Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ:

Элементы теории множеств

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2015

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.122я73
В24

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 29.06.2015 г.

Составители: доценты кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **М.И. Наумик, А.П. Мехович**

Рецензент:
заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор *Н.Т. Воробьев*

В24 **Введение в математику: Элементы теории множеств :** методические рекомендации / сост. : М.И. Наумик, А.П. Мехович. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2015. – 49 с.

В предлагаемых методических рекомендациях разработан основной материал по теме «Множества и мощность». Все определяемые в работе понятия сопровождаются примерами. В конце каждого параграфа сформулированы вопросы для самопроверки, отражающие обязательный минимум знаний. Достаточный минимум усвоения материала соответствует способностям самостоятельного решения задач, содержащихся в конце параграфа.

Учебное издание предназначено для студентов 1 курса математических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.122я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемых методических рекомендациях, предназначенных для студентов первого курса дневной и заочной форм обучения на математическом факультете, разработан основной материал по теме «Множества и мощность». Все определяемые в работе понятия сопровождаются примерами. В конце каждого параграфа сформулированы вопросы для самопроверки, отражающие обязательный минимум знаний. Достаточный минимум усвоения материала соответствует способностям самостоятельного решения задач, содержащихся в конце параграфа.

Основные понятия теории множеств входят в число вещей, которые хорошо было бы знать любому грамотному математику (даже если он не является математическим логиком или общим топологом). Обычно про них коротко пишут в первых главах учебников анализа, алгебры или топологии, спеша перейти к основным темам книги. А жаль – предмет достаточно интересен, важен и прост, чтобы рассказать о нем не торопясь.

Глава I. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ, БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

§ 1. Понятие множества

Не все математические понятия могут быть строго определены, так как какие-то из понятий должны быть первоначальными. К числу таких исходных понятий относится понятие множества. Пояснить смысл этого понятия можно, указав синонимы слову «множество». *Множество* – это набор или совокупность каких-либо объектов, объединенных по некоторому признаку. Объекты, из которых состоит множество, называют его *элементами.* Множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита, а элементы множества – малыми. Тот факт, что a является элементом множества A записывают так: $a \in A$ (читается «элемент a принадлежит множеству A»). Если элемент b не является элементом множества A, то данный факт записывают так: $b \notin A$ (читается «элемент b не принадлежит множеству A»).

Рассмотрим два способа задания множеств. Очевидно, множество задано, если определены все его элементы. Определить элементы множества можно либо их *перечислением* (если число их конечно), либо указанием присущего им *характеристического свойства*. В обоих случаях для записи множеств используются фигурные скобки. Если множество M состоит из элементов $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то будем записывать следующим образом: $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Например, множество всех натуральных делителей числа 12 можно записать так: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Заметим, что порядок, в котором перечисляются элементы, может быть любым. Если множество M состоит из элементов, обладающих свойством $P(x)$, то будем писать $M = \{x \mid P(x)\}$ (читается: «M равно множеству элементов x, таких, что $P(x)$»). Например, множество всех натуральных четных чисел можно записать так $\{x \mid \exists n \in \mathbf{N}, x = 2n\}$. Характеристическое свойство в этом случае есть одноместный предикат $P(x)$: $\exists n \in \mathbf{N},\ x = 2n$. Ясно, что бесконечное множество не может быть задано перечислением всех своих элементов и что конечное множество может быть задано с помощью характеристического свойства.

Определение 1.1. Множество B называется *подмножеством* множества A, если все элементы множества B принадлежат множеству A.

Тот факт, что B является подмножеством множества A записывают следующим образом: $B \subset A$ или $B \subseteq A$ (читается: «B содержится в A»). Из определения 1.1 вытекает, что всякое множество является подмножеством самого себя.

Определение 1.2. Множества A и B называются *равными*, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Другими словами: множества A и B равны если они состоят из одних и тех же элементов. Тот факт, что множества A и B равны записывают следующим образом: $A=B$. Определим два специальных множества.

Определение 1.3. *Пустым* множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента.

Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

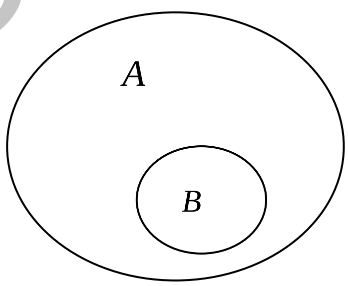
Предложение 1.4. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Доказательство. Для любого множества A импликация $x \in \varnothing \to x \in A$ истинна, так как посылка $x \in \varnothing$ ложна. Следовательно, $\varnothing \subset A$.

Определение 1.5. Множество U называется *универсальным* по отношению к множествам A_1, A_2, …, если каждое из этих множеств содержится в U.

Например, множество всех действительных чисел является универсальным множеством по отношению к множествам натуральных, целых и рациональных чисел.

Произвольное непустое множество можно интерпретировать в виде множества точек плоскости и изображать в виде некоторой замкнутой области, называемой диаграммой Эйлера–Венна. При этом равные множества должны изображаться одной замкнутой областью. Если B – подмножество множества A, то соответствующая иллюстрация имеет вид:



Универсальное множество, в отличие от произвольного множества, будем изображать на плоскости в виде замкнутой прямоугольной области.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под множеством?
2. Сформулируйте определение подмножества.

3. Какие множества называют равными?

4. Сформулируйте определение пустого множества.

5. Равны ли множества $\varnothing$и $\{\varnothing\}$?

6. Какой из знаков нужно поставить между множествами $\{1\}$ и $\{\{1\}, \{1,2\}\}$?

Упражнения

1. Доказать, что $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$.

2. Что можно сказать о множествах A_1, A_2, …, A_n, если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset A_1$?

3. Задайте двумя способами множество точек с целочисленными координатами, принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат.

4. Задайте с помощью характеристического свойства множество всех точек плоскости, принадлежащих первому координатному углу.

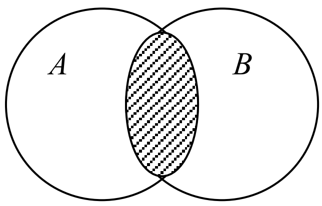
5. Запишите все подмножества множества $\{1, 2, 3\}$.

§ 2. Операции над множествами

Рассмотрим операции пересечения, объединения, разности и симметрической разности. При этом будем считать, что рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого универсального множества U.

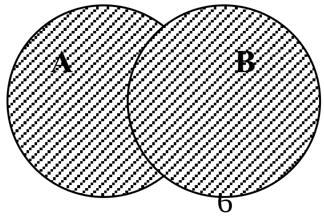
Определение 2.1. *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B одновременно.

Согласно определению 2.1 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ и графически изображается следующей заштрихованной областью:



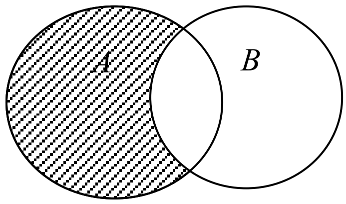
Определение 2.2. *Объединением* множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств.

Согласно определению 2.2 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ и графически изображается следующей заштрихованной областью:



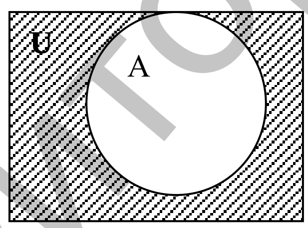
Определение 2.3. *Разностью* множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

Согласно определению 2.3. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ и графически изображается следующей заштрихованной областью:



Определение 2.4. *Дополнением* множества A до универсального множества U называется множество $\overline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству U и не принадлежат множеству A.

Согласно определению 2.4 $\overline{A} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$ и графически изображается следующей заштрихованной областью:

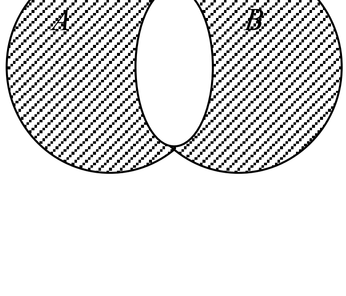


Из определений 2.3 и 2.4 следует, что $\overline{A} = U \setminus A$.

Определение 2.5. *Симметрической разностью* $A\Delta B$ называется множество состоящее из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B:

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Согласно определению 2.5 $A \Delta B$ графически изображается следующей заштрихованной областью:



Теорема 2.6. (Основные свойства операций над множествами).

Пусть A, B, C – произвольные подмножества универсального множества U. Тогда имеют место следующие равенства:

1. $A \cap A = A$ – свойство идемпотентности;
2. $A \cup A = A$ – свойство идемпотентности;
3. $A \cap B = A \cap B$ – свойство коммутативности;
4. $A \cup B = A \cup B$ – свойство коммутативности;
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ – свойство ассоциативности;
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – свойство ассоциативности;
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – свойство дистрибутивности;
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – свойство дистрибутивности;
9. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – свойство де Моргана;
10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ – свойство де Моргана;
11. $A \cap (A \cup B) = A$ – свойство поглощения;
12. $A \cup (A \cap B) = A$ – свойство поглощения;
13. $\overline{\overline{A}} = A$ – свойство двойного дополнения;
14. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
15. $A \cap U = A$;
16. $A \cup U = U$;
17. $A \cap \varnothing = \varnothing$;
18. $A \cup \varnothing = A$;
19. $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
20. $A \cup \overline{A} = U$;
21. $\overline{U} = \varnothing$;
22. $\overline{\varnothing} = U$.

Доказательство каждого свойства основывается на определении равенства множеств. Заметим, что основные свойства операций над множествами аналогичны основным свойствам логических операций, поэтому доказательства равенств 1 – 13 осуществляется с использованием соответствующих равносильностей из теоремы 1.3 части 1 «Введение в математику: элементы математической логики». Докажем например, равенство 8.

Пусть x – произвольный элемент множества $A \cup (B \cap C)$. Тогда

$$x \text{™} A \cup (B \cap C) \overset{1}{\equiv} x \text{™} A \vee x \text{™} B \cap C \overset{2}{\equiv} x \text{™} A \vee (x \text{™} B \wedge x \text{™} C) \overset{3}{\equiv}$$

$$\overset{3}{\equiv} (x \text{™} A \vee x \text{™} B) \wedge (x \text{™} A \vee x \text{™} C) \overset{4}{\equiv} x \text{™} A \cup B \wedge x \text{™} A \cup C \overset{5}{\equiv}$$

$$\overset{5}{\equiv} x \text{™} \ (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Поясним доказательство. Сначала мы воспользовались определением объединения множеств (первая равносильность), затем – определением пересечения множеств (вторая равносильность), потом применили свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции (третья равносильность) и в конце – определение пересечения множеств (пятая равносильность). Таким образом, мы доказали, что

$$x \text{™} A \cup (B \cap C) \equiv x \text{™} (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Это означает, что

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

и

$$A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

то есть

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Доказательство равенства 14 более простое:

$$x \text{™} A \setminus B \equiv x \text{™} A \wedge x \notin B \equiv x \text{™} A \wedge x \text{™} \bar{B} \equiv x \text{™} A \cap \bar{B}.$$

Равенства 15 – 18 доказываются с использованием соответствующих равносильностей 20 – 23 и теоремы 1.3 пособия «Введение в математику: элементы математической логики». Докажем например, равенства 15 и 18.

$$x \text{™} A \cap U \equiv x \text{™} A \wedge x \text{™} U \equiv x \text{™} A \wedge \text{И} \equiv x \text{™} A,$$
$$x \text{™} A \cup \varnothing \equiv x \text{™} A \vee x \text{™} \varnothing \equiv x \text{™} A \vee \text{Л} \equiv x \text{™} A.$$

В доказательстве равенств 19 и 20 используются соответственно равносильности 16 и 17 из теоремы 1.3 пособия «Введение в математику: элементы математической логики». Равенства 21 и 22 очевидны. Теорема доказана.

Покажем как применяя свойства операций над множествами, можно доказать равенство множеств.

Пример 2.7. Доказать равенство

$$(A \setminus (B \cup (A \cap \bar{B}))) \cap (A \setminus B) = \varnothing.$$

Решение:

$$(A \setminus (B \cup (A \cap \bar{B}))) \cap (A \setminus B) \overset{14}{=} (A \cap \overline{B \cup (A \cap \bar{B})}) \cap$$
$$\cap (A \cap \bar{B}) \overset{10}{=} (A \cap (\bar{B} \cap (\overline{A \cap \bar{B}}))) \cap (A \cap \bar{B}) \overset{5}{=}$$
$$\overset{5}{=} (A \cap \bar{B}) \cap ((\overline{A \cap \bar{B}}) \cap (A \cap \bar{B})) \overset{3,19}{=} (A \cap \bar{B}) \cap \varnothing \overset{17}{=} \varnothing.$$

Числа, стоящие над скобками равенств, обозначают номера применяемых свойств.

Таким образом, можно указать два основных способа доказательства равенства множеств: доказательство основанное на определении равенства множеств и доказательство, основанное на использовании свойств операций над множествами.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется пересечением, объединением и разностью двух множеств?

2. Что называется дополнением множества до универсального?

3. Что называется симметрической разностью?

4. Какими свойствами обладают операции над множествами?

5. Какими способами решаются задачи на доказательство равенств множеств?

Упражнения

1. Изобразить графически следующие множества:

а) $A \cap (B \setminus C)$;

б) $A \cup (B \cap C)$;

в) $A \setminus (B \cap C)$;

г) $A \setminus (B \setminus C)$;

д) $A \setminus (\overline{B} \setminus C)$;

е) $A \cap (\overline{B} \cup C)$.

2. В каких случаях

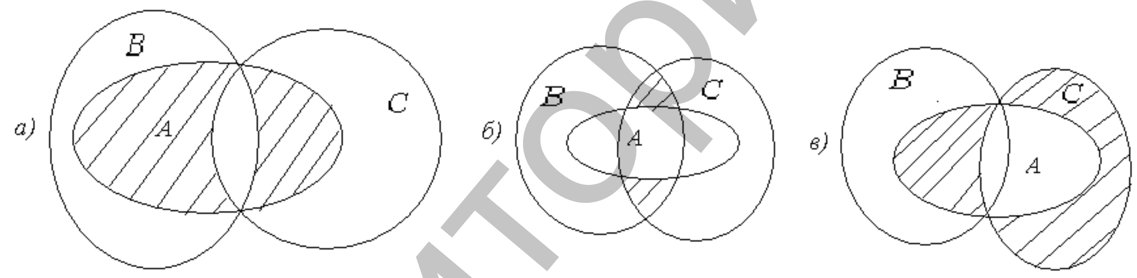
а) $A \cap B = A$;

б) $A \cup B = A$;

в) $A \setminus B = A$;

г) $A \cup B = A \cap B$?

3. Выразите через A, B и C множества, заштрихованные на следующих рисунках



4. Докажите равенство множеств двумя способами:

а) $\overline{A} \setminus (B \cup C) = \overline{A \cup B \cup C}$;

б) $\overline{A} \setminus (B \cap C) = \overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup C}$;

в) $A \cap ((B \setminus \overline{C}) \cup \overline{A}) = A \cap B \cap C$.

5. Докажите равенства, используя свойства операций над множествами:

а) $A \cap ((B \setminus (C \cap \overline{A})) \cap (C \setminus B)) = \varnothing$;

б) $A \cup (B \cap (C \setminus A) \cup \overline{A \cup B}) = A \cup (\overline{B} \cap C)$.

6. Верно ли равенство $(A \cup B) \setminus (B \cup A) = A \setminus C$ для любых A, B и C?

7. Докажите, что симметрическая разность ассоциативна:

$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

8. Докажите, что

$$(A \cap B \cap C) \Delta (A_1 \cap B_1 \cap C_1) \subset (A \Delta A_1) \cup (B \Delta B_1) \cup (C \Delta C_1)$$

для любых A, B, C и A_1, B_1, C_1.

§ 3. Бинарные отношения

Имея два произвольных элемента a и b, определим новый элемент (a, b), который назовем *упорядоченной парой*. При этом a будем называть первой компонентой, b – второй компонентой. Будем говорить, что две упорядоченные пары (a, b) и (c, d) равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Определение 3.1. *Декартовым* (*прямым*) произведением непустых множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, у которых первая компонента принадлежит множеству A, а вторая – B.

Декартово произведение множеств A и B обозначается через $A\times B$. Таким образом,

$$A\times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$. Тогда

$$A\times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}.$$

Отметим, что если $A \neq B$, то $A\times B \neq B\times A$. Если $A = B$, то получаем множество $A\times A$, которое называют декартовым квадратом множества A.

Определение 3.2. *Бинарным отношением*, заданным на множестве A, называется любое подмножество декартового квадрата множества A.

Бинарные отношения будем обозначать малыми греческими буквами. Примерами бинарных отношений на множестве $A = \{1, 2, 3\}$ могут служить подмножества множества $A\times A$:

$\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3)\}$, $\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$, $\rho_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $\rho_4 = \varnothing$, $\rho_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $\rho_6 = \{(1, 2), (2,3), (1, 3)\}$.

Бинарные отношения можно определить на любых множествах. Например, если M – множество треугольников, то можно рассматривать такое бинарное отношение

$$\Theta = \{(a, b) \mid a,b \in M \wedge a \text{ подобен } b\},$$

или, если P – множество всех людей, то бинарное отношение на P является следующее множество

$$\sigma = \{(a, b) \mid a,b \in P \wedge a \text{ знает } b\}.$$

Если ρ – бинарное отношение, то наряду с записью $(a, b) \in \rho$ будем употреблять и запись $a\,\rho\,b$, имеющую тот же смысл, и если $(a, b) \notin \rho$, то соответственно $a \not\rho\, b$.

Рассмотрим некоторые виды бинарных отношений.

Определение 3.3. Бинарное отношение ρ, заданное на множестве M, называется *рефлексивным*, если $\forall a \in M : a\,\rho\,a$.

Примерами рефлексивных бинарных отношений являются бинарные отношения ρ_2, ρ_5, Θ и σ. чтобы сформулировать определение нерефлексивного бинарного отношения, нужно взять отрицание предикатной формулы $\forall a \in A$: $a\ \rho\ a$. Согласно правилам построения отрицаний $\neg(\forall a \in A\colon\ a\ \rho\ a) \equiv \exists a \in A\colon\ a \not\rho\ a$. Следовательно, бинарное отношение ρ, заданное на множестве A, называется *нерефлексивным*, если $\exists a \in A$: $a \not\rho\ a$. Элемент a в этом случае называется *контрпримером* к свойству рефлексивности. Бинарные отношения ρ_1, ρ_3, ρ_4, ρ_6 не рефлексивны, так как число 2 для них является общим контпримером.

Определение 3.4. Бинарное отношение ρ, заданное на множестве M, называется *симметричным*, если $\forall a,b \in M$: $a\ \rho\ b \to b\ \rho\ a$.

Примерами симметричных бинарных отношений являются отношения ρ_2, ρ_3, ρ_5, Θ. Пустое бинарное отношение ρ_4 тоже симметрично, так как импликация $a\ \rho\ b \to b\ \rho\ a$ для него всегда истинна. Бинарное отношение ρ_1 не симметрично, так как $1\rho_1 2$ и $2 \not\rho_1 1$, а значит пара (1, 2) является контрпримером к этому свойству. По аналогичной причине отношение σ не симметрично, так как очевидно найдутся два человека, из которых первый знает второго, а второй не знает первого.

Определение 3.5. Бинарное отношение ρ, заданное на множестве M, называется *транзитивным*, если

$$\forall a,b,c \in M\colon a\ \rho\ b \wedge b\ \rho\ c \to a\ \rho\ c.$$

Примерами транзитивных бинарных отношений являются ρ_1, ρ_2, ρ_4, ρ_5, ρ_6, Θ. Бинарное отношение ρ_3 не транзитивно, так как $1\ \rho_3\, 2 \wedge 2\ \rho_3\, 1$, но $1 \not\rho_3 1$. Бинарное отношение σ не транзитивно, так как то , что это a знает b и b знает c не означает, что a знает c.

Определение 3.6. Бинарное отношение ρ, заданное на множестве M, называется *антирефлексивным*, если $\forall a \in M$: $a \not\rho\ a$.

Определение 3.7. Бинарное отношение ρ, заданное на множестве M, называется *антисимметричным*, если

$$\forall a,b \in M\colon a\ \rho\ b \wedge b\ \rho\ a \to a = b.$$

Примерами антисимметричных бинарных отношений являются отношения ρ_1, ρ_4, ρ_5, ρ_6. Бинарное отношение ρ_2 не антисимметрично, так как $1\rho_2 2 \wedge 2\rho_2 1$, но $1 \neq 2$. По аналогичной причине не антисимметрично бинарное отношение ρ_3. Так как два подобных треугольника не обязательно равны, то, следовательно, Θ – не антисимметрично. Так как два знакомых друг другу человека обязательно различны, то σ – не антисимметричное бинарное отношение.

Пусть A, B – произвольные непустые множества и ρ – бинарное отношение между элементами множества A и B, то есть $\rho \subset A \times B$. Множество всех элементов из A, являющихся первыми компонентами упорядоченных пар из ρ, называются *областью определения* бинарного отношения ρ, а множество всех вторых компонент – *областью значений* бинарного отношения ρ. Область определения ρ обозначается через $Dom\ \rho$, а область значений – через $Im\ \rho$. Таким образом,

$$Dom\ \rho = \{a \in A \mid \exists b \in B: (a, b) \in \rho\},$$
$$Im\ \rho = \{b \in B \mid \exists a \in A: (a, b) \in \rho\}.$$

Обратимся к примерам рассмотренным выше, и для некоторых из них найдем область определения и область значений. Нетрудно видеть, что $Dom\ \rho_1 = \{1, 3\}$, $Im\ \rho_1 = A$, $Dom\ \rho_2 = Im\ \rho_2 = A$, $Dom\ \rho_4 = Im\ \rho_4 = \varnothing$, $Dom\ \rho_6 = \{1, 2\}$, $Im\ \rho_6 = \{2, 3\}$, $Dom\ \Theta = Im\ \Theta = M$.

Определение 3.8. Пусть ρ – бинарное отношение между элементами множеств A и B. Тогда бинарное отношение $\rho' = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$ между элементами B и A называется *обратным бинарным отношением* к отношению ρ.

Пример: $\rho_1' = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$, $\rho_5' = \rho_5$.

Определение 3.9. Пусть A, B, C – непустые множества и $\rho \subset A\times B$, $\mu \subset B\times C$. *Композицией* бинарных отношений ρ и μ называется следующее бинарное отношение

$$\rho \circ \mu = \{(a, c) \mid \exists b \in B: (a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \mu\}.$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{m, n\}$, $\rho = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$, $\mu = \{(a, m), (a, n), (b, n), (c, m)\}$. Тогда

$$\rho \circ \mu = \{(1, m), (1, n), (2, m),(2, n), (3, m)\}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется декартовым произведением множеств?
2. Как определяется равенство двух упорядоченных пар?
3. Что называется бинарным отношением, заданным на множестве?
4. Сформулируйте определение свойств рефлексивности, симметричности, транзитивности, антирефлексивности, антисимметричности бинарных отношений.
5. Что называется областью определения и областью значений бинарного отношения?
6. Что называется композицией бинарных отношений?
7. Какому условию должны удовлетворять область определения и область значений бинарного отношения для того, чтобы $\rho \circ \rho \neq \varnothing$?
8. Сформулируйте определение бинарного отношения, обратного данному.

Упражнения

1. Составьте всевозможные бинарные отношения из множества $\{1, 2\}$ и определите для каждого из них, какими свойствами рефлек-

сивности, симметричности, транзитивности, антирефлексивности, антисимметричности оно обладает.

2. Докажите, что бинарное отношение ρ на множестве M симметрично и антисимметрично одновременно тогда и только тогда, когда $\rho = \{(a, a) \mid a$ ™ $M\}$.

3. Сформулируйте и запишите определение несимметричного, нетранзитивного, неантисимметричного, неантирефлексивного бинарного отношений.

4. Приведите пример нерефлексивного, несимметричного, нетранзитивного, неантирефлексивного, неантисимметричного бинарного отношения.

5. Какими свойствами обладают следующие бинарные отношения, заданные на множестве натуральных чисел:

а) $a \rho b \leftrightarrow a < b$;

б) $a \rho b \leftrightarrow a$ □ b;

в) $a \rho b \leftrightarrow a$ и b делятся на 5;

г) $a \rho b \leftrightarrow a$ делится на b;

д) $a \rho b \leftrightarrow a$ делит b;

е) $a \rho b \leftrightarrow a+b=10$;

ж) $a \rho b \leftrightarrow a$ и b нечетные числа;

з) $a \rho b \leftrightarrow a=b \vee a > b \vee a < b$;

и) $a \rho b \leftrightarrow a^b = b^a$;

к) $a \rho b \leftrightarrow b = a+1$.

6. Найдите $Dom\,\rho$ и $Im\,\rho$ для бинарных отношений ρ, определенных в предыдущих упражнениях.

7. Докажите, что $\rho' = \rho$ тогда и только тогда, когда ρ – симметричное бинарное отношение.

8. Является ли равенство $Dom\,\rho = Im\,\rho$ достаточным для того, чтобы $\rho \circ \rho = \rho$?

9. Для каждого бинарного отношения упражнения 5 найдите обратное бинарное отношение.

10. Найдите композицию бинарных отношений е) и к), в) и е), а) и д) упражнения 5.

11. Какими свойствами обладают следующие бинарные отношения, заданные на множестве M

а) $M = \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, $(a, b) \rho (c, d) \leftrightarrow ad = bc$;

б) $M = \mathbf{R}$, $a \rho b \leftrightarrow b = |a| \vee b = a^2$;

в) $M = \mathbf{Z}$, $a \rho b \leftrightarrow a+b > 5 \wedge b < 0$;

г) $M = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, $(a, b) \rho (c, d) \leftrightarrow a - b = c - d \wedge a \neq b$;

д) M – множество прямых плоскости, $a \rho b \leftrightarrow a \parallel b \vee a \perp b$.

§ 4. Отношение эквивалентности

Среди бинарных отношений важное место занимает отношение эквивалентности.

Определение 4.1. Бинарное отношение, заданное на множестве

M, называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примеры.

1. Пусть $M = \{1, 2, 3\}$. Нетрудно видеть, что бинарное отношение $\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ является рефлексивным, симметричным и транзитивным, а потому и отношением эквивалентности.

2. Пусть $M = \boldsymbol{N}$ и $\rho_2 = \{(a, b) \mid a$ и b имеют одинаковые остатки при делении на $3\}$. Отношение ρ_2 рефлексивно, так как a и a имеют одинаковые остатки при делении на 3. Отношение ρ_2 симметрично, так как если a и b, имеют одинаковые остатки при делении на 3, то очевидно, что b и a имеют одинаковые остатки при делении на 3. Отношение транзитивно, так как если a и b, b и c имеют одинаковые остатки при деление на 3, то a и c тоже имеют одинаковые остатки при делении на 3.

3. Пусть M – произвольное непустое множество, $\rho_3 = \{(a, b) \mid a = b\}$. Легко видеть, что ρ_3 – отношение эквивалентности на M.

Определение 4.2. Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве M и a ™ M. *Классом эквивалентных элементов, определяемым элементом a*, называется множество $\overline{a} = \{(b$ ™ $M) \mid (a, b)$ ™ $\rho\}$. В этом случае, a называется *представителем* класса $\overline{a}$.

В первом из предыдущих примеров $\overline{1} = \{1, 2\} = \overline{2}$, $\overline{3} = \{3\}$. Во втором примере получим три различных класса, так как при делении на 3 возможны остатки 0, 1, 2. В соответствии с этим получаем классы $\overline{0} = \{3k \mid k$ ™ $\mathbf{N}\}$, $\overline{1} = \{3k+1 \mid k$ ™ $\mathbf{N} \cup \{0\}\}$, $\overline{2} = \{3k+2 \mid k$ ™ $\mathbf{N} \cup \{0\}\}$. В третьем примере каждый класс эквивалентных элементов $\overline{a}$ состоит из элемента a, то есть $\overline{a} = \{a\}$.

Определение 4.3. *Разбиением множества M* называется совокупность подмножеств M_i (i ™ I), удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\forall i$ ™ I: $M_i \neq \varnothing$;
2) $\forall i, j$ ™ I: $i \neq j \to M_i \cap M_j = \varnothing$;
3) $\bigcup\limits_{i \in I} M_i = M$.

Примеры.

1. Пусть $M = \mathbf{N}$ и M_1 – множество всех нечетных чисел, M_2 – множество всех четных чисел. Ясно, что $M_1 \neq \varnothing$ и $M_2 \neq \varnothing$, кроме, того $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ и $M_1 \cup M_2 = \mathbf{N}$**,** то есть M_1, M_2 – разбиение множества $\mathbf{N}$.

2. Пусть $M = \mathbf{N}$, $\forall n$ ™ $\mathbf{N}$, $M_n = \{n\}$. Очевидно, что совокупность всех классов M_n (n ™ $\mathbf{N}$) образует разбиение множества $\mathbf{N}$.

Из примеров 1 и 2 вытекает, что для каждого непустого множества существует разбиение и если множество имеет более одного элемента, то число различных разбиений больше одного.

Между отношениями эквивалентности на множестве M и разбиениями множества M существует тесная связь. Эта связь определена в следующей теореме.

Теорема 4.4. Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве M. Тогда совокупность всех различных классов эквивалентности элементов образует разбиение множества M. Обратно: если совокупность подмножеств M_i (i ™ I) образует разбиение множества M, то бинарное отношение $\mu = \{(a, b) \mid \exists i$ ™ I: a, b ™ $M_i\}$ является отношением эквивалентности на M.

Доказательство. 1. Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве M и $\overline{a}$ – произвольный класс эквивалентных элементов. Так как ρ рефлексивно, то (a, a) ™ ρ, а значит a ™ $\overline{a}$. Это означает, что $\overline{a} \neq \varnothing$. Пусть b ™ M и $\overline{b} \cap \overline{a} \neq \varnothing$. Докажем, что $\overline{b} = \overline{a}$. Пусть c ™ $\overline{b} \cap \overline{a}$. Тогда c ™ $\overline{b}$, то есть (b, c) ™ ρ и c ™ $\overline{a}$, то есть (a, c) ™ ρ. Если x – произвольный элемент из класса $\overline{b}$, то (b, x) ™ ρ. Так как ρ симметрично, то (x, b) ™ ρ, а так как ρ транзитивно и (b, c) ™ ρ, то (x, c) ™ ρ. Аналогично (a, c) ™ $\rho \to (c, a)$ ™ ρ и поэтому (x, a) ™ ρ. Но тогда (a, x) ™ ρ и, следовательно, x ™ $\overline{a}$. Это означает, что $\overline{b} \subset \overline{a}$. Аналогично доказывается, что $\overline{a} \subset \overline{b}$ и поэтому $\overline{b} = \overline{a}$. Таким образом, либо два класса эквивалентных элементов равны между собой, либо не содержат общих элементов. Так как каждый класс эквивалентных элементов $\overline{a}$ является подмножеством в M, то объединение всех таких классов содержится в M, то есть $\bigcup\limits_{a \in M} \overline{a} \subset M$. Но поскольку $\forall a$ ™ M: a ™ $\overline{a}$, то a ™ $\bigcup\limits_{a \in M} \overline{a}$ и поэтому $M \subset \bigcup\limits_{a \in M} \overline{a}$, то есть $M = \bigcup\limits_{a \in M} \overline{a}$. Таким образом, совокупность всех различных классов эквивалентных элементов образует разбиение множества M.

2. Пусть теперь совокупность классов M_i (i ™ I) образует разбиение множества M. Докажем, что бинарное отношение $\mu = \{(a, b) \mid \exists i$ ™ I: a, b ™ $M_i\}$ является отношением эквивалентности на M. Так как $\bigcup\limits_{i \in I} M_i = M$, то $\forall a$ ™ M, $\exists i$ ™ I: a ™ M_i. Это означает, что (a, a) ™ μ и поэтому μ рефлексивно. Если b, a ™ M_i, то это означает, что $\exists i$ ™ I: a, b ™ M_i. Но тогда b, a ™ M_i и поэтому (b, a) ™ μ, следовательно, μ симметрично. Пусть (a, b) ™ μ и (b, c) ™ μ. Это означает, что $\exists i, j$ ™ I $(a, b$ ™ $M_i \wedge b, c$ ™ $M_i)$. Ясно, что b ™ $M_i \cap M_j$ и поэтому $M_i = M_j$. Но тогда a, c ™ M_i, а значит, (a, c) ™ μ ,то есть μ транзитивно. Таким образом μ – рефлексивное, симметричное, транзитивное би-

нарное отношение, то есть μ – отношение эквивалентности. Теорема доказана.

Пример. Пусть $M = \{a, b, c, d\}$. Легко видеть, что подмножества $\{a, b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ образуют разбиение множества M. Очевидно, что из элементов подмножества $\{a, b\}$ можно составить такие пары (a, a), (a, b), (b, a), (b, b), а из элементов подмножества $\{c\}$ только одну пару (c, c) и аналогично для подмножества $\{d\}$ – пару (d, d). Таким образом, бинарное отношение μ, определяемое данным разбиением, равно множеству $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$. Классы эквивалентных элементов $\bar{a}=\{a, b\}$, $\bar{c}=\{c\}$, $\bar{d}=\{d\}$, соответствующие этому бинарному отношению, образуют исходное разбиение.

Вопросы для самопроверки

1. Какое бинарное отношение называется отношением эквивалентности? Приведите примеры.

2. Что называется классом эквивалентных элементов, определяемых элементом a?

3. Что называется разбиением множества? Приведите примеры.

4. Сформулируйте теорему о связи между отношениями эквивалентности и разбиениями множества.

5. Сколько различных разбиений имеет множество $\{1, 2\}$?

Упражнения

1. Выпишите все отношения эквивалентности на множестве $\{a, b, c\}$ и соответствующие им разбиения.

2. Докажите, что следующие бинарные отношения на M являются отношениями эквивалентности

а) $M = \mathbf{N}$, $a \rho b \leftrightarrow |a–b|$ делится на n;

б) $M = \mathbf{Z}$, $a \rho b \leftrightarrow (a < 0 \wedge b < 0) \vee (a = b = 0) \vee (a > 0 \wedge b > 0)$;

в) $M = \mathbf{Q}$, $a \rho b \leftrightarrow a, b$ – одновременно целые или дробные числа;

г) $M = \mathbf{R}$, $a \rho b \leftrightarrow |a| = |b|$;

д) M – множество векторов плоскости, $\vec{a}\rho\vec{b} \leftrightarrow \vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$;

е) $M = \mathbf{R}$, $a \rho b \leftrightarrow [a] = [b]$, где $[a]$ – целая часть числа a;

ж) M – множество правильных n-угольников, $a \rho b \leftrightarrow a$ подобен b;

з) $M = \mathbf{R}$, $a \rho b \leftrightarrow \cos a = \cos b$.

3. Для каждого из отношений эквивалентности а) – з) упражнения 2 построить соответствующее разбиение.

4. Будет ли композиция двух отношений эквивалентности отношением эквивалентности?

5. Запишите отношения эквивалентности, соответствующие

разбиениям множества $\{a, b, c, d\}$

а) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$;
б) $\{a\}, \{b\}, \{c, d\}$;
в) $\{a\}, \{b, c, d\}$;
г) $\{a, b\}, \{c, d\}$;
д) $\{a, b, c, d\}$.

6. Пусть $M(n)$ – множество натуральных чисел, кратных n ($n > 1$). Образуют ли подмножества $M(n)$ ($n > 1$) разбиение множества **N**?

§ 5. Функции и отображения

Определение 5.1. *Функцией* из множества A в множество B называется бинарное отношение $\varphi \subset A \times B$, удовлетворяющее условию: $\forall a$ ™ A, $\forall b,c$ ™ B: (a, b) ™ $\varphi \wedge (a, c)$ ™ $\varphi \rightarrow b = c$.

Примеры функций.

1) Пусть $A = B = \mathbf{R}$, $\varphi_1 = \{(a, b) \mid b = a^2\}$,

2) Пусть $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{R}$, $\varphi_2 = \{(a, b) \mid b = \sqrt{a}\}$,

3) Пусть $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{R}$, $\varphi_3 = \{(a, b) \mid b = \lg a\}$.

Если φ – функция из множества A в множество B, то множество $Dom\,\varphi$ называется областью определения функции φ, а множество $Im\,\varphi$ – областью значений функции. Заметим, что $Dom\,\varphi$ может не совпадать с A.

Определение 5.2. *Отображение* множества A в множество B называется функция φ из A в B, для которой $Dom\,\varphi = A$.

В предыдущих примерах функции φ_1 и φ_3 являются отображениями, функция φ_2 – отображением множества **Z** в множество **R** не является, так как $Dom\,\varphi_2$ множество всех неотрицательных чисел. Заметим, что всякая функция φ является отображением множества $Dom\,\varphi$ в множество $Im\,\varphi$.

В этом параграфе основное внимание будет уделено отображениям. Для обозначения отображений кроме малых греческих букв будем использовать и малые латинские буквы f, g, h и т. д.

Пусть f – отображение множества A в множество B. Если (a, b) ™ f, то будем записывать $f(a) = b$ и называть b *образом* элемента a, а a – *прообразом* элемента b. Согласно определению образ любого элемента a из A существует и определен однозначно.

Если $f(a) = b$, то говорят, что элемент a соответствует элементу b при отображении f, а само f называют *соответствием* при котором каждому элементу множества A соответствует только один элемент множества B. Задание конкретного отображения f сводится к описанию способа нахождения образа $f(a)$ произвольного элемента a из A. Сам способ может быть описан либо словесно, либо таблицей, либо аналитическим выражением.

Определение 5.3. Отображение f множества A в множество B

называется *инъективным*, если $\forall a_1, a_2 \in A$: $f(a_2) = f(a_2) \to a_1 = a_2$.

Определение 5.4. Отображение f множества A в множество B называется *сюръективным*, $\forall b \in B\ \exists a \in A$: $f(a) = b$.

В качестве примеров рассмотрим элементарные функции.

1) Пусть $A = B = \mathbf{R}$, $\forall x \in A$: $f(x) = ax+b$, где $a \neq 0$. Если $ax_1+b = ax_2+b$, то $x_1 = x_2$ и поэтому отображение f инъективно. Если $y \in \mathbf{R}$, то $\dfrac{y-b}{a} \in \mathbf{R}$ и $f\left(\dfrac{y-b}{a}\right) = y$. Следовательно, отображение f сюръективно.

2) Пусть $A = B = \mathbf{R}$, $\forall x \in A$: $f(x) = x^2$. Отображение f не инъективно, так как $f(-1) = f(1) = 1$ и $-1 \neq 1$. Отображение f не сюръективно, так как, -1 не является образом никакого числа, то есть

$$\forall x \in \mathbf{R}: x^2 \neq -1.$$

3) Пусть A – множество неотрицательных действительных чисел, $B = \mathbf{R}$ и $\forall x \in A$: $f(x) = x^2$. Очевидно, что теперь f – инъективно, но несюръективное отображение.

4) Если $A = \mathbf{R}$, B – множество всех неотрицательных действительных чисел $\forall x \in \mathbf{R}$: $f(x) = x^2$. Ясно, что f неинъективно, но сюръективно.

5) Пусть $A = B$ – множество всех неотрицательных действительных чисел и $\forall x \in A$: $f(x) = x^2$. Ясно, что f инъективно и сюръективно.

6) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b\}$, $f = \{(1, a), (2, b), (3, a), (4, b)\}$. Очевидно, что f – отображение множества A в множество B. Отображение f не инъективно, так как $1 \neq 3$, $f(1) = f(3) = a$. Отображение f сюръективно, так как оба элемента a и b являются образами элементов из множества A.

Определение 5.5. Отображение f называется *биективным*, если оно инъективно и сюръективно.

Среди рассматриваемых выше отображений биективными являются отображения в примерах 1) и 5). Другими примерами биективных отображений являются функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ для $A = (-\pi/2; \pi/2)$ и $B = \mathbf{R}$, $f(x) = \lg x$ для $A = (0; +\infty)$ и $B = \mathbf{R}$.

Определение 5.6. Отображение f множества A в множество B называется *обратимым*, если обратное отношение f' является отображением множества B в множество A. В этом случае отображение f' называется *обратным* к отображению f и обозначается через f^{-1}.

Определим в каких из рассматриваемых выше примеров отображения обратимы. В первом примере отображение $f = \{(x, ax+b) \mid x \in R\}$. Для того, чтобы записать обратное бинарное отношение обозначим $ax+b$ через y. Тогда $x = (1/a)y - (b/a) = a'x+b'$, где $a' = (1/a)$, $b' = (-b/a)$. Следовательно, $f' = \{(y, a'y+b') \mid y \in \mathbf{R}\}$. Ясно, что f' – отображение множества **R** в **R** и потому f' – обратимое отображение.

Отображение f в примерах 2), 3) не обратимо, так как $Dom\, f' \neq B$.

Отображение f в примере 4) не обратимо, так как (1, 1) ™ f' и (1, –1) ™ f' поэтому бинарное отношение f' не является отображением.

Отображение f в примере 5) обратимо, так как обратное бинарное отношение $f' = \{(y, \sqrt{y}) \mid y$ ™ $\mathbf{R} \wedge y$ □ $0\}$ является, очевидно, отображением множества неотрицательных действительных чисел в себя.

Отображение f в примере 6) не обратимо, так как обратное бинарное отношение $f' = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3), (b, 4)\}$ не является отображением. Заметим, что отображение f оказалось обратным в тех случаях, когда оно было биективным. Такое совпадение не случайно. Имеет место теорема:

Теорема 5.7. Отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно биективно.

Доказательство. Необходимость. Пусть f – обратимое отображение множества A в множество B. Это означает, что обратное бинарное отношение f' также является отображением. Следовательно f', удовлетворяет двум условиям:

1) $\forall b$ ™ B, $\forall a, c$ ™ A: (b, a) ™ $f' \wedge (b, c)$ ™ $f' \rightarrow a = c$ и

2) $Dom\, f' = B$.

Из первого условия следует, что $b = f(a) = f(c) \rightarrow a = c$, то есть отображение f инъективно, а из второго $\forall b$ ™ B, $\exists a$ ™ A: (b, a) ™ f' откуда $f(a) = b$, то есть отображение f сюръективно. Таким образом, f – биективное отображение.

Достаточность. Пусть f – биективное отображение множества A в множество B. Тогда f – инъективное отображение, то есть $\forall a$, c ™ A, $\forall b$ ™ B: $f(a) = b = f(c) \rightarrow a = c$. Это означает, что если (b, a) ™ f' и (b, c) ™ f', то $a = c$. Следовательно, f' – функция из B в A. По условию f – сюръективное отображение, то есть $\forall b$ ™ B, $\exists a$ ™ A: $f(a) = b$, а значит, (b, a) ™ f'. Это говорит о том что $Dom\, f' = B$ и поэтому f' – отображение множества B в множество A. Таким образом, f – обратимое отображение. Теорема доказана.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией из множества A в множество B?

2. Что называется отображением множества A в множество B?

3. Что называется областью определения и областью значений функции?

4. Сформулируйте определение инъективного, сюръективного

и биективного отображений.

5. Какое отображение называется обратимым? Когда отображение обратимо?

6. Если f – отображение, то будет ли отображение f' биективным?

Упражнения

1. Какие из следующих бинарных отношений между элементами множеств A и B являются *а*) функциями из A в B, *б*) отображениями A в B:

а) $A = \mathbf{R} = B,\ a\ \rho\ b \leftrightarrow b = a^3$;

б) $A = \mathbf{R} = B, a\ \rho\ b \leftrightarrow b = \cos|a|$;

в) $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{2, 3, 5\}; \rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$;

г) $A = \mathbf{N}, B = \{2n \mid n \in N\}, a\ \rho\ b \leftrightarrow b = 2^a$;

д) $A = \mathbf{Z}, B=\mathbf{N},\ a\ \rho\ b \leftrightarrow b = |a|+1$;

е) $A = \{a \mid a \in \mathbf{R} \wedge a > 0\}, \mathbf{R} = B,\ a\ \rho\ b \leftrightarrow b = \lg a$;

ж) A – множество векторов плоскости, $B = \mathbf{N}$, $\vec{a}\ \rho\ b \leftrightarrow b = |\vec{a}|$.

2. Докажите, что каждая из следующих функций f является отображением множества A в множество B, и определите, какими из свойств инъективности, сюръективности, биективности обладает f:

а) $A = \mathbf{N} = B, f(a) = na$, где $n \in \mathbf{N}$;

б) $A = \mathbf{Z}, B = \mathbf{N}, f(a) = a^2+1$;

в) $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{Z}$, $f(a) = \begin{cases} a, \text{\textit{если}}\ a - \text{\textit{четно}}, \\ -a, \text{\textit{если}}\ a - \text{\textit{нечетно}} \end{cases}$;

г) $A = \mathbf{Z}, B = \mathbf{N}$, $f(a) = \begin{cases} 2a, \text{\textit{если}}\ a > 0, \\ 2|a|+1, \text{\textit{если}}\ a \leq 0 \end{cases}$;

д) $A = \mathbf{R}, B = [-1; 1], f(a) = \sin a$;

е) $A = \mathbf{R}, B = \mathbf{R}$, $f(a) = \begin{cases} a, \text{\textit{если}}\ a \leq 0, \\ a^2, \text{\textit{если}}\ a > 0 \end{cases}$;

ж) $A = \{a \mid a \in \mathbf{R} \wedge a \geq 0\}, B = \mathbf{R}, f(a) = \sqrt{a}$;

з) $A = \mathbf{R}, B = \{b \mid b \in \mathbf{R} \wedge b \geq 0\},\ f(a) = |a|$;

и) $A = \mathbf{R}, B = \{-1, 0, 1\}$, $f(a) = \begin{cases} -1, \text{\textit{если}}\ a < 0, \\ 0, \text{\textit{если}}\ a = 0, \\ 1, \text{\textit{если}}\ a > 0; \end{cases}$

к) A – множество подмножеств множества $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f(a)$ – наименьшее число в подмножестве a.

3. Какие из отображений упражнения 2 обратимы?

4. Докажите, что композиция отображений является отображением.

5. Докажите, что композиция инъективных (сюръективных) отображений является инъективным (сюръективным) отображением.

6. Пусть f, g – биективные отображения. Докажите, что $f \circ g$ – биективное отображение и что $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Глава II. МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВ

§ 1. Равномощность множеств

Определение 1.1. Множество A равномощно множеству B, если существует биективное отображение f: $A \to B$.

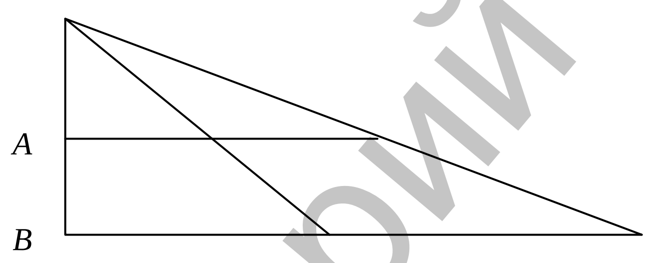
Пример 1. Множество $\mathbf{N}$ равномощно множеству $B = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, в качестве f можно взять отображение $f(n) = 2n$.

Пример 2. Множество $\mathbf{N}$ равномощно множеству $\mathbf{Z}$. Рассмотрим отображение f, задаваемое схемой:

$$1\to 0,\ 2\to -1,\ 3\to 1,\ 4\to -2,\ 5\to 2,\ 6\to -3,\ 7\to 3,\ \ldots$$

Нетрудно проверить, что f биективно.

Пример 3. Любые два отрезка числовой прямой равномощны.



На рисунке показано построение отображения f из отрезка A в отрезок B. Очевидно, что f биективно. Нетрудно видеть, что таким же способом можно доказать равномощность любых двух интервалов числовой прямой.

Прервём список примеров, чтобы сделать ряд замечаний и отметить основные свойства отношения равномощности. Прежде всего, заметим, что если биективное отображение f: $A \to B$ существует, то такое отображение не единственно (в предположении, что в A не менее двух элементов). Так, если $\mathbf{N}$ и B – множества из примера 1, то биекцией будет также и следующее отображение:

$$\begin{array}{cccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \ldots\} \\ \searrow & \swarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, \ldots\} \end{array}$$

Нетрудно показать, что два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда эти множества содержат одинаковое количество элементов. Поэтому понятие равномощности можно считать обобщением понятия «равное количество элементов».

Условимся равномощность множеств A и B обозначать так:

$|A| = |B|$. Сформулируем основные свойства равномощности:

1. $|A| = |A|$;
2. Если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$;
3. Если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Для доказательства свойства 1 достаточно рассмотреть тождественное на A отображение, свойство 2 следует из теоремы 5.7 предыдущей главы, а свойство 3 – из упражнения 5 параграфа пятого из предыдущей главы.

Продолжим список примеров.

Пример 4. Докажем, что множества $(0, 1)$ и $[0, 1]$ равномощны. Выделим в $(0, 1)$ подмножество $C = \{1/n \mid n$ ™ $\mathbf{N}\}$. Положим $f(1/2) = 0$, $f(1/3) = 1$, $f(\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{n}$, для n ™ $\mathbf{N}$. Этими равенствами отображение f определено на множестве C. Продолжим его тождественно на весь интервал $(0, 1)$, т.е. если x ™ $(0, 1) \setminus C$, то положим $f(x) = x$. Нетрудно проверить, что f – биекция из $(0, 1)$ на $[0, 1]$.

Легко привести примеры двух неравномощных множеств. Достаточно взять два конечных множества с разным количеством элементов или конечное и бесконечное. Приведём пример двух неравномощных бесконечных множеств.

Пример 5. Докажем, что $|\mathbf{N}| \neq |(0, 1)|$. Рассмотрим множество D бесконечных десятичных дробей вида $0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$, не содержащих 9 в периоде и таких, что хотя бы одно α_i не равно 0. Поскольку всякое число из $(0, 1)$ можно представить такой дробью (единственным способом) и всякая дробь из D определяет число из $(0, 1)$, то множество D равномощно $(0, 1)$. Нам поэтому достаточно показать, что $|\mathbf{N}| \neq |D|$. Предположим противное, пусть существует биекция $f\colon \mathbf{N} \to D$. Отображение f переводит натуральное число 1 в некоторую дробь из D, обозначим её $0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$; натуральное число 2 – в дробь $0{,}\beta_1\beta_2\ldots$, и т.д. Другими словами, функцию f можно представить в виде следующей таблицы:

$1 \to 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots,$
$2 \to 0{,}\beta_1\beta_2\ldots,$
$3 \to 0{,}\gamma_1\gamma_2\ldots,$
$\ldots\ \ldots\ \ldots$

Рассмотрим теперь дробь $a = 0{,}\theta_1\theta_2\ldots$,, где θ_1 – любая (десятичная) цифра, отличная от 0 и 9, θ_2 – любая цифра, отличная от 0, β_2 и 9, θ_3 – любая цифра, отличная от 0, γ_3 и 9 и т.д. По построению эта дробь принадлежит D. С другой стороны, поскольку f сюръективно, дробь a равна дроби, расположенной в какой-то строке таблицы. Но $a \neq 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$, поскольку $\theta_1 \neq \alpha$; $a \neq 0{,}\beta_1\beta_2\ldots$, поскольку $\theta_2 \neq \beta$, $a \neq 0{,}\gamma_1\gamma_2\ldots$, поскольку $\theta_3 \neq \gamma_3$; и т.д. Это означает, что $a \notin D$. Полученное противоречие доказывает, что $|\mathbf{N}| \neq |D|$.

§2. Сравнение мощностей

Определение 2.1. Мощность множества A меньше или равна мощности множества B, если существует $B_1 \subseteq B$ такое, что $|A| = |B_1|$.

Обозначение: $|A| \leq |B|$.

Необходимо подчеркнуть, что этим определением не вводится понятие мощности множества, а вводится некоторое бинарное отношение между множествами A и B, которое называется «мощность множества A меньше или равно мощности множества B».

Пример. $|\mathbf{N}| \leq |(0, 1)|$. Действительно, легко видеть, что множество $B_1 = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N},\ n > 1\}$ удовлетворяет условиям $B_1 \subseteq (0, 1)$ и $|\mathbf{N}| = |B_1|$.

Укажем ряд свойств введённого понятия:

1. $|A| \leq |B|$ тогда и только тогда, когда существует инъективное отображение f: $A \to B$.
2. Если $A \subseteq B$, то $|A| \leq |B|$.
3. Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, то $|A| \leq |C|$.
4. (Теорема Кантора–Бернштейна). Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.
5. Для любых множеств A и B выполняется $|A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$.

Свойство 2 легко следует из определения, свойство 3 – из упражнения 5 §5 главы I. Докажем сейчас свойство 1, а после этого – свойство 4. Пусть $|A| \leq |B|$. Тогда существуют $B_1 \subseteq B$ и биекция f: $A \to B_1$. Отображение f можно рассматривать как отображение из A в B; сюръективным f, вообще говоря, не будет в этом случае, а инъективным останется. Предположим теперь, что существует инъекция f: $A \to B$. Рассмотрим множество значений $f(A)$ отображения f. Отображение f можно рассматривать как отображение f: $A \to f(A)$. В этом случае f останется инъективным отображением, но будет ещё и сюръективным. Это означает, что $|A| = |f(A)|$. Следовательно, $|A| \leq |B|$. Свойство 1 доказано.

Доказательство теоремы Кантора–Бернштейна будет использовать следующее утверждение:

Лемма 2.2. Если $C \supseteq C_1 \supseteq C_2$ и $|C| = |C_2|$, то $|C| = |C_1|$.

Доказательство. Пусть $C \supseteq C_1 \supseteq C_2$ и существует биекция f: $C \to C_2$. Надо построить биекцию g: $C \to C_1$. Рассмотрим последовательность множеств A_0, A_1, A_2, …, определяемую равенствами $A_0 = C_1 \backslash C_2$, $A_1 = f(A_0)$, $A_2 = f(A_1)$, … . Пусть $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Определим отображение g: $C \to C_1$ следующим образом:

$$g(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x\in A, \\ f(x), \text{ если } x\notin A. \end{cases}$$

Докажем, что g – сюръективное отображение. Пусть $y \in C_1$. Надо найти $x \in C$ такой, что $g(x) = y$. Если $y \in A$, то в качестве x можно взять y, поскольку в этом случае $g(x) = x$. Предположим, что $y \notin A$. Тогда $y \in C_2$ и в силу сюръективности отображения f существует элемент $x_1 \in C$ такой, что $f(x_1) = y$. Докажем, что $x_1 \notin A$. Действительно, если $x_1 \in A_i$, то $y \in A_{i+1}$ и, следовательно, $y \in A$. Если $x_1 \notin A$, то $f(x_1) = g(x_1)$. Это означает, что $g(x_1) = y$, т.е. в качестве искомого x можно взять x_1.

Проверим, что g – инъективное отображение. Предположим, что $g(x_1) = g(x_2)$. Рассмотрим четыре случая: 1) $x_1 \in A$, $x_2 \in A$; 2) $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$; 3) $x_1 \notin A$, $x_2 \in A$; 4) $x_1 \notin A$, $x_2 \notin A$. В первом случае имеем $g(x_1) = x_1$ и $g(x_2) = x_2$. Следовательно, равенство $g(x_1) = g(x_2)$ даёт $x_1 = x_2$. В четвёртом случае имеем $f(x_1) = g(x_1)$ и $f(x_2) = g(x_2)$. Поэтому из равенства $g(x_1) = g(x_2)$ следует $f(x_1) = f(x_2)$, а затем и $x_1 = x_2$, поскольку f – инъекция. Итак, в первом и четвёртом случае мы проверили, что g – инъекция. Докажем, что второй и третий случаи противоречат равенству $g(x_1) = g(x_2)$. Тем самым доказательство инъективности отображения g будет закончено. Пусть $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$ и $g(x_1) = g(x_2)$. Тогда $g(x_1) = x_1$ и $f(x_2) = g(x_2)$. Отсюда следует, что $x_1 = f(x_2)$. Если $x_1 \in A$, то $x_1 \in A_i$ при некотором $i \geq 0$. Случай $i = 0$ невозможен, поскольку f – отображение в C_2, а $A_0 \cap C_2 = \varnothing$. Предположим, что $x \in A_i$, при $i \geq 1$. Тогда $x_2 \in A_{i-1}$, что противоречит условию $x_2 \notin A$. Мы доказали, что второй случай противоречит равенству $g(x_1) = g(x_2)$. Аналогично рассматривается и третий случай. Доказательство леммы закончено.

Перейдём теперь к доказательству теоремы Кантора-Бернштейна. Пусть $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Тогда существует $B_1 \subseteq B$ такое, что $|A| = |B_1|$ и существует инъекция g: $B \to A$ (поскольку $|B| \leq |A|$). Инъекция g: $B \to A$ будет биекцией из B на $g(B)$, т.е. $|B| = |g(B)|$. Рассмотрим отображение g', которое является ограничением отображения g на множество B_1. Нетрудно проверить, что g' есть биекция из B_1 на $g'(B_1)$, т.е. $|B_1| = |g'(B_1)|$. Но $A \supseteq g(B) \supseteq g'(B_1)$ и $|A| = |B_1| = |g'(B_1)|$. Мы находимся в условиях леммы. Заключение леммы даёт, что $|A| = |g(B)|$. Отсюда следует необходимое равенство $|A| = |B|$, поскольку $|B| = |g(B)|$. Теорема доказана.

Определение 2.3. Мощность A меньше мощности B, если $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Обозначение: $|A| < |B|$.

Пример. $|\mathbf{N}| < |(0,\ 1)|$. Действительно, в предыдущем примере мы доказали, что $|\mathbf{N}| \leq |(0,\ 1)|$, а в §1 – $|\mathbf{N}| \neq |(0,\ 1)|$.

В связи с приведённым примером выясним, существует ли бесконечное множество A такое, что $|A| < |\mathbf{N}|$, и существует ли множество B такое, что $|(0,\ 1)| < |B|$?

Дадим ответ на первый вопрос.

Теорема 2.4. Если A – бесконечное множество, то $|\mathbf{N}| \leq |A|$.

Доказательство. Зафиксируем в A элемент a_1, и рассмотрим множество $A \setminus \{a_1\}$. Если A бесконечно, то $A \setminus \{a_1\}$ непусто. Зафиксируем в $A \setminus \{a_1\}$ элемент, скажем, a_2 , и рассмотрим множество $A \setminus \{a_1, a_2\}$. Если A бесконечно, то $A \setminus \{a_1, a_2\}$ непусто. Зафиксируем в $A \setminus \{a_1, a_2\}$ элемент a_3 и т.д. Рассмотрим теперь множество $A' = \{a_1, a_2, a_3,\ \ldots\}$. Ясно, что $A' \subseteq A$ и $|A'| = |\mathbf{N}|$. Это означает, что $|\mathbf{N}| \leq |A|$.

Ответ на второй вопрос содержится в следующем утверждении.

Теорема 2.5. (Теорема Кантора). Для всякого множества M выполняется $|M| < |B(M)|$.

Доказательство. Напомним вначале, что $B(M)$ – множество всех подмножеств множества M. Для удобства дальнейшего изложения обозначим некоторые элементы множества M буквами $a, b, c, \ldots$, т.е. пусть $M = \{a,\ b,\ c,\ \ldots\}$. Нам надо доказать, что $|M| \leq |B(M)|$ и $|M| \neq |B(M)|$. Для доказательства первого рассмотрим множество $K = \{\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \ldots\}$. Очевидно, что $K \subseteq B(M)$ и что отображение $f(x) = \{x\}$ есть биекция из M на K. Это означает, что $|M| \leq |B(M)|$. Неравенство $|M| \neq |B(M)|$ докажем методом от противного, т.е. предположим, что существует биекция g: $M \to B(M)$. Элемент $x \in M$ назовём включённым, если $x \in g(x)$, и невключенным, если $x \notin g(x)$. Обозначим буквой S множество всех невключенных элементов из M. Очевидно, что $S \subseteq M$ и $S \notin B(M)$. Из сюръективности функции g следует, что существует элемент $d \in M$ такой, что $g(d) = S$. Элемент d является либо включённым, либо невключенным. Если d – включенный элемент, то $d \in g(d)$, т.е. $d \in S$. Но S содержит только невключенные элементы; следовательно, d – невключенный элемент. Если же d – невключенный элемент, то $d \in S$, поскольку S содержит все невключенные элементы. Однако $S = g(d)$, т.е. $d \in g(d)$, и поэтому d – включенный элемент. Итак, d – включенный элемент тогда и только тогда, когда d – невключенный элемент. Противоречие доказывает, что $|M| \neq |B(M)|$. Теорема Кантора доказана.

§3. Счётные множества

В предыдущем параграфе мы показали, что множества, равномощные **N**, являются наименьшими по мощности среди бесконечных множеств. Изучим эти множества подробнее.

Определение 3.1. Множество A называется счётным, если $|A| = |\mathbf{N}|$

Примеры. Множество **N** счётно, поскольку $|\mathbf{N}| = |\mathbf{N}|$. В §1 было доказано, что $|\mathbf{N}| = |\mathbf{Z}|$, поэтому **Z** тоже счётно.

Ниже мы сформулируем и докажем ряд теорем о счётных множествах. Сейчас отметим два момента, касающихся доказательства этих теорем. Для доказательства счётности множества A достаточно в силу теоремы Кантора–Бернштейна установить выполнимость неравенств $|\mathbf{N}|$ □ $|A|$ и $|A|$ □ $|\mathbf{N}|$. Первое из неравенств будет получаться как следствие бесконечности множества A. Для доказательства второго неравенства будет, как правило, конструироваться инъекция $f\colon A \to \mathbf{N}$. Второй момент касается обозначения элементов счётных множеств. Если множество A счётно, то существует биекция $f\colon N \to A$. Это отображение натуральные числа переводит в элементы множества A. Элемент $f(1)$ обозначим через a_1, $f(1)$ – через a_2 и т.д. Тогда, в силу сюръективности отображения f, можно записать, что $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, т.е. счётное множество можно расположить в последовательность. Подчеркнём, что в этой записи $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$.

Теорема 3.2. Объединение конечного и счётного множеств счётно.

Доказательство. Пусть A – конечное множество, B – счётное, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Рассмотрим равенство $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$. Если A конечно, то $A \setminus B$ тоже конечно. Кроме того, $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$. Следовательно, теорему достаточно доказать в частном случае: $A \cap B = \varnothing$. Построим отображение $f\colon \mathbf{N} \to A \cup B$ следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} \{1, & 2, & 3, \ldots, & k, & k+1, & k+2, & \ldots\} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \{a_1, & a_2, & \ldots, & a_k, & b_1, & b_2, & \ldots\} \end{array}$$

Легко видеть, что в случае $A \cap B = \varnothing$ отображение f биективно. Теорема доказана.

Теорема 3.3. Объединение двух счётных множеств счётно.

Доказательство. Пусть A и B – счётные множества, $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$.

Сведём, как и в предыдущей теореме, доказательство к случаю $A \cap B = \varnothing$. Рассмотрим равенство $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$. Если $A \setminus B$ конечно, то счётность $A \cup B$ следует из теоремы 3.2. Если $A \setminus B$ бесконечно, то $A \setminus B$ счётно, поскольку $(A \setminus B) \subseteq A$ и A счётно. Итак, можно считать, что $A \cap B = \varnothing$. Рассмотрим отображение

$$g(n) = \begin{cases} a_n, \text{ если } n > 0, \\ b_{-n+1}, \text{ если } n \le 0. \end{cases}$$

Легко показать, что g – биективное отображение. Теорема доказана.

Теорема 3.4. Декартово произведение двух счётных множеств счётно.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ – счётные множества. Рассмотрим отображение f: $A \times B \to \mathbf{N}$, определяемое равенством $f(a_i, b_j)=2^i 3^j$. Легко видеть, что если $i_1 \ne i_2$ или $j_1 \ne j_2$, то $2^{i_1}3^{j_1} \ne 2^{i_2}3^{j_2}$. Это означает, что f инъективно и $|A \times B| \le |\mathbf{N}|$. Неравенство $|A \times B| \ge |\mathbf{N}|$ следует из бесконечности множества $A \times B$. Применение теоремы Кантора–Бернштейна завершает доказательство.

Теорема 3.5. Объединение счётного множества счётных множеств счётно.

Доказательство. Пусть множество I счётно и для каждого $i \in I$ множество A_i – тоже счётно. Объединение семейства $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ обозначим буквой A. Элементы множества I можно расположить в последовательность $i_1, i_2, i_3, \ldots$. Более того, можно считать, что $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ и т.д., т.е. что $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Каждое из множеств A_i также расположим в последовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$. Построим отображение g: $A \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ следующим образом. Пусть $a \in A$. Тогда $a \in A_j$ при некотором $j \in \mathbf{N}$. Выберем наименьшее число k с таким свойством, т.е. $a \in A_k$ и $a \notin A_i$ при $i < k$. Если $a \in A_k$, то $a = a_{k_l}$ при некотором l. Положим $g(a) = (k, l)$. Предположим теперь, что $g(a_1) = g(a_2)$, т.е. $(k_1, l_1) = (k_2, l_2)$. Последнее равенство означает, что a_1 и a_2 принадлежат одному и тому же множеству A_{k_1}, имеют один и тот же номер l_1 в зафиксированном расположении элементов множества A_{k_1} в последовательности и, следовательно, совпадают. Таким образом, g – инъективное отображение и $|A| \le |\mathbf{N} \times \mathbf{N}|$. Применение теорем 3.4 и Кантора-Бернштейна завершает доказательство.

Теорема 3.6. Множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел счётно.

Доказательство. Всякое рациональное число a можно единственным образом представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ и НОД$(m, n) = 1$. Это представление позволяет определить инъективное отображение g: $\mathbf{Q} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ следующим образом: $g(a) = (m, n)$. Следовательно, $|\mathbf{Q}| \le |\mathbf{Z} \times \mathbf{N}| = |\mathbf{N}|$. Неравенство $|\mathbf{N}| \le |\mathbf{Q}|$ следует из того, что $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}$. По теореме Кантора–Бернштейна получаем равенство $|\mathbf{N}| = |\mathbf{Q}|$. Теорема доказана.

Теорема 3.7. Множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов счётного множества, счётно.

Доказательство. Пусть A – исходное счётное множество. Множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов множества A, обозначим через S_f, множество всех одноэлементных последовательностей – буквой S_1, двухэлементных – буквой S_2 и т.д. Разумеется, выполняется равенство $S_f = S_1 \cup S_2 \cup \ldots$. Далее, легко видеть, что $|S_1| = |A|$, $|S_2| = |A \times A|$, … . Это означает, что каждое множество S_i счётно (теорема 3.4). Следовательно, S_f – объединение счётного семейства счётных множеств и поэтому S_f – счётное множество. Теорема доказана.

Теорема 3.8. Если A – конечное или счётное множество, B – бесконечное множество, то $|A \cup B| = |B|$.

Доказательство. Как и в теореме 3.3, сводим доказательство к частному случаю: $A \cap B = \varnothing$. Зафиксируем в бесконечном множестве B счётное подмножество B_1. Такое подмножество найдётся, поскольку $|\mathbf{N}| \le |B|$. Разность $B \backslash B_1$ обозначим через B_2. Тогда $B = B_1 \cup B_2$ и $A \cup B = (A \cup B_1) \cup B_2$. Множество $A \cup B_1$ счётно (по теореме 3.2 или 3.3), и поэтому существует биективное отображение $f: B_1 \to A \cup B_1$. Продолжим это отображение на B_2 тождественным образом. Получим биективное отображение $g: B \to A \cup B$. Это означает, что $|B| = |A \cup B|$. Теорема доказана.

§4. Континуальные множества

Определение 4.1. Множество A называется континуальным (или множеством мощности континуума), если $|A| = |(0, 1)|$.

Примеры.

1. Интервал (α, β) при $\alpha<\beta$ является континуальным множеством, поскольку как отмечалось в §1, любые два интервала числовой прямой равномощны.

2. Отрезок $[\alpha, \beta]$ при $\alpha<\beta$ также является континуальным множеством, т.к. по теореме 3.8 из §3 $|[\alpha, \beta]| = |(\alpha, \beta)|$.

3. Рассмотрим отображение f: $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, определяемое равенством $f(x) = \operatorname{tg} x$ (для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$). Известно, что f биективное отображение. Это означает, что $\left|-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right| = |\mathbf{R}|$, т.е. что $\mathbf{R}$ – континуальное множество.

4. Пусть теперь M – произвольное подмножество действитель-

ных чисел, содержащее некоторый интервал (в качестве подмножества). Тогда M – континуальное множество. Действительно, если $(\alpha, \beta) \subseteq M \subseteq \mathbf{R}$, то $|(\alpha, \beta)| \square |M| \square |\mathbf{R}|$. Континуальность множества M следует из континуальности множеств (α, β) и $\mathbf{R}$ и теоремы Кантора–Бернштейна.

Теорема 4.2. Объединение двух континуальных множеств имеет мощность континуума.

Доказательство. Пусть A и B – данные континуальные множества. Выше отмечалось, что множества (0, 1) и (1, 2) так же континуальны. Существует поэтому биективные отображения f: $A \to (0, 1)$ и g: $B \to (1, 2)$. Отображение h: $A \cup B \to (0, 2)$, определяемое равенством

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \textit{если} \;\; x \in A, \\ g(x), \textit{если} \;\; x \notin A \quad \textit{и} \quad x \in B, \end{cases}$$

является инъективным. Это означает, что $|A \cup B| \to |(0, 2)|$. С другой стороны $|(0, 2)| \square |A \cup B|$, поскольку $|(0, 2)| = |A| \square |A \cup B|$. Следовательно, $|(0, 2)| = |A \cup B|$. Теорема доказана.

Теорема 4.3. Декартово произведение двух континуальных множеств имеет мощность континуума.

Доказательство. Нетрудно показать, что если $|A| = |C|$ и $|B| = |D|$, то $|A \times B| = |C \times D|$. Действительно, если существуют биекции f: $A \to C$ и g: $B \to D$, то биекция h: $A \times B \to C \times D$ может быть построена следующим образом:

$$h(a, b) = (f(a), g(b)).$$

В силу сказанного достаточно показать, что $(0, 1)\times(0, 1)$ – континуальное множество. Неравенство $|(0, 1)| \square |(0, 1)\times(0, 1)|$ очевидно. Для доказательства обратного неравенства построим отображение: f: $(0, 1)\times(0, 1) \to (0, 1)$. Пусть (a,b) ™ $(0, 1)\times(0, 1)$. Представим числа a и b в виде бесконечных десятичных дробей (без 9 в периоде): $a = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$, $b = 0{,}\beta_1\beta_2\ldots$. Положим $f(a,b) = 0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots$. Если $c = 0{,}\gamma_1\gamma_2\ldots$, $d = 0{,}\delta_1\delta_2\ldots$ и $f(a,b) = f(c,d)$, то $0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots = 0{,}\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_2\ldots$. Но, поскольку дроби в последнем равенстве не содержат 9 в периоде, то $\alpha_i = \gamma_i$ и $\beta_i = \delta_i$ для всех i. Это означает, что $a = c$ и $b = d$. Тем самым доказана инъективность отображения f. Следовательно, $|(0, 1)\times(0, 1)| \square |(0, 1)|$. Теорема доказана.

В следующих трёх теоремах речь пойдёт о последовательностях, составленных из элементов множества A. Отметим, что в данном случае речь идёт о бесконечных последовательностях, т.е. о функциях натурального аргумента. Множество всех последовательностей, составленных из элементов множества A будем обозначать через $S(A)$.

Теорема 4.4. Множество всех последовательностей, составленных из 0 и 1, имеет мощность континуума.

Доказательство. Множество $\{0, 1\}$ обозначим буквой A. Теорема следует из существования инъективных отображений f: $S(A) \to [0, 1]$ и g: $[0, 1] \to S(A)$. Построим эти отображения. Если $a = \alpha_1\alpha_2\ldots$ – последовательность из 0 и 1, то определим $f(a)$ как число, которое имеет следующее десятичное разложение $f(a) = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$. Легко проверить, что f – инъективное отображение. Построим отображение g. Пусть b™$[0,1]$, $b\neq 1$ и $b = 0{,}\beta_1\beta_2\ldots$ – десятичное разложение числа b без 9 в периоде. Тогда в качестве $g(b)$ возьмём следующую последовательность: сначала пишем $\beta_1\neq 1$ единиц, затем один ноль, после этого – β_2+1 единиц, опять один ноль и т.д. Например, $g\left(\frac{1}{4}\right) = 1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,0,1,0,\ldots$. Если $b=1$, то положим $g(1)=1,1,1,\ldots$. Нетрудно проверить, что g – инъективное отображение. Теорема доказана.

Теорема 4.5. Если A континуально, то $S(A)$ также континуально.

Доказательство. Неравенство $|S(\{0,1\})|$ □ $|S(A)|$, очевидно, выполняется. Докажем, что $|S(A)|$ □ $|S(\{0,1\})|$. Нам нужно построить отображение f, которое каждой последовательности a_1, a_2, a_3, … элементов множества A ставит в соответствие последовательность из 0 и 1. Существует биективное отображение g: $A \to S(\{0, 1\})$, поскольку по теореме 4.4 множества A и $S(\{0, 1\})$ равномощны. Рассмотрим $\alpha = a_1$, a_2, a_3, … – последовательность из $S(A)$. Образом последовательности α при отображении f будет последовательность из 0 и 1, т.е. $f(a)$ будет функцией из $\mathbf{N}$ в $\{0, 1\}$. Сначала определим $f(a)$ на натуральных числах, являющихся степенями простого числа, следующим образом: если $\alpha = p_i^k$, где p_i есть i-е простое число, то $f(\alpha)(n) = g(a_i)(k)$. (Напомним, что $g(a_i)$ – это тоже функция $\mathbf{N} \to \{0,1\}$). Если n не является степенью простого числа, то положим $f(\alpha)(n) = 0$. Нетрудно проверить, что f – инъективное отображение. Следовательно, необходимое неравенство $|S(A)|$ □ $|S(\{0,1\})|$ доказано. Теорема доказана.

Замечание. Из теорем 4.4 и 4.5 следует, что если 2 □ $|A|$ □ $|(0,1)|$, то $S(A)$ имеет мощность континуума.

Теорема 4.6. Множество $B(\mathbf{N})$ равномощно множеству $S(\{0, 1\})$.

Доказательство. Напомним, что $B(\mathbf{N})$ – множество всех подмножеств множества $\mathbf{N}$. Пусть $A\subseteq\mathbf{N}$, т.е. A™$B(A)$. Рассмотрим функцию χ_A: $\mathbf{N} \to \{0,1\}$, определённую следующим образом:

$$\chi_A(i) = \begin{cases} 1, \text{если } i \in A, \\ 0, \text{если } i \notin A \end{cases}$$

Функция χ_A называется характеристической функцией множества A. Если $i_0 \in A$ и $i_0 \notin B$, то $\chi_A(i_0) \neq \chi_B(i_0)$. Это означает, что если $A \neq B$, то $\chi_A \neq \chi_B$. Итак, мы каждому подмножеству множества **N** ставим в соответствие его характеристическую функцию. При этом разным подмножествам соответствуют разные характеристические функции. Но характеристическая функция – это некоторая последовательность из 0 и 1. Следовательно, нами определено инъективное отображение f: $B(\mathbf{N}) \to S(\{0, 1\})$. Нетрудно проверить, что f является и сюръективным. Следовательно, $|B(\mathbf{N})| = |S(\{0, 1\})|$. Теорема доказана.

Две последние теоремы посвящены функциям действительного аргумента, а именно, функциям f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Теорема 4.7. Множество C всех непрерывных функций f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ имеет мощность континуума.

Доказательство. Рассмотрим множество $B = \{f \mid f(x) = r, r \in \mathbf{R}\}$. Очевидно, что $B \subseteq C$ и $|B| = |\mathbf{R}|$. Следовательно, $|\mathbf{R}| \leq |C|$. Для того чтобы установить обратное неравенство $|C| \leq |\mathbf{R}|$, рассмотрим множества $D = \{g \mid g\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{R}\}$ и $E = \{h \mid h\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$. Отметим, что E – континуальное множество (теорема 4.5). Для доказательства неравенства $|C| \leq |\mathbf{R}|$ достаточно построить инъективные отображения u: $C \to D$ и v: $D \to E$. Возьмём непрерывную функцию f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Определим $u(f)$ как ограничение функции f на множество **Q**. Ясно, что u есть отображение из C в D. Докажем инъективность отображения u. Предположим, что $u(f_1) = u(f_2)$. Это означает, что $f_1(b) = f_2(b)$ для любого $b \in \mathbf{R}$. Для всякого $b \in \mathbf{R}$ существует последовательность a_1, a_2, a_3, … из рациональных чисел, сходящаяся к b. По определению непрерывной функции имеем, что $f_1(b) = \lim\limits_{n\to\infty} f_1(a_n)$ и $f_2(b) = \lim\limits_{n\to\infty} f_2(a_n)$. Но $f_1(a_n) = f_2(a_n)$ для любого n. Следовательно, $f_1(b) = f_2(b)$. Мы доказали, что u – инъективное отображение.

Чтобы построить отображение v: $D \to E$, зафиксируем сначала биекцию i:$\mathbf{N} \to \mathbf{Q}$, которая существует в силу счётности **Q**. Возьмём функцию g из D. Функцию $v(g)$ определим равенством $v(g)(n) = g(i(n))$. Используя биективность отображения i, нетрудно показать, что v – инъективное отображение. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 4.8. Пусть M – множество всех функций действительного аргумента. Тогда $|\mathbf{R}| < |M|$.

Доказательство. Рассмотрим множество $B(\mathbf{R})$. Каждому элементу A из $B(\mathbf{R})$ поставим в соответствие его характеристическую функцию χ_A: $\mathbf{R} \to \{0,1\}$. Напомним, что χ_A определяется равенством

$$\chi_A(i) = \begin{cases} 1, \textit{ если } \; i \in A, \\ 0, \textit{ если } \; i \notin A. \end{cases}$$

Как мы уже отмечали, разным элементам множества $B(\mathbf{R})$ соответствуют разные характеристические функции. Это означает, что

$|B(\mathbf{R})|$ □ $|M|$. Следовательно, $|\mathbf{R}|$ □ $|M|$, поскольку по теореме Кантора $|\mathbf{R}| < |B(\mathbf{R})|$. Теорема доказана.

§5. Кардинальные числа

В §1 этой главы мы отмечали, что отношение равномощности рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности. Этому отношению эквивалентности соответствует разбиение всей совокупности множеств на классы. Классы разбиения можно получить так: зафиксировать множество и рассмотреть совокупность всех множеств, равномощных данному. Обозначим каждый класс разбиения некоторым символом (для каждого класса свой символ), который назовём мощностью множеств данного класса или кардинальным числом. При этом класс разбиения, содержащий конечные n-элементные множества, обозначим натуральным числом n ; а класс, содержащий пустое множество, – числом 0. Класс счётных множеств принято обозначать символом χ_0, а континуальных – символом c. Мы будем использовать выражение «α есть мощность множества A» в том смысле, что класс множеств, равномощных множеству A, обозначен символом α. Например, 3 есть мощность множества $\{2, \sqrt{3}, \pi\}$.

На совокупности кардинальных чисел вводятся отношения порядка и операции сложения и умножения. Начнём с определения операции сложения. Пусть нам даны два кардинальных числа α и β. Выберем множество A мощности α и множество B мощности β так, что $A \cap B = \varnothing$. *Суммой* $\alpha+\beta$ назовём мощность объединения $A \cup B$. Нетрудно показать, что результат операции не зависит от выбора множеств A и B. Действительно, выберем другие множества – A_1 мощности α, B_1 мощности β, и пусть $A_1 \cap B_1 = \varnothing$. Тогда множества $A \cup B$ и $A_1 \cup B_1$ равномощны и, следовательно, имеют одну и ту же мощность. Приведём ряд примеров: $\chi_0+\chi_0 = \chi_0$, $\chi_0+c = c$, $c+c = c$. Первое равенство следует из теоремы 3.3, второе – из теоремы 3.8, третье – из теоремы 4.2. Легко проверить, что сложение кардинальных чисел коммутативно и ассоциативно.

Операция умножения кардинальных чисел вводится похожим образом. Пусть даны два кардинальных числа α и β. Выберем множество A мощности α и множество B мощности β. *Произведением* $\alpha\beta$ называется мощность декартова произведения $A\times B$. Как и в случае суммы, нетрудно показать, что результат операции не зависит от выбора множеств A и B. Примеры: $\chi_0\chi_0 = \chi_0$ (теорема 3.4), $c \cdot c = c$ (теорема 4.3). Нетрудно проверить, что умножение кардинальных чисел коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно умножения.

Будем говорить, что кардинальное число α *меньше или равно* кардинальному числу β, если $|A|$ □ $|B|$ для некоторых (а следовательно и для любых) множеств A мощности α и B мощности β. Из результатов §2 следует, что □ – отношение линейного порядка. Отношение □ согласовано с введёнными выше операциями. Нетрудно доказать, что если α□β, то α+γ□β+γ и αγ □ βγ. Если введён «нестрогий» порядок, то нетрудно определить «строгий» порядок: α<β означает, что α□β и α≠β. В качестве примера отметим, что $n < \chi_0 < c$.

По определению всякое натуральное число является кардинальным числом. Далее, если m и n – натуральные числа, то их сумма, произведение и порядок, введённые для них как для кардинальных чисел, совпадают с обычными суммой и произведением натуральных чисел и отношением порядка на **N**. Убедимся в этом на примере умножения. Пусть $m = 5$ и $n = 8$. Тогда произведение 5·8 как кардинальных чисел есть мощность множества $A \times B$. Но множество $A \times B$ конечно, и его мощность совпадает с количеством его элементов и равна 40 (можно выписать все элементы множества $A \times B$ и пересчитать). Но произведение 5·8 как натуральных чисел тоже равно 40. Нетрудно заметить, что приведённый пример можно обобщить на произвольные натуральные числа m и n. Также нетрудно доказывается совпадение в случае сложения и порядка. Таким образом, арифметика натуральных чисел есть часть арифметики кардинальных чисел. Часть арифметики кардинальных чисел, которая относится к мощности бесконечных множеств, довольно проста и сводится к порядку. А именно, справедливо следующее утверждение: если α ≠ 0 и β – мощность бесконечного множества, то α+β = αβ = max{α, β}. Доказательство этих равенств можно найти в книге П.С. Александрова, приведённой в списке литературы.

§6. Об аксиомах теории множеств

Теория множеств в том виде, в котором она случается в данном пособии, была разработана в 70–80-х годах 19 столетия. Основоположником теории множеств является немецкий математик Георг Кантор (1845–1918 гг.). Вначале эта теория натолкнулась на недоверие многих математиков, но в 90-х годах 19 века вошла в моду и стала широко применяться в математическом анализе и геометрии. В то время, когда теория множеств завоевала признание большинства математиков, в ней обнаружились противоречия или, как их ещё называют, антиномии. К настоящему времени известно довольно много различных антиномий; укажем две из них.

Антиномия Кантора. Рассмотрим множество всех множеств и обозначим его буквой V. По теореме Кантора (§2) имеем неравенство $|V| < |B(V)|$. С другой стороны, $B(V) \subseteq V$, поскольку элементами $B(V)$ являются некоторые множества, а V содержит все множества. Это означает, что $|B(V)|$ □ $|V|$.

Антиномия Рассела. Множество X назовём особым, если оно содержит себя в качестве элемента, т.е. $X \in X$, и неособым в противном случае. Например, особым является множество всех множеств V, неособым – множество натуральных чисел **N**. Обозначим буквой S множество всех неособых множеств. Если S – особое множество, то $S \in S$ по определению особого множества. Но S содержит в качестве элемента только неособые множества и $S \in S$, следовательно, S – неособое множество. Приведённые рассуждения обратимы. Следовательно, S особое, тогда и только тогда, когда S неособое.

Один из способов устранения противоречий в теории множеств состоит в аксиоматизации этой теории. С помощью аксиом можно ограничить понятие множества так, чтобы в полученной аксиоматизированной теории множеств отсутствовали множества всех множеств, множества всех неособых множеств и т.д.

В начале XX века появилось несколько различных вариантов аксиоматизации теории множеств. Мы сейчас приведём один из них – систему аксиом Цермело–Френкеля. Первичных понятий в этой системе два: множество и отношение принадлежности.

1. Аксиома объёмности. Если всякий элемент множества A является элементом множества B и обратно, то $A = B$,

$$\forall x\ ((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)) \to A = B.$$

2. Аксиома пустого множества. Существует множество, не содержащее элементов

$$\exists x \forall y\ (y \notin x).$$

Из аксиомы объёмности следует, что такое множество единственно. Оно обычно обозначается символом $\varnothing$.

3. Аксиома пары. Для любых множеств a и b существует множество, единственными элементами которого являются a и b,

$$\forall a\ \forall b\ \exists z\ (a \in z \wedge b \in z \wedge \forall u\ (u \in z \to u = a \vee u \subset b)).$$

4. Аксиома суммы. Для всякого множества K существует множество S, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат некоторому множеству t, принадлежащему K,

$$\forall K\ \exists S\ \forall x\ (x \in S \leftrightarrow \exists t\ (t \in K \wedge x \in t)).$$

Другими словами, S есть объединение семейства множеств K. Из сформированных аксиом можно вывести существование объединения двух множеств A и B. Действительно, по аксиоме пары существует множество $K = \{A, B\}$, а по аксиоме суммы существует множество $S = \cup K = A \cup B$.

<u>5. Аксиома степени.</u> Для всякого множества A существует множество B, элементами которого являются подмножества множества A и только они,

$$\forall A\ \exists B\ \forall x\ (x \in B \leftrightarrow \forall y\ (y \in x \to y \in A)).$$

Другими словами, B есть булеан A.

<u>6. Аксиома регулярности.</u> Всякое непустое множество K содержит элемент X такой, что $X \cap K = \varnothing$,

$$\forall K\ \exists X\ (X \in K \wedge \forall y\ (y \in X \to y \notin K)).$$

Система аксиом Цермело–Френкеля содержит ещё аксиому бесконечности, утверждающую существование бесконечного множества специального вида, и аксиому подстановки. Мы формулировать эти аксиомы здесь не будем за недостатком места, интересующийся читатель может найти их, например, в книге К. Куратовского и А. Мостовского, приведённой в списке литературы. В теории множеств Цермело–Френкеля нет антиномий Кантора и Рассела. Эти антиномии основаны на существовании множества A, содержащего себя в качестве элемента. Аксиома регулярности запрещает такие множества. Действительно, если $A \in A$ и $K = \{A\}$, то по аксиоме регулярности K имеет элемент X такой, что $X \cap K = \varnothing$. Но K имеет только один элемент – множество A, и $A \cap K = \varnothing$. Следовательно, в теории множеств Цермело–Френкеля нельзя провести рассуждения, которые ведут к антиномиям Кантора и Рассела.

Аксиоматизация не ставит своей целью только изгнание антиномий теории множеств. Аксиомы не должны запрещать «слишком много» множеств; множества, необходимые для построения внутри теории множеств математического анализа, геометрии и других разделов математики, должны остаться. Приведённая аксиоматика удовлетворяет этим условиям. Используя её, можно ввести понятие натурального целого числа, понятие функции и т.д. Однако формализация внутри теории множеств некоторых разделов анализа, топологии и других математических дисциплин требует привлечения следующей аксиомы.

<u>7. Аксиома выбора.</u> Для всякого непустого множества M существует функция f, ставящая в соответствие каждому непустому подмножеству A множества M некоторый элемент из A.

ЗАДАЧИ

1. Укажите верные утверждения.

1) {2, 3, 5}={2, 5, 3};
2) {–2, 3}={x™**R** | x^2–x–6=0};
3) {2, 5, 8, 9}⊆{2, 4, 5, 7, 8, 9};
4) ∅⊆{1, 2, 3};
5) **N**⊆**Z**;
6) **Q**⊆**Z**;
7) **N**⊆**N**;
8) 6™{1, 2, 5, 6, 8};
9) 11∉{2, 3, 5};
10) 1™{x™**R** | x^2+5=1};
11) 3∉**N**;
12) $\sqrt{2}$ ∉**Q**.

2. Задайте следующие множества перечислением элементов. Найдите мощность каждого множества.

1) A = {x™**N** | –2□x□5};
2) B = {x™**Z** | |x|<3};
3) C = {x™**N** | 2x^2+5x–3=0};
4) D = {x™**Q** | 3x^2=9};
5) E = {x™**R** | x–3=4x(x+2)};
6) F = {x™**N** | –3x□x<1}.

3. Найдите все подмножества множества {1, 2, 3}.

4. Дано множество A ={72, 56, 513, 117, 324}. Составьте подмножества A, состоящие из чисел которые:

1) делятся на 4;
2) делятся на 9;
3) являются четными числами;
4) являются нечетными числами.

5. Укажите верные утверждения.

1) $\sqrt{2}$ ™**R****Q**;
2) 3∉**Z****N**;
3) 0∉**Z****N**;
4) 2,5∉**R****Q**;
5) 5™{x™**R** | x>4}∩{x™**R** | x+2=10};
6) –2™{x™**R**|x>4}∪{x™**R**|x+2□0};
7) (1,2; –5)™[0, 1]×{–5, 3, 4};
8) (4; 3)™**N**×**Z**;
9) (2; 3)™**N**^{2};
10) (1; 1; –2)™**R**^{3}.

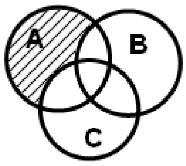
6. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера–Венна взаимное расположение множеств A и B, если:

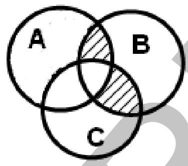
1) A – множество натуральных четных чисел, B – множество натуральных чисел, кратных 3;
2) A – множество квадратов, B – множество прямоугольников;
3) A – множество квадратов, B – множество прямоугольных треугольников;
4) A – множество квадратов, B – множество прямоугольников с равными сторонами.

7. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера–Венна следующие множества:

1) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$; 2) $\overline{A\setminus\overline{B}}$; 3) $\overline{A\cap B}$; 4) $\overline{A}\cup B$; 5) $\overline{A}\setminus B$; 6) $\overline{A}\cap B$;
7) $\overline{A}\cup\overline{B}$; 8) $\overline{A}\setminus\overline{B}$; 9) $\overline{A}\cap\overline{B}$; 10) $A\cup\overline{B}$; 11) $A\setminus\overline{B}$; 12) $\overline{\overline{A}\setminus\overline{B}}$.

8. Запишите с помощью символов операций объединения, пересечения, разности, дополнения к множеству заштрихованную часть на предложенном рисунке двумя различными способами.





9. Выразите принадлежность элемента множеству *D* через его принадлежность или непринадлежность множества *A*, *B*, *C*:

1) $D=\overline{A\cap B}\cup C$; 3) $D=\overline{A\setminus B}\cup\overline{C}$;
2) $D=A\setminus\overline{B\cap C}$; 4) $D=\overline{A\cup B\setminus\overline{C}}$.

10. Даны числовые множества *A*, *B* и *C*. Найдите числовые множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций: а) $A\cap B$; б) $B\setminus(A\cap C)$; в) $(C\setminus B)\cap(A\setminus C)$; г) $(C\setminus B)\cap A$, если

1) $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B=\{2, 5, 6, 11, 12\}$, $C=\{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$;
2) $A=\{2, 3, 4, 5, 7, 11, 12\}$, $B=\{2, 5, 10, 11, 13\}$, $C=\{1, 12, 15, 16, 17\}$;
3) $A=\{1, 3, 4, 5, 6, 11, 19\}$, $B=\{2, 5, 10, 11, 19\}$, $C=\{12, 15, 16, 17, 19\}$;
4) $A=(-3; 7)$, $B=(-\infty; 7{,}2]$, $C=\{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$;
5) $A=(-3; 15)$, $B=(-\infty; 15{,}3]$, $C=\{1, 12, 15, 16, 17\}$;
6) $A=(-10; 4)$, $B=(-\infty; 23{,}8]$, $C=\{12, 15, 16, 17, 19\}$;
7) $A=\{x$™$\mathbf{R} \mid x^2-4x-21>0\}$, $B=\{x$™$\mathbf{R} \mid -5x$□$3{,}5\}$;
8) $A=\{x$™$\mathbf{R} \mid x^2-x-12>0\}$, $B=\{x$™$\mathbf{R} \mid -3x$□$0{,}9\}$;
9) $A=\{x$™$\mathbf{R} \mid x^2-x-6<0\}$, $B=\{x$™$\mathbf{R} \mid -3x$□$5{,}4\}$.

11. *A*, *B* и *C* – множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям α, β и γ соответственно. Изобразите в системе координат *Oxy* множество *D*, полученное из множеств *A*, *B* и *C* по формуле δ.

№	α	β	γ	δ
1	$y-4/x$□0	y^2+x^2-25□0	$\|x\|$□1, $\|y\|$□1	$(A\cap B)\setminus C$
2	$y-4/x$□0	$y+4/x$□0	y^2+x^2-25□0	$(A\cap B)\setminus C$
3	$\|x\|$□5, $\|y\|$□1	$\|x\|$□1, $\|y\|$□5	y^2+x^2-16□0	$A\cup B\cup C$
4	0□y□$\sqrt{x}$	2□x□6, -3□y□1	y^2+x^2-18x□0	$(A\cup B)\setminus C$
5	$y-x^2-1$□0	$y-x^2+3$□0	$x > 0$	$(A\cap B)\setminus C$
6	$y-x^2-5$□0	y^2+x^2-6y□0	$x > 0$	$A\setminus(B\cap C)$

12. Докажите, что для произвольных множеств A, B и C справедливы следующие равенства:

1) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
2) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
3) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
4) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$;
5) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
6) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

13. Найдите $A \times B$, $B \times A$ при:

1) $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 3, 4\}$;
2) $A = \{ 3 \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

14. Изобразите на декартовой плоскости следующие множества:

1) $[0, 1] \times [0, 1]$;
2) $[0, 1] \times (-\infty, 3]$;
3) $[1, 2] \times (-\infty, +\infty)$;
4) $[0, +\infty) \times \{2, 3\}$.

15. Покажите на примерах, что приведенные ниже равенства верны не для любых множеств A, B и C:

1) $A \times B = B \times A$;
2) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

16. Докажите, что для произвольных множеств A, B и C справедливы следующие равенства:

1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
2) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

17. На множестве **N** для каждого из следующих отношений найдите область определения $D(\rho)$ и область значений $E(\rho)$ и укажите, какими свойствами (рефлексивностью, антирефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью, транзитивностью) оно обладает:

1) $\rho = \{(1, 1)\}$;
2) $\rho = \{(1, 5)\}$;
3) $\rho = \{(3, 5), (5, 3), (3, 3), (5, 5)\}$;
4) $\rho = \{(3, 5), (5, 3)\}$;
5) $x\,\rho\,y \leftrightarrow$ НОД$(x, y) = 1$;
6) $x\,\rho\,y \leftrightarrow y<2x$;
7) $x\,\rho\,y \leftrightarrow x = y^2$;
8) $x\,\rho\,y \leftrightarrow x<y$;
9) $x\,\rho\,y \leftrightarrow x \square y$;
10) $x\,\rho\,y \leftrightarrow y-x = 12$;
11) $x\,\rho\,y \leftrightarrow y-x = 12$ или $x-y = 12$;
12) $x\,\rho\,y \leftrightarrow (y-x) \vdots 3$;
13) $x\,\rho\,y \leftrightarrow x = 3y$;
14) $x\,\rho\,y \leftrightarrow xy = 30$;
15) $x\,\rho\,y \leftrightarrow x<y-1$;
16) $x\,\rho\,y \leftrightarrow x<y+1$;
17) $x\,\rho\,y \leftrightarrow y = 2x+1$.

18. Найдите область определения $D(\rho)$ и область значений $E(\rho)$ каждого из следующих отношений, заданных на множестве $X = \{1, 2,$

…, 10} и укажите, какими свойствами (рефлексивностью, антирефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью, транзитивностью) оно обладает:

1) $a\ \rho\ b \leftrightarrow a - b = 8$;
2) $a\ \rho\ b \leftrightarrow b = a^2$;
3) $a\ \rho\ b \leftrightarrow ab = 12$;
4) $a\ \rho\ b \leftrightarrow b > a^2$.

19. Найдите область определения $D(\rho)$ и область значений $E(\rho)$ каждого из следующих отношений, заданных на множестве **R** и укажите, какими свойствами (рефлексивностью, антирефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью, транзитивностью) оно обладает:

1) $\sigma = \{(x, y) \mid y = 2x\}$;
2) $\sigma = \{(x, y) \mid y^2 = x^2\}$;
3) $\sigma = [0, 2]\times[0, 2]$;
4) $\sigma = [0, 2]\times[1, 3]$;
5) $\sigma = \{(x, y) \mid xy = 0\}$.

20. Пусть ρ и σ – отношения эквивалентности на множестве X. Докажите или опровергните, что $\rho\cap\sigma$, $\rho\cup\sigma$ являются отношениями эквивалентности. Решите аналогичную задачу, когда ρ и σ отношения порядка.

21. Определите, какие из следующих отношений являются отображениями; какие из отображений инъективные, сюръективные, биективные:

1) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y = x^2\}$;
2) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $[0, \infty]\times(-\infty, \infty) \mid y = x^2\}$;
3) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $[0, \infty]\times(0, \infty) \mid y = x^2\}$;
4) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $[0, 1]\times[0, 1] \mid y = x^2\}$;
5) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $[0, 1/2]\times[0, 1/2] \mid y = x^2\}$;
6) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $\mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid y = x^2\}$;
7) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $[0, \infty]\times(-\infty, \infty) \mid x = y^2\}$;
8) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $[0, \infty]\times[0, \infty) \mid x = y^2\}$;
9) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $[-1, 1]\times[-1, 0] \mid x^2+y^2=1\}$;
10) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $[-1, 0]\times[-1, 1] \mid x^2+y^2=1\}$;
11) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $[-1, 0]\times[-1, 0] \mid x^2+y^2=1\}$;
12) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $\mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x - y = 3\}$;
13) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $\mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid y - x = 3\}$;
14) $\varphi = \{(x, y)$ ™ $\mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x - y = 3$ или $y - x = 3\}$.

22. Какие из следующих отношений на **Q** (на **Z**, на **N**) являются преобразованиями? Какие из преобразований инъективны, сюръективны, биективны:

1) (x, y) ™ $\varphi \leftrightarrow 4x-3y = 12$;
2) (x, y) ™ $\varphi \leftrightarrow x^2=y^2$;
3) (x, y) ™ $\varphi \leftrightarrow |x|=|y|-3$;
4) (x, y) ™ $\varphi \leftrightarrow |x|=|y|+3$;
5) (x, y) ™ $\varphi \leftrightarrow x+y= y^2$;
6) (x, y) ™ $\varphi \leftrightarrow x<y$□$x+1$;
7) (x, y) ™ $\varphi \leftrightarrow x<y<x+1$;
8) (x, y) ™ $\varphi \leftrightarrow x<y<x+2$;
9) (x, y) ™ $\varphi \leftrightarrow y<x$□$y+1$.

23. Пусть ρ и σ симметричные отношения на множестве X. Докажите, что $\rho\sigma \subseteq \sigma\rho \leftrightarrow \rho\sigma = \sigma\rho$.

24. Укажите взаимно однозначное соответствие между множеством $[0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \cup \ldots$ и отрезком $[0, 1]$.

25. Докажите, что множество всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек на плоскости. (Указание: и точки, и прямые задаются парами чисел – за небольшими исключениями).

26. Докажите, что полуплоскость (точки плоскости, лежащие по одну сторону от некоторой прямой) равномощна плоскости. (Это верно независимо от того, включаем мы граничную прямую в полуплоскость или нет).

27. Докажите, что все геометрические фигуры, содержащие хотя бы кусочек прямой или кривой, равномощны.

28. Докажите, что если квадрат разбит на два множества, то хотя бы одно из них равномощно квадрату. (Указание. Если одна из частей содержит отрезок, то можно воспользоваться теоремой Кантора–Бернштейна. Если же, скажем, первая часть не содержит отрезков, то в каждом горизонтальном сечении квадрата есть точка второй части, и снова можно сослаться на теорему Кантора–Бернштейна).

29. Докажите, что если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1977. – 368 с.
2. Куратовский, К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. – М.: Мир, 1970. – 416 с.
3. Справочная книга по математической логике: в 4 ч. / под ред. Дж. Барвайс. – М.: Наука, 1982. – 392 с., 376 с., 360 с., 392 с.
4. Верещагин, Н.К. Начала теории множеств / Н.К. Верещагин, А. Шень. – М.: МЦНМО, 2002. – 128 с.
5. Бурбаки, Н. Начала математики. Книга первая – основные структуры анализа. Теория множеств / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
6. Йех, Т. Теория множеств и метод форсинга / Т. Йех. – М.: Мир, 1973. – 151 с.
7. Кантор, Г. Труды по теории множеств / Г. Кантор. – М.: Наука, 1985. – 431 с.
8. Коэн, П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза / П. Дж. Коэн. – М.: Мир, 1969. – 347 с.
9. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Наука, 1975. – 240 с.
10. Манин, Ю.И. Доказуемое и недоказуемое / Ю.И. Манин. – М.: Советское радио, 1980. – Серия «Кибернетика».
11. Мостовский, А. Конструктивные множества и их приложения / А. Мостовский. – М.: Мир, 1973. – 256 с.
12. Френкель, А. Основания теории множеств / А. Френкель, И. Бар-Хиллел. – М.: Мир, 1966. – 95 с.
13. Хаусдорф, Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф. – М.; Л.: ОНТИ, 1937.
14. Важенин, Ю.М. Введение в математику / Ю.М. Важенин, А.П. Замятин. – Свердловск, 1984. – 95 с.
15. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
16. Вольвачев, Р.Т. Элементы математической логики и теории множеств / Р.Т. Вольвачев. – Минск: Университетское, 1986. – 112 с.
17. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел / Л.Я. Куликов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.
18. Лельчук, М.П. Практические занятия по алгебре и теории чисел / М.П. Лельчук, И.И. Полевченко, А.М. Радьков, Б.Д. Чеботаревский. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – 302 с.
19. Столл, Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р.Р. Столл. – М.: Просвещение, 1968. – 231 с.
20. Харин, Н.Н. Математическая логика и теория множеств / Н.Н. Харин. – М.: Росвузиздат, 1963. – 192 с.

СОДЕРЖАНИЕ