

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования «Витебский государственный  
университет имени П.М. Машерова»  
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

# МАТЕМАТИКА

*Методические рекомендации*

В 2 ЧАСТЯХ

**Часть 2**

*Витебск  
ВГУ имени П.М. Машерова  
2015*

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73  
М34

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 03.03.2015 г.

Составители: доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук **В.В. Устименко**; старший преподаватель кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова **Т.В. Титова**

Рецензент:  
доцент кафедры геометрии и математического анализа  
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук  
*С.А. Шлапаков*

**Математика** : методические рекомендации : в 2 ч. / сост. :  
**М34** В.В. Устименко, Т.В. Титова. – Витебск : ВГУ имени  
П.М. Машерова, 2015. – Ч. 2. – 50 с.

Учебное издание написано в соответствии с действующей программой по математике и предназначено для студентов педагогического факультета дневной и заочной форм получения образования. В данных методических рекомендациях предлагается необходимый задачный материал для усвоения теоретического курса.

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73

© ВГУ имени П.М. Машерова, 2015

## ВВЕДЕНИЕ

Курс «Математика» призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

Овладеть данным курсом, приобрести необходимые умения и навыки можно лишь в процессе решения задач. Предложенные методические рекомендации должны оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели, написаны в соответствии с действующей программой этого курса и состоят из следующих разделов: «Определение натурального числа и операций над числами», «Теоретико-множественный подход к построению системы целых неотрицательных чисел», «Натуральное число как результат измерения величин», «Системы счисления», «Делимость целых неотрицательных чисел», «Расширение понятия о числе», «Величины и их измерения», «Числовые равенства и неравенства. Выражения с переменной. Тождественные преобразования», «Уравнения и неравенства», «Задачи на составление уравнений».

Предлагаемые в рекомендациях задания способствуют развитию культуры мышления студентов и умения пользоваться языком математики.

При создании методических рекомендаций были использованы следующие задачки:

- 1) Задачник-практикум по математике. Пособие для студентов-заочников факультета подготовки учителей начальных классов пединститутов / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977.
- 2) Лаврова, Н.Н. Задачник-практикум по математике: учеб. пособие для студентов-заочников I–III курсов фак. педагогики и методики нач. обучения пед. институтов / Н.Н. Лаврова, Л.П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1985.

## § 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА И ОПЕРАЦИЙ НАД ЧИСЛАМИ

1. Покажите, что множество целых неотрицательных чисел является моделью системы аксиом. Какое число выполняет при этом роль единицы? Можно ли считать моделью системы аксиом Пеано множество  $3, 4, 5, 6, \dots$  ?
2. Какие свойства натурального ряда чисел рассматриваются в начальном курсе математики? Отражены ли они в аксиомах?
3. Запишите коммутативный и ассоциативный законы сложения натуральных чисел. Какие преобразования выражений возможны на основании этих законов?
4. Примените законы сложения и вычислите результат; каждый случай использования законов объясните:
  - а)  $7091 + (1819 + 509)$ ;
  - б)  $(9073 + 1329) + 2671$ ;
  - в)  $386 + 287 + 213 + 564$ ;
  - г)  $3057 + 1561 + 1513 + 829 + 2564$ .
5. Запишите коммутативный и ассоциативный законы умножения натуральных чисел. Какие преобразования выражений возможны на основании этих законов?
6. Примените законы умножения и вычислите результат; каждый случай использования законов объясните:
  - а)  $(372 \cdot 4) \cdot 5$ ; в)  $125 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 8$ ;
  - б)  $20 \cdot 811 \cdot 4$ ; г)  $350 \cdot 44 \cdot 20 \cdot 50$ .
7. Запишите дистрибутивный закон умножения относительно сложения для натуральных чисел и, используя его, вычислите значение выражения:
  - а)  $57 \cdot 247 + 57 \cdot 362$ ; в)  $37 - 42 + 37 - 36 - 78 \cdot 27$ ;
  - б)  $47 \cdot 3$ ; г)  $49 \cdot 54 - 29 \cdot 49 + 25 \cdot 51$ .
8. Докажите, что для любых натуральных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  верны утверждения:
  - а)  $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ ;
  - б)  $a = b \Leftrightarrow ac = bc$ .
9. Сформулируйте условие существования разности в множестве натуральных чисел и докажите его.
10. Каково необходимое условие существования частного натурального числа? Является ли оно достаточным?
11. Являются ли моделью системы аксиом Пеано следующие множества:
  - а)  $0, 1, 2, 3$ , б)  $3, 6, 9, 12, \dots$ ?
12. Докажите коммутативность сложения натуральных чисел. Какие теоретические положения при этом используются?
13. Докажите, что множество натуральных чисел – упорядоченное

множество. Можно ли упорядочить множество натуральных чисел при помощи отношения «непосредственно следовать за»?

14. Являются ли доказательством ассоциативного закона сложения натуральных чисел следующие рассуждения:

$$(3 + 4) + 6 = 13 \text{ и } 3 + (4 + 6) = 13;$$

$$(7 + 2) + 8 = 17 \text{ и } 7 + (2 + 8) = 17;$$

$$(10 + 5) + 9 = 24 \text{ и } 10 + (5 + 9) = 24.$$

Следовательно, (для  $a, b, c \in \mathbb{N}$ )  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

15. Докажите, используя метод математической индукции, что для любого натурального числа  $n$  справедливо равенство:

а)  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = n(2n-1)(2n+1):3$ ;

б)  $1:(1 \cdot 5) + 1:(5 \cdot 9) = (9 \cdot 13) + \dots + 1:(4n-3)(4n+1) = n:(4n+1)$ ;

в)  $1:(2 \cdot 3) + 1:(3 \cdot 4) + 1:(4 \cdot 5) + \dots + 1:(n+1)(n+2) = n:(2(n+2))$ ;

г)  $2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \dots + (n+1) \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^n$ ;

д)  $1:2 + 3:(2^2) + 5:(2^3) + \dots + (2n-1):2^n = 3 - (2n+3):2^n$

16. Какой вид имеет число  $a$ , если при делении на 7 оно дает остаток:

а) 3; б) 5; в) 6; г) 0?

17. При делении с остатком числа  $a$  на 15 получили неполное частное 10. Каково наибольшее возможное значение делимого?

18. При делении с остатком числа 100 на натуральное число  $b$  получили остаток, равный 6. Найдите число  $b$ .

19. При делении чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  на 7 получаются остатки соответственно 1, 4 и 5. Какой остаток при делении на 7 дает сумма  $a+b+c$ ?

20. При делении на 7 чисел  $a$  и  $b$  получаются остатки 3 и 2. Какой остаток при делении на 7 дает произведение  $ab$ ?

21. Разбейте множество натуральных чисел от 5 до 27 на классы чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 5. Сколько классов получилось?

22. Известно, что  $a = bq + 17$ . Одно из чисел  $a$ ,  $b$  или  $q$  равно 13. Какое?

## § 2. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Прочитайте записи:  $n(A) = 5$ ,  $n(B) = 0$ . Приведите примеры множеств  $A$  и  $B$ , удовлетворяющих этим условиям.

2. Придумайте множества  $C$  и  $D$ , для которых выполняются условия:  
а)  $n(C) = n(D)$  и  $C \neq D$ ; б)  $n(C) = n(D)$  и  $C = D$ .

3. Используя теоретико-множественную трактовку отношения «меньше», покажите, что: а)  $4 < 5$ ; б)  $0 < 2$ .

4. Сравните числа  $n(A)$  и  $n(B)$ , если: а)  $A \subset B$ ; б)  $A \subset B$  и  $A \neq B$ .

5. Приведите примеры заданий из учебников математики для начальных

- классов, в которых: а) натуральное число выступает как количественное;
- б) отношение «меньше» для натуральных чисел рассматривается с теоретико-множественных позиций.
6. Используя определение суммы целых неотрицательных чисел, покажите, что: а)  $2 + 4 = 6$ ; б)  $3 + 1 = 4$ ; в)  $0 + 4 = 4$ .
7. Запишите коммутативный и ассоциативный законы сложения целых неотрицательных чисел и дайте их истолкование с теоретико-множественных позиций.
8. Установите, на основании каких законов сложения произведены нижеприведенные преобразования:  
а)  $79 + 54 + 21 = 79 + 21 + 54 = (79 + 21) + 54$ ;  
б)  $(86 + 78) + 22 = 86 + (87 + 22) = (78 + 22) + 86$ ;  
в)  $23 + (88 + 77) = (23 + 88) + 77 = (88 + 23) + 77 = 88 + (23 + 77)$ .
9. Найдите значение выражения и объясните, какие законы сложения были при этом использованы:  
а)  $(57 + 68 + 89) + (32 + 11 + 43)$ ;  
б)  $38 + 89 + 32 + 11$ .
10. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются сложением:  
а) Оля собрала грибы: три белых и два подосиновика. Сколько грибов собрала Оля?  
б) Из коробки вынули сначала 4 карандаша, а потом 2 карандаша. Сколько всего карандашей вынули из коробки?  
в) У Кати было 3 шара, а у Тани на 1 шар больше. Сколько шаров было у Тани?  
г) В парке 9 берез. Их на 3 меньше, чем елей. Сколько елей в парке?
11. Может ли сумма двух целых неотрицательных чисел быть равной: а) одному из слагаемых; б) нулю?
12. Может ли сумма двух натуральных чисел быть равной:  
а) одному из слагаемых; б) нулю?
13. Как изменится сумма, если: а) одно из слагаемых увеличить на 2; б) одно из слагаемых увеличить в 2 раза; в) каждое из двух слагаемых увеличить на 2; г) каждое из двух слагаемых увеличить в 2 раза? Высказанные предположения докажите в общем виде.
14. Выясните, на какой теоретической основе изучается в начальном курсе математики переместительное свойство сложения. Познакомьтесь с правилами прибавления числа к сумме, суммы к числу, суммы к сумме. Какие законы сложения натуральных чисел лежат в основе этих правил?
15. Найдите  $n(A)$ ,  $n(B)$  и  $n(B_A)$ , если  $A = \{a, b, c, d, e, f, k\}$ , а его подмножество: а)  $B = \{e, d, k\}$ ; б)  $B = \{a, b, c, d, e, f, k\}$ ; в)  $B = \emptyset$ .
16. Используя теоретико-множественное определение разности целых неотрицательных чисел, покажите, что:

- а)  $7 - 5 = 2$ ; б)  $6 - 6 = 0$ ; в)  $4 - 0 = 4$ .
- 17.** Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются вычитанием:
- а) На станцию прибыло 7 вагонов с углем. 3 вагона разгрузили. Сколько вагонов осталось разгрузить?
- б) На нашей улице строят девятиэтажный дом. 5 этажей уже построили. Сколько этажей еще нужно достроить?
- в) В зоопарке 6 медведей, а верблюдов на 2 меньше. Сколько верблюдов в зоопарке?
- г) На столе 10 чашек, их на 2 больше, чем ложек. Сколько ложек на столе?
- 18.** Может ли разность целых неотрицательных чисел быть равной: а) уменьшаемому; б) вычитаемому; в) нулю?
- 19.** Может ли разность натуральных чисел быть равной: а) уменьшаемому; б) вычитаемому; в) нулю?
- 20.** Как изменится разность, если уменьшаемое и вычитаемое одновременно увеличить на одно и то же число? Высказанное предположение докажите.
- 21.** Запишите, используя символику, следующее правило: «Чтобы вычесть из суммы число, достаточно вычесть это число из одного из слагаемых суммы и к полученному результату прибавить другое слагаемое». Дайте теоретико-множественное истолкование этого правила. Используется ли оно в начальном курсе математики?
- 22.** Дайте теоретико-множественное истолкование следующих утверждений:
- а) Чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим.
- б) Чтобы из разности двух чисел вычесть третье число, достаточно из уменьшаемого вычесть сумму двух других чисел.
- в) Чтобы вычесть из числа  $a$  разность чисел  $b$  и  $c$ , достаточно к данному числу прибавить вычитаемое  $c$  и из полученного результата вычесть уменьшаемое  $b$ ; при  $a > b$  можно вычесть из числа  $a$  уменьшаемое  $b$  и к полученному результату прибавить вычитаемое  $c$ .
- г) Чтобы прибавить к числу  $a$  разность  $b - c$ , достаточно прибавить к числу  $a$  уменьшаемое  $b$  и из полученного результата вычесть число  $c$  или из данного числа вычесть число  $c$  и к полученному результату прибавить число  $b$ .
- 23.** Какими способами можно найти разность: а)  $11 - (3 + 1)$ ; б)  $(7 + 8) - 5$ ?
- 24.** Объясните, какие теоретические положения лежат в основе следующих преобразований:
- а)  $(8 + 6) - (4 + 5) = (8 - 4) + (6 - 5) = 4 + 1 = 5$ ;
- б)  $(8 + 6) - (4 + 5) = (8 - 5) + (6 - 4) = 3 + 2 = 5$ .
- 25.** Найдите  $n(A)$ ,  $n(B)$  и  $n(A \times B)$ , если  $A = \{k, l, m, n, s\}$ , а

- множество  $B$  таково: а)  $B = \{r, p\}$ ; б)  $B = \{1\}$ ; в)  $B = \emptyset$ .
26. Используя определения произведения целых неотрицательных чисел, покажите, что: а)  $5 \cdot 2 = 10$ ; б)  $1 \cdot 7 = 7$ ; в)  $6 \cdot 0 = 0$ .
27. Запишите коммутативный и ассоциативный законы умножения целых неотрицательных чисел и дайте их истолкование с теоретико-множественных позиций.
28. Установите, на основании каких законов умножения произведены преобразования:  
а)  $26 \cdot 15 = 26 \cdot (3 \cdot 5) = 26 \cdot (5 \cdot 3) = (26 \cdot 5) \cdot 3$ ;  
б)  $4 \cdot 47 \cdot 25 = 4 \cdot 25 \cdot 47 = (4 \cdot 25) \cdot 47$ .
29. Запишите дистрибутивный закон умножения относительно сложения для целых неотрицательных чисел. Какие преобразования выражений можно производить на его основе? В каком виде используется этот закон в начальном обучении математике?
30. Вычислите значение выражения, используя дистрибутивность умножения относительно сложения:  
а)  $9 \cdot 13 + 9 \cdot 87$ ; б)  $5 \cdot (12 + 44)$ ; в)  $62 \cdot 103$ .
31. Может ли произведение двух целых неотрицательных чисел быть равным: а) одному из них; б) каждому из них; в) нулю?
32. Как изменится произведение двух целых неотрицательных чисел, если один из множителей: а) увеличить на 2; б) увеличить в 2 раза?
33. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются действием умножения:  
а) На каждое детское пальто нужно пришить 4 пуговицы. Сколько пуговиц нужно пришить на 7 таких пальто?  
б) Ученица прочитала в первый день 9 страниц книги, а во второй день – в 2 раза больше, чем в первый. Сколько страниц книги прочитала ученица во второй день?  
в) Для урока труда девочка принесла 6 листов красной бумаги, это в 2 раза меньше, чем зеленой. Сколько листов зеленой бумаги принесла девочка?
34. Используя определение частного чисел, покажите (двумя способами), что: а)  $12 : 3 = 4$ ; б)  $6 : 1 = 6$ .
35. Как изменится частное, если:  
а) делимое и делитель умножить на одно и то же число;  
б) не изменяя делителя, делимое увеличить в  $k$  раз;  
в) не изменяя делимого, делитель увеличить в  $t$  раз?
36. Можно ли: а) разделить на нуль число, отличное от нуля; б) нуль разделить на число, отличное от нуля; в) нуль разделить на нуль? Почему?
37. Объясните, почему приведенные ниже задачи решаются действием деления:  
а) 6 кусков сахара разложили в стаканы с чаем, по 2 куску в каждый.

- На сколько стаканов хватило сахара?
- б) 10 тетрадей раздали 5 ученикам поровну. Сколько тетрадей получил каждый?
- в) У Коли 12 кроликов, а у Володи в 4 раза меньше, чем у Коли. Сколько кроликов у Володи?
- г) В коробке лежало 8 цветных карандашей, их в 2 раза больше, чем простых. Сколько простых карандашей лежало в коробке?
38. Известно, что  $n(A) = a$ ,  $n(B) = b$ ,  $n(C) = c$ ,  $C \subset B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ . Найдите: а)  $n(A \cup B)$ ; б)  $n(C \cup B)$ ; в)  $n(A \cap B)$ ; г)  $n(B \cup C)$ ; д)  $n(A \cup C)$ ; е)  $n(B \cap C)$ .
39. В множестве  $K$  содержится 12, в множестве  $M = 15$ , в множестве  $P = 32$  элемента. Множества  $K$  и  $M$  не пересекаются и множество  $M$  является подмножеством  $P$ . Найдите:  
а)  $n(K \cup M)$ ; б)  $n(M \cap P)$ , в)  $n(K \cap P)$ ; г)  $n(M \cap P)$ .
40. Используя определение суммы целых неотрицательных чисел, обоснуйте, что: а)  $7 + 1 = 8$ ; б)  $2 + 3 + 4 = 9$ ; в)  $0 + 8 = 8$ .
41. Используя определение разности целых неотрицательных чисел, покажите, что: а)  $10 - 7 = 3$ ; б)  $10 - 10 = 0$ ; в)  $10 - 3 \cdot 5 = 2$ .
42. Используя определения произведения целых неотрицательных чисел, докажите истинность равенств: а)  $5 \cdot 3 = 15$ ; б)  $0 \cdot 4 = 0$ ; в)  $1 \cdot 3 = 3$ .
43. Используя определение частного целого неотрицательного числа и натурального, докажите истинность равенств:  
а)  $15 : 5 = 3$ ; б)  $7 : 1 = 7$ .
44. Найдите значение выражения рациональным способом и объясните, какие законы сложения целых неотрицательных чисел были при этом использованы:  
а)  $76 + 19 + 24 + 81$ ; б)  $64 + 125 + 36 + 75$ ;  
в)  $213 + 287 + 386 + 564$ ; г)  $3057 + 1561 + 829 + 1513$ .
45. Найдите значение выражения рациональным способом и объясните, какие законы умножения целых неотрицательных чисел были при этом использованы:  
а)  $2 \cdot 13 \cdot 5$ ; б)  $4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5$ ; в)  $(12 + 35) \cdot 2$ ; г)  $87 \cdot 11$ .
46. Обоснуйте выбор действия при решении следующих задач:  
а) Несколько девочек участвовали в танце. Три из них были в белых юбочках и три – в синих. Сколько девочек участвовало в танце?  
б) Пете осталось полить 2 грядки, а Мише 3 грядки. Сколько грядок осталось полить мальчикам?  
в) У Коли было 5 марок, а у Феди – на 3 марки больше. Сколько марок было у Феди?  
г) На тарелке лежало 5 яблок. Их было на 3 меньше, чем груш. Сколько груш лежало на тарелке?

- д) У Саши было 10 книг. Две книги он подарил товарищу. Сколько книг осталось у Саши?
- е) На верхней полке 9 книг, а на нижней 5. На сколько книг больше на верхней полке, чем на нижней?
- ж) На верхней полке 9 книг, их на 5 больше, чем на нижней. Сколько книг на нижней полке?
- з) Сколько кроликов разместили октябрюта в 6 клетках, если в каждую поместили по 2 кролика?
- и) На верхней полке 4 книги, это в 3 раза меньше, чем на нижней. Сколько книг на нижней полке?
- к) В трех коробках 18 карандашей. Сколько карандашей в одной коробке?
- л) В одной коробке было 12 карандашей, их в 3 раза больше, чем в другой. Сколько карандашей во второй коробке?

### **§ 3. НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК РЕЗУЛЬТАТ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН**

1. При измерении различных величин получили: 6 см, 6 см<sup>2</sup>, 6 см<sup>3</sup>, 6 г, 6 с. Какие величины измеряли? Что показывает в каждом случае число 6?
2. Найдите длину отрезка  $AD$  в сантиметрах, если известно, что он состоит из отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ :
  - а)  $|AB| = 2$  см,  $|BC| = 1$  дм,  $|CD| = 3$  см;
  - б)  $|AB| = 2$  м,  $|BC| = 3$  дм,  $|CD| = 30$  см.
3. Обоснуйте выбор действия при решении следующих задач:
  - а) В куске было несколько метров шелка. После того как отрезали 12 м, в куске осталось 18 м. Сколько метров шелка было в куске?
  - б) Длина голубой ленты 57 см. Розовая лента длиннее голубой на 12 см. Найдите длину розовой ленты.
  - в) Когда Миша заплатил 7 к. за линейку и 2 к. за карандаш, у него осталось столько денег, сколько он израсходовал. Сколько денег было у Миши?
  - г) Рост мальчика 97 см, а девочки 86 см. На сколько сантиметров мальчик выше девочки?
  - д) Батон стоит 13 к. Он на 3 к. дороже булочки. Сколько стоит булочка?
  - е) Женщина купила в магазине 3 кастрюли по 2 р. штука. Сколько денег она заплатила в кассу магазина?
  - ж) Масса шести пакетов муки равна 12 кг. Какова масса одного пакета?
4. Решите различными способами задачи, приведенные ниже. К каждой из них дайте наиболее целесообразную графическую иллюстрацию:
  - а) Сначала в вагон погрузили 23 т груза, потом еще 9. Через

- некоторое время 8 т пришлось выгрузить. Сколько тонн груза осталось в вагоне?
- б) Железнодорожный мост имеет три пролета. Длина первого пролета 61 м. Третий пролет на 27 м длиннее первого, а второй на 17 м короче первого. Найдите длину моста.
- в) В понедельник со склада вывезли 54 т угля, во вторник – на 8 т больше, чем в понедельник, а в среду вывезли на 25 т меньше, чем во вторник. Сколько тонн угля вывезли со склада за эти три дня?
- г) Длина доски 15 м. От нее отрезали 6 м, а оставшийся кусок распилили на 3 равные части. Найдите длину каждой части.
- д) Веревку разрезали на две части так, что первая часть оказалась в 4 раза больше второй. Чему равна длина веревки, если первая часть на 18 м длиннее второй?
- е) Мальчик хотел купить 9 карандашей, но на их покупку у него не хватило 6 к., тогда он купил 7 карандашей и у него осталось 2 к. Сколько стоит один карандаш?
- ж) Из одного и того же пункта одновременно в противоположных направлениях вышли два пешехода. Через 2 ч расстояние между ними стало 16 км. Найдите скорость первого пешехода, если скорость второго 5 км в час.
- з) Мотоциклист должен был проехать расстояние между двумя пунктами, равное 600 км, со скоростью 30 км/ч, но в дороге он вынужден был задержаться на 4 часа. Чтобы прибыть вовремя на место назначения, он должен был после остановки удвоить свою скорость. На каком расстоянии от начала движения произошла задержка?
5. При измерении различных величин получили 8 м, 8 см<sup>2</sup>, 8 кг, 8 мин. Какие величины измеряли? Что показывает в каждом случае число 8?
6. Начертите ломаную  $MPT$  так, чтобы длина отрезка  $MP$  равнялась 42 мм, а длина отрезка  $PT$  равнялась 56 мм. Измерьте длину отрезка  $MT$ . Сколько решений имеет задача?
7. Обоснуйте выбор действия при решении следующих задач:
- Дом имел высоту 7 м 20 см. Потом его надстроили на 4 м 90 см. Какой высоты стал дом?
  - Масса бочки с медом 58 кг. Масса пустой бочки 8 кг. Сколько килограммов меда в этой бочке?
  - Стакан чая стоит 3 к. Сколько стоят 4 стакана чая?
  - Ширина реки 18 м, а ширина ручья 2 м. Во сколько раз река шире ручья?
8. Нижеприведенные задачи решите различными способами; для каждой задачи приведите графическую иллюстрацию и укажите наиболее рациональный способ решения:
- В овощной магазин привезли 5 т 180 кг картофеля. Из магазина в

одну палатку отправили 1 т 400 кг картофеля, а в другую 840 кг. Сколько картофеля оставили в магазине?

б) Утром в кассе было 5000 р. Днем выдали 4786 р., а приняли 3905 р. Сколько денег стало в кассе?

в) Стол в 9 раз дороже стула. Вместе они стоят 40 р. Сколько стоит стул? На сколько рублей стул дешевле стола?

г) Из села в город можно пройти по шоссе или по проселочной дороге. Шоссе длиннее проселочной дороги в 3 раза. Чему равен путь по шоссе от села до города, если путь по проселочной дороге короче пути по шоссе на 6 км?

д) При посещении выставки было куплено 78 детских билетов и 16 билетов для взрослых, причем за все билеты было уплачено 12 р. 60 к. Какова цена билетов, если детский билет в 3 раза дешевле билета для взрослого?

е) Школьник купил 8 почтовых конвертов и при их оплате получил 3 к. сдачи. Если бы он решил купить 11 конвертов, то у него не хватило бы 9 к. Сколько стоит один почтовый конверт?

## § 4. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

1. Замените следующие суммы краткой записью числа:

а)  $2 \cdot 10 + 7$ ; б)  $6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1$ ; в)  $9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$ ;

г)  $3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7$ ; д)  $8 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^3 + 6$ ; е)  $1 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2$ .

2. Запишите число, в котором: а)  $x$  десятков и одна единица;

б) 3 десятка и  $x$  единиц; в)  $m$  десятков и  $t$  единиц.

3. Сколько в числе 132620: а) единиц; б) единиц тысяч; в) десятков;

г) десятков тысяч; д) сотен; е) сотен тысяч.

4. Сколько цифр записи числа: а) 245; б) 0; в) 1 000 000;

г) 343 537? Сколько среди них различных цифр?

5. Цифра десятков в записи данного двузначного числа втрое больше цифры единиц. Если эти цифры переставить, то получится число, меньше данного на 36. Найдите данное число.

6. Сумма цифр двузначного числа равна 16. Если из этого числа вычтеть число, записанное теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке, то получится 18. Найдите это число.

7. Выясните, какие понятия десятичной системы счисления и какие законы арифметических действий использованы в процессе проведения следующих вычислений:

а)  $364 + 213 = (3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 4) + (2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3) = (3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2) + (6 \cdot 10 + 1 \cdot 10) + (4 + 3) = (3 + 2) \cdot 10^2 + (6 + 1) \cdot 10 + (4 + 3) = 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 7 = 577$ ;

б)  $748 + 436 = (7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8) + (4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6) = (7 + 4) \cdot 10^2 + (4 + 3) \cdot 10 + (8 + 6) = (10 + 1) \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + (10 + 4) = 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + (7 + 1) \cdot 10 + 4 = 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4 = 1184$ .

9. Учащиеся начальных классов выполняет задание: «Объяснить, как

выполнено сложение трёхзначных чисел:  
 $246+123=(200+40+6)+(100+20+3)=(200+100)+(40+20)+(6+3)=300+60+9=369$ . Поясните решение этого примера, используя «язык» учащихся. Объясните содержание этого задания, опираясь на понятие десятичной системы счисления и законы сложения натуральных чисел.

**10.** Выполните действия, применяя ассоциативный закон сложения: а)  $(7357+2848)+5152$ ; б)  $18356+(1644+2135)$ .

**11.** Вычислите рациональным способом значение каждого из нижеперечисленных выражений и объясните, какие законы сложения были при этом использованы: а)  $386+287+213+564$ ; б)  $3057+1561++1513+829+2564$ .

**12.** Решение нижеперечисленной задачи запишите в виде числового выражения, а затем найдите его значение: В городе три библиотеки. В одной из них 24650 книг, а в другой – на 8060 больше, чем в первой, а в третьей на 1700 книг больше, чем во второй. Сколько книг в трёх библиотеках?

**13.** Установите, какие теоретические положения используются при вычитании многозначных чисел:  $482-257=(4\cdot 10^2+8\cdot 10+2)-(2\cdot 10^2+5\cdot 10+7)=(4\cdot 10^2-2\cdot 10^2)+(8\cdot 10-5\cdot 10)+(2-7)=(4-2)\cdot 10^2+(7+1)\cdot 10-5\cdot 10+(2-7)=2\cdot 10^2+(7\cdot 10-5\cdot 10)+1\cdot 10+(2-7)=2\cdot 10^2+(7-5)\cdot 10+(12-7)=2\cdot 10^2+2\cdot 10+5=225$ .

**14.** Учащиеся начальных классов выполняют задание: «Объясни, как выполнено вычитание двузначного числа:  $64-23=(60+4)-(20+3)=(60-20)+(4-3)=40+1=41$ ». Обоснуйте содержание этого задания, используя понятия десятичной системы счисления.

**15.** Обоснуйте способ умножения трёхзначного числа на однозначное:

$$\begin{aligned} 637\cdot 4 &= (6\cdot 10^3+3\cdot 10+7)\cdot 4 = (6\cdot 10^2)\cdot 4 + (3\cdot 10)\cdot 4 + 7\cdot 4 = \\ &= (6\cdot 4)\cdot 10^2 + (3\cdot 4)\cdot 10 + 7\cdot 4 = 24\cdot 10^2 + 12\cdot 10 + 28 = \\ &= (2\cdot 10+4)\cdot 10^2 + (1\cdot 10+2)\cdot 10 + (2\cdot 10+8) = 2\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 2\cdot 10 + 8 = \\ &= 2\cdot 10^3 + (4+1)\cdot 10^2 + (2+2)\cdot 10 + 8 = 2\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 8 = 2548. \end{aligned}$$

**16.** Перечислите понятия, которыми должны владеть учащиеся к моменту изучения правила умножения многозначного числа на многозначное. Проанализируйте с этой точки зрения задание: «Объясни прием вычисления:  $46\cdot 38=46\cdot (30+8)=46\cdot 30+46\cdot 8=368+1380=1748$ ».

**17.** Вычислите рациональным способом значение выражения и объясните, какие законы умножения были при этом использованы: а)  $46\cdot 1001$ ; б)  $999\cdot 32$ ; в)  $4\cdot 16\cdot 19\cdot 25$ .

**18.** Обоснуйте способ умножения:

а)  $13\cdot 64=26\cdot 32=52\cdot 16=104\cdot 8=208\cdot 4=416\cdot 2=832\cdot 1=832$ ;

б)  $24\cdot 17=24\cdot 16+24=48\cdot 8+24=96\cdot 4+24=192\cdot 2+24=384\cdot 1+24=384+24=408$

**19.** Используя способ умножения, описанный в предыдущем упражнении, найдите значение произведения: а)  $23\cdot 16$ ; б)  $451\cdot 8$ ; в)  $91\cdot 12$ .

**20.** Выполните действия: а)  $52780 : (1251-845)+58329$ ;

б)  $5007\cdot (11815:139+4726-4715)$ .

**21.** Замените сумму краткой записью числа: а)  $4\cdot 10+3$ ;

- б)  $3 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 4$ ; в)  $2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + 1$ ; г)  $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1$ ;  
 д)  $3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 4$ .
- 22.** Запишите числа от 0 до 10; а) в двоичной; б) в троичной; в) в пятеричной системах счисления.
- 23.** Запишите в восьмеричной системе счисления число:  
 а) 985; б) 74; в) 1129.
- 24.** Запишите в двоичной системе счисления число:  
 а) 29; б) 50; в) 140.
- 25.** Запишите в десятичной системе счисления число:  
 а) 347<sub>8</sub>; б) 111101<sub>2</sub>; в) 212<sub>3</sub>; г) 432<sub>5</sub>.
- 26.** Запишите в восьмеричной системе счисления число  
 а) 2401<sub>5</sub>; б) 2101<sub>3</sub>; в) 100100<sub>2</sub>
- 27.** Укажите среди следующих равенств истинные: а)  $3_{10} = 3_3$ ; б)  $3_{10} = 10_3$ ;  
 в)  $6_{10} = 20_3$ ; г)  $12_{10} = 40_3$ ; д)  $12_{10} = 110_3$ .
- 28.** В какой системе счисления верно равенство: а)  $4 = 10_x$ ; б)  $8 = 11_x$ ;  
 в)  $9 = 100_x$ ?
- 29.** Сравните числа: а) 762<sub>8</sub> и 1043<sub>5</sub>; б) 342<sub>5</sub> и 10121<sub>3</sub>.
- 30.** Найдите значение выражения, составленного из чисел, записанных в пятеричной системе счисления: а)  $24_5 + 43_5$ ; б)  $432_5 + 114_5$ ;  
 в)  $3241_5 + 1204_5$ ; г)  $41_5 - 23_5$ ; д)  $4412_5 - 314_5$ .
- 31.** Проверьте, правильно ли выполнены действия в троичной системе счисления: а)  $1202_3 + 21_3 = 2000_3$ ; б)  $432_3 + 114_3 = 1120_3$ .
- 32.** Среди следующих равенств укажите истинные:  
 а)  $10_2 + 11_2 = 101_2$ ; б)  $101_2 + 110_2 = 1011_2$ ;  
 в)  $10001_2 + 10101_2 = 100100_2$ ; г)  $1011_2 - 1001_2 = 10_2$ ;
- 33.** Составить таблицу сложения однозначных чисел в восьмеричной системе счисления и найдите значения следующих выражений:  
 а)  $54_8 + 25_8$ ; г)  $54_8 - 47_8$ ;  
 б)  $514_8 + 325_8$ ; д)  $6223_8 - 5114_8$ .  
 в)  $3107_8 + 724_8$ ;
- 34.** Вычислите произведение чисел, запись которых дана в пятеричной системе счисления: а)  $1312_5 \cdot 4_5$ ; б)  $3112_5 \cdot 3_5$ ; в)  $2141_5 \cdot 24_5$ .
- 35.** Составьте таблицу умножения однозначных чисел в троичной системе счисления и найдите значения следующих выражений:  
 а)  $191_3 \cdot 2_3$ ; б)  $2112_3 \cdot 12_3$ ; в)  $201_3 \cdot 21_3$ .
- 36.** Выполните умножение в восьмеричной системе счисления:  
 а)  $372_8 \cdot 3_8$ ; б)  $3645_8 \cdot 42_8$ .
- 37.** Найдите произведение чисел в двоичной системе счисления:  
 а)  $1001_2 \cdot 11_2$ ; б)  $110_2 \cdot 101_2 \cdot 1011_2$ .
- 38.** Выполните деление: а)  $2134_5 : 12_5$ ; б)  $1022_3 : 12_3$ ; в)  $1001_2 : 11_2$ ;  
 г)  $731_8 : 13_8$ .
- 39.** Выполните действия в троичной системе счисления:  
 а)  $21_3 \cdot 12_3 + 11_3$ ; б)  $504_8 + 210_5 - 110011_2$ .

- 40.** Сколько цифр необходимо для записи чисел:
- в десятичной системе счисления;
  - в двоичной системе счисления;
  - в восьмеричной системе счисления;
  - в системе счисления с основанием  $p$ ?
- 41.** Сколько единиц содержит наибольшее однозначное число:
- в десятичной системе счисления;
  - в двоичной системе счисления;
  - в системе счисления с основанием  $p$ ?
- 42.** Замените сумму краткой записью числа:
- $5 \cdot 10 + 2$ ; б)  $3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7$ ; в)  $3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 2$ ;
  - $7 \cdot 8^4 + 6 \cdot 8^3 + 4$ ; д)  $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2$ .
- 43.** Представьте число в виде суммы степеней числа 10:
- 7562; б) 809; в)  $\overline{abc}$ .
- 44.** Запишите число в десятичной системе счисления:
- $32_5$ ; б)  $1042_5$ ; в)  $720_8$ ; г)  $1011_2$ .
- 45.** Запишите в двоичной системе счисления числа 2, 3, 5, 17, 27, 105.
- 46.** Запишите в троичной системе счисления числа 2, 3, 4, 17, 28, 116.
- 47.** Запишите в пятеричной системе счисления числа  $101_2$ ,  $111_3$ ,  $236_8$ .
- 48.** Выполните сложение: а)  $101_2 + 111_2 + 100_2$ ; б)  $123_5 + 104_5$ ;
- в)  $736_8 + 252_8$ .
- 49.** Найдите разность и результат проверьте сложением:
- $306_8 - 247_8$ ; б)  $1010_2 - 111_2$ .
- 50.** Выполните умножение: а)  $11_2 \cdot 11_2$ ; б)  $12_5 \cdot 13_5$ ; в)  $26_6 \cdot 35_8$ ; г)  $121_3 \cdot 22_3$ .
- 51.** Найдите значение выражения:
- $3012_5 + 2324_5 - 1413_5$ ; б)  $6325_8 - 456_8 + 157_8$ ;
  - $76_8 * 64_8 - 57_8 * 37_8$ ; г)  $23213_5 : 32_5 - 113_5 * 3$ .
- 52.** При каком значении  $x$  верно равенство: а)  $203_x = 53$ ;
- б)  $401_x = 197$ ; в)  $236_x = 1240_5$ ?
- 53.** Найдите основание системы счисления:
- $306_x + 124_x = 220$ ; б)  $752_x - 647_x = 67$ .
- 54.** Выясните, какие понятия десятичной системы счисления и законы арифметических действий использованы:
- $$276 + 155 = (2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 6) + (10^2 + 5 \cdot 10 + 5) =$$

$$(2 \cdot 10^2 + 10^2) + (7 \cdot 10 + 5 \cdot 10) + (6 + 5) = (2 + 1) \cdot 10^2 + (7 + 5) \cdot$$

$$10 + (6 + 5) = (2 + 1) \cdot 10^2 + (10 + 2) \cdot 10 + (10 + 1) = 3 \cdot 10^2 +$$

$$10^2 + 2 \cdot 10 + 10 + 1 = (3 + 1) \cdot 10^2 + (2 + 1) \cdot 10 + 1 = 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot$$

$$10 + 1 = 810;$$
  - $$135 \cdot 6 = (10^2 + 3 \cdot 10 + 5) \cdot 6 = 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 6 \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 6 \cdot$$

$$10^2 + 18 \cdot 10 + 30 = 6 \cdot 10^2 + (10 + 8) \cdot 10 + 3 \cdot 10 = (6 \cdot 10^2 +$$

$$10^2) + (8 \cdot 10 + 3 \cdot 10) = 7 \cdot 10^2 + (10 + 1) \cdot 10 = 7 \cdot 10^2 + 10^2 +$$

$$10 = 8 \cdot 10^2 + 10 = 810.$$
- 55.** Решите нижеприведенные задачи, используя запись числа в

десятичной системе счисления:

- а) Двухзначное число оканчивается цифрой 3. Если сумму его цифр умножить на 4, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите двухзначное число.
- б) В двухзначном числе десятков в три раза больше, чем единиц. Если между цифрами этого числа вставить цифру 0, то число увеличится на 540. Найдите двухзначное число.

## § 5. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Пользуясь определением делителя числа, докажите, что:
  - а) число 9 является делителем числа 72;
  - б) число 7 не является делителем числа 65.
2. Является ли число 18: а) делителем числа 90; б) делителем числа 160; в) кратным числа 6; г) кратным числа 54?
3. Какие из чисел 528, 12960, 13000 и 2204 являются кратными числа 48?
4. Запишите формулу числа, кратного числу: а) 3; б) 5; в) 29.
5. Докажите, что: а) сумма двух четных чисел есть число четное; б) сумма двух нечетных чисел есть число нечетное; в) сумма четного числа и нечетного есть число нечетное.
6. Запишите, используя символы математической логики, свойство рефлексивности отношения делимости натуральных чисел и докажите его, опираясь на определение этого отношения.
7. Среди следующих предложений укажите истинное:
  - а)  $(\forall a, b \in \mathbb{N}) a : b \rightarrow (b : a)$ ;
  - б)  $(\forall a, b \in \mathbb{N}) a : b \wedge a \neq b \rightarrow (b : a)$ ;
8. Какое из этих предложений представляет собой запись свойства антисимметричности отношения делимости натуральных чисел?
9. Докажите это свойство, используя определение отношения делимости.
10. Запишите, используя символы математической логики, свойство транзитивности отношения делимости натуральных чисел и докажите его.
11. Даны числа 100, 252, 630. Не производя деления, установите, какие из них кратны: а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 9.
12. Вместо звездочки поставьте такую цифру, чтобы получилось число, делящееся на 9: а)  $179^*$ ; б)  $54^*0$ ; в)  $5^*31$ .
13. Докажите или опровергните высказывание: «Вели запись числа оканчивается цифрой 8, то оно кратно 4».
14. Делится ли число на 4, если:
  - а) последняя его цифра 6;
  - б) последняя его цифра 3;
  - в) оно кратно 2;

- г) оно не кратно 2;  
 д) оно кратно 8;  
 е) оно не кратно 8.
15. Не находя суммы чисел, установите, делится ли она на 3:  
 а)  $261 + 132$ ; б)  $370 + 143$ ; в)  $372 + 143$ .
16. Докажите теорему о делимости суммы для: а) трех слагаемых; б)  $n$  слагаемых.
17. Докажите теорему: «Если все слагаемые, кроме одного, кратны некоторому числу, то сумма не кратна этому числу». Проведите сначала доказательство для трех слагаемых, а затем для  $n$  слагаемых.
18. Не находя суммы чисел, установите, делится ли она на 9:  
 а)  $222\ 111 + 25\ 308 + 28054$ ;  
 б)  $222111 + 25308 + 27054$ ;  
 в)  $222111 + 25308 + 28054 + 13721$ .
19. Докажите, что сумма трех последовательных чисел кратна 6.
20. Кратна ли числу 4 сумма двух последовательных; а) четных чисел; б) нечетных чисел?
21. Установите, не производя вычислений, значения каких выражений делятся на 4: а)  $540 - 332$ ; б)  $370 - 254$ ; в)  $540 - 254$ .
22. Известно, что число  $a$  делится, а число  $b$  не делится на  $c$ . Докажите, что в этом случае разность чисел  $a$  и  $b$  нас не делится.
23. Установите, не производя вычислений, значения каких выражений делятся на 4: а)  $2512 \cdot 127$ ; б)  $134 \cdot 270$ ; в)  $148 \cdot 272$ .
24. Известно, что числа  $a$  и  $b$  не кратны  $c$ . Следует ли из этого, что  $ab$  не кратно  $c$ ?
25. Известно, что число  $a$  кратно 19. Является ли кратным 19 число;  
 а)  $a + 19$ ; б)  $2a + 32$ ; в)  $6a - 38$ ; г)  $5a \cdot 17$ ?
26. Докажите, что значение выражения  $14a + 49b - 98c$  при любых натуральных значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$  кратно 7.
27. Докажите, что значение выражения  $15x - 27y + 111z + 2$  при любых натуральных значениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  не кратно 3.
28. Составьте сумму из двузначного, трехзначного и четырехзначного чисел, записанных с помощью одной и той же цифры. Почему эта сумма делится на 3?
29. Докажите, что всякое трехзначное число, в записи которого используются только одинаковые цифры, делится на 37.
30. Докажите, что разность между трехзначным числом и числом, составленным из тех же цифр, но взятых в обратном порядке, делится на 9.
31. Докажите, что всякое четырехзначное число вида  $7aa7$  делится на 11.
32. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел не делится на 3.
33. Докажите, что если натуральное число при делении на 5

- дает в остатке 1, то и квадрат его при делении на 5 дает остаток 1.
- 34.** Докажите, что: а)  $(64^3 - 64^2) : 63$ ; б)  $(27^9 + 27^{10}) : 28$ ;  
в)  $(57^4 - 23^4) : 40$ .
- 35.** 188. Докажите, используя метод математической индукции, что для любых натуральных чисел верно утверждение:
- а)  $(4^n - 1) : 3$ ;  
б)  $(6^{2n} - 1) : 35$ ;  
в)  $(3^{2n+1} + 1) : 4$ ;  
г)  $(5^{2n-1} + 1) : 6$ ;  
д)  $(n^3 - 7n + 6) : 6$ .
- 36.** Докажите, что числа 139, 331 и 509 являются простыми, а числа 680, 819 и 221 не являются.
- 37.** Из чисел 199, 267, 389 и 437 выберите простые.
- 38.** Докажите, что всякое простое число, большее 3, имеет вид  $6/k + 1$  или  $6/k + 5$ , где  $k$  - натуральное число.
- 39.** Запишите каноническое разложение числа на простые множители: а) 168; б) 972; в) 2526.
- 40.** Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?
- 41.** Докажите, что произведение двух последовательных натуральных чисел делится на 2.
- 42.** Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 3.
- 43.** Докажите, что разность квадратов двух последовательных четных натуральных чисел делится на 4.
- 44.** Докажите, что произведение двух последовательных четных натуральных чисел кратно 8.
- 45.** Даны два числа: 50 и 75. Запишите множество: а) делителей числа 50; б) делителей числа 75; в) общих делителей данных чисел. Каков наибольший общий делитель чисел 50 и 75?
- 46.** Является ли число 375 общим кратным чисел: а) 125 и 75; б) 85 и 15?
- 47.** Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел, представив их в каноническом виде: а) 144 и 560; б) 351 и 28; в) 80, 120 и 280; г) 238, 266, 413 и 329.
- 48.** Может ли наименьшее общее кратное чисел быть больше произведения этих чисел?
- 49.** Найдите с помощью алгоритма Евклида наибольший общий делитель чисел: а) 138 и 115; б) 481 и 703; в) 3762 и 4446; г) 57 599 и 55 687.
- 50.** Среди следующих пар чисел укажите взаимно простые: а) 15 и 9; б) 15 и 17; в) 4 и 9; г) 24 и 72; д) 2800 и 2673.
- 51.** Среди следующих высказываний укажите истинное:  
а) если два числа  $a$  и  $b$  взаимно простые, то числа  $a$  и  $b$  простые;  
б) если числа  $a$  и  $b$  простые, то они взаимно простые.

52. Докажите, что два последовательных натуральных числа являются взаимно простыми.
53. Известно, что если наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$  равен 11, то числа имеют вид:  $a=11p$ ,  $b=11q$ . Чему равен наибольший общий делитель чисел  $p$  и  $q$ ?
54. Найдите наименьшее общее кратное чисел: а) 846 и 248; б) 3960 и 4735.
55. Наименьшее общее кратное двух чисел, одно из которых 60, равно 420. Найдите другое число, если наибольший общий делитель данных чисел равен 10.
56. Найдите числа  $a$  и  $b$ , если известно, что:
- $(a, b) = 5$ ,  $K(a, b) = 105$ ;
  - $D(a, b) = 7$ ,  $a \cdot b = 294$ ;
  - $D(a, b) = 3$ ,  $a:b = 17 : 14$ ;
  - $K(a, b) = 224$ ,  $a : b = 7:8$ .
57. Имеется 36 синих и 48 красных листов бумаги. Какое наибольшее число комплектов можно сделать из этих листов, если в каждом комплекте должно быть по одинаковому числу синих и одинаковому числу красных листов?
58. Три школьных киоска получили по одинаковому числу тетрадей с различных торговых баз, первая из которых поставила тетради в пачках по 50 штук, вторая - по 100 штук, а третья по 200 штук в каждой пачке. Сколько тетрадей получила каждая школа, если известно, что трем школам было отправлено менее 2000 тетрадей?
59. В три магазина поступили яблоки в одинаковых ящиках. В первый магазин доставили 1800 кг яблок, во второй 4848 кг, в третий 2520 кг. Сколько ящиков с яблоками доставили в каждый магазин, если ящики были максимально возможной массы?
60. 12 июня от одной пристани отправились три парохода. Первый совершает рейс за 4 суток, второй - за 9, третий - за 6. Определите ближайшую дату, когда одновременно отправятся в новый рейс первый и второй пароходы, второй и третий и все три парохода.
61. Представьте число в виде произведения двух взаимно простых чисел: а) 45; б) 6; в) 12; г) 15; д) 35.
62. Не выполняя деления, покажите, что числа 6 075 и 13 860 кратны 45.
63. Среди следующих высказываний укажите истинные:
- $(\forall a \in \mathbb{N}) a:7 \wedge a:5 \Rightarrow a:35$ ;
  - $(\forall a \in \mathbb{N}) a:10 \wedge a:15 \Rightarrow a:150$ ;
  - $(\forall a \in \mathbb{N}) a:15 \Rightarrow a:3 \wedge a:5$ ;
  - $(\forall a \in \mathbb{N}) a:45 \Rightarrow a:15 \wedge a:3$ .
64. Докажите, что разность между кубом числа и самим числом делится на 6.

65. Докажите истинность следующих утверждений:  
 а)  $(\forall a \in \mathbb{N}) (a^3 + 5a) \div 6$ ; б)  $(\forall a \in \mathbb{N}) (a^5 - a) \div 30$ .
66. Докажите, что число  $(2a+1)^2 - 1$  кратно 8 при любом натуральном  $a$ .
67. Докажите, что разность квадратов двух любых нечетных чисел кратна 8.
68. Докажите, что разность квадратов двух любых четных чисел кратна 4.
69. Докажите, что разность квадратов двух последовательных натуральных чисел есть число нечетное.
70. Докажите, что если натуральные числа  $a$  и  $b$  при делении на 7 дают один и тот же остаток, то разность квадратов этих чисел делится на 7.
71. Докажите, что если одно из двух натуральных чисел при делении на 5 дает остаток 3, а другое - остаток 1, то сумма их квадратов делится на 5.
72. Докажите, что если число не делится на 3, то квадрат его при делении на 3 дает остаток 1.
73. Докажите, используя метод математической индукции, что для любого натурального числа  $n$  истинны утверждения:  
 а)  $(2 \cdot 7^n + 1) \div 3$ ; б)  $(7^n + 3n - 1) \div 3$ ;  
 в)  $(9^n - 8n - 1) \div 8$ ;  
 г)  $(4 \cdot 6^n + 5^n - 4) \div 5$ ;  
 д)  $(4^n + 15n - 1) \div 3$ ;  
 е)  $(2n^3 - 3n^2 + n) \div 6$ .
74. Докажите, что сумма  $(b - 1)^3 + b^3 + (b + 1)^3$  кратна 9 при любом натуральном  $b$ .
75. Докажите, что произведение четырех натуральных чисел кратно 24.
76. Из множества чисел 111, 127, 137, 139, 299, 1227 выделите подмножество простых чисел.
77. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел, представив их в каноническом виде:  
 а) 72 и 108;  
 б) 588 и 2 058;  
 в) 714 и 386;  
 г) 536 и 1 024.
78. Найдите наибольший общий делитель чисел с помощью алгоритма Евклида:  
 а) 299 и 391;  
 б) 6 188 и 4 709;  
 в) 548 и 2 466;  
 г) 2 849 и 5 880.
79. Установите, не производя вычислений, значения каких выражений делятся на 15:

- а)  $150 + 225$ ;  
 б)  $28\,422 + 22\,050$ ;  
 в)  $5\,040 + 8\,310 + 750$ ; г)  $2\,808 + 6\,500 + 1\,875$ .
- 80.** Установите, не производя вычислений, значения каких выражений делятся на 18: а)  $24 \cdot 36 \cdot 53$ ; б)  $123 \cdot 207 \cdot 41$ ;  
 в)  $72 \cdot 29 \cdot 47$ ; г)  $123 \cdot 201 \cdot 44$ .
- 81.** Докажите, что числа 701 и 1402 являются взаимно простыми. Сколькими способами это можно сделать?
- 82.** Вынесите общий множитель за скобки:  
 а)  $450 + 160$ ;  
 б)  $750 + 3\,810 - 2\,070$ .
- 83.** Найдите простые делители каждого из чисел: 216, 594, 729, 1 024, 2 348.

## § 6. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

- Сформулируйте определение равносильности дробей. Следует ли из равенства дробей их равносильность? А обратно? Приведите примеры равносильных, но не равных дробей.
- Докажите равносильность дробей: а)  $\frac{3}{5}$  и  $\frac{6}{10}$ ; б)  $\frac{36}{21}$  и  $\frac{12}{7}$ .
- Запишите три дроби, равносильные дробям: а)  $\frac{2}{5}$ ; б)  $\frac{6}{48}$ .  
Использовалось ли при этом основное свойство дроби?
- Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби: а)  $\frac{17}{24}$  и  $\frac{7}{36}$ ;  
 б)  $\frac{14}{115}$  и  $\frac{13}{48}$ ; в)  $\frac{1}{4604}$  и  $\frac{19}{3024}$ .
- На множестве дробей  $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{4}{8}, \frac{35}{40}, \frac{25}{50}, \frac{40}{80}, \frac{1}{3} \right\}$  задано отношение “дробь  $x$  равносильна дроби  $y$ ”. Постройте граф этого отношения и запишите все подмножества  $A$ , состоящие из равносильных дробей.
- Докажите, что отношение равносильности дробей есть отношение эквивалентности.
- Назовите три дроби, представляющие то же рациональное число, что и дробь: а)  $\frac{4}{10}$ ; б)  $\frac{12}{5}$ ; в)  $\frac{2}{3}$ .
- Дроби  $\frac{m}{n}$  и  $\frac{p}{q}$  являются записями рациональных чисел  $a$  и  $b$ . Равны ли эти числа, если а)  $\frac{m}{n} = \frac{6}{8}$ , а  $\frac{p}{q} = \frac{9}{12}$ ; б)  $\frac{m}{n} = \frac{6}{8}$  а  $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ ?

9. Каждую из следующих дробей преобразуйте в равносильную ей несократимую:  $\frac{15}{20}, \frac{15}{225}, \frac{648}{964}, \frac{9379}{2573}$ .

10. Докажите, что если дробь  $\frac{a}{b}$  сократима, то дроби  $\frac{a+b}{b}$  и  $\frac{a-b}{b}$  тоже сократимы.

11. Как короче записать суммы: а)  $3 + \frac{1}{4}$ ; б)  $5 + \frac{2}{3}$ ?

12. Сложите дроби: а)  $\frac{7}{30} + \frac{29}{30}$ ; б)  $\frac{5}{72} + \frac{23}{180}$ ; в)  $3\frac{3}{8} + \frac{5}{12}$ .

13. Запишите коммутативный закон сложения положительных рациональных чисел и докажите его. Какие преобразования числовых выражений возможны на основании этого закона?

14. Запишите ассоциативный закон сложения положительных рациональных чисел и докажите его. Какие преобразования числовых выражений возможны на основании этого закона?

15. Сложите нижеприведённые дроби и объясните, какие законы сложения были использованы:

а)  $\frac{7}{8} + \frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ ; б)  $\left(4\frac{5}{9} + \frac{11}{36}\right) + 2\frac{4}{9}$ ; в)  $3\frac{7}{8} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right)$ ; г)  $2 + 1\frac{2}{11} + 3\frac{17}{22} + 9\frac{1}{22} + 7$ ;

д)  $3\frac{5}{26} + 2\frac{1}{4} + 2\frac{3}{13} + 4\frac{29}{52} + \frac{10}{13}$ ;

16. Вычислите разность и представьте ее несократимой дробью:

а)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{8}$ ; б)  $\frac{13}{60} - \frac{8}{45}$ ; в)  $17\frac{13}{15} - 6\frac{5}{6}$ ; г)  $16\frac{5}{9} - 12\frac{11}{12}$ .

17. Найдите значение выражения и представьте его в виде несократимой дроби: а)  $2\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + 1\frac{7}{8}$ ; б)  $18\frac{3}{4} + 16\frac{3}{5} - 25\frac{5}{8} + 17\frac{7}{10}$ ; в)

$25\frac{7}{9} - 8\frac{3}{4} - 12\frac{5}{12} - 2\frac{11}{18}$ .

18. Решите уравнения, используя зависимость между результатом и компонентами действия.

а)  $\left(\frac{1}{5} + x\right) - \frac{3}{8} = \frac{2}{5}$ ;

б)  $\left(\frac{5}{7} - x\right) + \frac{2}{21} = \frac{3}{14}$ ;

в)  $2\frac{1}{18} - \left(1\frac{1}{27} - \left(x - \frac{1}{9}\right)\right) + 3\frac{5}{54} = 5$ ;

$$\text{г) } 1\frac{3}{5} + \left( 2\frac{7}{12} - \left( \left( \frac{3}{4} - x \right) + 1 \right) \right) = 2\frac{14}{15}.$$

19. Какую часть рукописи перепечатают четыре машинистки за один час, если первая машинистка могла бы перепечатать всю рукопись за 12 ч, вторая – за 15, третья – за 10, четвертая – за 9?

20. Найдите произведение: а)  $\frac{14}{3} \cdot \frac{3}{8}$ ; б)  $\frac{11}{12} * \frac{8}{9}$ ; в)  $5\frac{4}{9} * 2\frac{5}{98}$ ; г)  $8\frac{12}{31} * 9\frac{7}{9}$ .

21. Запишите коммутативный закон умножения положительных рациональных чисел и докажите его. Используется ли при доказательстве коммутативный закон умножения натуральных чисел?

22. Запишите ассоциативный закон умножения положительных рациональных чисел и докажите его. Какие теоретические положения используются в процессе доказательства?

23. Запишите дистрибутивный закон умножения положительных рациональных чисел относительно сложения и докажите его. Какие преобразования числовых выражений возможны на основании этого закона?

24. Найдите значение выражения, применяя законы умножения:

25. а)  $\frac{3}{5} * \frac{7}{2} * \frac{5}{3}$ ; б)  $\left( \frac{4}{7} * 6\frac{1}{3} \right) * \frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{3}{11} * \frac{11}{12} + 2\frac{1}{11} * \frac{11}{12}$ .

26. Выясните, какие законы умножения использованы при выполнении следующих действий:

а)  $3\frac{3}{4} * 4 = 3 * 4 + \frac{3}{4} * 4 = 12 + 3 = 15;$

б)  $2\frac{1}{4} * 3 + 2\frac{1}{4} * 5 = 2\frac{1}{4} * 8 = 2 * 8 + \frac{1}{4} * 8 = 16 + 2 = 18.$

27. Выполните деление: а)  $\frac{5}{6} \div \frac{19}{24}$ ; б)  $8\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{20}$ ; в)  $15 \div \frac{5}{17}$ ; г)  $4\frac{4}{5} \div \frac{4}{17} \div 3\frac{2}{5}$ ;

д)  $11\frac{1}{3} \div \frac{4}{21} \div 4\frac{1}{4}$ .

28. Докажите, что:

а)  $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}_+) (a + b) \div c = a \div c + b \div c;$

б)  $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}_+) (a * b) \div c = (a \div c) * b.$

29. Используя результаты предыдущего упражнения, найдите значения

выражения: а)  $\left( \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) \div \frac{8}{7}$ ; б)  $5\frac{5}{12} \div 5$ ; в)  $\left( \frac{2}{3} * \frac{4}{5} \right) \div \frac{6}{7}$ .

30. Как изменится произведение двух чисел, если:

а) один множитель умножить на  $\frac{2}{5}$ , а другой – на  $1\frac{1}{2}$ ;

б) один множитель умножить на  $2\frac{1}{2}$ , а другой разделить на  $\frac{1}{2}$ ;

в) один множитель разделить на  $3\frac{1}{2}$ , а другой – на  $1\frac{1}{2}$ ;

31. Как изменится частное, если:

а) делимое и делитель умножить на  $1\frac{1}{3}$ ;

б) делимое умножить на  $\frac{2}{3}$ , а делитель – на  $\frac{1}{3}$ ;

в) делимое разделить на  $1\frac{1}{2}$ , а делитель – на  $2\frac{1}{2}$ ;

г) делимое умножить, а делитель разделить на  $\frac{1}{2}$ ?

32. Найдите значение выражения: а)  $4\frac{1}{4} \div \left(11\frac{1}{3} * 5\frac{1}{4}\right)$ ;

$$\frac{22 * \frac{8}{23}}{15 \div \frac{5}{8}} \div \frac{2\frac{1}{3} \div 3\frac{1}{2}}{3\frac{1}{8} * 1\frac{3}{5}}$$

б)

33. Решите уравнение, используя зависимость между результатами и компонентами действий: а)  $2\frac{2}{3} * x \div \frac{4}{5} = 25$ ; б)  $7\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * x = 22\frac{1}{2}$ .

34. Решите задачи:

а) Книга содержит 140 страниц текста. Ученик прочитал  $\frac{5}{7}$  всей книги. Сколько страниц ему осталось прочитать?

б) В бак налили 15 л воды, наполнив его на  $\frac{3}{5}$  объёма. Каков объём бака?

в) Когда турист проехал  $\frac{3}{8}$  расстояния между двумя городами, то до половины пути ему осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между городами.

г) В трёх гаражах помещаются 460 машин. Число машин, помещающихся в первом гараже, составляет  $\frac{3}{4}$  числа машин, помещающихся во втором, а в третьем гараже в  $1\frac{1}{2}$  раза больше машин, чем в первом. Сколько машин помещается в каждом гараже?

35. Докажите, что: а)  $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ ; б)  $\frac{3}{7} < \frac{4}{5}$ ; в)  $\frac{2}{9} < \frac{5}{21}$ .

36. Сравните числа: а)  $\frac{5}{6}$  и  $\frac{7}{8}$ ; б)  $\frac{7}{18}$  и  $\frac{5}{12}$ ; в)  $\frac{15}{28}$  и  $\frac{13}{21}$ .

37. Докажите что отношение “меньше” на множестве положительных рациональных чисел антисимметрично и транзитивно.

38. Расположите дроби в порядке возрастания:

а)  $\frac{5}{10}, \frac{5}{21}, \frac{5}{6}, \frac{5}{219}, \frac{5}{142}$ ;

39. б)  $\frac{2}{3}, \frac{8}{13}, \frac{121}{197}, \frac{56}{73}$ .

40. Известно, что  $x$ ,  $y$  и  $m$  – положительные рациональные числа  $x > m$ ,  $y < m$ . Сравните числа  $x$  и  $y$ .

41. Известно, что  $a$  и  $b$  – положительные рациональные числа и  $a > 5$ ,  $b < 3$ . Сравните числа  $a$  и  $b$ .

42. Запишите три рациональных числа, заключённых между числами: а)

$\frac{3}{4}$  и  $\frac{7}{8}$ ; б)  $\frac{6}{11}$  и  $1\frac{1}{7}$ .

43. Какие из чисел  $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 5, \frac{3}{5}$  являются решениями неравенства  $x > \frac{2}{3}$ ?

44. Какие из дробей  $\frac{7}{8}, \frac{19}{40}, \frac{5}{48}, \frac{29}{21}$  можно записать в виде конечной десятичной дроби?

45. Представьте числа, данные в задаче 42, в виде бесконечных десятичных дробей. Какие из них являются периодическими?

46. Следующие числа представьте в виде несократимых обыкновенных дробей: 0,03; 10,0018; 0,(23); 2,14(3); 6,041(27).

47. Установите, истинны ли равенства: а)  $\frac{68}{33} = 2,(6)$ ; б)  $\frac{56}{11} = 5,(09)$ ; в)

$\frac{179}{300} = 0,(596)$ .

48. Выполните действия:  $\left( \left( 0,(06) + \frac{1}{3} \right) : 0,25 \right) : (0,12(3) : 0,0925) + 12,5 \cdot 0,64$ .

49. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

а)  $\frac{7}{60}$  и  $\frac{9}{40}$ ; б)  $\frac{17}{52}$  и  $\frac{11}{65}$ ; в)  $\frac{5}{24}, \frac{7}{36}$  и  $\frac{31}{54}$ .

50. Назовите три дроби, представляющие то же рациональное число, что и дробь:

а)  $\frac{3}{7}$ ; б)  $2\frac{11}{12}$ ; в) 0,3.

51. Сократите дроби:

а)  $\frac{9108}{924}$ ; б)  $\frac{792}{1782}$ ; в)  $\frac{2080}{3100}$ ; г)  $\frac{7845}{11319}$ .

52. Найдите значение выражения: а)  $(6 - 2\frac{4}{5}) \cdot 3\frac{1}{8} - 1\frac{3}{5} : \frac{1}{4}$ ;

б)  $(5\frac{5}{12} - 4\frac{13}{24}) \cdot 5\frac{1}{3} - (4\frac{2}{9} + 2\frac{5}{6}) : 2\frac{7}{9}$ ;

в)  $(22\frac{1}{6} - 21\frac{5}{8}) \cdot 1\frac{3}{13} + 1\frac{31}{44} \cdot (6\frac{3}{10} - 3\frac{11}{15})$ ;

53. Числитель дроби на 3 больше знаменателя. Если числитель дроби уменьшить на 1, а знаменатель увеличить в 2 раза, то полученная дробь будет на 1 меньше первоначальной. Найдите первоначальную дробь.

54. Сравните:

а)  $\frac{2}{9}$  и  $\frac{7}{15}$ ; б)  $3 - \frac{1}{6}$  и  $3 - \frac{15}{18}$ ; в)  $\frac{4}{9} + \frac{7}{12}$  и  $\frac{5}{9} + \frac{11}{12}$ .

55. Принадлежит ли множеству:

а)  $[\frac{12}{13}; +\infty]$  число  $\frac{7}{8}$ ;

б)  $[\frac{1}{3}; \frac{9}{11}]$  число 0,62?

56. Найдите наиболее рациональным способом значение выражения:

$$5,43 + 1,72 + 3,57 + 4,28.$$

57. Приведенные ниже задачи решите различными способами, укажите среди них наиболее рациональный:

а) В трех цехах завода работает 2 740 человек. Во втором цехе работает на 140 человек больше, чем в первом, а в третьем цехе – в 1,2 раза больше, чем во втором. Сколько человек работает в каждом цехе?

б) В колхозном саду сливовые деревья составляли  $\frac{1}{6}$  всего количества плодовых деревьев, яблони  $\frac{8}{15}$ , а остальные составляли 360 деревьев были грушевые. Сколько плодовых деревьев было в колхозном саду?

в) Расстояние между турбазами А и В равно 40 км. Группа туристов вышла с турбазы А в направлении к турбазе В со скоростью 5 км/ч. Через час с турбазы В навстречу первой группе с той же скоростью вышла другая группа туристов. Через сколько часов после своего выхода вторая группа встретится с первой?

г) из двух пунктов, расстояние между которыми 340 км, вышли одновременно навстречу друг другу два электропоезда. Скорость одного из них на 5 км/ч больше скорости другого. С какой скоростью шли поезда, если известно, что через два часа после начала движения им оставалось пройти до встречи 30 км?

д) расстояние между совхозом и городом, равное 170 км, мотоциклист проехал за 5 ч. Первые 2 ч он ехал со скоростью, на 10 км/ч большей, чем скорость на остальном пути. Какой была скорость

мотоциклиста на первой и второй частях пути?

е) Катер, идя по течению реки 5 ч, проходит столько же километров, сколько за 6 ч 15 мин он проходит против течения. Скорость течения реки равна 2,4 км/ч. Какова собственная скорость катера?

ж) Расстояние между двумя пристанями на реке, равное 34 км, катер проходит в оба конца за 3 ч 42 мин. Какова скорость катера при движении против течения реки, если известно, что она на 15% меньше скорости катера по течению реки?

58. Решите уравнение, используя зависимость между компонентами и результатами действий:

$$\text{а) } 3\frac{4}{15} : \left( \left( 2\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2} \right) : 21\frac{3}{7} \right) - 1\frac{1}{8} = 5\frac{7}{8};$$

$$\text{б) } 66\frac{3}{5} : \left( 5 + 3\frac{1}{5} : \left( 1\frac{3}{5} - \frac{4}{15}x \right) \right) - 7\frac{3}{20} = \frac{1}{4}.$$

59. Представьте число в виде бесконечной десятичной дроби:

а)  $\frac{5}{6}$ ; б)  $\frac{10}{11}$ . Объясните, почему получены периодические дроби.

60. Установите, истинно ли равенство:

$$\text{а) } \frac{5}{26} = 0,1(923076); \quad \text{б) } \frac{17}{6} = 2,(83); \quad \text{в) } \frac{12}{7} = 1,(914285).$$

61. Представьте в виде несократимой обыкновенной дроби:

а) 6,(7); б) 7,2(3); в) 1,(35); г) 13,4(72).

62. Приняв за единицу длины меньший катет прямоугольного треугольника, один из углов которого равен  $60^\circ$ , найдите длину гипотенузы и докажите, что при выбранной единице длины длину большего катета нельзя выразить никаким рациональным числом.

63. Докажите, что не существует рационального числа  $q$ , такого что:

$$\text{а) } q^2 = 5; \quad \text{б) } q^2 = 7.$$

64. Определите, какие из следующих бесконечных десятичных дробей представляют рациональные числа, а какие – иррациональные:

2,323232...; 3,52(375); 1,37(9); 1,212012001...; 15,41741174117... .

65. Действительное число  $x$  записано в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Какое утверждение истинно:

а) действительное число  $x$  является рациональным числом;

б) действительное число  $x$  является иррациональным числом?

66. Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны:

а)  $3,(4) \in Q_+$ ; б)  $3,(4) \in J_+$ ; в)  $3,(4) \in R_+$ ; г)  $\sqrt{7} \in Q_+$ ; д)  $\sqrt{7} \in J_+$ ;

е)  $\sqrt{7} \in R_+$ ;

67. Среди следующих высказываний укажите истинные, для ложных высказываний постройте их отрицания:

а) любое рациональное число является действительным;

- б) любое действительное число является рациональным;  
 в) существуют действительные числа, не являющиеся рациональными.
68. Истинно ли утверждение о том, что квадратный корень из рационального числа всегда представляет собой запись иррационального числа?
69. Назовите три положительных значения переменной  $x$ , при которых значение выражения  $\sqrt{x}$  является а) рациональным числом, б) иррациональным числом; в) натуральным числом.
70. Найдите пересечение и объединение:  
 а) множества натуральных чисел и множества положительных действительных чисел;  
 б) множества положительных действительных чисел и множества положительных рациональных чисел;  
 в) множества положительных рациональных чисел и множества положительных иррациональных чисел.
71. Докажите, что числа 2,2 и 2,3 являются десятичными приближениями соответственно по недостатку и по избытку числа  $\sqrt{5}$  с точностью до 0,1.
72. Запишите десятичные приближения иррационального числа  $\pi = 3,1415$  по недостатку и по избытку с точностью до: а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001.
73. Установите, какие числа являются десятичными приближениями числа  $\sqrt{15}$  соответственно по недостатку и по избытку с точностью до 0,1: а) 3,7 и 3,8 б) 3,8 и 3,9.
74. Найдите десятичные приближения с точностью до 0,1 по недостатку и по избытку для числа: а) 3,2774; б)  $\sqrt{11}$ .
75. Найдите первые три десятичных знака числа: а)  $\frac{2}{7}$ ; б)  $\sqrt{2}$ .
76. Найдите три первых десятичных знака суммы  $x+y$ , если:  
 а)  $x = 2,34871 \dots, y = 5,63724 \dots$ ; б)  $x = \frac{2}{3}, y = \pi$ ; в)  $x = \sqrt{2}, y = \frac{5}{6}$ ;  
 г)  $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{5}$ .
77. Найдите два первых десятичных знака произведения  $x \cdot y$ , если:  
 а)  $x = 1,703504 \dots, y = 2,044537 \dots$ ; б)  $x = \frac{2}{3}, y = \sqrt{2}$ ; в)  $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{5}$ .

78. Каким числом (рациональным или иррациональным) является значение выражения: а)  $5\sqrt{8} - 2\sqrt{50} + 5$ ; б)  $8 \cdot \sqrt{2\frac{2}{4}} - \sqrt{44} - 14\sqrt{\frac{11}{19}}$ ; в)  $(\sqrt{8} + \sqrt{12}) : 5(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ ?
79. Длины отрезков (при одной и той же единице длины) выражаются числами: 3; 1,1;  $\sqrt{2}$ ;  $2\frac{11}{13}$ ; 0,012(3). Какие из этих отрезков соизмеримы какие несоизмеримы с единицей длины?
80. Из множества чисел  $\left\{\frac{2}{3}; 4,2; 7; \sqrt{7}; 0,2(34); \pi; \sqrt{9}\right\}$  выделите подмножество:  
а) рациональных чисел; б) иррациональных чисел.
81. Среди следующих высказываний укажите истинные:  
а)  $\frac{5}{12} = 0,41(6)$ ; б)  $\sqrt{13} > 3,6$ ; в)  $\sqrt{7} < 2\frac{3}{5}$ .
82. При измерении длины отрезка АВ оказалось, что единица длины отложилась на отрезке АВ 3 раза с остатком, меньшим этой единицы; 0,1 выбранной единицы длины отложилась в остатке 7 раз с новым остатком, меньшим 0,1 единицы; 0,01 единицы длины отложилась во втором остатке 3 раза с остатком, меньшим 0,01 единицы. Найдите десятичные приближения длины отрезка АВ по недостатку и по избытку с точностью до 0,01 единицы длины.
83. Найдите сумму чисел  $\pi = 3,14159\dots$  и  $e = 2,71828\dots$  с точностью до 0,01.
84. Найдите два первых десятичных знака произведения:  
а)  $3 \cdot 27437\dots$ ; б)  $5 \cdot \sqrt{2}$ ; в)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}$ .
85. Какие из операций - сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня - являются алгебраическими во множестве положительных действительных чисел?
86. Найдите наиболее рациональным способом значение выражения:  
а)  $\sqrt{\frac{4\frac{1}{2} \cdot 0,12 \cdot 2,7}{0,5}}$ ; б)  $\sqrt{1 - \left(\frac{16}{65}\right)^2}$ ;  
в)  $\sqrt{48} \cdot \sqrt{75}$ ; г)  $\sqrt{36^2 + 48^2}$ .
87. Истинно ли равенство:  
а)  $20,8 + \frac{7}{11} = 21,4(36)$ ; б)  $220 - \frac{7}{11} = 219, (36)?$
88. Вычислите результат с точностью до сотых:  
а)  $4,723 + \frac{3}{11}$ ; б)  $8,706 - \frac{8}{13}$ ; в)  $\frac{8,11}{8,3 - 3,73}$ ; г)  $\frac{7,12}{7,4 - 4,82}$ .
89. Вычислите значение выражения с точностью до 0,001;

$$\text{а) } \frac{10}{\frac{1}{24} + \frac{1}{11} + \frac{1}{9}}; \text{ б) } \frac{5}{\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{17}}$$

90. Решите задачи:

- а) По плану колхозная бригада должна была убрать урожай зерновых с 540 га к определенному сроку. В течение первых 6 дней колхозники перевыполняли дневную норму на 5 га, а в последующие дни – на 10 га, и уже за 2 дня до срока им оставалось убрать всего 20 га. какой срок был установлен колхозом дл уборки зерновых?
- б) бригада рабочих должна была за определенный срок изготовить 400 деталей. В течение первых 5 дней бригада перевыполняла дневную норму на 20%, а в последующие дни изготовляла ежедневно по 15 деталей сверх плана и уже за 2 дня до срока изготовила 405 деталей. Сколько деталей должна была ежедневно изготовлять бригада по плану?
- в) три машинистки, работая совместно, перепечатали рукопись за 6 ч. За сколько часов могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, работая одна, если известно, что первой понадобилось бы в полтора раза меньше времени, чем второй, но на 8 ч больше, чем третьей?

## § 7. ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЯ

1. Установите, в процессе измерения каких величин были получены следующие результаты: а) 12,3м; б) 17мм<sup>3</sup>; в) 140л; г) 300г; д) 160г; е) 6км/ч; ж) 16р; з) 12,3м; и) 17мм<sup>3</sup>; к) 140л; л) 300г.
2. Назовите основные и производные единицы величин: а) длины; б) массы; в) времени; г) площади; д) скорости.
3. На множестве {2м, 307см, 24,5дм} задано отношение <<больше>>. Постройте граф и укажите свойства данного отношения .
4. Как измениться числовое значение величины, если единицу этой величины: а) уменьшить в 2 раза; б)увеличить в 10 раз?
5. Докажите, что отношение двух величин не зависит от выбора единицы величины.
6. Выяснить, какие операции над величинами выполняются в процессе решения следующих задач: а) Ручка стоит  $\frac{2}{5}$  р. Можно ли купить две такие ручки на 75к.?  
 б) Войдёт ли в три такие бочки 850 кг бензина?  
 в) Занятия начались в 8 часов 30 минут и продолжались 6 уроков по 45 мин. Между уроками были две перемены по 10 мин. И две перемены по 20 мин. Когда окончились занятия?

- г) Один прямоугольник имеет основание 32м., а высоту 20м. Основание другого прямоугольника в 8 раз меньше, а высота в 5 раз больше, чем у первого. Какой из прямоугольников имеет большую площадь и на сколько?
- д) Геологи проехали 512км. Сначала они ехали 3ч. На машинах со скоростью 60км/ч, а остальной путь – на лошадях. Сколько километром они проехали на лошадях?
- е) Один трактор работал в неделю 50ч., другой 48ч. Оба трактора при одинаковой норме израсходовали за неделю 686 литров горючего. Сколько литров горючего израсходовал за неделю каждый трактор?
- ж) Магазин продал 640кг яблок.  $\frac{5}{8}$  этих яблок было продано по 42к. за 1кг, а остальные яблоки – по 37к. за 1 кг. Какую сумму выручил магазин за проданные яблоки?
- з) Из двух городов, находящихся на расстоянии 520ки, одновременно вышли навстречу друг другу два поезда и встретились через 4 ч. Один поезд шёл со скоростью 60км/ч. С какой скоростью шёл второй поезд?
7. Длина отрезка АВ равна 12дм. Чему будет равно значение длины этого отрезка, если единицу длины: а) увеличить в 3 раза; б) уменьшить в 4 раза? Ответы обоснуйте.
8. Проиллюстрируйте примером истинность следующих высказываний:  
 а) Длина одного и того же отрезка может выражаться различными числами;  
 б) Длины неравных отрезков могут выражаться одним и тем же числом;  
 в) Длины любых двух равных отрезков при одной и той же единице длины выражаются одним и тем же числом.
9. Длина отрезка АВ равна 5, 6е. Сколько раз укладывается единица е в отрезке АВ? Сколько раз укладывается десятая доля единицы е?
10. Дан единичный отрезок е. Постройте отрезки, длины которых равны:  
 а) 3е; б) 0,6е; в) 1,75е.
- 11.. Каким числом выразится длина каждого из построенных отрезков, если за единицу длины принять: а)  $\frac{1}{3}$  е; б) 2е; в) 0,75е.
12. Выразите десятичной дробью длину отрезка АВ, если: а)  $|AB| = 2\frac{2}{40}$  е; б)  $|AB| = 2\frac{5}{6}$  е; в)  $|AB| = 4\frac{2}{7}$  е.
13. Выразите обыкновенной дробью длину отрезка, равную:  
 а) 0,375е; б) 1,555...е; в) 0,2333...е; г) 2,4(09)е.
14. Постройте отрезок, длина которого равна:  
 а) 7,555...е; б) 2,4(09)е.

15. Решите следующие задачи и объясните, какие операции над длинами были выполнены в процессе решения:

а) В мотке 240м проволоки.  $\frac{5}{8}$  этой проволоки израсходовали. На

сколько метров проволоки больше израсходовали, чем осталось?

б) Периметр треугольника 37см. Одна сторона 12см, другая составляет 75% длины первой стороны. Чему равна длина третьей стороны?

в) В куске было 25м ткани. Хватит ли этой ткани, чтобы сшить 8 платьев, расходуя на каждое по 3 метра?

г) Бревно длиной 8,1 м распилили на 2 части так, что одна из них оказалась в 1,7 раза длиннее другой. Какова длина каждой части бревна?

16. Равны ли фигуры, изображённые на рисунке 81? Равны ли площади этих фигур? Равны ли их периметры?

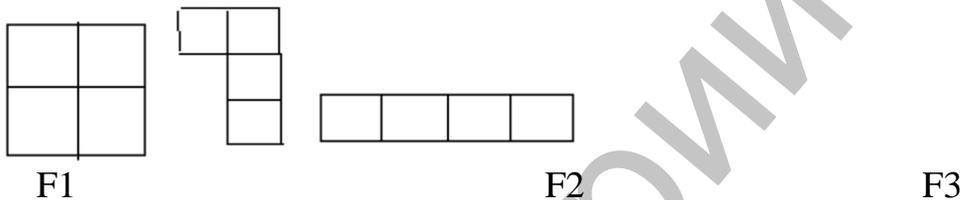


Рис. 81

17. Истинно ли высказывание: “Если многоугольники равны, то они равновелики”? Сформулируйте высказывание, обратное данному. Истинно ли оно?

18. Постройте фигуру, равновеликую фигуре F, изображённой на рисунке 82.

				//	//	//	//		
				//	//	//	//		
		//	//	//	//	//	//		
		//				//	//		
		//	//	//		//	//		
		//	//	//	//	//			

Рис. 82

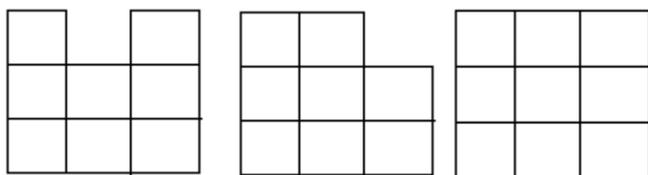
59. Проиллюстрируйте примером истинность следующих высказываний:

а) Числовые значения площади одной и той же фигуры могут быть различными.

б) Числовые значения площади неравных фигур могут совпадать.

60. Как изменится площадь прямоугольника, если: а) основание и высоту его увеличить в 3 раза; б) основание и высоту уменьшить в 2 раза; в) основание увеличить в 3 раза, а высоту уменьшить в 3 раза; г) основание увеличить в 2 раза, а высоту не изменять?
61. Начертите два квадрата так, чтобы периметр второго был вдвое больше периметра первого квадрата. Во сколько раз площадь второго квадрата больше площади первого? Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если длину его стороны увеличить в 3 раза?
62. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если длину каждой его стороны увеличить на 25%?
63. Основание прямоугольника на 20% меньше его высоты. Площадь прямоугольника равна  $200\text{ м}^2$ . Найдите высоту прямоугольника.
64. Решите нижеприведённые задачи и объясните, какие операции над величинами (площадями и длинами) были выполнены в процессе решения:
- Площадь кухни  $9\text{ м}^2$ . Сколько плиток линолеума, имеющих форму квадрата со стороной 3дм, нужно для покрытия пола в кухне?
  - Длина листа бумаги прямоугольной формы 9дм, а ширина 8дм. Для стенгазеты отрезали  $\frac{2}{3}$  листа, а из оставшегося сделали две одинаковые коробки. Сколько квадратных дециметров пошло на каждую коробку?
  - На пришкольном огороде прямоугольной формы выделены два опытных участка одинаковой площади. Длина первого участка 30м, а ширина 28м. Чему равна длина второго участка, если ширина 20м?
  - Периметр квадрата 24см. Найдите ширину прямоугольника, у которого длина равна 12см, а площадь равна площади квадрата.
65. Какие из приведённых ниже величин находятся в прямо пропорциональной или обратно пропорциональной зависимости:
- количество товара и его стоимость при постоянной цене;
  - время и пройденное расстояние при постоянной скорости в условиях равномерного прямолинейного движения;
  - скорость равномерного прямолинейного движения и время, необходимое для прохождения определённого расстояния;
  - скорость равномерного движения и пройденный путь за определённый промежуток времени;
  - длина стороны квадрата и его площадь;
  - длина и ширина прямоугольника при заданной площади;
  - диаметр окружности и её длина;
  - длина стороны квадрата и её периметр.
66. Покажите, что зависимость между величинами, рассматриваемыми в задаче, линейная, и укажите её область определения:

- а) Из деревни в город, расстояние до которого 65 км, выехал велосипедист со скоростью 15 км/ч. На каком расстоянии от города будет велосипедист через  $n$  ч?
- б) Из города в посёлок, находящийся от него в расстоянии 480 км, вылетел вертолёт со скоростью 120 км/ч. На какой расстоянии от посёлка будет вертолёт через  $t$  ч?
67. Высота прямоугольника 2 м, основание  $x$  м. Запишите уравнение, выражающее зависимость площади прямоугольника от его основания, и постройте график этой зависимости.
68. Площадь прямоугольника равна  $8 \text{ см}^2$ , его основание  $x$  см. Запишите уравнение, выражающее зависимость высоты прямоугольника от его основания, и постройте график этой зависимости.
69. Установите, какие величины рассматриваются в следующих задачах, каковы зависимости между ними, приведите различные способы решения задач:
- а) За 125 квт/ч электроэнергии уплатили 5 р. Сколько надо уплатить за 75 квт/ч электроэнергии?
- б) На 6 га пашни было посеяно 10,8 ц зерна. Сколько зерна потребуется, чтобы засеять 15 га пашни?
- в) При нагревании воды в течение 7,5 мин температура её повысилась на  $30^\circ$ . На сколько градусов повысится температура в том же сосуде за 12,5 мин?
- г) При ежедневном расходе 3,6 т угля имеющихся запасов хватит на 56 дней. На сколько дней хватит запасов угля, если ежедневно расходовать по 2,4 т?
- д) Затрачивая на изготовление каждой детали 40 мин, бригада выпускала за смену 540 деталей. Сколько деталей будет за смену выпускать бригада, если на изготовление каждой будет затрачивать 36 мин? На сколько процентов повысится при этом производительность труда?
- е) Лыжники предполагали прибыть к месту назначения через 6 суток, но тёплая погода замедлила их движение, и вместо 52 км они успевали сделать за один переход только 39 км. За сколько суток лыжники совершили весь переход?
70. Какие величины измеряли, если в результате получили:  
а) 16,5 см; б) 265 га; в) 46 м/с; г)  $80 \text{ м}^2$ ; д)  $39 \text{ дм}^2$ ?
71. Как изменится числовое значение величины, если единицу этой величины:  
а) увеличить в 5 раз; б) уменьшить в 3 раза?
72. Среди фигур, изображённых на рис. 83, укажите:  
а) равные; б) равновеликие; в) равноставленные.



ABC

73. Истинно ли высказывание: «Если предметы двух прямоугольников равны, то равны и их площади»? Истинно ли утверждение, обратное данному?
74. На сколько процентов уменьшится площадь квадрата, если каждую его сторону уменьшить на 20 %?
75. Сколько существует прямоугольников, имеющих площади, равные  $24 \text{ см}^2$ , если известно, что длины их сторон выражаются натуральными числами?
76. Установите какие величины рассматриваются в ниже приведенных задачах, каковы зависимости между ними; решите эти задачи:
- За  $72 \text{ м}^3$  газа, израсходованного в квартире, был прислан счёт на сумму 1 р. 44 к. Сколько придётся уплатить, если расход газа составит  $106 \text{ м}^3$ ?
  - На изготовление 800 тетрадей требуется 68,8 кг бумаги. Сколько бумаги нужно для изготовления 1200 тетрадей?
  - Найдите масштаб карты, на котором расстояние между городами, равное на местности 300 км, равно 12 см. Отрезку какой длины будет равно на этой карте расстояние между городами, равное 450 км?
  - Площадь прямоугольной клумбы равна  $108 \text{ м}^2$ , а её ширина 9 м. Чему будет равна длина клумбы такой же площади, если её ширина уменьшится в 3 раза?
  - Совхозное поле три трактора могут вспахать за 60 ч. За какое время вспашут это поле 15 таких же тракторов?
  - Велосипедист, двигаясь со скоростью 10 км/ч, проехал расстояние от пункта А до пункта В за 6 ч. Сколько времени затратит велосипедист на обратный путь, если будет двигаться со скоростью 12 км/ч?
77. Основание прямоугольника равно 4 см, высота  $x$  см. Запишите уравнение, выражающее зависимость площади прямоугольника от высоты, и постройте график этой зависимости.
78. Площадь прямоугольника равна  $12 \text{ м}^2$ , его высота  $x$  м. Запишите уравнение, выражающее зависимость длины основания от его высоты, и постройте график этой зависимости.
79. Решите нижеприведенные задачи и объясните, какие операции над величинами были выполнены в процессе их решения:
- Зал и коридор имеют одинаковую длину. Площадь зала равна  $300 \text{ м}^2$ , а площадь коридора –  $120 \text{ м}^2$ . Чему равна ширина коридора, если

ширина зала равна 10 м, а зал и коридор имеют форму прямоугольника?

б) Расстояние от Горького до Астрахани по Волге равно 2 240 км. Из этих городов в одно и то же время вышли навстречу друг другу два теплохода. На каком расстоянии один от другого будут теплоходы через 10 ч после выхода, если скорость одного из них равна 38 км/ч, а другого 34 км/ч?

в) За три куска ткани заплатили 60 р. За первый кусок заплатили 30 % всей стоимости. Второй кусок оказался на 12,8 р. дороже третьего. Сколько стоит каждый кусок ткани?

г) С трёх участков земли собрано 80 т свеклы. С первого участка собрали 40 % всей свеклы. Со второго участка собрали на 12,4 т больше, чем с третьего. Сколько тонн свеклы собрано с каждого участка?

д) Для оклейки верхнего края обоев комнаты понадобилось 34 м бордюра. Найдите объём комнаты, если длина её в 2,4 раза больше ширины, а высота составляет 60 % ширины.

е) Комната имеет длину 8,5 м, ширину 5,6 м и высоту 2,75 м. Площадь окон и дверей составляет 0,1 общей площади стен комнаты. Сколько кусков обоев понадобится для оклеивания этой комнаты, если кусок обоев имеет длину 10 м и ширину 0,75 м?

ж) Из одного места одновременно в одном направлении выехали два велосипедиста, один со скоростью 15 км/ч, а другой со скоростью 12 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 5 ч?

з) Мастер за 7 ч работы изготовил 259 деталей. Сколько времени работал ученик над изготовлением таких же деталей, если в час он делает на 6 деталей меньше, чем мастер, и изготовил их на 104 меньше, чем мастер?

и) В колхозе было засеяно 960 га земли, причём пшеницей засеяно в 2 раза больше земли, чем кукурузой и рожью вместе. Сколько гектаров земли было засеяно отдельно пшеницей, рожью и кукурузой, если рожью засеяно на 120 га больше чем кукурузой?

80. На гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника построили квадрат. Квадрат построили и на его катете. Во сколько раз площадь первого квадрата больше площади второго квадрата?

Дан квадрат. Из него надо вырезать квадрат, площадь которого равна площади оставшейся части. Как это сделать?

81. Истинны ли утверждения:

а) если прямоугольники равновелики, то они равны; б) если площадь одного прямоугольника больше площади другого прямоугольника, то и стороны первого больше сторон другого; в) если прямоугольники равновелики, то периметры их равны?

82. Какая зависимость существует между площадью квадрата и её периметром? Имеет ли она место для прямоугольника?
83. Каждую сторону прямоугольника увеличили на 1 см. Докажите, что его площадь увеличилась больше чем на  $1 \text{ см}^2$ .
84. Прямоугольный участок земли размером  $130 \times 60$  м окопали ровом шириной 1 м, причём ров выкопали на участке. Какова новая площадь участка?
85. Существуют ли такие прямоугольники, у которых длины сторон выражаются целым числом сантиметров, а площадь численно равна периметру?
86. Докажите, что среди прямоугольников, периметры которых равны, наибольшую площадь имеет квадрат.
87. Докажите, что среди равновеликих прямоугольников наименьший периметр имеет квадрат.
88. Будут ли равновелики прямоугольники, если сторонами одного из них служат катеты прямоугольного треугольника, а сторонами другого – гипотенуза и опущенная на неё высота этого же треугольника?
89. В середине прямоугольной площадки со сторонами 12 м и 10 м требуется разбить прямоугольную клумбу площадью  $8 \text{ м}^2$  так, чтобы её края были на одинаковом расстоянии от краёв площадки. На каком расстоянии от краёв площадки должны быть расположены края клумбы?

## § 8. ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Какие из следующих равенств истинны, а какие ложны:
- |  |   |
|--|---|
| а) $2 \cdot 2 = 4$ ;                   | ж) $ 7 - 9  =  9 - 7 $ ;                  |
| б) $\frac{1917}{852} = 2\frac{1}{4}$ ; | з) $ 3  = -3$ ;                           |
| в) $\sqrt{25} = -5$                    | и) $ 5 - 6  = 6 - 5$ ;                    |
| г) $-\sqrt{64} = -8$ ;                 | к) $ 0 - 4  =  4 - 0 $ ;                  |
| д) $-\sqrt{0,04} = -0,2$ ;             | л) $(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7}) = 3^2$ ; |
| е) $ -3  = 3$ ;                        | м) $ 3 -  -5   =  3 + 5 $ ?               |
2. Проверьте истинность равенств:
- а)  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ ;
- б)  $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ ;
- в)  $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$ ;
- г)  $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111\ 111$ ;
- д)  $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 555\ 555$ ;

е)  $1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$ ;  
 ж)  $1972 = (19 \cdot 72) + (197 \cdot 2) + (197 \cdot 2) + (1 + 9 + 7 - 2)$ ;  
 з)  $1972 = (1 + 9 + 7 + 2)(1^2 + 9^2 + 7^2 + 2^2) - 197 \cdot 2 - (197 + 2)$ ;  
 и)  $8833 = 88^2 + 33^2$ ;  
 к)  $94\ 122\ 353 = 9412^2 + 2353^2$ ;  
 л)  $4626 \cdot 9396 = 6939 \cdot 6264$ ;  
 м)  $9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$ ;  
 н)  $675 + 872 = (6^3 + 7^3 + 5^3) + (8^3 + 7^3 + 2^3)$ ;  
 о)  $\left[ (520 \cdot 0,43) : 0,26 - 217 \cdot 2 \frac{3}{7} \right] - \left( 31,5 : 12 \frac{3}{5} + 114 \cdot 2 \frac{1}{3} + 61 \frac{1}{2} \right) = \frac{(3,4 - 1,275) \cdot \frac{16}{17}}{\frac{5}{18} \cdot (1 \frac{7}{85} + 6 \frac{2}{17})} + 0,5 \cdot \left( 2 + \frac{12,5}{5,75 + \frac{1}{2}} \right)$ ;  
 п)  $\frac{[0,3275 - (2 \frac{15}{88} + \frac{4}{33}) : 12 \frac{2}{9}] : 0,07}{(13 - 0,416) : 6,05 + 1,92} = \left[ \frac{(2,7 - 0,8) \cdot 2 \frac{1}{3}}{(5,2 - 1,4) : \frac{3}{70}} + 0,125 \right] : 2 \frac{1}{2} + 0,43$ .

**3. Проверьте истинность равенств:**

а)  $\frac{3a^2 - b^3}{3a - b(a + 4b)} = \frac{(4b - a)b + a}{a^2 + b^2}$  при  $a = 3, b = -2$ ;

б)  $\frac{x^2 - y(3x - y)}{x^3 - 2xy(x + y) + y^3} = \frac{(x + 3y)y - x^2}{x^3 + x(2x + y) - y^2}$  при  $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}$ ;

в)  $\left( \frac{1}{p - 2q} + \frac{6q}{4q^2 - p^2} - \frac{2}{p + 2q} \right) : \left( \frac{p^2 + 4q^2}{p^2 - 4q^2} + 1 \right) = -\frac{1}{2p}$  при  $p = -1, q = -2$ ;

г)  $\left[ \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} \cdot \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) - \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) \cdot \frac{a^2 + c^2}{a^2 c^2} \right] : \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}$  при  $a = -2, b = 1 \frac{1}{2}, c = -1$ .

4. При измерении некоторой длины  $l$  нашли, что она больше 136, но меньше 137 см. Запишите результат измерения, взяв эти числа в качестве границ измерения длины  $l$ .

5. При взвешивании некоторого предмета с точностью до 0,05 кг получили массу  $m = 26,4$  кг. Укажите числа, ограничивающие массу этого предмета.

6. Определите, какое из двух целых чисел больше, если известно, что оба числа больше 103 и меньше 115, причем первое число делится на 13, а второе - на 3.

7. Какие из следующих неравенств истинны:

а)  $5 \leq 9$ ;      в)  $2 \geq 0$ ;      д)  $(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) > 0$ ;

б)  $-4 \geq 5$ ;      г)  $0 \leq 0$ ;      е)  $\sqrt[3]{7} > \sqrt{8}$ ?

8. Докажите следующие тождества:

а)  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2$ ;

б)  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$ ;

в)  $\frac{1}{(x - y)(x - z)} + \frac{1}{(y - z)(y - x)} + \frac{1}{(z - x)(z - y)} = 0$ ;

$$\Gamma) \frac{x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y}{(y-x)(y-z)} + \frac{z}{(z-x)(z-y)} = 0.$$

9. При каких значениях  $x$  являются тождественными следующие равенства:

$$а) 8x + 9 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-4} = 8x + 9;$$

$$б) \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = x + 2;$$

$$в) \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x}.$$

10. Является ли равенство  $x^2 - 8x + 25 = x^2 + 25 - 8x$  тождеством, если в качестве результатов действий допускаются лишь неотрицательные числа? Истинно ли оно при  $x = 3$ ? б) Является ли равенство  $(x : 2) \cdot 4 = 2x$  тождеством, если  $x$  принимает натуральные значения? Истинно ли оно при  $x = 7$ ? в) Является ли равенство  $x + y - z = x - z + y$  тождеством во множестве натуральных чисел? г) Является ли равенство  $x - (y - z) = x - y + z$  тождеством во множестве натуральных чисел?

11. Является ли тождеством равенство  $\sqrt{(x)^2} = x$ ? Истинно ли оно при  $x = -4$ ?

12. Выполните все указанные действия и определите значения выражений:

$$а) \frac{1}{1-2\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-3\frac{1}{2}};$$

$$б) 0,039 : \left[ \frac{1}{20} * (2,31 : 0,077) \right];$$

$$в) [(0,2) : 5 + (5 : 0,2) - (2,794 : 1,1)] * 0,4;$$

$$г) \frac{5,2+17:25-(3,36:0,3)}{(2,7:0,18)+(0,65:0,13)} : 0,05;$$

$$д) \frac{(2,1-1,965):(0,12*0,45)}{0,0325:0,13} - \frac{1:0,25}{0,16*6,25};$$

$$е) \frac{(0,8-0,47)(0,8+0,47)}{0,4191} + \frac{(1+\frac{3}{5})(1-\frac{3}{5})}{1,6};$$

$$ж) [(25,709 + 0,083 + 1,04) : 2,6832] * [37,5 : 7,5 + 0,5 : 0,1];$$

$$з) \frac{15,2*0,975}{2,8:0,7-0,75} + \frac{(4-1,15:0,5)*24}{0,25*20+10:100};$$

$$и) \left( \frac{1}{17} * \left( \frac{2,5 + 3\frac{1}{3}}{2,5 - 3\frac{1}{3}} \right) : \frac{4\frac{3}{5} - 2\frac{1}{3}}{4,6 + 2\frac{1}{3}} \right) : \left( \frac{0,25 - 0,2}{\frac{1}{7} - 0,125} - 0,2 \right);$$

$$к) \frac{(1,25:3,75+4\frac{4}{9}:3\frac{1}{3}):1\frac{1}{9}}{\frac{5}{18}+\frac{4}{15}-0,35} : 13,5 + \frac{[(3\frac{7}{24} - 1\frac{41}{96})*2]:4\frac{3}{8}*0,1}{19,76*32,5-0,358};$$

$$л) \frac{0,725 + \frac{3}{5} + 0,175 + \frac{32}{75} + \frac{37}{300}}{0,128*6,25-0,0345:0,12} - \frac{(0,625 + 2\frac{17}{24}):2,5}{(1,3 + \frac{23}{30} + \frac{4}{11}) * \frac{110}{401}}.$$

13. Найдите числовые значения выражений при следующих значениях букв:

- а)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{1-2a} : \frac{1}{a} - a : \frac{1}{1+2a} + \frac{2a^2+4a^3+8a^4}{8a^3}$ , если  $a = 0,075$  ;
- б)  $\left(\frac{m-n}{m \cdot n} - \frac{3m+n}{mn+m^2} + \frac{3n+m}{mn-n^2}\right) : \frac{2m+2n}{mn}$ , если  $m = 2\frac{3}{4}$ ,  $n = \frac{1}{3}$  ;
- в)  $\frac{x+y}{x-y} : \frac{z+t}{z-t}$ , если  $x = 5\frac{1}{2}$ ,  $y = 1\frac{4}{7}$ ,  $z = 1\frac{1}{7}$ ,  $t = \frac{4}{21}$  ;
- г)  $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ , если  $x = 2,7$ ,  $y = 4,1$ ,  $z = 9,5$  ;
- д)  $\frac{x^3-1}{2x^3} : \frac{2x^2+2x+2}{5x^2}$ , если  $x = -0,25$  ;
- е)  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{2x^2-8x}$ , если  $x = -2,5$  ;
- ж)  $\frac{3a^2+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$ , если  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = 0,5$  .

14. Какие из числовых выражений не имеют значения:

- а)  $\frac{8,3 \cdot 1,2 + 4,2}{(3\frac{3}{5} - 2\frac{1}{15}) \cdot 5 - 7\frac{2}{3}}$  ; б)  $\frac{5,6 \cdot 2,1 - 11,76}{(5 - 3\frac{2}{3}) \cdot 6 - 7,9}$  ?

15. При каких значениях  $x$  не имеют значения следующие выражения:

- а)  $\frac{1}{x-3}$  ; б)  $\frac{3}{x+5}$  ; в)  $\frac{5x}{2x-5}$  ; г)  $\frac{3x}{x^2+2x+1}$  ; д)  $\frac{2x}{x^2-7x+12}$  ; е)  $\sqrt{2x-3}$  ;

16. Укажите множество допустимых значений переменной в выражениях:

- а)  $5a^2 - 7a^3 + 8$  ;
- б)  $\frac{12}{a+3}$  ;
- в)  $2\sqrt{a+3}$  ;
- г)  $\frac{13a}{2\sqrt{a+3}}$  ;

17. Найдите область определения следующих буквенных выражений:

- а)  $-3x + 7$  ; б)  $5x^2 - 3x + x^3$  ;
- в)  $\frac{7x}{x+2}$  ; г)  $\frac{x+5}{x^2-1}$  ;
- д)  $\frac{x^2+4}{x^2-4}$  ; е)  $\frac{4x^2+3}{5+x}$  ;
- ж)  $\frac{10}{(x-2)(x+1)}$  ; з)  $\frac{12x}{(3x-2) \cdot x}$  ;
- и)  $\frac{5x+2}{x^2+x-2}$  ; к)  $\frac{3x+2}{x^2-6x+9}$  ;
- л)  $\sqrt{2x-6}$  ; м)  $(\sqrt{4x-8})^2$  .

18. Найдите область определения следующих выражений:

- а)  $\frac{3}{x-y}$  ; б)  $\frac{10x}{x+y}$  ; в)  $\frac{7}{x^2-y^2}$  ;
- г)  $\frac{8x}{3x-4y}$  ; д)  $\frac{6x-5}{x^2+y^2}$  ; е)  $\sqrt{xy}$

19. Составьте выражения для решения следующих задач:

- а) площадь прямоугольника  $28 \text{ м}^2$ , а одна из его сторон  $x \text{ м}$ . Чему равен периметр прямоугольника? б) Одна машинистка печатает в час  $a$  страниц, а другая -  $b$  страниц. За какое время, работая совместно, они перепечатают рукопись, содержащую 834 страницы?

20. Существуют ли числовые значения следующих выражений, если в качестве допустимых значений результатов действий рассматривать лишь натуральные числа и нуль:
- $[(4 - 7) + 3 * 5] * (8 - 6)$ ;
  - $[(5 + 7) : 24] * 16 - 5$ ;
  - $(3 * 7 - 6 * 8) + 15 * 10$  ?
21. Является ли значение  $x = 3$  допустимым для выражения  $\frac{x^2 - 7x + 25}{x^2 - 5x + 1}$ , рассматриваемого в множестве натуральных чисел ?
22. Является ли оно в том же множестве допустимым для выражения  $\frac{x^2 + 25 - 7x}{x^2 - 5x + 1}$  ?
23. Расставьте скобки в выражении  $56 - 24 : 2 + 6$  так, чтобы его значение было равно:
- 50; б) 53; в) 38; г) 4; д) 22.
24. В магазине 4 ящика вафель и 2 ящика сливочного масла. Масса одного ящика вафель - 5 кг, масса одного ящика масла - 20 кг. Решениями каких задач могут являться следующие числовые выражения:
- $20 * 2 - 5 * 4$ ; б)  $20 * 2 : (5 * 4)$  ?
25. Чайный стакан стоит  $a$  коп., чайная ложка -  $b$  коп. У хозяйки есть  $k$  коп. Решениями каких задач могут быть следующие буквенные выражения:
- $k - (3a + 5b)$ ; б)  $(5a) : (2b)$ ; в)  $k : (a + b)$  ?
26. Велосипедист за  $t$ ч проехал  $a$ км. Длина всего маршрута  $b$ км. Составьте выражения, которые показывают:
- за какое время велосипедист проедет весь маршрут;
  - за какое время он проедет оставшуюся часть маршрута.

## § 9. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

- Найдите множество решений уравнения  $2x^2 - 7x + 4 = 0$ , если :
  - $x \in R$ ; б)  $x \in Q$ ; в)  $x \in Z$ ; г)  $x \in N$ ; д)  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ .
- Укажите множества, на которых данные уравнения равносильны:
  - $(x + 4)(x - 1) = 5(x - 1)$  и  $x + 4 = 5$ ;
  - б)  $\frac{3x+4}{(x-2)(x-3)} = 1$  и  $3x + 4 = (x - 2)(x - 3)$ ;
  - в)  $\frac{x^2}{4x^2+3} = \frac{2x+1}{4x^2+3}$  и  $x^2 = 2x + 1$ ;
  - г)  $\frac{x+2}{2x-3} = \frac{1}{2x-3}$  и  $x + 2 = 1$ .
- Будут ли равносильны следующие уравнения на множестве  $R$  всех действительных чисел? Если нет, то укажите множества, на которых они равносильны:

- а)  $10x - 2 = 4$  и  $5x - 1 = 2$ ;  
 б)  $(x - 2)(x + 3) = 0$  и  $x - 2 = 0$ ;  
 в)  $(x - 2)^2 = 3 \cdot (x - 2)$  и  $x - 2 = 3$ ;  
 г)  $\frac{x-1}{x+3} = \frac{3-x}{x+3}$  и  $x - 1 = 3 - x$ .
4. При каких значениях  $m$  данные уравнения будут равносильны на множестве действительных чисел:  
 а)  $2x + 3 = 12$  и  $2x + 3 = 12m$ ;  
 б)  $3x + 5 = 12$  и  $(3x + 5)m = 12$ ?
5. Чтобы решить уравнение  $\frac{6-x}{x-5} = 6 + \frac{1}{x-5}$ , ученик умножил обе части данного уравнения на  $x - 5$ , получил уравнение  $6 - x = 6x - 30 + 1$ , откуда нашел, что  $x = 5$ . Проверьте, является ли  $x = 5$  корнем данного уравнения. Почему данное уравнение не равносильно полученному в ходе решения?
6. Найдите значение  $m$ , если один из корней квадратного уравнения  $3x^2 - 5x + m^2 - 4 = 0$  равен нулю.
7. При каких значениях  $c$  уравнение  $x^2 = c + 2$  имеет: а) два различных действительных корня; б) два равных действительных корня; в) не имеет действительных корней?
8. При каких значениях параметров следующие уравнения имеют: 1) единственное решение; 2) бесконечное множество решений; 3) не имеет решений:  
 а)  $(x + 2)(a - 1) + 1 = a^2$ ;    г)  $a + x = a^2 \cdot x - 1$ ;  
 б)  $x = a^2x$ ;    д)  $ax - b^2 = 7$ ;  
 в)  $ax - a^2 = 4 - 2x$ ;    е)  $ax - b = 1 + x$ .
9. Решите следующие уравнения относительно переменной  $x$ :  
 а)  $x^2 - a^2 = 0$ ;    в)  $ax^2 - \frac{1}{a} = 0$ ;  
 б)  $ax^2 - 4 = 0$ ;    г)  $ax^2 = 9$ .
10. Найдите область определения и множество решений уравнений:  
 а)  $\frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^3+1}$ ;  
 б)  $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x-x^2}$ ;  
 в)  $\frac{x}{6} + \frac{x-5}{6-3x} = \frac{x}{2x-4}$ ;  
 г)  $\frac{1}{\frac{x-3}{8x}} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\frac{x^2-2x-3}{9}}$ ;  
 д)  $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x+2} = 0$ ;  
 е)  $\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2x+2} = 0$ ;  
 ж)  $\frac{2(x^2+1)}{2x-1} - \frac{4x^3-13}{4x^2-1} = 1$ .
11. Найдите множество истинности следующих одноместных предикатов:

- а)  $x^2 + 4 = 0$ ,  $X = R$ ;      ж)  $(x - 1)(x + 1) = 0$ ,  $X = Z$ ;  
 б)  $x = x$ ,  $X = N$ ;      з)  $(x - 1)(x + 1) = 0$ ,  $X = N$ ;  
 в)  $x = x$ ,  $X = Z$ ;      и)  $|x| + 1 = 5$ ,  $X = R$ ;  
 г)  $x + 1 = 2x$ ,  $X = R_+$ ;      к)  $7 + 3|x| = 22 - 2|x|$ ,  $X = R$ ;  
 д)  $x + 1 = 2x$ ,  $X = R_-$ ;      л)  $|x - 3| = 3$ ,  $X = Z$ ;  
 е)  $|x| = |x + 2|$ ,  $X = R$ ;      м)  $|2x - 5| = 1$ ,  $X = R$ .

12. Определите множества значений переменной  $x$ , на которых данные предикаты истины:

13. Существует ли такое значение  $t$ , при котором сумма дробей  $\frac{t-5}{5-3t}$  и  $\frac{t-1}{4t+1}$  равна их произведению?

14. Существует ли такое значение  $a$ , при котором сумма дробей  $\frac{a-7}{3a+5}$  и  $\frac{2a+6}{3a-1}$  равна 1?

15. Даны два уравнения с двумя переменными  $x + y = 9$  и  $x - y = 1$ . Найдите пару чисел, которая: а) является решением первого уравнения, но не является решением второго; б) является решением второго уравнения, но не является решением первого; в) является решением и первого уравнения, и второго; г) не является решением ни первого, ни второго.

16. Выясните, равносильны ли на множестве действительных чисел следующие системы уравнений:

а)  $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ 3x - 2y - 9 = 0; \end{cases}$

а)  $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$  и  $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1, \\ 3x - 2y = 9; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$  и  $\begin{cases} (x^2 + 1)(x - y) = 2(x^2 + 1), \\ 3x - 2y = 9; \end{cases}$

г)  $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$  и  $\begin{cases} (x - 1)(x - y) = 2(x - 1), \\ 3x - 2y = 9. \end{cases}$

17. Путем подбора найдите несколько решений каждого из уравнений: а)  $x - y = 5$ ; б)  $y = 3x$ ; в)  $3x - 2y = 16$ . Изобразите графически множества решений уравнений.

18. Разность двух чисел равна 10. Найдите эти числа. Сколько решений имеет задача? Можно ли сказать, что любые два числа будут решением этой задачи?

19. При каком значении  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

а) имеет бесконечное множество решений; б) не имеет решений?

20. Определите множество решений систем (конъюнкций) уравнений:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \begin{cases} 3x + y = 2, \\ 6x + 2y = 3; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 3x - 2 = y; \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 5, \\ x + y = 25; \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} 2x^2 - y = -2, \\ 3x + y = 1; \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{д)} \begin{cases} x^2 - y = 8, \\ y + 5 = 1; \end{cases} \\ \text{е)} \begin{cases} x^2 + 2y = 10, \\ x - y = -1; \end{cases} \\ \text{ж)} \begin{cases} xy = 12, \\ 3x + 2y = 12; \end{cases} \\ \text{з)} \begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = x^2 + 2x - 1; \end{cases} \end{array}$$

21. Найдите множество значений  $y \in R$ , для которых истины предикаты (где  $x \in R$ ):

- а)  $(\exists x)x^2 + y^2 = 1$ ;  
 б)  $(\exists x)xy = 1$ ;  
 в)  $(\forall x)2x + 2y = 1$ ;  
 г)  $(\forall x)xy = 0$ .

22. Найдите область допустимых значений переменной в следующих выражениях:

а)  $\frac{1}{\sqrt{x+4}}$ ; б)  $\frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ ; в)  $\frac{x+2}{\sqrt{2x-3}}$ ; г)  $\frac{\sqrt{3x+1}}{x^2-9}$ .

23. Определите истинность или ложность импликаций:

- а)  $\frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow (a \geq 0) \wedge (b \geq 0)$ ; г)  $ab \geq 0 \Rightarrow \frac{b}{a} \geq 0$ ;  
 б)  $(a \geq 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0$ ; д)  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow a < b$ .  
 в)  $\frac{b}{a} \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$ ;

24. Прочитайте следующие высказывания:

- а)  $(a \cdot b > 0) \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$ ;  
 б)  $(ab < 0) \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$ ;

и составьте высказывания, равносильные следующим:

в)  $\frac{a}{b} \geq 0$ ; г)  $\frac{a}{b} \leq 0$ ;

25. Равносильны ли данные неравенства на множестве действительных чисел? Укажите множества, на которых они равносильны:

- а)  $x^2 + 3x - 2 > 2$  и  $x^2 + 3x - 4 > 0$ ;  
 б)  $3x^2 < 6x$  и  $x < 2$ ;  
 в)  $-3x + 4 < 0$  и  $3x - 4 > 0$ ;  
 г)  $\frac{x-3}{x^2+1} > 0$  и  $x - 3 > 0$ ;  
 д)  $\frac{2x+2}{x+5} < 1$  и  $2x + 2 < x + 5$ .

26. Равносильны ли следующие неравенства: 1) на множестве действительных чисел; 2) на множестве натуральных чисел:

- а)  $2x(x^2 + 1) > 3(x^2 + 1)$  и  $2x > 8$ ;  
 б)  $\frac{2x}{x+4} > \frac{8}{x+4}$  и  $2x > 8$ ;

в)  $\frac{3x}{-x^2-1} < \frac{5}{-x^2-1}$  и  $3x > 5$ ;  
 г)  $(x-1) + \frac{1}{4-x} > \frac{1}{4-x}$  и  $x-1 > 0$ ;  
 д)  $\frac{3x+5}{x-3} > 1$  и  $3x+5 > x-3$ ?

27. Решите неравенства, множество решений отметьте на числовой оси:

а)  $4 - \frac{3}{2}x > \frac{13}{8} - \frac{1}{6}(4x-3)$ ;  
 б)  $\frac{1,3-3x}{2} + \frac{5x-0,4}{0,3} \leq \frac{1,8-8x}{1,2}$ ;  
 в)  $\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{7}{12}x - 0,3\right) < 5,8 - \left(\frac{2}{3}x + 0,6\right)$ ;  
 г)  $(0,4x - 2) - (1,5x + 1) \geq 3,6 + (-4x - 0,8)$ ;  
 д)  $\left(2\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}\right) - \left(3\frac{1}{4} - \frac{1}{3}x\right) < 8\frac{5}{8} + x + 1$ .

28. При каких значениях  $x$  дроби  $-\frac{1}{3-x}$ ,  $\frac{x^2+1}{x^2+2}$ ,  $\frac{2}{x^4+3}$  принимают положительные значения? отрицательные значения?

29. Решите неравенства относительно переменной  $x$ :

а)  $a(x+2) \cdot x - 1$ ; д)  $3x + 6 < (a+1)x + 3$ ;  
 б)  $4m^2x + 4n^2x > 10$ ; е)  $ax + 5 > 3x + 12$ ;  
 в)  $2ax + 3 > a + 6x$ ; ж)  $\frac{2x+3}{a} > b$ ;  
 г)  $ax + 3 > 2x + 7$ ; з)  $\frac{x}{m} + \frac{n^2}{m^2} < \frac{4x}{m} - \frac{n}{m^2}$ .

30. Что произойдет с совокупностью (системой) неравенств, если к ней добавить неравенство, не имеющее решения?

31. Определите множество истинности следующих предикатов:

а)  $(3x - 5 > 23 - 4x) \wedge (7x + 3 < 9x - 1)$ ;  
 б)  $(2x + 1 > 3x - 4) \vee (5x + 3 \geq 8x + 21)$ ;  
 в)  $(x - 1 > 2x - 3) \vee (4x + 5 > x + 17)$ ;  
 г)  $(5x - 2 \leq 2x + 1) \wedge (2x + 3 < 18x - 3)$ .

32. Следующие неравенства решите, используя операции дизъюнкции и конъюнкции:

а)  $x^2 + x > 0$ ; е)  $\frac{9x}{10+x} \geq 4$ ;  
 б)  $\frac{x+3}{x-5} \leq 0$ ; ж)  $|x| > 4$ ;  
 в)  $(x+1)(x-2) > 0$ ; з)  $|x-3| \leq 7$ ;  
 г)  $(x-1)(x+2) \geq x+2$ ; и)  $|2x+3| \geq 1$ ;  
 д)  $\frac{3-0,5x}{x-2} > 0$ ; к)  $\left|\frac{x}{3} + 2\right| < 3$ .

33. Найдите область допустимых значений переменной  $x$  в следующих выражениях:

$$a) \sqrt{\frac{x-2}{4+x}};$$

$$б) \sqrt{\frac{2x}{1-3x}};$$

$$в) \frac{\sqrt{5-10x}}{\sqrt{x+7}};$$

$$г) \sqrt{x^2 - 9};$$

$$д) \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+3};$$

$$е) \frac{\sqrt{(x-2)(x+4)}}{x^2+4}.$$

34. Решите неравенства:

$$a) \frac{x^2-4}{x^2-9} \geq 0;$$

$$б) \frac{x^2+x-2}{x^2-x+12} \geq 0;$$

$$в) x^2 \geq 0;$$

$$г) \frac{x^2-6x+5}{x^2-4} \geq 0;$$

$$д) \frac{x^3-8}{x^2-1} \geq 0;$$

$$е) \frac{x^2-7}{x^3+8} \leq 0;$$

$$ж) \frac{x^2-9}{x^2-3x-4} < 0;$$

$$з) \frac{x^2-2x+1}{x^2-x+2} \leq 0;$$

$$и) \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+8} \geq 0;$$

$$к) \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1} > 0.$$

35. При каких значениях  $m$  уравнение  $\frac{2mx+7+3m}{2} = 5m - 2x$  имеет положительное решение?

36. При каких значениях  $a$  уравнение  $\frac{2ax+4+3a}{2} = 5a - 2x$  имеет решение  $x > 1$ ?

37. При каких значениях  $n$  уравнение  $n(x-1) + 3 = 4$  имеет решение  $x < 3$ ?

38. При каких значениях  $a$  уравнение  $\frac{2a+5}{3} = \frac{5ax+1}{4}$  имеет отрицательное решение?

39. Определите, при каких значениях  $a$  множество решений уравнения  $(x-1)(a-2) = 1$  будет заключено в промежутке от 1 до 2.

40. Определите, при каких значениях переменной  $x$  данные предикаты истинны:

$$a) 2x^2 - 3x - 2 < 0;$$

$$г) x(x+5) \leq 2(x^2+2);$$

$$б) -25x^2 + 10x - 1 \leq 0;$$

$$д) 1 - 4x + 4x^2 > 0.$$

$$в) 2x(x-2) > -7;$$

## § 10. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. Бригада должна выполнить заказ за 12 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 25%, бригада за 10 дней работы не только выполнила заказ, но ещё изготовила сверх нормы 42 детали. Сколько деталей в день изготовляла бригада?
2. От пристани А отошел катер по направлению к пристани В. Через 40 мин после этого от той же пристани А отошла моторная лодка, скорость которой на 6 км/ч больше скорости катера. К пристани В

моторная лодка подошла на 10 мин позже, чем катер. Расстояние между пристанями ровно 90 км. Найдите скорость катера и скорость моторной лодки.

3. 3.49. Расстояние между населёнными пунктами А и В равно 14 км. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу. После встречи один из них прошёл остаток пути за 2 ч 40 мин, а второй – за 1,5 ч. Найдите скорость каждого пешехода.
4. Выполнение задания было поручено двум бригадам. После того, как первая бригада проработала 2 дня, к работе приступила вторая бригада, и через  $1\frac{3}{4}$  дня они вместе выполнили задание. За сколько дней это задание могла бы выполнить каждая бригада, работая отдельно, если первой потребуется для этого на 2 дня меньше?
5. Турист, проплыв по течению реки на плоту 12 км, возвратился обратно на лодке, скорость которой в стоячей воде 5 км/ч. Найдите скорость течения реки, если известно, что на всё путешествие турист затратил 10 ч.
6. Дачник, пройдя первый час со скоростью 3,5 км/ч, рассчитал, что, двигаясь с такой скоростью, он опоздает на поезд на 1 ч. Поэтому оставшийся путь он прошёл со скоростью 5 км/ч и пришёл на станцию за 30 мин до отхода поезда. Определите, какой путь должен был пройти дачник.
7. Одна мастерская должна сшить 810 костюмов, другая за этот же срок – 900 костюмов. Первая закончила выполнение заказа за 3 дня до срока, а вторая – за 6 дней до срока. По сколько костюмов в день шила каждая мастерская, если вторая шила в день на 4 костюма больше первой?
8. Расстояние между городами А и В равно 150 км. Из города А в город В отправляются одновременно два автомобиля. Первый делает в час на 10 км больше второго и прибывает в город В на 30 мин раньше второго. Определите скорость каждого автомобиля.
9. С двух станций А и В, находящихся друг от друга на расстоянии 400 км, навстречу один другому идут два поезда. Если бы поезд со станции А на 1 ч раньше другого, то встреча их произошла бы на середине пути. Если бы они вышли одновременно, то через 4 ч расстояние между ними было бы равно 40 км. Определите скорости поездов.
10. В бассейн проведены 2 трубы. Первой трубой он наполняется на 12 ч скорее, чем второй. После того как первая труба действовала 10 ч, её закрыли и открыли вторую, которая наполнила остальную часть бассейна за 16 ч. За сколько часов каждая труба, действуя отдельно, может наполнить пустой бассейн?
11. Бригада строителей обязалась сдать в эксплуатацию объект на 4 дня быстрее, чем другая бригада, работающая на таком же объекте. За

сколько дней может каждая бригада построить объект, если, работая до этого совместно, за 24 дня они построили 5 таких объектов?

12. Для перевозки 180 туристов было заказано несколько автобусов. Но так как к назначенному сроку 2 автобуса не прибыли, а туристов приехало на 8 человек больше, чем ожидалось, то в каждом автобусе разместилось на 17 человек больше, чем предполагалось. Сколько туристов ехало в каждом автобусе?
13. Из старинной китайской арифметики Кин-Чанг. В клетку посажены кролики и фазаны. У животных вместе 35 голов и 94 ноги. Сколько было кроликов и сколько фазанов?
14. Из сборника, приписываемого Алкуину. Собака гонится за зайцем. Заяц впереди собаки на 150 футов. Заяц делает прыжок в 7 футов, в то время как собака прыгает на 9 футов. Через сколько прыжков собака догонит зайца?
15. Бамбук высотой в 10 футов переломлен на некоторой высоте; конец его касается земли на расстоянии 3 футов от основания бамбука. На какой высоте переломлен бамбук?
16. Из греческих эпиграмм, собранных Максимом Планудом (около 1300г.). Четыре фонтана дано. Обширный дан водоём. За сутки первый фонтан до краёв его наполняет. Два дня и две ночи второй над этим должен работать, третий втрое, чем первый, слабей. В четверо суток последний за ними едва поспевает. Ответь мне, скоро ли будет он полон, если сразу все их открыть?
17. Пифагор на вопрос Поликарпа о числе учеников ответил так  
«Их половина себя посвящает прекрасной науке  
И математику здесь изучает. Природы бессмертной  
Четверть познанию себя отдаёт. Часть же седьмая в молчаньи  
Время проводит, отдавши себя размышленьям. Три девы  
Есть ещё в доме моём; средь них всех мудрее Теано».  
Сколько учеников было у Пифагора?
18. Из «Арифметики» Луки Пачиоло (1494 г.). На верхушке дерева, высоту в 60 локтей, сидит мышь, а внизу сидит кошка. Мышь каждый день спускается на  $\frac{1}{2}$  локтя, а ночью поднимается вновь на  $\frac{1}{6}$  локтя. Кошка влезает каждый день на локоть, а каждую ночь спускается на  $\frac{1}{4}$  локтя. Дерево ежедневно вырастает на  $\frac{1}{4}$  локтя и каждую ночь укорачивается на  $\frac{1}{8}$  локтя. Когда достигнет мышь кошка и какой высоты станет дерево за это время?
19. Старый араб имел трёх сыновей и владел 17 верблюдами. Умирая, он завещал младшему сыну половину, среднему  $\frac{1}{3}$  часть и, наконец, старшему  $\frac{1}{9}$  часть своего имущества. Когда отец умер и дети стали делить наследство, то никак не могли этого сделать. Наконец один из

них предложил: пойдём к соседу и займём у него верблюда, тогда у нас будет 18 верблюдов; первый получит половину, т.е. 9 верблюдов, второй  $\frac{1}{3}$ , т.е. 6 верблюдов, а третий  $\frac{1}{9}$  часть, т.е. 2 верблюда. Таким образом, останется один верблюд, которого мы и отдадим назад соседу. Правильно ли разделили наследство?

- 20.** Из «Курса чистой математики» Ефима Войтяховского. Некто нанял слугу на год с условием дать ему 42 рубля да пару платья; но слуга, прожив 7 месяцев, служить больше не захотел и по расчету получил от хозяина только 5 руб. 60 коп. да пару платья. Спрашивается цена платья.
- 21.** Задача Ньютона. Трава на всём лугу растёт одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы её за 24 дня, а 30 коров – за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней?
- 22.** Задача Эйлера. Решив все свои сбережения поделить поровну между всеми своими сыновьями, некто составил такое завещание: «Старший из моих сыновей должен получить 1000 руб. и  $\frac{1}{8}$  остатка, следующий – 2000 руб. и  $\frac{1}{8}$  нового остатка, третий сын – 3000 руб. и  $\frac{1}{8}$  часть третьего остатка и т. д. Определите число сыновей и размер завещанного сбережения».
- 23.** Задачи из «Арифметики» Л. Н. Толстого. Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Три дома нельзя было делить, их взяли старшие три брата. А меньшим за то выделили деньги. Каждый из них заплатил по 800 руб. младшим. Меньшие разделили эти деньги между собой, и тогда у всех братьев стало поровну. Много ли стоили дома?

Учебное издание

**МАТЕМАТИКА**

Методические рекомендации

В 2 частях

Часть 2

Составители:

**УСТИМЕНКО** Владимир Викторович

**ТИТОВА** Татьяна Васильевна

Технический редактор

*Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн

*Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать .2015. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,90. Уч.-изд. л. 3,18. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования  
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования  
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.