Тогда получим сумму 2^n слагаемых вида $d_1 d_2 \ldots d_n$, где d_i $(i = 1, \ldots, n)$ равно либо a, либо b. Разобьем все слагаемые на $n+1$ группу $B_0, B_1,\ldots, B_n$, отнеся к $B_к$ все те произведения, в которых **b** встречается множителем k раз, а a–$(n–k)$ раз. Число произведений в B_k равно, очевидно, C_n^k (таким числом способов среди n множителей $d_1, d_2, \ldots,$. d_n можно выбрать k множителей, которые будут равны b), а каждое слагаемое в B_k равно $a^{n-к}b^к$. Поэтому

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Теорема доказана.

Напомним следующее важное свойство биномиальных коэффициентов:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \qquad (2)$$

Равенство (2) показывает, что биномиальные коэффициенты можно последовательно выписывать в виде треугольной таблицы, которая называется *треугольником Паскаля*

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & & & & n=1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & n=2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & n=3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & n=4 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & n=5 \\
 & \ldots & & \ldots & & & \ldots
\end{array}
$$

В n-й строке треугольника Паскаля стоят коэффициенты разложения $(a+b)^n$, причем каждый коэффициент, кроме крайних двух, которые равны 1, равен сумме соответствующих коэффициентов из предыдущей строки.

§ 8. Задачи

I. Решить задачи.

1. Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество таких расписаний при наборе из одиннадцати дисциплин.

Ответ: 55 440.

2. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределять между собой обязанности?

Ответ: 42.

3. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

Ответ: 1 140.

4. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?

Ответ: 968.

5. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

Ответ: 253.

6. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

Ответ: 64.

7. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (т.е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.

Ответ: 240.

8. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти цифр. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

Ответ: 124.

9. Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты 800+400+200+100. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?

Ответ: 32 760.

10. Команда из пяти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?

Ответ: 25! / 20!

11. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находится с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)

Ответ: 3 126.

12. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

Ответ: 896.

13. Порядок выступления восьми участников конкурса определяется жребием. Сколько различных исходов жеребьевки при этом возможно?

Ответ: 8!.

14. Тридцать человек разбиты на три группы по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

Ответ: $30! / (10!)^3$.

15. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Ответ: 42.

16. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?

Ответ: 9!.

17. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

Ответ: 30!–2·29!.

18. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

Ответ: 2 520.

19. Из группы в 12 человек ежедневно в течении 6 дней выбирают двух дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.

Ответ: $12! / (2!)^6$.

20. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

Ответ: 204.

21. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы №1 и №2 находились бы в соседних аудиториях?

Ответ:$2{\cdot}9!$.

22. В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура (расписания считают различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитываются).

Ответ: 2 027 025.

23. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж доставлен какой-либо материал?

Ответ: 5^6; $6{\cdot}4^5$.

24. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

Ответ: 2^{10}.

25. Поезд метро делает 16 остановок, на которых выходят все пассажиры. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на конечной остановке?

Ответ: 16^{100}.

26. Сколько трехзначных чисел, делящихся на 3, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Ответ: 40.

27. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: $80!(3!\cdot 75!)$.

28. Из 10 теннисисток и 6 теннисистов составляют 4 смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: $10!/48$.

29. Три автомашины №1, 2, 3 должны доставить товар в шесть магазинов. Сколькими способами можно использовать машины, если грузоподъемность каждой из них позволяет взять товар сразу для всех

магазинов и если две машины в один и тот же магазин не направляются? Сколько вариантов маршрута возможно, если решено использовать только машину №1?

Ответ: $3^6 \cdot 6!$.

30. Четверо юношей и две девушки выбирают спортивную секцию. В секцию хоккея и бокса принимают только юношей, в секцию художественной гимнастики – только девушек, а в лыжную и конькобежную секцию – и юношей, и девушек. Сколькими способами могут распределиться между секциями шесть человек?

Ответ: 2 304.

31. Из лаборатории, в которой работает 20 человек, 5 сотрудников должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если начальник лаборатории, его заместитель и главный инженер одновременно уезжать не должны?

Ответ: 15 368.

32. В фортепьянном кружке занимаются 10 человек, в кружке художественного слова – 15, в вокальном кружке – 12, в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

Ответ: $15!10! / 7!$.

33. Двадцать восемь костей домино распределены между четырьмя игроками. Сколько возможно различных распределений?

Ответ: $28! / (7!)^4$.

34. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 15 015.

35. Пять учеников следует распределить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3^5.

36. Лифт останавливается на 10 этажах. Сколькими способами могут распределить между этими остановками 8 пассажиров, находящихся в лифте?

Ответ: 10^8.

37. Восемь авторов должны написать книгу из шестнадцати глав. Сколькими способами возможно распределение материала между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре – по две, два – по одной главе книги?

Ответ: $16! / (2^6 \cdot 3^2)$.

38. В шахматном турнире участвуют 8 шахматистов третьего разряда, 6 – второго и 2 перворазрядника. Определить количество таких составов первого тура, чтобы шахматисты одной категории встречались между собой (цвет фигур не учитывается).

Ответ: 420.

39. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа: не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел в которых есть цифры 2, 4 и 5 одновременно.

Ответ: 1 800.

40. Семь яблок и два апельсина надо положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин и чтобы количество фруктов в них было одинаковым. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 105.

41. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

Ответ: 62.

42. Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, использую 30 букв и 10 цифр?

Ответ: $9\cdot10^6$.

43. Садовник должен в течение трех дней посадить 10 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?

Ответ: 36.

44. Из вазы, где стоит 10 красных и 4 розовых гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 60.

45. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

Ответ: 2(6!)2.

46. Каждый из десяти радистов пункта А старается установить связь с каждым из двадцати радистов пункта Б. сколько возможно различных вариантов такой связи?

Ответ: 2^{200}.

47. Шесть ящиков различных материалов доставляют на восемь этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на восьмой этаж будет доставлено не более двух материалов?

Ответ: 8^6; $8^6–13\cdot7^5$.

48. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд так, чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом?

Ответ: $2(11!)^2$.

49. На книжной полке книги по математике и по логике – всего 20 книг. Показать, что наибольшее количество вариантов комплекта, содержащего 5 книг по математике и 5 книг по логике, возможно в том случае, когда число книг на полке по каждому предмету равно 10.

Ответ: $C_{10-x}^{5} \cdot C_{10+x}^{5} \leq (C_{10}^{5})^2$.

50. Лифт, в котором находятся 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры группами выходят по два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

Ответ: 10! / 4.

51. «Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком». Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядка их следования?

Ответ: 23.

52. В шахматной встрече двух команд по 8 человек участники партий и цвет фигур каждого участника определяются жеребьевкой. Каково число различных исходов жеребьевки?

Ответ: $2^8 \cdot 8!$.

53. *A* и *B* и еще 8 человек стоят в очереди. Сколькими способами можно расположить людей в очереди, чтобы *A* и *B* были отделены друг от друга тремя лицами?

Ответ: $6 \cdot 8! \cdot 2!$.

54. В классе изучается 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в понедельник должно быть 6 уроков и все разные?

Ответ: A_{10}^{6}.

55. На одной прямой взято *M* точек, на параллельной ей прямой *N* точек. Сколько треугольников с вершинами в этих точках можно получить?

Ответ: $mC_n^2 + nC_m^2$.

56. Сколько есть пятизначных чисел, которые читаются одинаково справа налево и слева направо, например, 67876.

Ответ: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

57. Сколько разных делителей (включая 1 и само число) имеет число $3^5 \cdot 5^4$?

Ответ: 30.

58. В комнате *n* лампочек. Сколько разных способов освещения комнаты, при которых горит:

а) ровно *k* лампочек ($k<n$);

б) хотя бы одна лампочка.

Ответ: а) C_n^k; б) $C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n - 1$.

59. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

Ответ: $C_9^4 = 126$.

60. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

Ответ: $C_{10}^4 = 210$.

61. Сколькими способами можно упорядочить $\{1, 2, \dots N\}$ чисел так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом в порядке возрастания?

Ответ: $(N–2)!$.

62. На собрании должно выступить 4 докладчика: A, B, C и D, причем B не может выступить раньше A. Сколькими способами можно установить их очередность?

Ответ: 12.

63. Сколькими способами $m+n+s$ предметов можно разделить на 3 группы, чтобы в одной группе было m предметов, в другой – n, в третьей – s предметов.

Ответ: $\dfrac{m+n+s}{m!n!s!}$.

64. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$.

Ответ: C_{n+m-1}^n.

65. Дано m предметов одного сорта и n другого. Найти число выборок, составленных из r элементов одного сорта и s другого.

Ответ: $C_m^r \cdot C_n^s$.

66. Сколькими способами число n можно представить в виде суммы k натуральных слагаемых (представления, различающиеся лишь порядком слагаемых считаются разными).

Ответ: C_{n-1}^{k-1}.

67. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем могут начинаться и с 0 тоже, найти число телефонных номеров, таких что:

1) 4 последние цифры одинаковы и не встречаются среди первых 3-х (первые 3 цифры различны);

2) Все цифры различны;

3) Номера начинаются с цифры 5;

4) Номера содержат три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2.

Ответ: 5040, 10!/3!, 10^6, 210.

68. 10 человек, среди которых Иванов и Петров, размещаются в гостинице в двух 3-х местных и в одном 4-х местном номерах. Сколькими способами они могут быть размещены? Сколькими

способами их можно разместить, если Иванов и Петров помещены в 4-х местный номер?

Ответ: 4200, 560.

69. 52 карты раздаются 4-м игрокам, каждому по 13 карт. Сколькими способами их можно раздать, если:

1) Каждый игрок получит туз;

2) Один из игроков получит все 13 карт единой масти;

3) Все тузы попадут к одному из игроков;

4) 2 определенных игрока не получат ни одного туза.

Ответ: $\dfrac{4!\cdot 48!}{(12!)^4}$; $\dfrac{16\cdot 39!}{(13!)^3}$; $\dfrac{4\cdot 48!}{(13!)^3\cdot 9!}$; $\dfrac{2300\cdot 48!}{(13!)^3\cdot 11!}$.

70. Регистр калькулятора содержит 8 разрядов. Сколько будет 8-ми значных чисел, если:

1) Регистр содержит ровно 2 одинаковые цифры;

2) Регистр содержит ровно 2 пары одинаковых цифр;

3) Регистр содержит ровно 3 одинаковые цифры;

4) Регистр содержит не более 3-х различных цифр.

Ответ: $\dfrac{14}{3}\cdot 10!$; $10!\cdot\dfrac{35}{2}$; $\dfrac{7}{3}\cdot 10!$; $10\cdot(1+9\cdot 2^7+36\cdot 3^7)$.

71. Сколькими способами можно выстроить 9 человек:

1) В колонну по одному;

2) В колонну по 3, если в каждой шеренге люди выстраиваются по росту и нет людей одинакового роста?

Ответ: 9!; $C_9^3\cdot C_6^3$.

72. Из n букв, среди которых a встречается α раз, буква b встречаются β раз, а остальные буквы попарно различны, составляются слова. Сколько среди них будет различных r-буквенных слов, содержащих h раз букву a и k раз букву b?

Ответ: $C_r^h C_{r-h}^k C_{n-\alpha-\beta}^{r-h-k}$.

73. Имеется колода из $4n$($n^3 5$) карт, которая содержит карты 4-х мастей по n карт каждой масти, занумерованных числами *1, 2, …, n*. Подсчитать, сколькими способами можно выбрать 5 карт так, что среди них окажутся:

1) 5 последовательных карт одной масти;

2) 4 карты из 5-ти с одинаковыми номерами;

3) 3 карты с одним номером и 2 карты с другим;

4) 5 карт одной масти;

5) 5 последовательно занумерованных карт;

6) 3 карты из 5-ти с одним и тем же номером;

7) Не более 2-х карт каждой масти.

Ответ: $4(n–4)$, $4n(n–1)$, $12n(n–1)$, C_5^n, $4^5(n–4)$, $4nC_2^{4n-4}$, $12\left(C_2^n\right)^2 n+4C_2^n n^3$.

74. Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц так, чтобы между любыми 2-мя единицами находилось не менее m нулей?

Ответ: $C_{n-k(m-1)-1}^k$.

75. Какие два математических термина, состоящих из одинаковых букв, но разно расположенных, зашифрованы в слове «феримгол»? сколько слов из этих букв пришлось бы составить, чтобы найти зашифрованные термины?

Ответ: 8!.

76. Сколькими способами можно выбрать из 15 человек партию людей для работы? В партию может входить любое число людей: 1, 2, 3, …, 14, 15.

Ответ: 32767

77. Сколько размещений из m элементов по n будет начинаться с первого элемента?

Ответ: A_{m-1}^{n-1}

78. Сколько размещений из m элементов по n будет начинаться любым элементом за исключением первого?

Ответ: $(m–1)^2(m–2)\ldots(m–n+1)$.

79. Сколько можно составить четырехзначных чисел из 5 разных цифр: 0, 1, 2, 3, 4?

Ответ: 96.

80. Сколько четных четырехзначных чисел можно изобразить цифрами 2, 3, 5 и 7?

Ответ: 6.

81. Сколько четных пятизначных чисел можно изобразить цифрами 2, 3, 4, 5, 9?

Ответ: 48.

82. Сколько пятизначных чисел, кратных 5, можно изобразить цифрами 0, 1, 2, 3, 5?

Ответ: 42.

83. Составлены размещения из 10 элементов по 7 элементов. Сколько из этих размещений будут содержать: а) первый элемент, б) второй и четвертый элементы?

Ответ: а) $A_7^1 \cdot A_9^6$; б) $A_7^2 \cdot A_8^5$.

84. Составлены размещения из 10 элементов по 7 элементов. Сколько из этих размещений не будут содержать: а) первого элемента, б) третьего и пятого элементов?

Ответ: а) $3\,A_9^6$; б) $(A_{10}^2 - A_7^2)\,A_8^5$.

85. Составлены размещения из m элементов по n. Сколько из этих размещений будут содержать k данных элементов, если $k \le n$?

Ответ: $A_n^k \cdot A_{m-k}^{n-k}$.

86. Составлены размещения из m элементов по n. Сколько из этих размещений не будут содержать k данных элементов, если $k \le n$?

Ответ: $A_{m-k}^{n-k}(A_m^k - A_n^k)$.

87. Сколько всех делителей у числа 210?

Ответ: 16.

88. Сколько всех делителей у числа 30 030?

Ответ: 64.

89. Определить число всех диагоналей 5-, 8-, 12- и 15-угольника.

Ответ: 5; 20; 54; 90.

90. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: 10 000.

91. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять друг с другом по две книги?

Ответ: 756.

92. Из состава конференции, на которой присутствуют 52 человека, надо изобразить делегацию, состоящую из 5 человек. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: C_{52}^5.

93. В местком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, секретаря и культорга. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: 504.

94. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

Ответ: 24! / 4!.

95. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4 см, 5 см, 6 см, 7 см?

Ответ: 20.

96. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь число голосов, поданных за каждое предложение?

Ответ: 46 376.

97. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, два экземпляра другой и один экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде учувствовало 20 человек и никому не дают двух книг сразу? Та же задача, если никому не дают двух экземпляров одной и той же книги, но могут быть вручены две или три различные книги.

Ответ: $C_{20}^{6}\cdot \bar{P}_{6}$; $C_{20}^{3}\cdot C_{20}^{2}\cdot C_{20}^{1}$.

98. В библиотеке имеются учебники по физике трех различных авторов, учебники по химии двух различных авторов и учебники по математике пяти различных авторов. Каково наибольшее число студентов, которые взяли не меньше чем по одной книге каждого из трех видов при условии, что ни один студент не взял все книги, одинаковые с другим студентом?

Ответ: 651.

99. Лифт, в котором находится 9 пассажиров, может останавливаться на 10 этажах. Пассажиры выходят группами по два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

Ответ: 10! / 4!.

100. 12 ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно посадить в два ряда, чтобы рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг с другом был один и тот же вариант?

Ответ: $2(6!)^2$.

101. Сколькими способами можно переставить буквы слова «логарифм» так, чтобы 2, 4 и 6-е места были заняты согласными буквами?

Ответ:5! A_5^3=7200.

102. Из лаборатории, в которой работают 20 человек, 5 сотрудников должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если начальник лаборатории, его заместитель и главный инженер одновременно уезжать не должны?

Ответ: 15 368.

103. Из 10 спортсменов, из которых 2 гребца, 3 пловца, а остальные бегуны, нужно выделить команду из 6 человек для предстоящих соревнований. Сколько может быть случаев создания команды, в которую бы вошли не менее одного спортсмена от каждого вида спорта?

Ответ: 175.

104. На полке находится $m+n$ различных книг, из которых m – в черных переплетах, а n – в красных. Книги переставляются всевозможными способами. Сколько существует различных

положений книг, при которых книги в черных переплетах занимают m первых мест? Сколько таких положений, при которых книги в черных переплетах стоят рядом?

Ответ: $m!n!$; $m!n!(n+1)$.

105. Из 15 рабочих, в число которых входят 5 плотников и 4 штукатура, требуется создать бригаду в 8 человек. Сколькими способами можно укомплектовать бригаду так, чтобы в нее вошли не менее трех плотников и не менее двух штукатуров?

Ответ: 2901.

106. Во скольких точках пересекаются 10 прямых линий, если между ними нет параллельных прямых и через каждую точку пересечения проходит не более двух прямых?

Ответ: 45.

107. Во скольких точках пересекаются 8 прямых линий, если две из них параллельны между собой и через каждую точку пересечения проходит не более двух прямых?

Ответ: 27.

108. Во скольких точках пересекаются 15 прямых линий, если четыре из них параллельны между собой и через каждую точку пересечения проходит не более двух прямых?

Ответ: 99.

109. Вычислить сумму пяти средних элементов девятой строки треугольника Паскаля (биномиальные коэффициенты n=1, 2, … записаны в виде последовательности строк).

Ответ: 238.

110. Вычислить сумму четырех средних членов десятой строки треугольника Паскаля.

Ответ: 420.

111. Вычислить сумму четырех крайних членов одиннадцатой строки треугольника Паскаля.

Ответ: 22.

112. Сколькими способами можно разместить 10 пассажиров в трех вагонах?

Ответ: 3^{10}.

113. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

Ответ: 62.

114. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра может в записи числа встречаться несколько раз?

Ответ: $5\,\bar{A}_5^2$=125.

II. Доказать тождества.

1. $\dfrac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}=(n-4)^2$;

2. $\dfrac{A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}}{A_{n+k}^{n}}=k^2$.

3. $A_n^k=\dfrac{P_n}{P_{n-k}}$.

4. $A_n^{n-1}=P_n$.

5. $A_n^k\cdot P_{n-k}=n!$.

6. $\dfrac{A_{n-1}^{k-1}\cdot P_{n-k}}{P_{n-1}}=1$.

7. $A_{10}^n P_{10-n}=10P_9$.

8. $A_n^k=A_{n-1}^k+kA_{n-1}^{k-1}$.

9. $A_n^k=nA_{n-1}^{k-1}$.

10. $C_n^{m+1}+C_n^{m-1}+2C_n^m=C_{n+2}^{m+1}$.

11. $C_n^m+C_{n-1}^m+\ldots+C_{n-10}^m=C_{n+1}^{m+1}-C_{n-10}^{m+1}$.

12. Доказать, что если $C_m^k=C_m^l$ и $k\neq l$, то $k+l=m$.

13. Найти x, если $C_x^7=C_x^5$.

Ответ: 12.

14. $C_{n+1}^{n-1}=36$. Найти P_n.

Ответ: 8!.

15. Найти n и r, если $A_n^r=272$ и $C_n^r=136$.

Ответ: $r=2$, $n=17$.

16. Доказать, что $C_{4n}^{2n}:C_{2n}^n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{\left(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\right)^2}$.

17. Найти n и m, если $C_{n+1}^{m+1}:C_{n+1}^m:C_{n+1}^{m-1}=5:5:3$.

Ответ: $m=3$; $n=6$.

18. Найти n и r, если $C_n^{r-1}:C_n^r:C_n^{r+1}=2:3:4$.

Ответ: $r=14$; $n=34$.

19. На сколько увеличится число сочетаний из 7 элементов по 2, если ввести 8-й элемент, оставив сочетания парными?

Ответ: 7.

20. Показать, что непосредственное определение числа парных сочетаний приводится к суммированию разностной прогрессии.

21. На сколько увеличится число сочетаний из 7 элементов по 3, если ввести 8-й элемент, оставив сочетания тройными?

Ответ: на C_7^2.

22. Пользуясь общей формулой члена парных сочетаний, вывести формулу суммы квадратов *m* членов натурального ряда чисел.

23. Пользуясь общей формулой члена тройных сочетаний, вывести формулу суммы кубов *m* членов натурального ряда чисел.

24. Показать, что непосредственное определение числа тройных сочетаний сводится к суммированию парных произведений.

III. Решить уравнения.

1. $\dfrac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$.

Ответ: 15.

2. $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4} P_3} = 720$.

Ответ: 8.

3. $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5 P_{x-5}} = 720$.

Ответ: 7.

4. $A_n^x = x A_n^{x-2}$.

Ответ: $x = n+2 \pm \sqrt{n+2}$. Задача имеет решение при $n=k^2-2$, где k – любое натуральное число, отличное от 1. При этом $x=k^2 \pm k$

5. $\dfrac{P_{x+6}}{A_{x+4}^{n+4} P_{x-n}} = 240$.

Ответ: 10.

6. Вычислить $1{,}0005^{36}$ с точностью до 0,001.

Ответ: 1,018.

7. Вычислить $(1-\sqrt{3})^6$ с точностью до 0,001.

Ответ: 0,288.

8. Разложить по формуле бином Ньютона $(1+2i)^7$.

Ответ: $29+278i$;

9. Разложить по формуле бином Ньютона $(a+bi)^6+(a-bi)^6$.

Ответ: $2a^6-30a^4b^2+30a^2b^4-2b^6$.

10. Доказать, что в разложении $(1+i)^{4k+2}$ сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 0.

11. Доказать, что если A означает сумму членов, стоящих на нечетных местах, а B – сумму членов, стоящих на четных местах в разложении $(x+a)^n$, то $A^2-B^2 = (x^2-a^2)^n$.

12. Найти пятый член разложения бинома $(2x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^8$.

13. Найти средний член разложения бинома $(2x-\frac{y}{2})^8$.

Ответ: $70x^4y^4$

14. Найти наибольший коэффициент в разложении бинома $\left((1+x)\left(\frac{1}{x}-1\right)\right)^m$.

15. Найти значение показателя m в разложении бинома $(1+a)^m$, если коэффициент пятого члена равен коэффициенту девятого члена.

Ответ: 12.

16. Определить A_n^2, если пятый член разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ не зависит от x.

Ответ: 240.

17. Найти пятый член разложения бинома $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$, если отношение третьего члена к коэффициенту второго члена равно $\frac{11}{2}$.

Ответ: $495a^4x^{-2}$.

18. В разложении бинома $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)^n$ коэффициент третьего члена разложения равен 28. Найти средний член разложения.

Ответ: $70(1-x^2)^2$.

19. Найти наименьшее значение показателя m в разложении $(1+x)^m$, если отношение коэффициентов двух каких-либо соседних членов равно 7:15.

Ответ: $m=\frac{22k+15}{7}$, наименьшее значение k=6, тогда m=21.

20. В разложении бинома $\left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ сумма коэффициентов на 240 меньше суммы коэффициентов разложения бинома $(a+b)^{2n}$. Найти третий член первого разложения.

Ответ: $6x\sqrt[3]{x}$.

21. Найти член, содержащий x^4 в разложении бинома $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^9$.

Ответ: $84x^4$.

IV. Доказать тождества.

1. $C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-...+(-1)^{n-1}nC_n^n=0$.

2. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

3. $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+2)2^{n-1}$.

4. $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

5. $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

6. $1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^n = 2^{n-1}$, если n – четное, и $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^n = 2^{n-1}$ если n – нечетное.

7. $\frac{C_n^1}{C_n^0} + \frac{2C_n^2}{C_n^1} + \frac{3C_n^3}{C_n^2} + \ldots + \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$.

8. $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 3^n$.

9. $2C_n^0 + \frac{2^2 C_n^1}{2} + \frac{2^3 C_n^2}{3} + \ldots + \frac{2^{n+1} C_n^n}{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

10. $\frac{1}{1(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + \frac{1}{5!(n-5)!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{2^{n-1}}{n!}$.

11. $\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}C_n^n = \frac{n}{n+1}$.

Литература

1. Баданин, А.С. Применение метода математической индукции к решению задач на делимость натуральных чисел [Текст] / А.С. Баданин, М.Ю. Сизова // Юный ученый. – 2015. – № 2. – С. 84–86.

2. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 кн. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М. : Высш. шк., 2002. – Кн. 1. – 736 с.

3. Виленкин, Н.Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин. – М. : Наука, 1969. – 323 с.

4. Виленкин, Н. Я. Популярная комбинаторика / Н.Я. Виленкин. – М. : Наука, 1975. – 208 с.

5. Виленкин, Н.Я. Индукция. Комбинаторика: пособие для учителей / Н.Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1976. – 48 с.

6. Генкин, Л.О. О математической индукции / Л.О. Генкин. – М. : ГРФМЛ, 1962. – 36 с.

7. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М. : АстАстрель, 2002. – 558 с.

8. Ежов, И.И. Элементы комбинаторики / И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – М. : ГРФМЛ, 1977. – 80 с.

9. Ильин, В.А. Математический анализ / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2004. – Ч. 1. – 357 с.

10. Карлбертсон, Дж. Математика и логика цифровых устройств / Дж. Карлбертсон. – М. : Просвещение, 1965. – 435 с.

11. Кемени, Дж. Введение в конечную математику / Дж. Кемени, Дж. Сиелл, Дж. Томисон. – М. : ИЛ, 1963. – 468 с.

12. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел / Л.Я. Куликов. – М. : Высшая школа, 1979. – 559 с.

13. Мостеллер, Ф. Вероятность / Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас. – М. : Мир, 1969. – 432 с.

14. Новиков, П.С. Элементы математической логики / П.С. Новиков. – М. : Физматгиз, 1959. – 400 с.

15. Савельев, Л.Я. Комбинаторика и вероятность / Л.Я. Савельев. – Новосибирск : Наука, 1975. – 424 с.

16. Райзер, Г. Комбинаторная математика / Г. Райзер. – М. : Мир, 1966. – 154 с.

17. Риордан, Дж. Введение в комбинаторный анализ / Дж. Риордан. – М. : ИЛ, 1963. – 288 с.

18. Соминский, И.С. О математической индукции / И.С. Соминский, Л.И. Головина, И.М. Яглом. – М. : Наука, 1977. – 144 с.

19. Соломинский, И.С. Метод математической индукции / И.С. Соломинский. – М. : Наука, 1974. – 63 с.

20. Холл, М. Комбинаторика / М. Холл. – М. : Мир, 1970. – 424 с.

21. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей / В. Феллер. – М. : Мир, 1964. – Т. I. – 499 с.

22. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: учеб. пособие для 10 кл. средн. шк. / И.Ф. Шарыгин. – М. : Просвещение, 1989. – 252 с.

23. Шень, А. Математическая индукция / А. Шень. – М. : МЦНМО, 2007. – 32 с.

24. Яглом, А.М. Неэлементариые задачи в элементарном изложении / А.М. Яглом, И.М. Яглом. – М. : Гостехиздат, 1954. – 554 с.

Содержание

Предисловие…………………………………………………......…… 3

Глава I. Метод математической индукции……………………..... 4
§ 1. Алфавит и слова……………………………………..….. 4
§ 2. Слова в однобуквенном алфавите……………………… 5
§ 3. Система натуральных чисел…………………...………. 5
§ 4. Принцип математической индукции…………………….. 7
§ 5. Полная индукция……………………………..………….. 8
§ 6. Доказательство тождеств и неравенств с помощью математической индукции………………………………………... 9
§ 7. Метод математической индукции и делимость чисел..… 11
§ 8. Задачи……………………………………………………….. 12

Глава II. Комбинаторика…………………………………...……… 15
§ 1. Количество *k*-элементных подмножеств данного конечного множества……………………………………………………..…. 15
§ 2. Количество подмножеств данного множества…......……… 16
§ 3. Перестановки данного множества…………..………...… 17
§ 4. Упорядоченные подмножества данного множества (размещения)……………………………………………………………… 18
§ 5. Перестановки с повторениями……………………….……. 19
§ 6. Сочетания с повторениями…………………………….…….. 21
§ 7. Бином Ньютона……………………………………….….…… 22
§ 8. Задачи………………………………………………….….…. 23

Литература……………………………………………..……….… 39

Учебное издание

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ: МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ, КОМБИНАТОРИКА

Методические рекомендации

Составители:

НАУМИК Михаил Иванович

МЕХОВИЧ Андрей Павлович

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать .2015. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,44. Уч.-изд. л. 2,66. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.