Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова, С.В. Шерегов

С Б О Р Н И К
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ
ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2015

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 03.03.2015 г.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова;** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.В. Шерегов**

Р е ц е н з е н т :
доцент кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук
С.А. Шлапаков

Сурин, Т.Л.

С90 Сборник практических заданий по дополнительным главам математического анализа / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова, С.В. Шерегов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2015. – 52 с.

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика». Предлагаемое издание содержит разбор наиболее типичных примеров, демонстрирующих применение на практике результатов теории, вопросы по теоретическому материалу, задания для аудиторной и домашней работы, задания для самостоятельной работы.

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика».

Основное назначение задачника-практикума – помочь студентам математических специальностей в освоении курса «Дополнительные главы математического анализа». По этой дисциплине существует ряд хороших задачников, список которых приведен в конце пособия. Однако, из-за слишком большого объема в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал для подготовки к экзамену. Кроме того, имеющиеся сборники задач не дают возможности индивидуализировать процесс обучения, поскольку не содержат достаточного количества однотипных задач.

Весь материал разбит на 14 параграфов, что в среднем соответствует количеству часов, предусмотренных учебной программой на проведение практических занятий по данной теме. Каждый параграф состоит из 3 пунктов. В пункте I – «Контрольные вопросы и задания» – содержатся вопросы по теоретическому материалу. Цель этого раздела – помочь студенту самостоятельно разобраться в теоретическом материале, выделить наиболее важные места, без которых невозможно осмысленное решение задач. В пункте II – «Примеры решения задач» – разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. Эти два пункта студенты должны разобрать самостоятельно при подготовке к практическому занятию по данной теме. В пункте III – «Задачи и упражнения для практических занятий» – приведены задания для аудиторной и домашней работы.

Материал, приведенный в пособии, соответствует учебным программам по курсу «Дополнительные главы математического анализа» для вышеперечисленных специальностей.

Пособие может быть полезно для студентов других специальностей, изучающих высшую математику.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Введите понятие криволинейного интеграла первого рода.
2. Зависит ли криволинейный интеграл первого рода от направления на кривой?
3. Сформулируйте основные свойства криволинейного интеграла первого рода.
4. В чем состоит геометрический и физический смысл криволинейного интеграла первого рода?
5. Запишите формулы для нахождения криволинейного интеграла первого рода при различном задании кривой на плоскости и в пространстве.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти интеграл $\int\limits_C x^2 y\, ds$ вдоль отрезка прямой, соединяющей начало координат и точку с координатами (2, 2).

Решение. Прямая, проходящая через точки (0, 0) и (2, 2), задается явно уравнением $y = x$, $(0 \le x \le 2)$. Интеграл находим по формуле $\int\limits_C F(x, y)\, ds = \int\limits_a^b F(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$, где $y(x) = x$, $y'(x) = 1$.

Тогда $\int\limits_C x^2 y\, ds = \int\limits_0^2 x^2 \cdot x\sqrt{2}dx = \sqrt{2}\int\limits_0^2 x^3\, dx = \left.\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^4\right|_0^2 = 4\sqrt{2}$.

***Пример* 2.** Найти интеграл $\int\limits_C y^2\, ds$, где $C-$ дуга окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Кривая задана параметрически, следовательно, дифференциал дуги кривой находится по формуле $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$. В нашем случае $ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\, dt = a\, dt$.

Для нахождения криволинейного интеграла применим формулу $\int\limits_C F(x, y)\, ds = \int\limits_a^b F(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$. Получим

$$\int\limits_C y^2\, ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t \cdot a dt = a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3\pi}{4}.$$

***Пример* 3.** Найти длину дуги винтовой линии, заданной параметрически уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Длина дуги кривой находится по формуле $s = \int\limits_C ds$. Формула для нахождения дифференциала дуги имеет вид $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ dt$. Для данной кривой $ds = \sqrt{(\cos t)'^2 + (\sin t)'^2 + (t)'^2}\ dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\ dt = \sqrt{2}\ dt$.

Тогда $s = \int\limits_C ds = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{2}\pi$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

Вычислить данные криволинейные интегралы первого рода

1. $\int\limits_C \frac{ds}{y - x}$, где кривая C – отрезок прямой от точки (0, -2) до точки (4, 0).
2. $\int\limits_C xyds$, где C – контур треугольника с вершинами O (0, 0), A (4, 0), D (0, 4).
3. $\int\limits_C yds$, где C – дуга астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, заключенная между точками A (1, 0), B (0, 1).
4. $\int\limits_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2})ds$, где C – первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.
5. $\int\limits_C \sqrt{2y}ds$, где кривая C – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
6. $\int\limits_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x} ds$, где кривая C – дуга кардиоиды $\rho = (1 + \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.
7. $\int\limits_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x} ds$, где кривая C – дуга кривой $\rho = 9\sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

8. Найти длину дуги цепной линии $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 1$.

9. Найти длину дуги кривой $x = 4 - \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^6}{6}$, $0 \le t \le 2$.

10. Найти массу дуги кривой $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки.

11. Найти массу и координаты центра масс дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 1$, линейная плотность которой $\rho = y\sqrt{1+x}$.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Введите понятие криволинейного интеграла второго рода.
2. Зависит ли криволинейный интеграл второго рода от направления на кривой?
3. Сформулируйте основные свойства криволинейного интеграла второго рода.
4. В чем состоит геометрический и физический смысл криволинейного интеграла первого рода?
5. Запишите формулы для нахождения криволинейного интеграла второго рода при различных способах задания кривой на плоскости и в пространстве.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C \frac{y}{x}dx + dy$ вдоль кривой $y = \ln x$ на интервале $1 \le x \le e$.

Решение. Кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, поэтому для нахождения этого интеграла воспользуемся формулой

$$\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x))dx.$$

Тогда

$$\int\limits_C \frac{y}{x}dx + dy = \int\limits_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx + \int\limits_1^e \frac{1}{x}dx = \int\limits_1^e \ln x\, d(\ln x) + \ln x\Big|_1^e =$$

$$= \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_1^e + \ln x\Big|_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} + \ln e - \frac{\ln^2 1}{2} - \ln 1 = \frac{3}{2}.$$

***Пример* 2.** Вычислить интеграл $\int\limits_C (y^2+z^2)dx - yzdy + xdz$, где кривая С – дуга винтовой линии $x = t$, $y = 2\cos t$, $z = 2\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Кривая задана параметрически, следовательно, формула для нахождения криволинейного интеграла второго рода имеет вид

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

Поскольку $dx = dt$, $dy = -2\sin t\, dt$, $dz = 2\cos t\, dt$, то

$$\int\limits_C (y^2+z^2)dx - yzdy + xdz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4(\cos^2 t + \sin^2 t) - 4\cos t \cdot \sin t \cdot (-2\sin t) + 2t\cos t)dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, d\sin t + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt = \left(4t + 8\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt.$$

Интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt$ находится методом интегрирования по частям. Воспользуемся формулой $\int\limits_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\, du$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt = \begin{vmatrix} u = t, & du = dt \\ dv = \cos t\, dt, & v = \sin t \end{vmatrix} = t \cdot \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Тогда

$$\int\limits_C (y^2+z^2)dx - yzdy + xdz = 2\pi + \frac{8}{3} + \pi - 2 = 3\pi + \frac{2}{3}.$$

***Пример* 3.** Вычислить работу A силы $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ вдоль отрезка прямой BC от точки B (1, 1, 1) до точки C (2, 3, 4).

Решение. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) с направляющим вектором $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3), имеют вид $x = x_0 + a_1 t$, $y = y_0 + a_2 t$, $z = z_0 + a_3 t$. В нашем случае: $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + 3t$, $0 \le t \le 1$.

Тогда работа A силы $\vec{F}$ находится по формуле

$$A = \int\limits_{BC} yzdx + xzdy + xydz =$$

$$= \int\limits_0^1 ((1+2t)(1+3t) + 2(1+t)(1+3t) + 3(1+t)(1+2t))dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (18t^2 + 22t + 6)dt = 23.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

Найти криволинейный интеграл второго рода

1. $\int\limits_C xdy - ydx$ вдоль кривой C, заданной уравнением $y = x^3$ от точки (0, 0) до точки (2, 8).

2. $\int\limits_C \sqrt{x}dx - \sqrt{y}dy$ вдоль кривой $y = x^2$ от точки O(0, 0) до A(1, 1).

3. $\int\limits_C y^2dx + xydy$, где C – дуга эллипса, заданного параметрически уравнениями $x = a\cos t, y = b\sin t$, $0 \le t \le \pi$.

4. $\int\limits_C x^2dx + xydy$, где C – дуга окружности радиуса a, лежащая в первом квадранте (направление обхода – против часовой стрелки).

5. $\int\limits_{AB} xdx + ydy + (x + y - z)dz$ где AB – отрезок прямой от точки A(1, 1, 1) до точки B(2, 3, 4).

6. $\int\limits_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где C – окружность радиуса a, пробегаемая против часовой стрелки.

7. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + 2y\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ против часовой стрелки.

8. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = y^2\vec{i} - xy\vec{j} + yz\vec{k}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le \pi$.

ФОРМУЛА ГРИНА

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Запишите формулу Грина. В каком случае она применяется?

2. Сформулируйте теорему о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Используя формулу Грина, найти интеграл $\int\limits_C (x-y)dx+(x+y)dy$, где C представляет собой окружность, заданную уравнением $x^2+y^2=a^2$.

Решение. Формула Грина имеет вид

$$\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

где D – область ограниченная замкнутой кривой C.

В нашем случае: $P(x,y)=x-y$, $Q(x,y)=x+y$, тогда $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(x+y)}{\partial x}=1$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(x-y)}{\partial y}=-1$. Следовательно,

$$\int\limits_C (x-y)dx+(x+y)dy = \iint\limits_D 2\,dxdy,$$

где область D – круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=a^2$. Учитывая, что интеграл $\iint\limits_D dxdy$ равен площади области D, т.е. πa^2, получим $\int\limits_C (x-y)dx+(x+y)dy = 2\pi a^2$.

***Пример* 2.** Показать, что дифференциальное выражение $\frac{x}{y}dy+\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y\right)dx$ является полным дифференциалом некоторой функции $u\,(x,y)$ и найти эту функцию.

Решение. $Q(x,y)=\frac{x}{y}$, $P(x,y)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y$.

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y}$, то по теореме о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования во всех точках плоскости XOY, за исключением точек, лежащих на координатных осях, данное дифференциальное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u\,(x,y)$. Эта функция может быть найдена по формуле $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$, где точки

M_0 $(x_0, y_{0)})$ и M (x, y) произвольные точки плоскости XOY, не лежащие на координатных осях. В качестве точки M_0 можно взять, например, точку (1, 1).

$$u\,(x,\,y) = \int_1^x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln 1 \right) dx + \int_1^y \frac{x}{y}\,dy \;=$$

$$\left(\operatorname{arctg} x - \ln|x|\right)\Big|_1^x + x\ln|y|\,\Big|_1^y + C = \operatorname{arctg} x - \ln|x| + x\ln|y| + C.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Выполняется ли формула Грина для интеграла $\int\limits_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где C– окружность радиуса a, пробегаемая против часовой стрелки.

Используя формулу Грина, найти интегралы

2. $\oint\limits_C yx^2dx - xy^2dy$, где С – окружность $x^2 + y^2 = a^2$, обход которой производится против часовой стрелки.

3. $\oint\limits_C (x+y)\,dx - (x-y)dy$, где С – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. $\oint\limits_C y^2\,dx + (x+y)^2dy$, где контур С представляет собой треугольник ABD с вершинами в точках $A(a, 0)$, $B(a, a)$, $D(a, a)$.

5. $\oint\limits_C e^x(1-\cos y)dx - e^x(1-\sin y)dy$, где C - пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$.

6. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} 2xy\,dx + x^2dy$ вдоль указанных линий: *а*) $y = x$, *б*) $y = x^2$, *в*) $y = \sqrt{x}$, *г*) $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$, где A (0, 0), B (1, 1).

Проверить, является ли выражение полным дифференциалом некоторой функции u (x, y) и найти эту функцию.

7. $du = (y^2e^{xy} - 3)\,dx + e^{xy}(1+xy)dy$.

8. $du = (2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$.

ПОВЕРХНОСТЬ. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение: а) простой поверхности; б) поверхности.

2. Назовите способы задания поверхности и приведите примеры. Запишите формулы для нахождения вектора нормали и уравнения касательных плоскостей к поверхностям, заданным различными способами.

3. Какая поверхность называется: а) регулярной; б) гладкой?

4. Какая точка поверхности называется особой?

5. Дайте определение площади поверхности. Какая поверхность называется квадрируемой? Запишите формулы для нахождения площадей поверхностей, заданных различными способами.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти направляющие косинусы вектора нормали и записать уравнение касательной плоскости к следующим поверхностям:

а) $z = x^2 + 2y^2$ в точке M_0 (1, 0, 1);

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ в точке $M_0(\sqrt{3}, 2, 3)$;

в) $x = 2\cos\theta\cos\varphi$, $y = 4\cos\theta\sin\varphi$, $y = \sqrt{2}\sin\theta$ в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение. *а*) Направляющими косинусами вектора нормали к поверхности называют координаты единичного вектора нормали.

Так как поверхность $z = x^2 + 2y^2$ задана явно, то вектор нормали к данной поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет координаты $\overrightarrow{N} = \left(z'_x(M_0),\ z'_y(M_0), -1\right)$.

В нашем случае $z'_x(M_0) = 2x\big|_{x=1} = 2$, $z'_y(M_0) = 2y\big|_{y=0} = 0$, т.е. $\overrightarrow{N} = (2,\ 0, -1)$. Длина вектора $\overrightarrow{N}$ равна $\sqrt{5}$, тогда единичный вектор нормали имеет вид $\vec{n} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ 0, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности, имеет вид

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка касания, A, B, C – координаты вектора нормали $\overrightarrow{N}$ к поверхности в точке M_0.

Подставив найденные значения в формулу, получим: $2(x-1)-(z-1)=0$ или $2x-z-1=0$.

б) Так как поверхность $x^2+y^2+z^2=16$ задана неявно, то вектор нормали к данной поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет координаты $\overrightarrow{N} = \left(F'_x(M_0),\ F'_y(M_0), F'_z(M_0)\right)$, где $F(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-16$,

$F'_x(M_0) = 2x\big|_{x=\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, $F'_y(M_0) = 2y\big|_{y=2} = 4$, $F'_z(M_0) = 2z\big|_{z=3} = 6$,

т.е. $\overrightarrow{N} = \left(2\sqrt{3},\ 4, 6\right)$. Длина вектора $\overrightarrow{N}$ равна 8, тогда единичный вектор нормали: $\vec{n} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$, следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}, \cos\beta = \frac{1}{2}, \cos\gamma = \frac{3}{4}.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_0 имеет вид $2\sqrt{3}\,(x-\sqrt{3})+4(y-2)+6(z-3)=0$. Раскрывая скобки, получим $2\sqrt{3}\,x+4y+6z-32=0$.

в) Если поверхность заданна с помощью векторной функции

$$\vec{r} = \vec{r}\,(\varphi, \theta) = \vec{r}\,(x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta)), \quad (\varphi, \theta) \in D,$$

то вектор нормали к поверхности в точке $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ равен векторному произведению векторов $\vec{r}_\varphi$ и $\vec{r}_\theta$, $\overrightarrow{N} = \left[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\theta\right]$, где

$$\left[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\theta\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_\varphi & z_\varphi \\ y_\theta & z_\theta \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z_\varphi & x_\varphi \\ z_\theta & x_\theta \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_\varphi & y_\varphi \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}.$$

Запишем уравнение поверхности

$$x = 2\cos\theta\,\cos\varphi, y = 4\cos\theta\,\sin\varphi, z = \sqrt{2}\sin\theta$$

в векторной форме: $\vec{r} = 2\cos\theta\,\cos\varphi\,\vec{i} + 4\cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{j} + \sqrt{2}\sin\theta\,\vec{k}$, тогда

$$\vec{r}_\varphi = -2\cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{i} + 4\cos\theta\,\cos\varphi\,\vec{j},\ \vec{r}_\varphi\,(M_0) = -\vec{i} + 2\vec{j},$$

$$\vec{r}_\theta = -2\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} - 4\sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{j} + \sqrt{2}\cos\theta\,\vec{k},\ \vec{r}_\theta\,(M_0) = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Находим координаты вектора $\overrightarrow{N}$ в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

$$\overrightarrow{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Так как $|\overrightarrow{N}| = \sqrt{21}$, то $\vec{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$, следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{21}}, \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Запишем уравнение касательной плоскости в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Для этого найдем декартовы координаты точки:

$$x_0 = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 1,\ y_0 = 4\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 2,\ z_0 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1.$$

Уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид

$$2(x-1) + (y-2) + 4(z-1) = 0 \text{ или } 2x + y + 4z - 8 = 0$$

***Пример* 2.** Найти площадь части параболоида $z = x^2 + y^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Если поверхность Φ задана явно уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, то площадь поверхности можно найти по формуле

$$S = \iint_D \sqrt{{z'_x}^2 + {z'_y}^2 + 1}\, dxdy.$$

Следовательно, площадь части параболоида находится с помощью двойного интеграла $S = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy$, где $D -$ круг $x^2 + y^2 \le a^2$.

$$S = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \end{vmatrix} =$$

$$= \iint_G \sqrt{4r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi + 1} \cdot r\, drd\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \cdot \sqrt{4r^2 + 1}\, dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{4r^2 + 1}\, dr^2 =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (4r^2+1)^{\frac{1}{2}}\, d(4r^2+1) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} (4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{(4a^2+1)^3} - 1\right).$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти направляющие косинусы вектора нормали и записать уравнение касательной плоскости к следующим поверхностям в указанной точке M_0:

а) $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, -2, 5)$;

б) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ в точке $M_0(1, 1, \sqrt{2})$

в) $z = e^{x\cos y}$ в точке $M_0(1, 0, e)$;

г) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{8} = 4$ в точке $M_0(4, 3, 4)$;

д) $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ в точке $M_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$;

е) $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$ в точке $M_0(2, 1, -1)$;

ж) $x = u + v, y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3$ в точке $M_0(u = 2, v = 1)$;

з) $x = u\cos v, y = u\sin v,\ z = v$ в точке $M_0(u = 1, v = \frac{\pi}{4})$;

k) $x = u, y = u^2 - 2uv,\ z = 3 - 3u^2 v$ в точке $M_0(1, 3, 4)$.

2. Найти площадь

а) части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, заключённой внутри конуса $z^2 = x^2 + y^2$;

б) части поверхности $z = xy$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$;

в) части цилиндра $x^2 + z^2 = 4$, заключённой внутри цилиндра $y^2 + z^2 = 4$.

3. Пользуясь параметрическим заданием поверхности, вычислить площадь

а) части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + z^2 = 4$;

б) части геликоида $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h\varphi$, $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

в) части цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, вырезанной плоскостями $x + z = 0$, $x - z = 0$, $x > 0$, $y > 0$;

г) части поверхности тора $x = (a + b\cos u)\cos v$, $y = (a + b\cos u)\sin v$, $z = b\sin u$ $0 < b < a$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение поверхностного интеграла первого рода.
2. Запишите формулы для нахождения дифференциала поверхности: а) для поверхности, заданной параметрически; б) для поверхности, заданной явно.
3. Запишите формулы вычисления поверхностного интеграла первого рода с помощью двойного интеграла в случае различных способов задания поверхности.
4. Как вычислить площадь поверхности с помощью поверхностного интеграла первого рода?
5. Перечислите физические приложения поверхностного интеграла первого рода и приведите соответствующие формулы.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\Phi} \sqrt{x^2 + y^2}\, dS$, где Φ – часть поверхности конуса, заданного уравнением $z = \dfrac{3}{4}\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 3$.

Решение. Если поверхность Φ, заданная явно уравнением $z = z(x, y)$, однозначно проектируется в область D плоскости XOY, то поверхностный интеграл можно найти по формуле:

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy.$$

Найдем $z_x' = \dfrac{3x}{4\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z_y' = \dfrac{3y}{4\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$$dS = \sqrt{1 + \frac{9x^2}{16(x^2 + y^2)} + \frac{9y^2}{16(x^2 + y^2)}}\, dxdy = \frac{5}{4}\, dxdy.$$

Проекцией D поверхности Φ на плоскость $XOУ$ является круг $x^2 + y^2 \le 16$. Тогда

$$\iint\limits_{\Phi} \sqrt{x^2+y^2}\, dS = \frac{5}{4}\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 4 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{5}{4}\iint\limits_{G} \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \cdot r\, drd\varphi = \frac{5}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 r^2 dr = \frac{160\pi}{3}.$$

***Пример* 2.** Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Phi} \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где Φ – часть цилиндрической поверхности $x = a\cos u, y = a\sin u, z = v$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 1$.

Решение. Запишем поверхность в векторном виде

$$\vec{r} = a\cos u\ \vec{i} + a\sin u\ \vec{j} + v\ \vec{k}$$

и воспользуемся формулой

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

где $E = \vec{r}_u^{\ 2}$, $F = \vec{r}_u\vec{r}_v$, $G = \vec{r}_v^{\ 2}$.

Найдем $\vec{r}_u = -a\sin u\ \vec{i} + a\cos u\ \vec{j}$, $\vec{r}_v = \vec{k}$,

$E = \vec{r}_u^{\ 2} = a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u = a^2$, $F = \vec{r}_u\vec{r}_v = 0$, $G = \vec{r}_v^{\ 2} = 1$,

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, dudv = a\, dudv.$$

Поэтому

$$\iint\limits_{\Phi} \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iint\limits_{D} \frac{a\, dudv}{\sqrt{a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u + v^2}} =$$

$=$

$$= a\int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_0^1 \frac{adv}{\sqrt{a^2+v^2}} = a\int\limits_0^{2\pi} \left(\ln(v + \sqrt{a^2+v^2})\right)\Big|_0^1 du = 2\pi a \ln\frac{1+\sqrt{a^2+1}}{a}.$$

***Пример* 3.** Вычислить массу полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \ge 0$), если поверхностная плотность в каждой её точке задается формулой $\mu = x^2 + y^2$.

Решение. Массу поверхности можно найти по формуле

$$m = \iint\limits_{\Phi} \mu(x, y, z)\, dS.$$

Так как полусфера задана для $z \ge 0$, то ее можно задать явно формулой $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Проекцией D полусферы на плоскость XOY является круг $x^2 + y^2 \le a^2$. Тогда

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy,$$

$$m = \iint_{\Phi} (x^2 + y^2)\, dS = a \iint_{D} \frac{(x^2 + y^2) dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le a \end{matrix} \right| = a \iint_{G} \frac{r^3 dr d\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r^3 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \sqrt{a^2 - r^2},\quad t(0) = a,\ t(a) = 0, \\ r = \sqrt{a^2 - t^2},\ dr = -\dfrac{t\, dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \end{matrix} \right| = -a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^0 (a^2 - t^2) dt =$$

$$= -a \int_0^{2\pi} (a^2 t - \frac{t^3}{3}) \Big|_a^0 d\varphi = \frac{4a^4 \pi}{3}.$$

Замечание. Полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \ge 0$) можно также задать параметрически уравнениями: $x = a\cos\varphi \sin\theta$, $y = a\sin\varphi\sin\theta$, $z = a\cos\theta$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Тогда задача решается аналогично примеру 2.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint_{\Phi} xy\, dS$, где Φ – часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащей в первом октанте;

б) $\iint_{\Phi} (x + 2z)\, dS$, где Φ – часть плоскости $6x + 3y + 2z = 6$, лежащей в первом октанте;

в) $\iint_{\Phi} (x^2 + y^2)\, dS$, где Φ – поверхность куба $|x| \le a$, $|y| \le a$, $|z| \le a$;

г) $\iint\limits_{\Phi} \dfrac{dS}{(1-x-y)^2}$, где Φ – поверхность тетраэдра $x + y + z \le 1$, $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;

д) $\iint\limits_{\Phi} z\, dS$, где Φ – часть параболоида $z = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$;

е) $\iint\limits_{\Phi} \sqrt{x^2+y^2}\, dS$, где Φ – часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z \le 1$;

ж) $\iint\limits_{\Phi} z^2\, dS$, где Φ – часть конической поверхности $x = u\cos v \sin\alpha,\ y = u \sin v\ \sin\alpha,\ z = u\ \cos\ \alpha,$ (α – const, $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le v \le 2\pi,\quad 0 \le u \le 1$);

з) $\iint\limits_{\Phi} (z+1)\, dS$, где Φ – часть поверхности тора $x = (a + b\cos u)\cos v,\quad y = (a + b\cos u)\sin v,\quad z = b\sin u$, ($b < a,\ 0 \le u \le\ 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi$);

к) $\iint\limits_{\Phi} (x^2+y^2)\, dS$, где Φ – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2. Вычислить массу

а) цилиндрической поверхности $y^2 + z^2 = 9$, отсеченной плоскостями $x = 0,\ x = y$, ($x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$), если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu = z$.

б) поверхности $z = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu = \sqrt{x^2+y^2}$;

в) полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu = xy$.

3. Определить статический момент относительно оси $z = 0$ однородной поверхности $x + y + z = a,\ \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

4. Определить координаты центра масс однородных поверхностей:

а) $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z \le 1$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Какая поверхность называется: а) двусторонней, б) односторонней? Приведите примеры односторонних и двухсторонних поверхностей.

2. Дайте определение ориентируемой поверхности. Что называется ориентацией поверхности?

3. Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$. Укажите координаты вектора $\overline{N}(M)$, определяющего верхнюю сторону поверхности и координаты вектора $\overline{N}(M)$, определяющего нижнюю сторону поверхности.

4. Найдите непрерывное векторное поле единичных нормалей, определяющее внешнюю сторону полусферы $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

5. Пусть поверхность задана параметрически. Какие координаты имеет вектор $\overline{N}(M)$, определяющий одну из сторон поверхности.

6. Найдите непрерывное векторное поле единичных нормалей, определяющее внешнюю сторону сферы $x = a\cos u \sin v$, $y = a\sin u \sin v$, $z = a\cos v$ $(u,v) \in G = \{(u,v): 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le \pi\}$.

7. Сформулируйте определение поверхностных интегралов второго рода. Как они обозначаются? Приведите различные формы записи этих интегралов.

8. Зависит ли от ориентации поверхности: а) поверхностный интеграл первого рода; б) поверхностный интеграл второго рода?

9. Каков физический смысл поверхностного интеграла второго рода?

10. Приведите формулы сведения поверхностного интеграла второго рода к двойному в случае, если поверхность задана: а) параметрически; б) явно.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить $I = \iint\limits_{\Phi} z dydz + (x + y)dxdz + ydxdy$, где Φ – внешняя сторона пирамиды, отсечённой координатными плоскостями и плоскостью $2x + y + 2z = 2$.

Решение. Поверхность пирамиды (рисунок 1) состоит из четырёх граней: $AOC = \Phi_1$, $AOB = \Phi_2$, $BOC = \Phi_3$, $ABC = \Phi_4$. Следовательно, интеграл I равен сумме четырёх интегралов по частям Φ_i ($i = \overline{1,4}$).

1) Грань AOC лежит в плоскости $z = 0$, единичный вектор нормали к этой грани имеет координаты $n_1 = -\vec{k} = (0, 0, -1)$.

При вычислении интеграла воспользуемся формулой

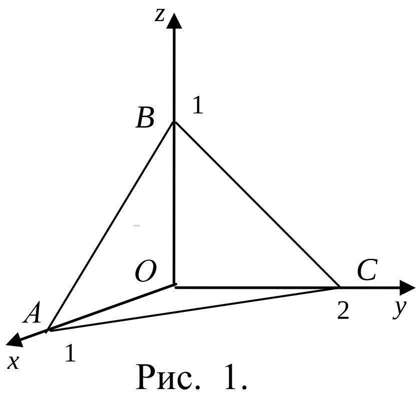

Рис. 1.

$$\iint\limits_{\Phi} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\Phi} (\overline{a}, \overline{n})dS,$$

где $\overline{a} = (P, Q, R)$, $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор нормали.

В нашем случае $\overline{a} = (z, x + y, y)$, $\overline{n} = -\vec{k}$, поэтому

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi_i} zdydz + (x + y)dxdz + ydxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Phi_1} (-y)dS.$$

Поверхность Φ_1 лежит в плоскости $z = 0$, значит, $dS = dxdy$, а проекция этой поверхности по плоскость $z = 0$ совпадает с треугольником AOC. Уравнение линии AC: $2x+y=2$. Тогда

$$I_1 = -\iint\limits_{\Phi_1} ydS = -\iint\limits_{AOC} ydxdy = -\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} ydy = -2\int_0^1 (1 - 2x + x^2)dx = -\frac{2}{3}.$$

2) Грань AOB лежит в плоскости $y = 0$, нормаль к этой грани $\overline{n}_2 = -\vec{j} = (0, -1, 0)$, $dS = dxdz$.

Имеем $\iint\limits_{\Phi_2} (\overline{a}, \overline{n}_2)dS = -\iint\limits_{\Phi_2} (x + y)dS$, причём $dS = dxdz$. Проекция Φ_2 на плоскость $y = 0$ совпадает с треугольником AOB. Уравнение линии AB: $x + z = 1$. Получаем

$$I_2 = -\iint\limits_{\Phi_2} (x + y)dS = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} xdz = -\int_0^1 (x - x^2)dx = -\frac{1}{6}.$$

3) Грань BOC лежит в плоскости $x = 0$, нормалью к этой грани является вектор $n_3 = -\bar{i} = (-1, 0, 0)$, $dS = dydz$ Тогда,

$$I_3 = \iint\limits_{\Phi_3} (\overline{a}, \overline{n}_3)dS = -\iint\limits_{\Phi_3} zdS = -\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{1-\frac{y}{2}} zdz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 (1 - y + \frac{y^2}{4})dy = -\frac{1}{2}(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{12})\Bigg|_0^2 = -\frac{1}{3}.$$

4) Грань ABC лежит в плоскости $2x + y + 2z = 2$, или $z = 1 - x - \dfrac{y}{2}$, $dS = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dxdy = \sqrt{1 + 1 + \dfrac{1}{4}}\,dxdy = \dfrac{3}{2}dxdy$. Проекцией данной грани на плоскость XOY является треугольник AOC. Нормаль к этой грани $\bar{n}_4 = \dfrac{2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{2}{3}\bar{i} + \dfrac{1}{3}\bar{j} + \dfrac{2}{3}\bar{k}$.

$$I_4 = \iint\limits_{\Phi_4}(\bar{a},\bar{n})dS = \iint\limits_{\Phi_4}\left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}(x+y) + \frac{2}{3}y\right)dS = \iint\limits_{\Phi_4}\left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}x + y\right)dS =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 dx \int_0^{2-2x}\left(\frac{2}{3}\left(1 - x - \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{3}x + y\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{2-2x}(2 - x + 2y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2y - xy + y^2\right)\Big|_0^{2-2x} dx = \int_0^1 (4 - 7x + 3x^2)dx =$$

$$= \left(4x - \frac{7}{2}x^2 + x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Интеграл I по всей поверхности Φ:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}.$$

***Пример* 2**. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_{\Phi}\dfrac{dydx}{x} + \dfrac{dzdx}{y} + \dfrac{dxdy}{z}$, где Φ – часть эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, лежащая в первом октанте, ориентированного внешней нормалью.

Решение. Зададим эллипсоид параметрически с помощью уравнений $x = a\cos u\cos v$, $y = b\sin u\cos v$, $z = c\sin v$, $u \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $v \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой

$$\iint\limits_{\Phi} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{D}\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv,$$

где D – область изменения параметров u и v.

Имеем $x_u^{'} = -a\sin u\cos v,$ $y_u^{'} = b\cos u\cos v,$ $z_u^{'} = 0,$ $x_v^{'} = -a\cos u\sin v,$ $y_u^{'} = -b\sin u\sin v,$ $z_v^{'} = c\cos v.$ Тогда

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ x_u^{'} & y_u^{'} & z_u^{'} \\ x_v^{'} & y_v^{'} & z_v^{'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a\cos u\cos v} & \frac{1}{b\sin u\cos v} & \frac{1}{c\sin v} \\ -a\sin u\cos v & b\cos u\cos v & 0 \\ -a\cos u\sin v & -b\sin u\sin v & c\cos v \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right)\cos v.$$

Поэтому, по записанной выше формуле, получаем

$$I = \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v\,dv = \frac{\pi}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right).$$

III. ***Задачи и упражнения для практических занятий***

Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

1. $\iint\limits_{\Phi} (x^2 + y^2)dxdy$ где $x^2 + y^2 \le 4, z = 0$, где Ф – нижняя сторона плоскости $z = 0$, отсеченная цилиндром $x^2 + y^2 = 4$.

2. $\iint\limits_{\Phi} (2z - x)dydz + (x + 2z)dzdx + 3zdxdy,$ где Ф – верхняя сторона плоскости $x + 4y + z = 4,$ отсеченная координатными плоскостями.

3. $\iint\limits_{\Phi} yzdydz + zxdzdx + xydxdy,$ где Ф – внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \le 1,$ $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0.$

4. *а*) $\iint\limits_{\Phi} x^2y^2zdxdy,$ *б*) $\iint\limits_{\Phi} (x^5 + z)dydz;$ где Ф – внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$ $z \le 0.$

5. $\iint\limits_{\Phi} xdydz + ydxdz + zdxdy,$ где *а*) Ф – внешняя сторона поверхности куба $\{(x, y, z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\},$ *б*) Ф – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

6. $\iint\limits_{\Phi} (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy,$ где Ф – нижняя сторона части конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2,$ $0 < z \le H$.

7. $\iint\limits_{\Phi} yzdxdy + zxdydz + xydzdx,$ где Ф – внешняя сторона части цилиндра $x^2 + y^2 = R^2,\ x \le 0, y \ge 0,\ 0 \le z \le H$.

ФОРМУЛА СТОКСА

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Пусть Φ – некоторая двусторонняя поверхность, L – граница поверхности. Как вводится положительное направление обхода контура, согласованное с ориентацией поверхности?

2. Напишите формулу Стокса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.

3. Дайте определение поверхностно-односвязной области в пространстве. Является ли поверхностно-односвязной областью: всё пространство; часть шара, отсекаемая плоскостью; шар с выброшенным центром; тор?

4. Сформулируйте необходимые и достаточные условия, при которых криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от пути интегрирования.

5. Напишите формулу восстановления функции $u = u\,(x\,,y,\,z)$ по её полному дифференциалу $du = Pdx + Qdy + Rdz$.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Пользуясь формулой Стокса, вычислите криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_{L} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, где L – контур треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A\,(1, 0, 0)$, $B\,(0, 1, 0)$, $C\,(0, 0, 1)$ (контур L обходится против часовой стрелки, если смотреть из точки (2, 0, 0) (рисунок 2).

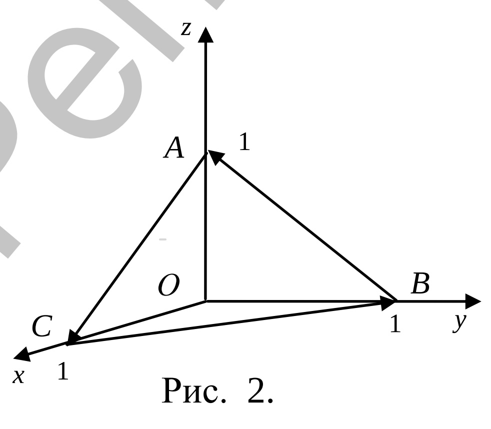

Рис. 2.

Решение. Треугольник ABC лежит в плоскости $x + y + z = 1$ или $z = 1 - x - y$. Ориентация контура является положительной на верхней стороне поверхности, следовательно, вектор нормали для этой стороны есть вектор $\vec{N}\,(1,1,1)$, единичный вектор – $\bar{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$. Дифференциал поверхности $dS = \sqrt{3}\,dxdy$. Проекцией треугольника ABC на плоскость $z = 0$ является треугольник OCB, ограниченный осями $x = 0$, $y = 0$ и прямой $y = 1 - x$.

Формула Стокса имеет вид

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_\Phi \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \right) dS,$$

где $P(x, y, z) = y^2$, $Q(x, y, z) = z^2$, $R(x, y, z) = x^2$. Тогда

$$\oint_L y^2dx + z^2dy + x^2dz = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Phi (-2z - 2x - 2y)dS = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Phi (z + x + y)dS =$$

$$= -2\iint_{\Delta OCB} (1 - x - y + x + y)dxdy = -2\iint_{\Delta OCB} dxdy = -2S_{\Delta OCB} = -1.$$

Пример **2.** Найти интеграл $\oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$,

где L – кривая пересечения параболоида $z = 3 - x^2 - y^2$ с плоскостью $x + y + z = 2$, ориентированная положительно относительно вектора (1;0;0) (рисунок 3) .

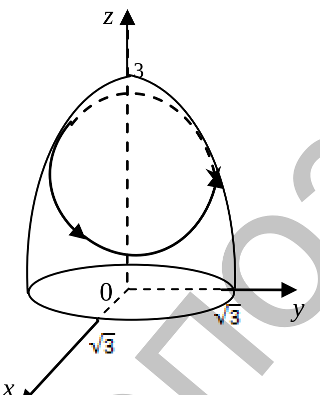

Рис. 3.

Решение. Применим формулу Стокса. За поверхность Φ, ограниченную кривой L, возьмем часть секущей плоскости $x + y + z = 2$, лежащей внутри параболоида. Единичным вектором нормали к Φ, направленным соответственно направлению кривой L, является вектор $\vec{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Дифференциал поверхности $dS = \sqrt{3}\,dxdy$.

Так как $P = y^2 - z^2$, $Q = z^2 - x^2$, $R = x^2 - y^2$, то $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2(z + y)$, $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2(z + x)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(y + x)$. Получаем

$$I = \oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Phi (x + y + z)dS = -\frac{8}{\sqrt{3}}\iint_\Phi dS = -8\iint_D dxdy = S_D,$$

где D – проекция Φ на плоскость $z = 0$. Исключаем z из системы уравнений: $\begin{cases} z = 3 - (x^2 + y^2), \\ x + y + z = 2, \end{cases}$ получаем уравнение проекции $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2}$, т.е. D – есть круг радиуса $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Следовательно, $S_D = \frac{3}{2}\pi$ и $I = -8 \cdot \frac{3}{2}\pi = -12\pi$.

***Пример* 3.** Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислить криволинейный интеграл:

$$I = \int\limits_{AB} 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz,$$

где $A(0, -1, 2)$, $B(1, 2, 2)$.

Решение. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$.

В нашем случае: $P = 2xyz$, $Q = x^2z$, $R = x^2y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = x^2$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2xy$. Следовательно, выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом, а криволинейный интеграл I не зависит от пути интегрирования.

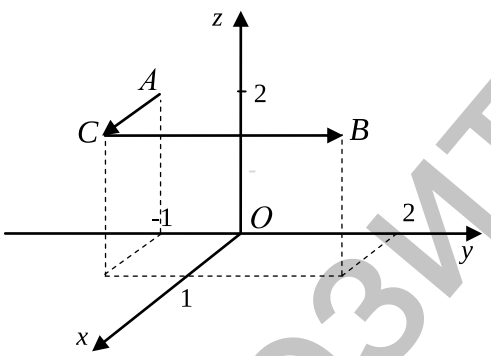

Рис. 4.

Возьмём в качестве пути интегрирования ломаную ACB, где $C(1,-1, 2)$ (рисунок 4).

Тогда AC: $\{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,\ y = -1,\ z = 2\}$. Вдоль отрезка AC: $dy = dz = 0$.

$$I_1 = \int\limits_{AC} 2xyzdx = \int\limits_0^1 (-4x)dx = -2x^2 \Big|_0^1 = -2.$$

$CB = \{(x, y, z) : x = 1, -1 \le y \le 2,\ z = 2\}$. Вдоль отрезка CB: $dx = 0$, $dz = 0$.

$$I_2 = \int\limits_{CB} x^2zdy = 2\int\limits_{-1}^{2} dy = 6.$$

Имеем: $I = I_1 + I_2 = -2 + 6 = 4$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

С помощью формулы Стокса вычислить интегралы:

1. $\oint\limits_{.L}(x+z)dx+(x-y)dy+xdz$, где L – эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=c$, ориентированный отрицательно относительно вектора (0, 0, 1).

2. $\oint\limits_{L} ydx+zdy+xdz$, где L – виток винтовой линии $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t,\ 0\le t\le 2\pi$, пробегаемый от точки (1, 0, 0) до точки $(1,0,2\pi)$.

3. $\oint\limits_{L} y^2dx+z^2dy+x^2dz$, где L – граница треугольника с вершинами в точках (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3), ориентированная положительно относительно вектора $\vec{j}$ (0, 1, 0).

4. а) $\oint\limits_{L} ydx+zdy+xdz$; б) $\int\limits_{L}\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+zdz$,

где L – окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$,, ориентированная положительно относительно вектора $\vec{k}$ (0, 0, 1).

5. $\oint\limits_{L}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, где

а) L – окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, ориентированная положительно относительно вектора $\vec{i}$ (1, 0, 0);

б) L – эллипс $x^2+y^2=a^2$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$, $a>0$, $c>0$, ориентированный отрицательно относительно вектора $\vec{i}$ (1, 0, 0).

6. $\oint\limits_{L}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$,

где L – граница сечения куба $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ плоскостью $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки (2*a*, 0, 0).

7. Докажите, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и вычислите криволинейные интегралы:

а) $\int\limits_{AB} xdx+y^2dy-z^3dz$, где A (1, 1, 1), B (2, 3, –4);

б) $\int\limits_{AB} xdx-y^2dy+zdz$, где A (1, –1, 2), B (2, 1, 3);

в) $\int\limits_{AB} yzdx+xzdy+xydz$, где A (1, 2, 3), B (6, 1, 1);

г) $\int\limits_{AB}\dfrac{zxdx+xydy-yzdz}{(x-yz)^2}$, где A (7, 2, 3), B (5, 3, 1)

(контур интегрирования не пересекает поверхности $z=\dfrac{x}{y}$).

8. Найти функции по данным полным дифференциалам:

а) $du = \dfrac{dx + dy + dz}{x + y + z}$;

б) $du = (x^2 - yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$;

в) $du = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z}}$;

г) $du = \dfrac{dx - 3dy}{z} + \dfrac{3y - x + z^3}{z^2}dz.$

ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте понятие: а) z – цилиндрической области, б) y – цилиндрической области, в) x– цилиндрической области.

2. Какая область называется простой?

3. Запишите формулу Остроградского-Гаусса. При каких условиях эта формула справедлива?

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить $\iint\limits_{\Phi} (x + y^2)dydz + (y - z^2)dxdz + (z + 2x)dxdy$,

где Φ – внешняя сторона поверхности тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 4z = 8$. (рисунок 5)

Решение. Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса:

$$\iint\limits_{\Phi} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \,,$$

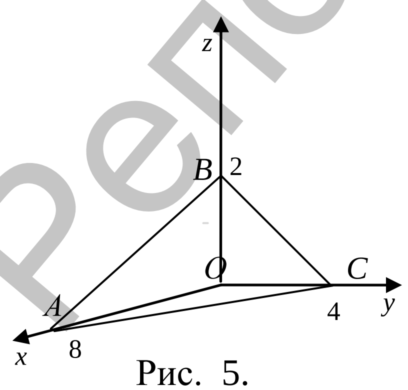

Рис. 5.

где V – область, ограниченная поверхностью Φ.

В нашем случае $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 3.$

Тогда по формуле имеем:

$$I = \iint\limits_{\Phi} (x + y^2)dydz + (y - z^2)dxdz + $$
$$+ (z + 2x)dxdy \ = \iiint\limits_{V} 3dxdydz = 3\ V,$$

где V–объем тетраэдра $ABCO$, т.е. $I = 3 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2 = 32.$

***Пример* 2.** Вычислить интеграл:

$$I = \iint\limits_{\Phi} x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy,$$

где Φ – внешняя сторона боковой поверхности части конуса: $x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 1$ (рисунок 6).

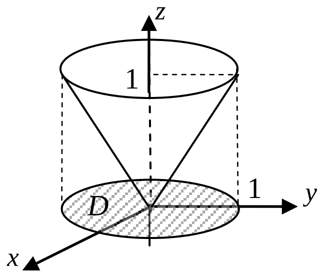

Рис. 6.

Решение. Обозначим через Φ_1 верхнюю сторону основания конуса, а интеграл по этой стороне через I_1. Внешнюю сторону полной поверхности конуса обозначим через $\Phi_2 = \Phi \cup \Phi_1$, а интеграл по Φ_2 через I_2. Тогда $I = I_2 - I_1$ К интегралу I_2 применима формула Остроградского-Гаусса. Получаем

$$I_2 = \iiint\limits_{V} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dxdydz.$$

Перейдём в данном интеграле к цилиндрическим координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, тогда область изменения переменных ρ, φ, z: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1,\ \rho \le z \le 1$. Имеем

$$I_2 = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 (\rho^2 + z^2)\rho dz = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^3 z + \frac{\rho z^3}{3} \right)\Bigg|_\rho^1 d\rho =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^3 + \frac{1}{3}\rho - \rho^4 - \frac{\rho^4}{3} \right) d\rho = = 3\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}\rho^4 + \frac{1}{6}\rho^2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5}\rho^5 \right)\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= 3\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{4}{15} \right) \cdot 2\pi = \frac{9}{10}\pi.$$

Вычислим интеграл по основанию конуса: $z = 1;\ \vec{n} = (0,0,1)$. Проекцией основания на плоскость $z = 0$ будет круг $D: \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.

Тогда $I_1 = \iint\limits_{\Phi_1} x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy = \iint\limits_{D} dxdy = \pi$, так как $\iint\limits_{D} dxdy = S$, где S – площадь круга.

Следовательно, $I = I_2 - I_1 = -\dfrac{\pi}{10}$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить интегралы:

1. $\iint\limits_{\Phi}(1+2x)dydz+(3x+3y)dxdz+(4y+5z)dxdy$, где Φ - внешняя сторона поверхности пирамиды $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\le 1, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0, \ z\ge 0.$

2. $\iint\limits_{\Phi} xdydz+ydxdz+zdxdy$, где Φ – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3. $\iint\limits_{\Phi}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$, где Φ – внешняя часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2, 0\le z\le 3$.

4. $\iint\limits_{\Phi} yzdydz+zxdxdz+xydxdy$, где

а) Φ – внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.

б) Φ – внешняя граница цилиндра $x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le 2$.

5. $\iint\limits_{\Phi}(5x+y)dydz+zdxdy$, где

а) Φ – внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2=z^2, \ 0\le z\le 4$;

б) Φ – внутренняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$;

в) Φ – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2\le 4$.

6. $\iint\limits_{\Phi} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где

а) Φ – внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le a, \ 0\le y\le a, \ 0\le z\le a$;

б) Φ – внешняя сторона полной поверхности конуса: $x^2+y^2\le z^2, \ 0\le z\le 5$.

7. $\iint\limits_{\Phi} x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, где

а) Φ – внешняя сторона поверхности пирамиды $x+y+z\le a$, $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$;

б) Φ – внутренняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$;

в) Φ – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=x$.

СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение скалярного поля и приведите примеры полей.
2. Что называем линией (поверхностью) уровня скалярного поля?
3. Дайте определение производной по заданному направлению. Приведите формулу, по которой может быть найдена производная по заданному направлению.
4. Дайте определение градиента скалярного поля. Как связана производная по направлению вектора $\bar{l}$ с градиентом скалярного поля в данной точке?
5. Каков физический смысл градиента?
6. Найдите производную скалярного поля $u = |\vec{r}\,|$ в точке $O\,(0, 0, 0)$ ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус вектор точки $M\,(x, y, z)$) по направлению: а) оси OX; б) оси OY; в) вектора $\bar{l} = (1, 1, 1)$.
7. Найдите градиент скалярного поля $u = |\vec{r}\,|$ в точке $O\,(0, 0, 0)$.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти и нарисовать линии уровня скалярного поля $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Вычислить и изобразить на чертеже градиент этой функции в точках $M_1\,(2, 1)$ и $M_2\,(2, -1)$.

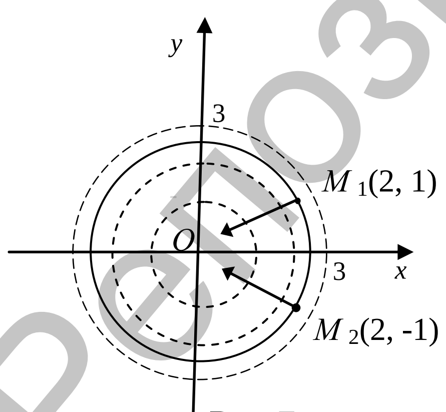

Рис 7.

***Решение*.** Линии уровня задаются уравнениями $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = C$ $(C \geq 0)$. Функция $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ задана в области $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, т.е. $x^2 + y^2 \leq 9$. Значит, линии уровня – семейство концентрических окружностей $x^2 + y^2 = 9 - C^2$ $(|C| \leq 3)$

Градиент скалярного поля $u = f\,(x, y, z)$ – это вектор grad $u\,(M) = \dfrac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k}$. Следовательно, для поля $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, вектор grad $u\,(M)$ имеет вид

$$\operatorname{grad} u = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\bar{i} - \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\bar{j}.$$

Тогда $\operatorname{grad} u\,(M_1) = -\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j}$, $\operatorname{grad} u\,(M_2) = -\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j}$.

Векторы grad u (M_1) и grad u (M_2) перпендикулярны линии уровня, проходящей через точки M_1 и M_2 (рисунок 7).

***Пример* 2.** Найти *а*) производную скалярного поля $u = xyz$ в точке $M(1,1,1)$ по направлению вектора $\bar{l} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$, *б*) направление наибольшего роста функции $u = xyz$.

Решение. *а*) Для нахождения производной скалярного поля $u = xyz$ по направлению вектора $\bar{l}$ воспользуемся формулой

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\frac{\partial u}{\partial x} = yz,\ \frac{\partial u}{\partial y} = xz,\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy$, $\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \frac{\partial u(M)}{\partial y} = \frac{\partial u(M)}{\partial z} = 1$.

$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ - координаты единичного вектора $\bar{e}$, сонаправленного вектору $\bar{l}$. Так как $|\vec{l}\,| = \sqrt{1+4+4} = 3$, то $\bar{e} = \frac{\bar{l}}{|\vec{l}\,|} = \frac{1}{3}(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k})$, Следовательно, $\cos\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$. Получим $\frac{\partial u}{\partial l} = 1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot(-\frac{2}{3}) + 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

б) Направление наибольшего роста функции $u = xyz$ в точке M совпадает с направлением градиента функции u в этой точке. Величина наибольшего роста функции равна модулю вектора grad u (M).

$$\operatorname{grad} u\,(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

$$|\operatorname{grad} u\,(M)| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти и нарисовать линии уровня скалярного поля $u = u\,(x,y)$. Вычислить и изобразить на чертеже градиент этой функции в точках A и B если:

а) $u = xy$, $A\,(1,1), B\,(1,-1)$;

б) $u = (x-y)^2$, $A\,(-1,1), B\,(1,1)$;

в) $u = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$, $A(1,1)$, $B(2,\ 0)$;

г) $u = \min(x, y)$, $A(2,1)$, $B(1,2)$.

2. Найти поверхности уровня скалярного поля $u = u(x, y, z)$

а) $u = arctg\,\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$; *б)* $u = \dfrac{1}{2x+3y-4z+1}$;

в) $u = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$; *г)* $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + 3y^2 - 6x + 2y$ в начале координат по направлению, идущему из начала в точку $M(3, 4)$.

4. Найти производную скалярного поля $u = xy^3 + z^2 - 2xyz$ в точке $M(0,1, 2)$ в направлении, образующем с осями координат углы 60^0, 45^0, 60^0 соответственно.

5. Найти производную функции $u = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(3, 4)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня функции u, проходящей через эту точку.

6. Найти производную поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(x, y, z)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

7. Найти производную поля u по направлению единичного вектора $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$:

а) $u = |\vec{r}\,|$; *б)* $u = \dfrac{1}{|\vec{r}\,|}$;

в) $u = f(r)$; *г)* $u = (\bar{a}, \bar{r}), \bar{a} = \overline{const}$.

8. Найти градиент скалярного поля u в точке M:

а) $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $M(0,1)$;

б) $u = x^3y^2z$, $M(1, 2, 3)$;

в) $u = (x-1)(y-2)(z-3)$, $M(2, 3, 4)$;

г) $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M(0, 0, 0)$.

9. В каких точках $\mathrm{grad}(x + y^2 + 18z^3 - 3xyz)$:

а) перпендикулярен оси OZ;

б) параллелен оси OY;

в) равен нулю?

10. Найти угол между $\mathrm{grad}\,u\,(M_1)$ и $\mathrm{grad}\,u\,(M_2)$, если:

а) $u = (x + y)\,e^{x+y}$, $M_1(0, 0)$, $M_2(-1,1)$;

б) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y+z}$, $M_1(1,1,0)$, $M_2(-1,0,1)$;

11. Найдите градиент скалярного поля $u = u(x, y)$, если функция $u(x, y)$ определяется неявно уравнением:

а) $u^3 - 3xyu = a^2$; *б)* $x + y + u = e^u$.

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение векторного поля и приведите примеры векторных полей.
2. Что такое векторные линии? Напишите уравнение векторных линий. Что называется векторной трубой?
3. Дайте определение потока векторного поля $\bar{a}(M)$ через поверхность *Ф*.
4. Дайте определение дивергенции векторного поля. Каков физический смысл дивергенции?
5. Приведите формулу для вычисления дивергенции векторного поля.
6. Приведите векторную формулировку теоремы Остроградского.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти векторные линии поля $\bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий поля $\bar{a} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ имеют вид:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

В данном случае получаем: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{2y} = \dfrac{dz}{-z}$.

Это система дифференциальных уравнений в симметрической форме. Запишем систему в виде $\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{2y} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{-z} \end{cases}$. Решая каждое из уравнений в отдельности, получаем $\begin{cases} y = C_1 x^2, \\ z = \dfrac{C_2}{x}. \end{cases}$

***Пример* 2.** Найти дивергенцию векторного поля $\bar{a} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$ в точке $M(1,2,3)$.

Решение. Вычисляем частные производные от координат вектора $\bar{a}$: $\frac{\partial P}{\partial x} = y, \frac{\partial Q}{\partial y} = z, \frac{\partial R}{\partial z} = x$. Отсюда $\operatorname{div} \bar{a} = x + y + z$.

В точке $M(1, 2, 3)$ $\operatorname{div} \bar{a} = 1 + 2 + 3 = 6$.

***Пример* 3.** Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + x\bar{j} + xz\bar{k}$ через замкнутую поверхность *Ф*, состоящую из параболоида вращения $y = z^2 + x^2$ и плоскостей, заданных уравнениями $y = 1$, $x = 0$, $z = 0$ (рисунок 8): *а*) непосредственно, *б*) с помощью формулы Остроградского.

Решение. Поверхность *Ф* состоит из четырёх поверхностей:
$\varPhi_1: y = z^2 + x^2$, $\varPhi_2: y = 1$, $\varPhi_3: x = 0$, $\varPhi_4: z = 0$.

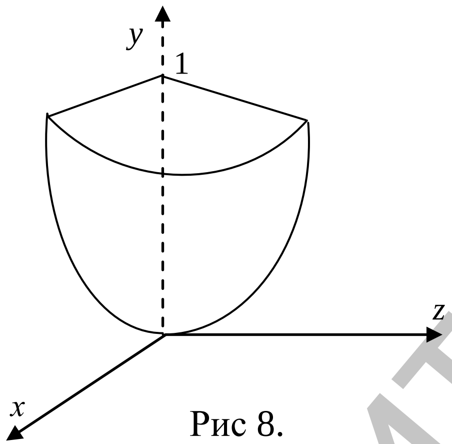

Рис 8.

а) Поток векторного поля через поверхность *Ф* равен сумме потоков через поверхности $\varPhi_i (i = \overline{1,4})$, т.е. $\varPi = \varPi_1 + \varPi_2 + \varPi_3 + \varPi_4$.

Для вычисления потока вектора $\bar{a}$ воспользуемся формулой:

$$\varPi = \iint_{\varPhi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

Рассмотрим поверхность $\varPhi_1$, которая является частью параболоида $y = z^2 + x^2$. Найдём вектор $\bar{n}_1$: $\bar{n}_1 = \frac{2x\bar{i} - \bar{j} + 2z\bar{k}}{\sqrt{4(x^2 + z^2) + 1}}$,

$(\bar{a}, \bar{n}_1) = \frac{2x^3 - x + 2xz^2}{\sqrt{4(x^2 + z^2) + 1}}$.

Получаем

$$\varPi_1 = \iint_{\varPhi_1} \frac{2x^3 - x + 2xz^2}{\sqrt{4(x^2 + z^2) + 1}} dS = \iint_{G_1} (2x^3 - x + 2xz^2) dxdz,$$

где G_1 – проекция поверхности $\varPhi_1$ на плоскость *XOZ*, т.е. часть круга $z^2 + x^2 \le 1$, $z \ge 0$, $x \ge 0$.

Для нахождения интеграла, перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi; \end{cases} \quad 0 \le \rho \le 1; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

тогда

$$\Pi_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1(2\rho^4\cos^3\varphi-\rho^2\cos\varphi+2\rho^4\sin^2\varphi\cos\varphi)d\rho=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{2}{5}\cos^3\varphi-\frac{1}{3}\cos\varphi+\frac{2}{5}\sin^2\varphi\cos\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{5}\frac{\sin^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}})=$$

$$=\frac{2}{5}\sin\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}\frac{\sin^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}+\frac{2}{15}=\frac{2}{5}-\frac{2}{15}-\frac{1}{3}+\frac{2}{15}=\frac{1}{15}.$$

Найдём Π_2. Вектор нормали к поверхности $\Phi_2:\ \overline{n_2}=\overline{j}$. Значит,

$$\Pi_2=\iint_{G_1}xdxdz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^2\cos\varphi d\rho=\frac{1}{3}.$$

Вычислим Π_3. Так как на плоскости $x=0$ $\overline{a}=\overline{0}$, то и $\Pi_3=0$.

Найдём поток Π_4. На плоскости $z=0:\overline{a}=x^2\overline{i}+x\overline{j}$, $\overline{n_4}=-\overline{k}$, следовательно, $(\overline{a},\overline{n_4})=0$ и поэтому $\Pi_4=0$.

Окончательно $\Pi=\Pi_1+\Pi_2=\frac{1}{15}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$.

б) Найдём поток векторного поля с помощью формулы Остроградского:

$$\Pi=\iint_{\Phi}(\overline{a},\overline{n})dS=\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz.$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3x$, то $\Pi=\iiint_V 3xdxdydz$. Переходя к цилиндрическим координатам, имеем:

$$\Pi=3\iiint_V\rho^2\cos\varphi dxdydz=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_0^1\rho^2d\rho\int_{\rho^2}^1dy=\frac{2}{5}.$$

III. ***Задачи и упражнения для практических занятий***

1. Найти векторные линии поля $\overline{a}$, если

а) $\overline{a}=x\overline{i}+y\overline{j}$; *б*) $\overline{a}=y\overline{i}-x\overline{j}$;

в) $\overline{a}=2x\overline{i}+y\overline{j}$; *г*) $\overline{a}=\overline{r}$;

д) $\overline{a}=f(r)\overline{r},r=|\overline{r}|$; *е*) $\overline{a}=(z-y)\overline{i}+(x-z)\overline{j}+(y-x)\overline{k}$.

2. Найти векторную линию поля $\bar{a}$, проходящую через точку *M*, если:

а) $\bar{a} = -y\bar{i} + x\bar{j} + c\bar{k}$, *c =const*, *M* (1, 0, 0);

б) $\bar{a} = x^2\bar{i} - y^3\bar{j} + z^2\bar{k}$; $M\,(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.

3. Вычислить дивергенцию векторного поля $\bar{a}$:

а) $\bar{a} = (4x^2z + 3)\bar{i} + (2xy - z)\bar{j} + (7xyz + 1)\bar{k}$;

б) $\bar{a} = (x - y)(y - z)\bar{i} + (y - z)(z - x)\bar{j} + (z - x)(x - y)\bar{k}$;

в) $\bar{a} = (x^2 + y^2)\bar{i} + (y^2 + z^2)\bar{j} + (z^2 + x^2)\bar{k}$;

г) $\bar{a} = (y^2 + z^2)x\bar{i} + (x^2 + z^2)y\bar{j} + (y^2 + x^2)z\bar{k}$.

4. Вычислите:

а) $div\bar{r}$; *б*) $div\frac{\bar{r}}{r}$; *в*) $div(r^2\bar{c})$;

г) $div(f(r)\bar{r})$; *д*) $div(c\bar{r})$; *е*) $div(r^4 \cdot \bar{r})$.

5. Найти поток векторного поля $\bar{a}$ через поверхность Φ:

а) $\bar{a} = (x - 2z)\bar{i} + (3z - 4x)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$, Φ – противоположная началу координат сторона плоского треугольника с вершинами в точках (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1).

б) $\bar{a} = \bar{r}$, Φ – внешняя сторона конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$;

в) $\bar{a} = \bar{r}$, Φ – внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2 + y^2 \le R^2,\ \ 0 \le z \le 4$;

г) $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$, Φ– внешняя сторона полной поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$;

д) $\bar{a} = x\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (z - y)\bar{k}$, Φ – верхняя часть сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, отсечённая плоскостью $z = \frac{3}{2}$;

е) $\bar{a} = y^2\bar{j} + z\bar{k}$, Φ –ограниченная часть внешней стороны параболоида $z = x^2 + y^2$, отсечённая плоскостью $z = 2$.

6. Найти поток вектора $\bar{a}$ через поверхность Φ непосредственно или по теореме Остроградского, если:

а) $\bar{a} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$, Φ – внешняя сторона поверхности куба $|x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1$;

б) $\bar{a} = (z - y)\bar{i} + (x - z)\bar{j} + (y - x)\bar{k}$, Φ – полная внешняя поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1,\ x + y - z = 1,\ y = 0,\ x = 0$;

в) $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$, через каждую из частей сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, получающихся при пересечении этой сферы плоскостью: 1) $x + y + z = 0$, 2) $x + y + z = 1$, 3) $x - y + z = 0$, 4) $x - y + z = 1$ в сторону внешней нормали от сферы;

г) $\bar{a} = xy\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}$, через полную поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в сторону внешней нормали.

РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ЦИРКУЛЯЦИЯ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение ротора векторного поля. Каков физический смысл ротора?
2. Запишите формулу, с помощью которой можно вычислить ротор векторного поля.
3. Дайте определение линейного интеграла.
4. Что называется циркуляцией векторного поля.
5. Приведите векторную формулировку теоремы Стокса.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить ротор векторного поля

$$\bar{a} = (x^2 + y)\bar{i} - (x^2 - y)\bar{j} + (z^2 - x)\bar{k}$$

в точке $M_0(0;0;1)$.

Решение. Ротор векторного поля $\bar{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ можно найти по формуле

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

В нашем случае

$$rot\,\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y & y - x^2 & z^2 - x \end{vmatrix} = \bar{j} - (2x+1)\bar{k}.$$

Следовательно $rot\,\bar{a}(M_0) = \bar{j} - \bar{k}$.

***Пример* 2.** Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} + x\bar{j} - z\bar{k}$ вдоль замкнутой линии *L*, образованной пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с координатными плоскостями ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), двумя способами: *а*) использовав определение циркуляции, *б*) с помощью формулы Стокса. Направление на кривой – против часовой стрелки, если смотреть из положительного конца оси *OX* (рисунок 9).

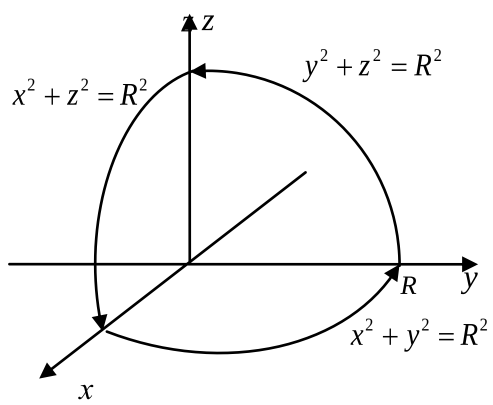

Рис. 9.

Решение. *а*) Вычислим циркуляцию *C* данного поля по формуле

$$C = \int_L \vec{a}(M) \cdot \vec{\tau} dl = $$

$$= \int_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

где $\vec{\tau}$ – поле направляющих векторов к кривой *L*. Если кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, то $\vec{\tau}dl = (dx, dy, dz) =$ $= (x'(t)\,dt, y'(t)\,dt, z'(t)\,dt)$.

Данная линия состоит из трех дуг окружностей:

$L_1 : z = 0, x^2 + y^2 = R^2$,

$L_2 : x = 0, y^2 + z^2 = R^2$,

$L_3 : y = 0, x^2 + z^2 = R^2$.

Следовательно,

$$C = \oint_L \vec{a} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{L_1} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_1 dl + \int_{L_2} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_2 dl + \int_{L_3} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_2 dl.$$

Находим интеграл $\int_{L_1} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_1 dl$ вдоль части окружности L_1. Зададим эту кривую параметрически уравнениями $z = 0$, $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $dx = -R\sin t\,dt$, $dy = R\cos t\,dt$, $dz = 0$.

Получаем

$$\int_{L_1} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_1 dl = \int_{L_1} ydx + xdy - zdz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t)dt =$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt = \frac{R^2}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Кривая L_2 задается уравнениями $x = 0, \quad y = R\cos t, \quad z = R\sin t,$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $dx = 0, \ \ xdy = 0, \ \ dz = R\cos t\, dt$. Следовательно,

$$\int_{L_2} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_2 dl = \int_{L_2} ydx + xdy - zdz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos t \sin t\, dt =$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, d(\cos t) = R^2 \left. \frac{\cos^2 t}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{R^2}{2}.$$

Кривая L_3 задается уравнениями $y = 0, \quad x = R\cos t, \quad z = R\sin t,$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $dy = 0, \ \ ydx = 0, \ \ dz = R\cos t\, dt$. Следовательно,

$$\int_{L_3} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_3 dl = \int_{L_2} ydx + xdy - zdz = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} R^2 \cos t \sin t\, dt = \frac{R^2}{2}.$$

Окончательно,

$$C = \oint_L \vec{a} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{L_1} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_1 dl + \int_{L_2} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_2 dl + \int_{L_3} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_2 dl = 0 - \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} = 0.$$

б) Вычислим циркуляцию C поля $\vec{a}$ с помощью формулы Стокса: $C = \oint_L \vec{a} \cdot \vec{\tau} dl = \iint_{\Phi} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS$. В качестве поверхности Φ в данной формуле возьмем внешнюю сторону сферы, тогда заданное направление контура относительно выбранной стороны поверхности будет положительным.

Найдем $\operatorname{rot} \vec{a}$.

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x & -z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial\,(-z)}{\partial y} - \frac{\partial\, x}{\partial z} \right) + \vec{j}\left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial(-z)}{\partial x} \right) + \vec{k}\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) = 0.$$

Следовательно, $C = \iint_{\Phi} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = 0$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}$ в точке $M_0(1, 1, 3)$.

а) $\bar{a} = x^2 y \bar{i} + y^2 z \bar{j} + z^2 x \bar{k}$;

б) $\bar{a} = \sin(3x + y - 2z)(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})$;

в) $\bar{a} = yz\bar{j} + x(x+z)\,\bar{j} + z(x-y)\bar{k}$;

г) $\bar{a} = \dfrac{y}{x^2}\bar{i} + \dfrac{z}{y^2}$.

2. Вычислите:

а) $\operatorname{rot}|\bar{r}|\cdot\bar{r}$; *б*) $\operatorname{rot}\dfrac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$;

в) $\operatorname{rot}\dfrac{\bar{r}}{|\bar{r}^3|}$; *г*) $\operatorname{rot} f(r)\cdot\bar{r}$;

д) $\operatorname{rot}(r\bar{c})$, где $r = |\bar{r}|$, $\bar{C}$ – постоянный вектор.

3. Найти работу силового поля $\bar{a}$ вдоль прямой, соединяющей точки *A* и *B*, если:

а) $\bar{a} = xy\bar{i} + xz\bar{j} + zx\bar{k}$, *A*(0, 0, 0), *B*(1, 1, 1);

б) $\bar{a} = \dfrac{\bar{i}}{y+z} + \dfrac{\bar{j}}{z+x} + \dfrac{\bar{k}}{x+y}$, *A*(-1, 0, 3), *B*(0, -1, 2).

4. Вычислить работу поля $\bar{a}$ вдоль кривой *l*, если:

а) $\bar{a} = (x^2 + y^2 - 2Rx)\bar{i} + R(x+y)\,\bar{j}$, l –дуга *OA* окружности $(x-R)^2 + y^2 = R^2$, где *O*(0, 0), *A*(*R*, *R*);

б) $\bar{a} = (x+y)\bar{i} + (x-y)\,\bar{j}$, l – часть графика $y = |x|$ от точки $(1, 1)$ до точки $(2, 2)$; $\bar{a} = y\bar{i}$, l – контур окружности $\begin{cases} x = b\cos t, \\ y = b + b\sin t, \end{cases}$ расположенной в плоскости *XOY*;

в) $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$, от точки *A*(0, 0, 0) до точки $B(a, 0, 2\pi b)$ вдоль винтовой линии $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$.

5. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a}$: *а*) пользуясь определением циркуляции, *б*) с помощью формулы Стокса, если

а) $\bar{a} = y\bar{i}$, l – контур окружности $\begin{cases} x = b\cos t, \\ y = b + b\sin t, \end{cases}$ расположенной в плоскости *XOY*, пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки *M* (0, 0, 1).

б) $\bar{a} = (z - x^2)\bar{i} + (x - y^2)\,\bar{j} + (y - z^2)\bar{k}$, l – треугольный контур, образованный пересечением плоскости $x + y + z = 1$ с координатными плоскостями и пробегаемый по часовой стрелке, если смотреть из начала координат,

в) $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z\bar{k}$, l – контур, полученный при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $z \ge 0$, пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из начала координат, *г*) $\bar{a} = x^2 y^3 \bar{i} + \bar{j} + z\bar{k}, L = \{x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$; l – контур, полученный при пересечении цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскости *ХОУ* пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки M (0, 0, 1).

5. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$, L– окружность, полученная при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ плоскостью:

а) $x + y + z = 0$; *б*) $x + y + z = 1$;

в) $x - y + z = 0$; *г*) $x - y + z = -1$,

контур пробегается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 2, 0)$.

ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Каким образом определяется оператор Гамильтона?

2. Запишите с помощью оператора Гамильтона:

а) градиент скалярного поля;

б) дивергенцию векторного поля;

в) ротор векторного поля.

3. Как действует оператор ∇ на линейную комбинацию $\sum_i a_i F_i$, где F_i – скалярные или векторные функции, a_i – числа?

4. Как действует вектор оператор ∇ на произведение нескольких функций?

5. Докажите следующие равенства:

а) $\operatorname{div}(u\bar{a}) = (\bar{a}, \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div} \bar{a}$;

б) $\operatorname{grad}(uv) = v \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{grad} v$;;

в) $\operatorname{rot}(u\bar{a}) = u \cdot \operatorname{rot} \bar{a} + [\operatorname{grad} u, \bar{a}]$;

г) $\operatorname{div}[\bar{a}, \bar{b}] = (\bar{b}, \operatorname{rot} \bar{a}) - (\bar{a}, \operatorname{rot} \bar{b})$;

д) $\operatorname{rot}[\bar{a}, \bar{b}] = (\bar{b}, \nabla)\bar{a} - (\bar{a}, \nabla)\bar{b} + \bar{a} \operatorname{div} \bar{b} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{a}$;

е) $\operatorname{grad}(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \nabla)\vec{a} + (\vec{a}, \nabla)\bar{b} + [\bar{b}, \operatorname{rot} \bar{a}] + [\bar{a}, \operatorname{rot} \bar{b}]$.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Пользуясь оператором ∇, вычислите $\operatorname{div}(r^2 \bar{c})$, где $r = |\vec{r}|, \bar{c}$ – постоянный вектор.

Решение. $\operatorname{div}(r^2 \bar{c}) = (\nabla, r^2 \bar{c})$. Так как r^2– скалярная функция, последнее равенство можно записать следующим образом:

$(\nabla, r^2 \bar{c}) = (\nabla r^2, \bar{c}) = (\bar{c}, \nabla r^2)$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\nabla r^2 = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$.

Значит, $\operatorname{div}\,(r^2\bar{c}) = 2(xc_1 + yc_2 + zc_3)$, где $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Пример **2.** Вычислить $\operatorname{rot}(u(r)\vec{r})$.

Решение. $\operatorname{rot}(u(r)\vec{r}) = [\nabla, u(r)\vec{r}]$. Воспользуемся формулой 5 *в*). Получаем $[\nabla, u(r)\vec{r}] = u(r)\cdot\operatorname{rot}\vec{r} + [\operatorname{grad}u(r), \vec{r}]$.

$$rot\ \vec{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

$$\operatorname{grad}\,(u(r)) = \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\bar{k}\right) = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r}\vec{r},$$

$[\operatorname{grad}(u(r)), \vec{r}] = \dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{1}{r}[\vec{r}, \vec{r}] = 0$. Значит, $\operatorname{rot}(u(r), \vec{r}) = 0$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Пользуясь вектором ∇, преобразуйте:

а) $\operatorname{div}\,(r\bar{c})$; *б*) $\operatorname{div}\,(f(r)\bar{c})$;

в) $\operatorname{div}\,(\bar{b}(\vec{r}\bar{a}))$; *г*) $\operatorname{div}\,(\vec{r}(\vec{r}\bar{a}))$;;

д) $\operatorname{div}\,(r[\bar{c}, \vec{r}])$; *е*) $\operatorname{div}\,(\dfrac{\vec{r}}{r})$;

ж) $\operatorname{div}\,(r\vec{r})$.

2. Проверить указанные равенства используя символ ∇ и правила действий с ним (α, β – числа, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ дифференцируемые векторные поля, $\bar{c}$ – постоянный вектор):

а) $\operatorname{rot}\,(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) = \alpha\operatorname{rot}\bar{a} + \beta\operatorname{rot}\bar{b}$;

б) $\operatorname{rot}\,(u\bar{c}) = [\operatorname{grad}u, \bar{c}]$;

в) $\operatorname{rot}[\bar{c}, \bar{a}] = \bar{c}\operatorname{div}\bar{a} - (\bar{c}, \nabla)\bar{a}$;

г) $grad(\bar{a}(r), \vec{r}) = a(\vec{r}) + (\vec{a}(r), \vec{r})\dfrac{\vec{r}}{r}$.

3. Пользуясь формулами 5 *в*) и 5 *д*) преобразуйте:

а) $\operatorname{rot}\,(\vec{r}\vec{c})\vec{a}$; *б*) $\operatorname{rot}\,(r\vec{c})$;

в) $\operatorname{rot}\,(f(r)\vec{c})$; *г*) $\operatorname{rot}[\vec{c}\cdot f(r)\vec{r}]$,

где $\vec{a}$ – векторное поле, $\vec{c}$ – постоянный вектор.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Какое векторное поле называется потенциальным? Приведите примеры потенциальных полей. Что такое потенциал поля?
2. Какое векторное поле называется безвихревым? Приведите примеры безвихревых полей.
3. Какое векторное поле называется соленоидальным? Приведите примеры соленоидальних полей. Что называется векторным потенциалом.
4. Какие повторные дифференциальные операции имеют смысл в скалярных и векторных полях? Какие из этих операций равны нулю?
5. Дайте понятие оператора Лапласа.
6. Какая функция называется гармонической?
7. Докажите, что любое векторное поле можно представить в виде сумм соленоидального и потенциального полей.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1**. Проверить, что поле $\bar{a} = (y+z)\bar{i} + (z+x)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

Решение. Поле $\bar{a}$ определено во всём пространстве, т.е. в односвязной области. Следовательно, нам достаточно проверить, что $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$. Имеем:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} =$$

$$(\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(z+x))\bar{i} + (\frac{\partial}{\partial z}(y+z) - \frac{\partial}{\partial x}(x+y))\bar{j} +$$

$$+(\frac{\partial}{\partial x}(z+x) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z))\bar{k} = 0.$$

Значит, данное поле является потенциальным. Потенциал поля можно найти по формуле:

$$u(x,y,z) = \int_0^x P(x,0,0)dx + \int_0^y Q(x,y,0)dy + \int_0^z R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_0^x 0dx + \int_0^y xdy + \int_0^z (x+y)dz = xy + yz + xz.$$

***Пример* 2.** Выяснить, является ли векторное поле $\bar{a} = x^2yz\bar{i} + xy^2z\bar{j} + xyz^2\bar{k}$ соленоидальным.

Решение. Если $\bar{a}$ – соленоидальное поле, то $\operatorname{div}\bar{a} = 0$. Найдём $\operatorname{div}\bar{a}$:

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial(x^2yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xy^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(xyz^2)}{\partial z} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 8xyz \neq 0.$$

Значит, векторное поле не является соленоидальным.

***Пример* 3.** Доказать, не пользуясь оператором Гамильтона, что $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$.

Решение. $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$.

Тогда

$$\operatorname{rot}(grad\ u) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\bar{k} = 0.$$

***Пример* 4.** Выяснить, является ли векторное поле $\bar{a} = \frac{x}{y}\bar{i} + \frac{y}{z}\bar{j} + \frac{z}{x}\bar{k}$ гармоническим.

Решение. Векторное поля является гармоническим, если $\operatorname{div}\bar{a} = 0$ и $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$.

Так как $\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \neq 0$, значит, данное поле не является гармоническим.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Какие из этих полей потенциальны в R^3:

а) $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$; *б)* $\bar{a} = xz\bar{i} + zy\bar{j} + yx\bar{k}$;

в) $\bar{a} = (x+y)\bar{i} + (z-y)\bar{j} + 2(z+x)\bar{k}$; *г)* $\bar{a} = 3x^2\bar{i} + 4(x-y)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$.

2. Проверить потенциальность данных полей и найти их потенциалы:

а) $\bar{a}=y\bar{i}+x\bar{j}+e^{-z}\bar{k}$; *б)* $\bar{a}=\frac{\vec{r}}{r}$; *в)* $\bar{a}=r\cdot\vec{r},(r=|\vec{r}|)$.

3. Является ли данное поле потенциальным, соленоидальным:

А) $\bar{a}=\frac{\vec{r}}{r^3}$; *б)* $\bar{a}=\frac{\vec{r}}{r}$.

4. Является ли поле $\bar{a}$ соленоидальным, если:

а) $\bar{a}=x(z^2-y^2)\bar{i}+y\left(x^2-z^2\right)\bar{j}+z(y^2+x^2)\bar{k}$;

б) $\bar{a}=(1+2xy)z\bar{i}-y^2z\bar{j}+(z^2y-2yz+1)\bar{k}$;

в) $\bar{a}=x^2z\bar{i}+y^2\bar{j}-xz^2\bar{k}$;

г) $\bar{a}=\bar{c},(\bar{c}-$ постоянный вектор);

д) $\bar{a}=ye^z\bar{i}+ze^x\bar{j}+xe^y\bar{k}$.

5. Вычислить $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)$, где $u=r^2$.

6. Доказать, что $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\bar{a})=0$.

7. Вычислите: а) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$; б) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f(r)))$?

8. Выяснить, является ли векторное поле $\bar{a}$ гармоническим:

а) $\bar{a}=(x+y)\bar{i}+(y+z)\bar{j}+(z+x)\bar{k}$;

б) $\bar{a}=yz\bar{i}+xz\bar{j}+xy\bar{k}$.

9. Разложите следующие векторные поля на сумму потенциального и соленоидального полей:

а) $\bar{a}=(x+y)\bar{i}+(x-y)\bar{j}+(z+1)\bar{k}$;

б) $\bar{a}=xz\bar{i}+y\bar{j}-2z\bar{k}$; *в)* $\bar{a}=\frac{x}{y}\bar{i}+\frac{y}{z}\bar{j}+\frac{z}{x}\bar{k}$.

РЯДЫ ФУРЬЕ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение периодической функции и перечислите свойства периодических функций.
2. Какая функция называется кусочно-непрерывной?
3. Какой функциональный ряд называется тригонометрическим рядом Фурье? Запишите формулы для нахождения его коэффициентов.
4. Сформулируйте условие разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье. В каком случае ряд Фурье будет равномерно сходиться к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$?
5. Чему равна сумма ряда Фурье для кусочно-непрерывных функций?

6. Как разложить в ряд Фурье функцию, определенную на отрезке $[0, l]$?

7. Что значит разложить функцию, определенную на отрезке $[0, l]$, по синусам, по косинусам?

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти разложение в ряд Фурье периодической функции с периодом 4, если $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -2 < x < 0, \\ 2 & \text{при } \ \ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

Решение. Продолжим периодически функцию $f(x)$ на всю числовую ось. График этой функции изображен на рисунке 10.

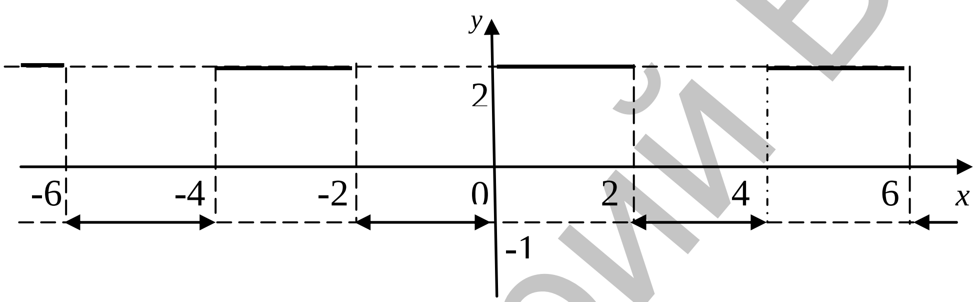

Рис.10.

Рядом Фурье для периодической кусочно-непрерывной функции $f(x)$ называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\ \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

Найдем коэффициенты ряда Фурье для данной функции:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{2} 2\,dx\right) = \frac{1}{2}(-2+4) = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx + \int_{0}^{2} 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_{0}^{2}\right) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0}(-1)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx + \int\limits_{0}^{2} 2\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_{0}^{2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{\pi n}(\cos \pi n - 1) = \frac{3}{\pi n}(1 - (-1)^n).$$

Подставив полученные коэффициенты в ряд Фурье, получим

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}x\right).$$

***Пример* 2.** Разложить в ряд Фурье функцию $y = 2 - x$, заданную на отрезке [0; 2], продолжив ее нечетным образом.

Решение.

Продолжим данную функцию на отрезок [-2; 0] нечетным образом, т.е получим функцию

$$f(x) = \begin{cases} -2-x & \text{при } -2 \le x < 0, \\ 2-x & \text{при } \ 0 \le x < 2. \end{cases}$$

Затем данную функцию продолжим периодически на всю числовую прямую (рисунок 11).

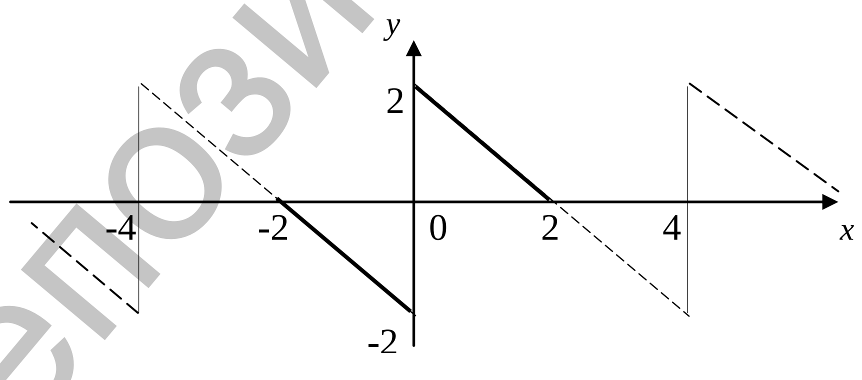

Рис. 11.

Так как функция нечетная, то $a_n = 0$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

$$b_n = \int\limits_{0}^{2}(2 - x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \begin{vmatrix} u = 2 - x, \quad du = -dx \\ dv = \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx, \ v = -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2(2-x)}{\pi n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Bigg|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx =$$

$$= \frac{4}{\pi n} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{\pi n}.$$

Подставляя полученные коэффициенты в ряд Фурье, получим

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right).$$

На промежутке (0; 2) этот ряд представляет собой заданную функцию.

Замечание. Функцию $y = 2 - x$, заданную на отрезке [0; 2], можно разложить в ряд Фурье, продолжив ее четным образом. Тогда функция будет задана системой уравнений

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & при \quad -2 \le x < 0, \\ 2-x & при \quad 0 \le x < 2. \end{cases}$$

Коэффициенты ряда Фурье будут находиться по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \quad b_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ следующим образом:

а) $f(x) = x^3, \; -\pi \le x \le \pi$; *б*) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 4x-3, & 0 \le x \le \pi; \end{cases}$ *г*) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x-1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

2. Разложить в ряд Фурье $2l$-периодическую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-l; l]$ следующим образом:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ x, & 0 < x \le 2; \end{cases} \quad l = 2;$

б) $f(x) = 1 - |x|, \; -1 < x < 1, \; l = 1.$

3. Разложить функцию $f(x) = x^3$ в ряд Фурье:

а) на отрезке $[-\pi; \pi]$; *б*) на отрезке $[0; 2\pi]$; сделать чертеж.

5. Разложить в ряд Фурье функции, графики которых изображены на рисунках 12, 13 и 14.

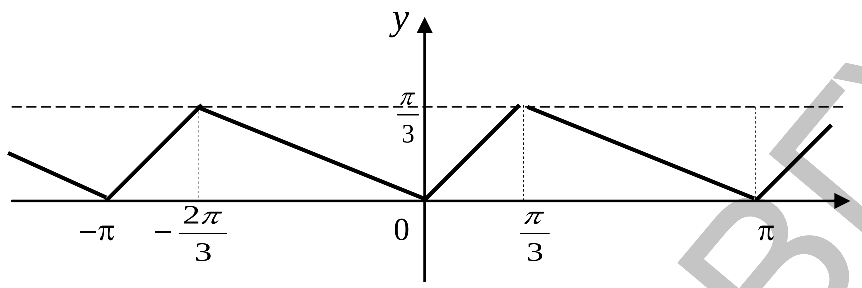

Рис. 12.

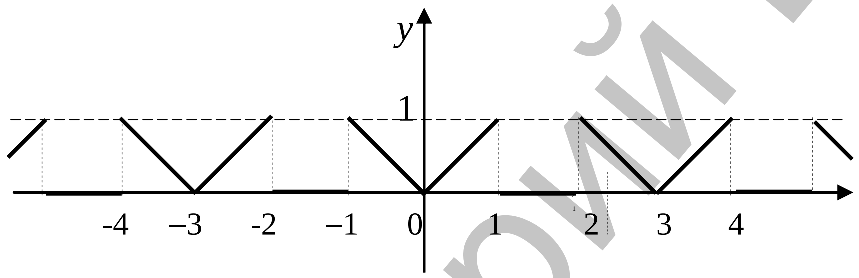

Рис. 13.

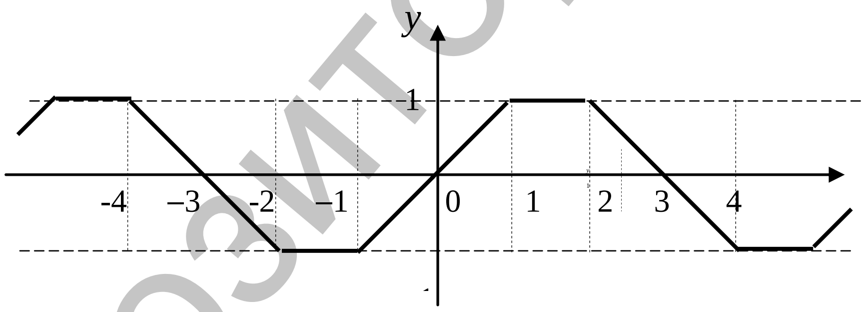

Рис. 14.

6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0; \pi)$, продолжив (доопределив) ее четным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

а) $f(x) = x$; *б*) $f(x) = (x-1)^2 e^{-3x}$;

в) $f(x) = e^{-3x}$; *г*) $f(x) = \operatorname{sh} x$.

7. Воспользовавшись разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье на указанном интервале, найти сумму данного числового ряда:

а) $f(x) = |x|$, $(-\pi; \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$; *b*) $f(x) = |\sin x|$, $(-\pi; \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т. Основы математического анализа. Ч. 2. – М.: Наука, 1980.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 2. – М.: Наука, 1979.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 2. – М.: Наука, 1990.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. – М.: Наука, 1989.

Дополнительная литература

5. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. – Мінск: Навука і тэхніка. 1991.
6. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: Высшая школа, 1986.
7. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматгиз, 2001.
8. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Поверхностные интегралы. Элементы теории поля. – Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2013.

Учебное издание

СУРИН Татьяна Леонидовна
ИВАНОВА Жанна Викторовна
ШЕРЕГОВ Сергей Викторович

СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать . .2015. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,52. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.