Ольтрамар Г.

Опыт
женерализационного
вычисления

1895 г.

Габріель Ольтрамаръ,

профессоръ математики въ [illegible].

ОПЫТЪ ЖЕНЕРАЛИЗАЦІОННАГО ВЫЧИСЛЕНІЯ.

ПЕРЕВОДЪ СЪ ФРАНЦУЗСКАГО

В. Обреимова,

бывшаго учителя математики въ Екатеринбургской гимназіи.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1895.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 3 Августа 1895 года.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ видѣ предисловія къ нашему опыту мы дадимъ здѣсь мнѣніе о нашемъ трудѣ доктора математики г. Лезана, извѣстнаго въ наукѣ весьма важными и многочисленными учеными изданіями. Вотъ что онъ говоритъ въ объяснительной статьѣ, помѣщенной имъ въ большомъ энциклопедическомъ словарѣ и относящейся къ слову [généralisation (calcul de)] *женерализація* или *генерализація*.

„Женерализаціонное вычисленіе обязано своимъ открытіемъ ученому иностранцу г. Ольтрамару, декану женевскаго университета. Мы не задаемся цѣлью излагать здѣсь всю послѣдовательность идей, которая привела автора къ его открытію. Мы желаемъ единственно лишь объяснить сущность этого открытія и указать вкратцѣ главнѣйшія его приложенія.

Чтобы легче уловить основную идею вычисленія, намъ кажется— его слѣдуетъ разсматривать какъ развитіе способа вычисленія производныхъ съ какимъ угодно показателемъ, изобрѣтеннаго Льювиллемъ. Подобно этому послѣднему г. Ольтрамаръ считаетъ, что всякая функція можетъ быть разложена въ показательный рядъ; онъ полагаетъ, что если a есть независимая перемѣнная, то

$$\varphi(a) = A_\alpha e^{\alpha a} + A_\beta e^{\beta a} + A_\gamma e^{\gamma a} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ α, β, γ ... некоторыя постоянныя вещественныя или мнимыя величины, число которыхъ конечное или безконечно большое. Допустивъ это, онъ выражаетъ строку второй части (1) равенства при помощи особаго обозначенія

$$\varphi(a) = G e^{au}.$$

Послѣднее хотя и можетъ на первый взглядъ показаться страннымъ, но въ сущности выражаетъ лишь соотношеніе (1) или $\varphi(a) = \Sigma A_u e^{au}$, въ которомъ u должно послѣдовательно получать значенія α, β, γ ... При такомъ условіи говорятъ, что $\varphi(a)$ произошло изъ e^{au} помощью женерализаціи.

Выяснивъ это основное понятіе, припомнимъ, что Льювилль назвалъ *производной указателя* μ отъ функціи φ, обозначивъ ее через $\dfrac{d^\mu \varphi}{da^\mu}$, количество

$$A_\alpha e^{a\alpha} \alpha^\mu + A_\beta e^{a\beta} \beta^\mu + A_\gamma e^{a\gamma} \gamma^\mu + \ldots$$

а г. Ольтрамаръ возъимѣлъ мысль обобщить это вычисленіе, взявъ вмѣсто только что написаннаго выраженія

$$A_\alpha e^{a\alpha} \psi(\alpha) + A_\beta e^{a\beta} \psi(\beta) + A_\gamma e^{a\gamma} \psi(\gamma) + \ldots$$

гдѣ ψ не содержитъ перемѣннаго a. Согласно съ обозначеніемъ указаннымъ выше, это послѣднее выраженіе можетъ быть написано въ видѣ

$$G e^{au} \psi(u) \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Такъ что если $G e^{au}$ выражаетъ $\varphi(a)$, $G e^{au} \psi(u)$ можно разсматривать какъ результатъ нѣкоторой операціи надъ тою же функціей $\varphi(a)$. Напримѣръ $G e^{au} u^\mu$ есть дифференціальный коэффиціентъ функціи φ порядка μ. Не слѣдуетъ терять изъ виду, что выраженіе $e^{au} \psi(u)$ есть нѣкоторая функція отъ a и отъ u. Такимъ образомъ выраженіе (3) вполнѣ равносильно выраженію $GF(u)$, а это послѣднее представляетъ собою нѣкоторую операцію, выполненную надъ $\varphi(a)$. Эту-то именно операцію женерализаціонное вычисленіе и имѣетъ цѣлью опредѣлить.

Кромѣ того чрезвычайно легко показать, наоборотъ — что различныя операціи, употребляемыя въ анализѣ, суть не что иное, какъ частные случаи женерализаціи, по крайней мѣрѣ это относится къ линейнымъ распредѣлительнымъ операціямъ.

Пояснимъ сказанное примѣромъ. Возьмемъ операцію $\delta\varphi(a)$, опредѣляемую соотношеніемъ

$$\delta\varphi(a) = \varphi'(a) - \varphi(a).$$

Но весьма легко видѣть, что эта операція есть не что иное какъ

$$\delta\varphi(a) = G e^{au}(u-1),$$

слѣдовательно $\delta\varphi(a)$ представляетъ собою частный случай женерализаціи.

Точно тоже можно сказать и о $\delta^n\varphi(a)$, которое есть не что иное, какъ $G e^{au}(u-1)^n$, а потому

$$\delta^n\varphi(a) = G e^{au}(u-1)^n = G e^{au} u^n - n G e^{au} u^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} G e^{au} u^{n-2} - \ldots$$

$$\delta^n\varphi(a) = \varphi^{(n)}(a) - \frac{n}{1}\varphi^{(n-1)}(a) + \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi^{(n-2)}(a) - \ldots$$

Не смотря на всю свою простоту, этотъ примѣръ уже показываетъ, какую пользу можно извлечь изъ женерализаціоннаго вычисленія, въ томъ случаѣ, когда мы имѣемъ дѣло съ линейными операціями; наоборотъ, къ нелинейнымъ операціямъ это вычисленіе не примѣняется совершенно; поэтому его можно разсматривать какъ синтезъ или общую теорію линейныхъ операцій.

Кромѣ того, ничто не обязываетъ насъ ограничиваться функціей одной перемѣнной; мы можемъ принять за характеристическое уравненіе

$$\varphi\,(a,\ b,\ c\ \ldots) = Ge^{au+bv+cw+\,\ldots}$$

и вывести отсюда значеніе символа $GF\ (u,\ v,\ w\ \ldots.)$.

Авторъ далъ весьма много примѣровъ опредѣленій значенія $GF\,(u)$ относительно весьма различныхъ функцій и, сверхъ того, указалъ способъ, позволяющій вывести изъ $G\psi\,(u)$ и $G\chi\,(u)$ значеніе $G\varphi\,(u)\,.\,\chi\,(u)$. Наконецъ, онъ вывелъ такъ же общую формулу, заключающую два двойныхъ интеграла и дающую значеніе $GF\,(u)$, какова бы ни была функція $F\,(u)$.

Такимъ образомъ женерализацію можно разсматривать вполнѣ опредѣленной операціей, какова бы ни была функція, надъ которой она производится.

Что касается приложеній, то они особенно интересны и обнимаютъ собой довольно обширный кругъ. Чтобы составить себѣ о нихъ понятіе, достаточно, напримѣръ, замѣтить, что всякое тожество, заключающее въ себѣ неопредѣленное количество u, можетъ быть преобразовано въ другое, куда войдетъ произвольная функція и это единственно при помощи женерализаціи даннаго тожества. Едвали нужно прибавлять, что указанный способъ дастъ лишь въ томъ случаѣ результатъ дѣйствительно новый, когда оба члена даннаго тожества будутъ имѣть весьма различныя формы.

Г. Ольтрамаръ показалъ на многочисленныхъ примѣрахъ, что этотъ способъ, если его примѣнить какъ слѣдуетъ, доставляетъ значеніе нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ, до сихъ поръ неизвѣстныхъ. Онъ даетъ также отношеніе между нѣсколькими опредѣленными интегралами, ни одинъ изъ которыхъ не могъ быть полученъ отдѣльно. Другая группа приложеній относится къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій,—къ обратному вычисленію интеграловъ и другимъ подобнымъ задачамъ. Задачи эти, считающіяся различными въ обыкновенномъ вычисленіи, являются, наоборотъ, тѣсно связанными между собою въ вычисленіи женерализаціонномъ; даже болѣе, они суть не что иное, какъ частные случаи одной болѣе общей задачи. И эта задача состоитъ въ слѣдующемъ:

Дано значенiе $G e^{au} F(u)$, *гдѣ* $F(u)$ *обозначаетъ данную функцiю; найти значенiе функцiи* $\varphi(a)$, *входящей въ составъ характеристическаго уравненiя* $G e^{au} = \varphi(a)$.

Задача эта называется рѣшенiемъ символическаго уравненiя

$$G e^{au} F(u) = \chi(a).$$

Отсюда слѣдуетъ, въ частности, что интегрированiе всякаго линейнаго уравненiя съ постоянными или перемѣнными коэффицiентами, можно разсматривать какъ рѣшенiе символическаго уравненiя.

Третья категорiя приложенiй относится къ линейнымъ уравненiямъ съ частными производными; для этого достаточно обобщить все сказанное нами раньше на случай функцiи двухъ перемѣнныхъ и опредѣлить неизвѣстное z отношенiемъ

$$z = G e^{xu+yv},$$

такъ, какъ мы объ этомъ уже говорили.

Есть еще одинъ способъ, состоящiй въ отысканiи частнаго интеграла даннаго уравненiя, содержащаго произвольную постоянную; женерализуя этотъ интегралъ относительно постоянной, получаемъ новый интегралъ, содержащiй произвольную функцiю, такую, которая входитъ въ опредѣленiе $G e^{au} = \varphi(a)$.

Пользуясь аналогичными способами легко свести вопросы на вычисленiе конечныхъ разностей къ задачамъ женерализацiоннаго вычисленiя.

Было бы ошибочно однако видѣть въ женерализацiонномъ вычисленiи нѣчто законченное, обработанное во всѣхъ деталяхъ. Геометры, для которыхъ важнѣе всего точность въ математическихъ наукахъ, могутъ безъ всякаго сомнѣнiя возразить противъ того или другого доказательства и принять нѣкоторыя формулы съ большими ограниченiями относительно входящихъ въ нихъ произвольныхъ функцiй. Но даже въ этомъ видѣ указанный нами способъ составляетъ не менѣе цѣнное орудiе изслѣдованiя и весьма удачный опытъ математическаго синтеза. Въ этомъ отношенiи женерализацiонное вычисленiе заслуживаетъ полнаго вниманiя геометровъ.

C. A. Laisant.

ВВЕДЕНІЕ.

Предположимъ, что функція $\varphi(x)$ равна алгебраической суммѣ нѣсколькихъ другихъ функцій, и δ выражаетъ знакъ такой операціи надъ $\varphi(x)$, что, положивъ

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \varphi_3(x) + \ldots$$

можно будетъ вывести равенство

$$\delta\varphi(x) = \delta\varphi_1(x) + \delta\varphi_2(x) + \delta\varphi_3(x) + \ldots$$

Пусть $\psi(\delta)$ представляетъ собою функцію δ, которую мы предположимъ однозначущей, тогда символическое выраженіе

$$\psi(\delta)\,\varphi(x)$$

дастъ намъ результатъ операціи δ надъ $\varphi(x)$, при чемъ $\psi(\delta)$ должно быть предварительно разложено въ строку по степенямъ δ.

Напримѣръ, если бы δ обозначало дифференціальный коэффиціентъ D отъ какой нибудь функціи и если бы мы взяли выраженіе $\frac{1}{1+D}\varphi(x)$, то получили бы

$$\frac{1}{1+D}\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi'(x) + \varphi''(x) - \ldots,$$

гдѣ
$$\varphi^{(n)}(x) = D^n\varphi(x).$$

Подобнаго рода разложеніе даннаго символическаго выраженія можетъ быть довольно затруднительно въ томъ случаѣ, когда функція $\varphi(x)$ взята во всей ея общности.

Поэтому, чтобы воспользоваться этимъ соотношеніемъ, необходимо дать ему наиболѣе простую форму.

Такъ, съ помощью интеграла

$$\int_0^\infty e^{-v} v^{n-1}\,dv = \Gamma(n)$$

мы можемъ положить

$$\frac{1}{1+D}\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi'(x) + \varphi''(x) - \ldots = \int_0^\infty e^{-v}\varphi(x-v)\,dv.$$

Подобнымъ же образомъ, взявъ выраженіе $\cos D\,\varphi(x)$ мы могли бы написать

$$\cos D\varphi(x)=\varphi(x)-\frac{\varphi''(x)}{1.2}+\frac{\varphi^{\text{IV}}(x)}{1.2.3.4}-\ .\ \ .\ \ .=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x+\sqrt{-1})-\varphi(x-\sqrt{-1})\right\}.$$

Смотря по формѣ функцій $\psi(\delta)$ и по природѣ операціи, выраженной знакомъ δ, болѣе или менѣе легко будетъ выразить значеніе $\psi(\delta)\,\varphi(x)$ въ конечной формѣ. Впрочемъ иногда, не смотря на то что $\psi(\delta)$ неразложима по степенямъ δ, все таки символическое выраженіе имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе.

Такъ, напримѣръ, выраженія

$$\log D.\ \varphi(x);\qquad \Gamma(D)\,\varphi(x)$$

таковы, что ихъ значенія не могутъ быть опредѣлены непосредственно при помощи разложенія $\log(D)$ и $\Gamma(D)$ въ строки, расположенныя по степенямъ D, а между тѣмъ они получаются посредствомъ интеграловъ

$$\log D\varphi(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-v}\varphi(x)-\varphi(x-v)}{v}\,dv$$

$$\Gamma(D)\,\varphi(x)=\int_0^\infty e^{-v}\varphi(x-\log v)\frac{dv}{v}.$$

Въ предлагаемомъ опытѣ мы задаемся цѣлью дать способъ для опредѣленія значенія этихъ выраженій, а также показать нѣсколько вытекающихъ изъ него слѣдствій.

Вычисленіе, начала котораго мы здѣсь предполагаемъ изложить (назвавъ его женерализаціоннымъ вычисленіемъ), по нашему мнѣнію должно занять важное мѣсто въ высшемъ анализѣ.

Однородность, легкость и въ то же время приложимость вычисленія ко множеству весьма важныхъ вопросовъ позволяетъ надѣяться, что оно найдетъ себѣ мѣсто въ программѣ высшихъ учебныхъ заведеній и съ успѣхомъ замѣнитъ собою много весьма сложныхъ способовъ, къ которымъ приходится прибѣгать въ вопросахъ, требующихъ помощи дифференціальнаго и интегральнаго вычисленій.

Предварительныя понятія.

§ 1. Пусть $\varphi(a)$ будетъ функціей перемѣннаго a (мы ее будемъ предполагать всегда однозначущей). Мы имѣемъ всегда возможность предположить, что эта функція можетъ быть представлена конечнымъ или безконечнымъ рядомъ членовъ, содержащимъ въ себѣ показательное выраженіе e^a, возвышенное въ различныя степени *), и, вслѣдствіе этого, можемъ писать

$$\varphi(a) = C_\alpha e^{\alpha a} + C_\beta e^{\beta a} + C_\gamma e^{\gamma a} + \ldots .$$

Допустивъ это, если мы обозначимъ черезъ $f(u)$ функцію перемѣннаго u, такого свойства, что для $u = \alpha$, $f(\alpha) = C_\alpha$, для $u = \beta$,

---

*) Нѣтъ никакого сомнѣнія, говоритъ Пуассонъ въ своей теоріи теплоты, что выраженіе $\varphi(a)$ въ видѣ показательныхъ, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, рядовъ всегда должно представлять нѣкоторую функцію a, и онъ обращаетъ вниманіе на то обстоятельство, что показательное выраженіе a^m можетъ быть дано уравненіемъ

$$a^m = \left(\frac{e^{a\varepsilon} - 1}{\varepsilon}\right)^m,$$

гдѣ ε обозначаетъ количество безконечно малое, что даетъ возможность выразить a^m въ видѣ показательнаго ряда.

Кромѣ того, въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ:

Пусть $\varphi(a)$ будетъ нѣкоторая функція перемѣннаго a; мы можемъ всегда предположить, что

$$\varphi(a) = \Sigma\, A_m a^m,$$

гдѣ m обозначаетъ дѣйствительное или мнимое количество.

Положивъ

$$a = \log(1 + b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \ldots,$$

будемъ имѣть

$$\varphi[\log(1 + b)] = \Sigma\, B_n b^n,$$

и такъ какъ $b = e^a - 1$, то

$$\varphi(a) = \Sigma\, C_p e^{pa}.$$

$f(\beta) = C_\beta$, для $u = \gamma$, $f(\gamma) = C_\gamma$ и т. д., условіе, которому всегда легко удовлетворить при помощи извѣстныхъ формулъ интерполяціи, то функція $\varphi(a)$ можетъ быть выражена въ формѣ:

$$\varphi(a) = f(\alpha)\, e^{\alpha a} + f(\beta)\, e^{\beta a} + f(\gamma)\, e^{\gamma a} + \ldots$$

или написана такъ:

$$\varphi(a) = \sum f(u)\, e^{au}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

гдѣ знакъ Σ простирается на всѣ значенія u равныя α, β, γ ....

Функція $f(u)$ можетъ имѣть различныя формы, зависящія отъ принятыхъ формулъ интерполяціи; отсюда слѣдуетъ, что функцію $\varphi(a)$ можно представить множествомъ формъ, аналогичныхъ съ предъидущей, въ которыхъ функція $f(u)$ и значеніе ея перемѣнной варіировались бы соотвѣтствующимъ образомъ.

§ 2. Не смотря на то, что функція может быть разложена въ показательный рядъ различными способами, мы однако можемъ, оставляя всю ширину значеній величинамъ α, β, γ .... равно какъ и формѣ функціи $f(u)$, когда система разложенія въ рядъ принята,— установить отношенія между этой функціей $\varphi(a)$ и другой функціей $\psi(a)$, находящейся съ первой въ нѣкоторомъ соотношеніи.

Такъ, напримѣръ, если бы мы предположили, что функція $\varphi(a)$ разложена въ показательный рядъ при помощи формулы (a), то вывели бы дифференцированіемъ

$$\frac{d^n \varphi(a)}{da^n} = \sum f(u)\, u^n\, e^{au},$$

такъ что дифференціальный коэффиціентъ какого угодно порядка можетъ быть въ свою очередь разложенъ въ показательный рядъ посредствомъ умноженія каждаго члена принятой строки на u^n.

Точно такъ же мы найдемъ, что

$$\int \varphi(a)\, da$$

будетъ выражаться суммой

$$\sum \frac{f(u)}{u}\, e^{au},$$

и, слѣдовательно, можетъ быть разложенъ въ показательный рядъ посредствомъ дѣленія на u каждаго члена разложенія принятаго для $\varphi(a)$; въ этомъ случаѣ слѣдуетъ дополнить значеніе интеграла произвольнымъ постояннымъ количествомъ. Для большей простоты мы предположимъ, что $\Sigma f(u) = G$ и вмѣсто равенства (a) напишемъ

$$G\, e^{au} = \varphi(a),$$

разсматривая G какъ знакъ, указывающій на нѣкоторое символическое дѣйствіе, которое слѣдуетъ произвести надъ e^{au}, чтобы получить $\varphi(a)$.

Это дѣйствіе, будучи въ сущности ничѣмъ инымъ, какъ суммованіемъ, производитъ исключеніе u, такъ что въ полученномъ равенствѣ функція $\varphi(a)$ опредѣляется выраженіемъ $G\, e^{au}$. Если бы мы хотѣли опредѣлить символически другія функціи $\chi(a)$, $\xi(a)$ ... то слѣдовало бы положить $Ge^{au'} = \chi(a)$, $Ge^{au''} = \xi(a)$ ... и т. д. Указанное дѣйствіе мы будемъ называть *женерализаціей*, а количества u, u', u'' ... *перемѣнными женерализаціи.*

§ **3**. Вообще, разъ принята какая нибудь неизмѣнная система разложенія функціи въ строку, эту функцію можно выразить уравненіемъ

$$\varphi(a) = \sum f(u)\, e^{au} = Ge^{au}.$$

Между тѣмъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, не измѣняя ни вида функціи, ни значенія перемѣннаго u, мы можемъ одну и ту же функцію опредѣлить различными уравненіями.

Такъ напримѣръ, если бы функція удовлетворяла условію

$$\psi(a) = \psi(-a),$$

то ее можно было бы представить двумя тожествами

$$\psi(a) = G\, e^{au}$$
$$\psi(a) = G\, e^{-au}$$

такъ какъ она не измѣняется съ перемѣной знака количества a.

Мы замѣтимъ то же самое, если разсмотримъ функцію

$$\psi(a) = \varphi(a^n) \qquad (n > 1);$$

такъ какъ въ этомъ случаѣ для выраженія функціи мы имѣемъ n

отношенiй

$$G e^{a\left(\cos\frac{2m\pi}{n} + \sin\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}\right)} = \psi(a),$$

гдѣ m—цѣлое число меньшее n.

Во избѣжанiе могущихъ произойти ошибокъ, вслѣдствiе того, что одна и та же функцiя можетъ опредѣляться различными удовлетворяемыми ею уравненiями, мы будемъ предполагать, что она заключаетъ въ себѣ постоянное x, прибавленное къ перемѣнному a и условимся считать, что

$$G\,e^{au} = \varphi(x + a).$$

Это отношенiе опредѣляетъ точно функцiю φ во всѣхъ случаяхъ, только мы не можемъ полагать $x = 0$ въ томъ случаѣ, когда эта функцiя вслѣдствiе такого частнаго значенiя постояннаго x, можетъ принять форму $\varphi(a^n)$ $(n > 1)$.

§ 4. Дѣйствiе обозначенное символически черезъ G въ сущности есть не что иное, какъ суммованiе и, вслѣдствiе этого, оно распространяется на всѣ составныя части даннаго выраженiя, такъ что мы должны допустить, что если

$$\psi(u) = \psi_1(u) + \psi_2(u) + \psi_3(u) + \ldots$$

то

$$G\psi(u) = G\psi_1(u) + G\psi_2(u) + G\psi_3(u) + \ldots$$

Отсюда слѣдуетъ, что если a—постоянное количество, то

$$Ga\psi(u) = aG\psi(u)$$

и далѣе, вообще

$$dG = Gd, \quad \int G = G\int \text{ и. т. д.,}$$

измѣняя порядокъ дѣйствiя.

Условившись въ этомъ, мы можемъ представить себѣ дѣйствiе, выражаемое знакомъ G, въ весьма простой формѣ, взявъ за уравненiе, опредѣляющее функцiю φ:

$$G\,e^{au} = \varphi(x+a).$$

Въ самомъ дѣлѣ, тожество

$$e^{au} = 1 + \frac{au}{1} + \frac{a^2u^2}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{a^n u^n}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n} + \ldots$$

даетъ

$$G e^{au} = G1 + \frac{a}{1} Gu + \frac{a^2}{1.2} Gu^2 + \ldots + \frac{a^n}{1.2\ldots n} Gu^n + \ldots$$

съ другой стороны по формулѣ Тейлора

$$\varphi(x + a) = \varphi(x) + \frac{a}{1}\varphi'(x) + \frac{a^2}{1.2}\varphi''(x) + \ldots +$$

$$+ \frac{a^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(x) + \ldots$$

но эти формулы будутъ совершенно одинаковы, если дѣйствіе G таково, что

$$G e^{au} = \varphi(x + a)$$

$$G u^n = \varphi^{(n)}(x) = D_x^n \varphi(x)$$

при какомъ угодно значеніи даннаго количества n.

Легко убѣдиться, что значеніе функціи φ вполнѣ опредѣляется первою изъ этихъ формулъ, потому что вторая представляетъ лишь ея слѣдствіе.

Эта формула (1) показываетъ, что когда существуетъ равенство

$$G e^{au} = \varphi(x + a)$$

для выраженія функціи φ, то, обозначивъ черезъ $D_x \varphi(x)$ дифференціальный коэффиціентъ $\varphi(x)$, мы должны принять, что $G\psi(u)$ отвѣчаетъ значенію $\psi(D_x)$, если разложить $\psi(D_x)$ въ строку по степенямъ D_x и затѣмъ произвести указанныя дифференцированія.

§ 5. Женерализаціонное вычисленіе можетъ быть распространено на функцію нѣсколькихъ перемѣнныхъ

$$\varphi(a, b, c, \ldots),$$

которую можно представить себѣ въ видѣ строки, расположенной по степенямъ показательныхъ выраженій.

Такимъ образомъ, если мы предположимъ, что

$$G e^{au+bv+cw+\ldots} = \varphi(x+a,\ y+b,\ z+c\ \ldots)$$

то, разлагая показательное выраженіе, будемъ имѣть

$$G\left[1+\frac{au+bv+cw+\ldots}{1}+\frac{(au+bv+cw+\ldots)^2}{1.2}+\ldots\right]=$$
$$=\varphi(x+a,\ y+b,\ z+c\ \ldots).$$

Но съ другой стороны теорема Тейлора, примѣненная къ разложенію функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ, намъ дастъ

$$\begin{aligned}\varphi(x+a,\ y+b,\ z+c\ldots)=\varphi(x,\ y,\ z\ldots)&+\frac{d\varphi}{dx}a+\frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{a^2}{1.2}+\ldots\\&+\frac{d\varphi}{dy}b+2\frac{d^2\varphi}{dxdy}\frac{ab}{1.2}+\ldots\\&+\frac{d\varphi}{dz}c+2\frac{d^2\varphi}{dxdz}\frac{ac}{1.2}+\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

съ помощью этихъ двухъ тождествъ мы имѣемъ

$$G\,1=\varphi(x,\ y,\ z\ \ldots)$$

$$Gu=\frac{d\varphi}{dx},\quad Gv=\frac{d\varphi}{dy},\quad Gw=\frac{d\varphi}{dz},\ \ldots$$

$$Gu^2=\frac{d^2\varphi}{dx^2},\quad Gv^2=\frac{d^2\varphi}{dy^2},\quad Gw^2=\frac{d^2\varphi}{dz^2},\ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда слѣдуетъ, что если мы разложимъ показательное выраженіе $e^{au+bv+cw+\ldots}$ въ строку, гдѣ, замѣнимъ u знакомъ D_x, v—знакомъ D_y и w—знакомъ D_z и т. д., а потомъ произведемъ дифференцированіе, то получимъ значеніе

$$G\,e^{au+bv+cw+\ldots}.$$

Мы должны предположить какъ слѣдствіе, что если требуется опредѣлить значеніе $G\psi(u,\ v,\ w\ \ldots)$ полагая

$$G\,e^{au+bv+cw+\ldots}=\varphi(x+a,\ y+b,\ z+c\ \ldots),$$

то достаточно замѣнить выраженіе u черезъ D_x, v—черезъ D_y, w—черезъ D_z и т. д., затѣмъ разложить

$$\psi(D_x,\ D_y,\ D_z\ \ldots)\ \varphi(x,\ y,\ z\ \ldots)$$

въ строку по степенямъ D_x, D_y, D_z ... и наконецъ произвести означенныя дифференцированія.

§ 6. Способъ женерализаціи, который мы предполагаемъ дать, основывается на опредѣленіи символическаго дѣйствія G, производимаго надъ нѣкоторой данной функціей.

Разсмотримъ сначала функцію одного перемѣннаго; легко понять, что дѣйствіе $G\psi(u)$ можетъ имѣть настоящее значеніе лишь въ томъ случаѣ, когда предполагается равенство

$$Ge^{au}=\varphi(x+a),\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

при чемъ значеніе $G\psi(u)$ должно быть выведено прямо или косвенно изъ этого отношенія, которое мы назовемъ *характеристическимъ уравненіемъ*.

Такимъ образомъ, дифференцируя это уравненіе относительно a, получимъ

$$Ge^{au}\,u=\frac{d}{da}\varphi(x+a)=\frac{d}{dx}\varphi(x+a)$$

$$Ge^{au}\,u^2=\frac{d^2}{da^2}\varphi(x+a)=\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x+a)$$

и вообще

$$Ge^{au}\,u^n=\frac{d^n}{da^n}\varphi(x+a)=\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x+a).$$

Полагая въ этихъ тожествахъ $a=0$, мы получимъ

$$G1=\varphi(x),\ Gu=\varphi'(x),\ Gu^2=\varphi''(x)\ \ldots\ Gu^n=\varphi^{(n)}(u).\ .\ .\ (2)$$

Если въ тождествѣ (1) мы положимъ послѣдовательно $a=y\sqrt{-1}$ и $a=-y\sqrt{-1}$, то будемъ имѣть

$$Ge^{yu\sqrt{-1}}=\varphi(x+y\sqrt{-1})$$

$$Ge^{-yu\sqrt{-1}}=\varphi(x-y\sqrt{-1})$$

и слѣдовательно

$$G \sin yu = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) \right\}$$

$$G \cos yu = \frac{1}{2} \left\{ \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1}) \right\},$$

Съ помощью этихъ двухъ формулъ и принимая въ разсчетъ, что

$$\cos y(v - u) = \cos yv \cos yu + \sin yv \sin yu,$$

получимъ слѣдующее отношеніе

$$G \cos y(v-u) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi(x + y\sqrt{-1})\, e^{-yv\sqrt{-1}} + \right.$$

$$\left. + \varphi(x - y\sqrt{-1})\, e^{yv\sqrt{-1}} \right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

§ 7. Чтобы дать общее опредѣленіе значенія $G\psi(u)$, разсмотримъ извѣстный интегралъ

$$e^{-hu} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos hy\, dy \frac{u}{y^2 + u^2}$$

и замѣчая, что

$$\frac{u}{y^2 + u^2} = \int_0^\infty e^{-tu} \cos ty\, dt,$$

будемъ имѣть отношеніе

$$e^{-hu} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tu} \cos hy \cos ty\, dy\, dt \quad \ldots\ldots (1)$$

Женерализуя обѣ части этого тожества относительно u и принявъ за характеристическое уравненіе $G\, e^{au} = \varphi(x + a)$, получимъ

$$\varphi(x - h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x - t) \cos hy \cos ty\, dy\, dt \quad \ldots (2)$$

Точно такъ же, исходя изъ извѣстнаго интеграла

$$e^{-hu} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin hy\, dy\, \frac{y}{y^2 + u^2}$$

и замѣчая, что

$$\frac{y}{y^2 + u^2} = \int_0^\infty e^{-tu} \sin ty\, dy,$$

получимъ

$$e^{-hu} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-tu} \sin hy \sin ty\, dy\, dt, \quad \ldots \quad (3)$$

женерализуя которое, найдемъ

$$\varphi(x - h) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x - t) \sin hy \sin ty\, dy\, dt. \quad \ldots \quad (4)$$

Полагая въ формулахъ (2) и (4) $\varphi(x)$ равнымъ постоянному количеству, получаемъ два интеграла

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \cos hy \cos ty\, dy\, dt = \frac{\pi}{2} \quad \ldots \quad (5)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \sin hy \sin ty\, dy\, dt = \frac{\pi}{2} \quad \ldots \quad (6)$$

Теперь, если положимъ въ формулѣ (2) $u = u + v$, то будемъ имѣть

$$e^{-hu-hv} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-tu-tv} \cos hy \cos ty\, dy\, dt;$$

женерализуя это новое тожество сначала относительно u, потомъ относительно v, принявъ въ первомъ случаѣ за характеристическое уравненіе $Ge^{au} = \varphi(x + a)$, а во второмъ $Ge^{av} = \chi(z + a)$, получимъ:

$$\varphi(x - h)\chi(z - h) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x - t)\chi(z - t) \cos ht \cos ty\, dy\, dt.$$

Комбинируя эту формулу съ формулой (2), находимъ

$$\chi(x-h)\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x-t)\cos hy \cos ty\, dy\, dt =$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x-t)\,\chi(z-t)\cos hy \cos ty\, dy\, dt.$$

Это уравненіе показываетъ, что въ выраженіи

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \cos hy \cos ty\, \varphi(x-t)\,\chi(x-t)\, dy\, dt$$

можно вынести множитель $\chi(x-t)$ изъ-подъ знака интеграла, замѣняя при этомъ перемѣнное t черезъ h, и наоборотъ можно внести множитель $\chi(x-h)$ подъ знакъ интеграла, замѣняя въ немъ h черезъ t.

Исходя изъ формулы (3), мы получимъ тоже относительно интеграла

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x-t)\,\chi(z-t)\sin hy \sin ty\, dy\, dt.$$

Доказавъ это, замѣнимъ въ тождествѣ

$$\psi(h)=\frac{\psi(h)+\psi(-h)}{\pi}\,\frac{\pi}{2}+\frac{\psi(h)-\psi(-h)}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$\frac{\pi}{2}$ ею значеніями, выраженными помощью формулъ (5) и (6); тогда мы будемъ имѣть

$$\psi(h)=\frac{\psi(h)+\psi(-h)}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos hy \cos ty\, dy\, dt+$$

$$+\frac{\psi(h)-\psi(-h)}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin hy \sin ty\, dy\, dt,$$

что можно написать, внеся множители $\psi(h)+\psi(-h)$ и $\psi(h)-\psi(-h)$

подъ знакъ интеграла, въ слѣдующемъ видѣ

$$\psi(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \{\psi(t) + \psi(-t)\} \cos hy \cos ty \, dy \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \{\psi(t) - \psi(-t)\} \sin hy \sin ty \, dy \, dt .$$

Послѣднее равенство можетъ быть выражено въ формѣ

$$\psi(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \psi(t) \cos y\,(t-h)\, dt\right] dy .$$

Это—формула Фурье. Она простирается на всѣ дѣйствительныя, положительныя и отрицательныя значенія перемѣннаго h, и можетъ быть примѣнена къ какой угодно функціи—непрерывной или прерывной; единственное условіе, отъ котораго должна зависѣть функція, состоитъ въ томъ, чтобы она обладала только однимъ значеніемъ для каждаго изъ значеній перемѣнной величины.

Замѣняя въ этой формулѣ h черезъ u, и t—черезъ v, мы выведемъ при помощи формулы (3) женерализаціи (предъидущій §)

$$G\,\psi(u) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \psi(v)\,\varphi(x + y\sqrt{-1})\, e^{-yv\sqrt{-1}}\, dv \,.\, dy, \qquad (7)$$

что можно написать въ видѣ

$$G\,\psi(u) = \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \{\psi(v) + \psi(-v)\}\,\{\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \\ &\qquad\qquad + \varphi(x - y\sqrt{-1})\}\cos yv\, dv\, dy \\ &+ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty \{\psi(v) - \psi(-v)\}\,\{\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \\ &\qquad\qquad - \varphi(x - y\sqrt{-1})\}\sin yv\, dv\, dy \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

§ 8. Если мы положимъ въ этой формулѣ $\psi(u)=e^{-au^2}$, то получимъ

$$G\,e^{-au^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-av^2}\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+$$

$$+\varphi(x-y\sqrt{-1})\}\cos yv\,dv\,dy.$$

Замѣтивъ, что

$$\int_0^\infty e^{-av^2}\cos yv\,dv=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\,e^{-\frac{y^2}{4a}}$$

мы будемъ имѣть, полагая $y=2\sqrt{a}\,.\,y$

$$G\,e^{-au^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\,\varphi(x+2y\sqrt{a}\sqrt{-1})\,dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2}\{\varphi(x+2y\sqrt{a}\sqrt{-1})+\varphi(x-2y\sqrt{a}\sqrt{-1})\}\,dy\;.\;(1)$$

Измѣнивъ a въ $-a$ и y въ $-y$, найдемъ

$$G\,e^{au^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\,\varphi(x+2y\sqrt{a})\,dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0 e^{-y^2}\{\varphi(x+2y\sqrt{a})+\varphi(x-2y\sqrt{a})\}\,dy\;.\;.\;.\;(2)$$

Положимъ, что $\psi(u)=\dfrac{1}{e^{au}+e^{-au}}$, тогда получимъ

$$G\,\frac{1}{e^{au}+e^{-au}}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty[\varphi(x+y\sqrt{-1})+$$

$$+\varphi(x-y\sqrt{-1})]\,\frac{\cos yv}{e^{av}+e^{-av}}\,dv\,.\,dy.$$

Но такъ какъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos yv}{e^{av}+e^{-av}}\,dv = \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi y}{2a}}+e^{-\frac{\pi y}{2a}}},$$

то

$$G\,\frac{1}{e^{au}+e^{-au}} = \frac{1}{2a}\int_0^\infty \Big[\varphi\left(x+y\sqrt{-1}\right)+$$

$$+\varphi\left(x-y\sqrt{-1}\right)\Big]\frac{dy}{e^{\frac{\pi y}{2a}}+e^{-\frac{\pi y}{2a}}}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Наконецъ, положивъ послѣдовательно

$$\psi(u)=\frac{1}{a^2+b^2u^2},\quad \psi(u)=\frac{1}{a^2-b^2u^2},$$

получимъ

$$G\,\frac{1}{a^2+b^2u^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big[\varphi\left(x+y\sqrt{-1}\right)+$$

$$+\varphi\left(x-y\sqrt{-1}\right)\Big]dy\int_0^\infty\frac{\cos yv\,dv}{a^2+b^2u^2}\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

$$G\,\frac{1}{a^2-b^2u^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big[\varphi\left(x+y\sqrt{-1}\right)+$$

$$+\varphi\left(x-y\sqrt{-1}\right)\Big]dy\int_0^\infty\frac{\cos yv\,dv}{a^2-b^2u^2}\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

§ **9**. Хотя формулы (7) и (8) § 7 показываютъ, что вообще возможно опредѣлить $G\,\psi(u)$ двойнымъ интеграломъ, но обыкновенно проще бываетъ женерализовать функціи непосредственно. Для того чтобы достигнуть этого, мы укажемъ весьма полезный пріемъ, которому дадимъ названіе *женерализаціи по частямъ*.

Этотъ чрезвычайно простой способъ даетъ намъ возможность вывести значеніе $G\,\psi(u)\,.\,\chi(u)\;\ldots\;\theta(u)$ посредствомъ $G\,\psi(u)$, $G\,\chi(u)\;\ldots\;G\,\theta(u)$.

Разсмотримъ сначала случай произведенія двухъ множителей $G\,\psi(u)\,\chi(u)$. Теорема Маклорена намъ даетъ

$$\psi(u)\,.\,\chi(u)=\psi(0)\,\chi(0)+[\psi(0)\,\chi'(0)+\chi(0)\,\psi'(0)]\,\frac{u}{1}+$$

$$+[\psi(0)\,\chi''(0)+2\,\psi'(0)\,\chi'(0)+\psi''(0)\,\chi(0)]\,\frac{u^2}{1\,.\,2}+\ \cdots$$

отсюда мы выведемъ помощью женерализаціи, принявъ за характеристическое уравненіе $Ge^{au}=\varphi(x-a)$,

$$G\,\psi(u)\,\chi(u)=\psi(0)\,\chi(0)\,\varphi(x)+[\psi(0)\,\chi'(0)+\chi(0)\,\psi'(0)]\,\frac{\varphi'(x)}{1}+$$

$$+[\psi(0)\,\chi''(0)+2\,\psi'(0)\,\chi'(0)+\psi''(0)\,\chi(0)]\,\frac{\varphi''(x)}{1\,.\,2}+\ \ldots\ldots\ \ (1)$$

Написавъ это равенство, замѣтимъ, что если подставить въ выраженіе

$$\psi(0)\,\lambda(x)+\psi'(0)\,\frac{\lambda'(x)}{1}+\psi''(0)\,\frac{\lambda''(x)}{1\,.\,2}+\ \ldots\ =G\,\psi(u)^{\varphi=\lambda}$$

вмѣсто $\lambda(x)$ выраженіе

$$\lambda(x)=\chi(0)\,\varphi(x)+\chi'(0)\,\frac{\varphi'(x)}{1}+\chi''(0)\,\frac{\varphi''(x)}{1\,.\,2}+\ \ldots\ =G\,\chi(u),$$

то получимъ вторую часть равенства (1); отсюда слѣдуетъ, что для вычисленія значенія $G\,\psi(u)\,\chi(u)$ достаточно опредѣлить значеніе $G\,\psi(u)$, замѣняя въ немъ φ черезъ λ, а затѣмъ найти $\lambda(x)$ съ помощью уравненія

$$\lambda(x)=G\,\chi(u).$$

Исключивъ затѣмъ функцію λ изъ двухъ уравненій

$$G\,\psi(u)=F\,[\lambda(x+k)]$$

$$\lambda(x)=G\,\chi(u)=F_1\,[\varphi(x+k_1)],$$

получимъ

$$G\,\psi(u)\,\chi(u)=FF_1\,\varphi(x+k+k_1).$$

Понятно само собой, что если требуется опредѣлить значеніе

$$G\,\psi(u)\,\chi(u)\ \ldots\ \theta(u),$$

то достаточно, подобно тому, какъ мы поступили въ предъидущемъ случаѣ, исключить функціи λ, μ, $\ldots$ ρ изъ тождествъ

$$G\,\psi(u) = F\,[\lambda\,(x+k\,)]$$

$$\lambda(x) = G\,\chi(u) = F_1\,[\mu(x+k_1)]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\rho(x) = G\,\theta(u) = F_n\,[\varphi(x+k_n)].$$

Предполагая каждый изъ множителей равнымъ $\psi(u)$, мы можемъ представить $G\,[\psi\,(u)]^n$ отъ значенія $G\,\psi\,(u)$.

Допустимъ, что

$$G\,\psi\,(u) = \int_a^b T\,\lambda\,(x - T_1)\,dt,$$

гдѣ T и T_1 извѣстныя функціи перемѣннаго t

$$\lambda\,(x) = G\,\chi\,(u) = \int_{a'}^{b'} V\,\mu\,(x - V_1)\,dv$$

V и V'—функціи v, и т. д. до

$$\rho\,(x) = G\,\theta\,(u) = \int_{an}^{bn} W\,\varphi\,(x - W_1)\,dw$$

W и W_1—функціи w.

Исключеніе функцій λ, μ, $\ldots$ ρ приведетъ насъ къ уравненію

$$G\,\psi\,(u)\,\chi\,(u)\ \ldots\ \theta\,(u) =$$

$$= \int_a^b T\,dt \int_{a'}^{b'} V\,dv\ \ldots \int_{an}^{bn} W\,\varphi\,(x + T_1 + V_1 + \ldots + W_1)\,dw.$$

Для примѣра женерализаціи по частямъ опредѣлимъ значеніе

$$Ge^{-\frac{u^2}{4q^2}}\cos au\,.$$

Мы знаемъ, что

$$G\cos au = \frac{1}{2}\left\{\lambda\left(x + a\sqrt{-1}\right) + \lambda\left(x - a\sqrt{-1}\right)\right\};$$

съ другой стороны по формулѣ (1) § 8

$$\lambda(x) = Ge^{-\frac{u^2}{4q^2}} = \frac{q}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2t^2}\varphi\left(x + t\sqrt{-1}\right) dt,$$

а потому

$$Ge^{-\frac{u^2}{4q^2}}\cos au = \frac{q}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2t^2}\left\{\varphi\left[x + (t+a)\sqrt{-1}\right] + \right.$$

$$\left. + \varphi\left[x + (t-a)\sqrt{-1}\right]\right\} dt.$$

Замѣчая, что замѣнивъ t черезъ $-t$, мы имѣемъ тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2t^2}\varphi\left[x + (t-a)\sqrt{-1}\right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2t^2}\varphi\left[x - (t+a)\sqrt{-1}\right] dt,$$

можемъ предъидущее равенство написать въ слѣдующей формѣ

$$Ge^{-\frac{u^2}{4q^2}}\cos au = \frac{q}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2t^2}\left\{\varphi\left[x + (t+a)\sqrt{-1}\right] + \right.$$

$$\left. + \varphi\left[x - (t+a)\sqrt{-1}\right]\right\} dt$$

или

$$Ge^{-\frac{u^2}{4q^2}}\cos au = \frac{q}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2t^2}\, G\cos(t+a)u\, dt. \quad . \quad . \quad (1)$$

Производя надъ полученнымъ тождествомъ процессъ обратный женерализаціи, будемъ имѣть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2t^2}\cos u(t+a)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{q}e^{-\frac{u^2}{4q^2}}\cos au. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Точно такъ же мы найдемъ, женерализуя по частямъ выраженіе

$Ge^{-\frac{u^2}{4q^2}}\sin a,$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2t^2}\sin u\,(t+a)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{q}\,e^{-\frac{u^2}{4q^2}}\sin au. \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

Пусть требуется опредѣлить значеніе

$$G\,\frac{1}{(a+bu)\,(a'+b'u)\,(a''+b''u)\,\ldots\,(a^{(n)}+b^{(n)}u)}.$$

Замѣтивъ, что женерализуя интегралъ

$$\frac{1}{a+bu} = \int_0^\infty e^{-(a+bu)\,t}\,dt\,,$$

мы должны получить

$$G\,\frac{1}{a+bu} = \int_0^\infty e^{-at}\,\varphi\,(x-bt)\,dt,$$

можно написать слѣдующій рядъ тождествъ:

$$G\,\frac{1}{a+bu} = \int_0^\infty e^{-at}\,\lambda\,(x-bt)\,dt$$

$$G\,\frac{1}{a'+b'u} = \int_0^\infty e^{-a'v}\,\mu\,(x-b'v)\,dv$$

. . . .

$$G\,\frac{1}{a^{(n)}+b^{(n)}u} = \int_0^\infty e^{-a^{(n)}z}\,\varphi\,(x-b^{(n)}z)\,dz.$$

Такимъ образомъ получимъ

$$G\,\frac{1}{(a+bu)\,(a'+b'u)\,\ldots\,(a^{(n)}+b^{(n)}u)} =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-at-a'v-\ldots-a^{(n)}r}\,\varphi\,(x-bt-b'v-\ldots-$$

$$-\,b^{(n)}z)\,dt\,dv\,\ldots\,dz.$$

§ 10. Женерализація по частямъ можетъ привести иногда къ опредѣленію нѣкоторыхъ кратныхъ интеграловъ. Изъ интеграла

$$\frac{1}{u} = \int_0^\infty e^{-tu}\, dt,$$

дифференцируя $n-1$ разъ оба его члена относительно u, получаемъ

$$\frac{1}{u^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-tu}\, t^{n-1}\, dt.$$

Полагая $u = a + u$ и женерализуя, имѣемъ

$$G\,\frac{1}{(a+u)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-at}\, t^{n-1}\, \varphi(x-t)\, dt\,. \quad . \quad . \,(1)$$

Разсмотримъ теперь тождество

$$\frac{1}{(a+u)^n} = \frac{1}{(a+u)^{n-m}} \times \frac{1}{(a+u)^{m-p}} \times \cdots \times \frac{1}{(a+u)^{s-r}} \times \frac{1}{(a+u)^r},$$

женерализуя его по частямъ съ помощью формулы (1), будемъ имѣть:

$$G\,\frac{1}{(a+u)^{n-m}} = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_0^\infty e^{-av}\, v^{n-m-1}\, \lambda(x-v)\, dv$$

$$G\,\frac{1}{(a+u)^{m-p}} = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_0^\infty e^{-az}\, z^{m-p-1}\, \mu(x-z)\, dz$$

. . . .

$$G\,\frac{1}{(a+u)^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-as}\, s^{r-1}\, \varphi(x-s)\, ds.$$

Допустимъ, что число множителей второго члена разсматриваемаго тождества равно k, тогда женерализація его дастъ

$$\overset{k}{\int_0^\infty} e^{-a(v+z+\ldots+s)}\, v^{n-m-1}\, z^{m-p-1} \ldots s^{r-1}\, \varphi\,[x-(v+$$

$$+ z + \ldots + s)]\, dv\,.\, dz \ldots ds =$$

$$= \frac{\Gamma(n-m)\,\Gamma(m-p)\,\ldots\,\Gamma(r)}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-at}\, t^{n-1}\, \varphi(x-t)\, dt \quad . (2)$$

формулу, которая превращается въ

$$\int_0^{\infty k} e^{-a(v+z+\ldots+s)} \frac{\varphi\,[x-(v+z+\ldots+s)]}{\sqrt[n]{(vz\ \ldots\ s)^{k-n}}}\, dv\, dz \ldots ds =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)^{k\ k}}{\Gamma(n)} \int e^{-at}\, t^{n-1}\, \varphi(x-t)\, dt, \quad \ldots\ . (3)$$

если положимъ въ ней всѣ множители равными между собою.

Примѣнимъ теперь женерализацію по частямъ къ тождеству

$$e^{(a+b+\ldots+k)u^2} = e^{au^2}\, e^{bu^2} \ldots e^{ku^2} \quad \ldots\ldots\ . (4)$$

По формулѣ (2) § 8:

$$Ge^{au^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, \lambda\,(x+2\sqrt{a}\,.\,t)\, dt$$

$$\lambda(x) = Ge^{bu^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\, \mu\,(x+2\sqrt{b}\,.\,v)\, dv$$

. . . .

$$\rho(x) = Ge^{ku^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}\, \varphi\,(x+2\sqrt{k}\,.\,w)\, dw.$$

Обозначая черезъ n число множителей, мы получимъ, женерализуя оба члена тождества (4), слѣдующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-v^2-\ldots-w^2}\, \varphi\,[x+2(\sqrt{a}\,t+\sqrt{b}\,v+\ldots+\sqrt{k}\,w)]\, dt\, dv \ldots dw =$$

$$= \pi^{\frac{n-1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\quad \varphi\,(x+2\sqrt{a+b+\ldots+k}\,.\,z)\, dz.$$

Если предположимъ, что $a+b+c+\ldots+k=0$, то, принявъ во вниманіе равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = \sqrt{\pi},$$

найдемъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-v^2-\ldots-w^2}\varphi[x+2(\sqrt{a}\,.\,t+\sqrt{b}.v+\ldots+$$

$$+\sqrt{k}.w)\,dt\,.\,dv\,\ldots\,dw = \pi^{\frac{n}{2}}\varphi(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \, (5)$$

полагая $n=2$ и $b=-a$, получимъ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-v^2}\varphi\left[x+2\sqrt{a}\,(t+v\sqrt{-1})\right]dt\,.\,dv = \pi\varphi(x).$$

§ 11. Символическое дѣйствіе G, производимое надъ перемѣнной u, можетъ быть произведено надъ всякой другой перемѣнной, такъ что, если бы мы разсматривали функцію двухъ перемѣнныхъ, u и v, напр. $\psi(u,\ v)$, то могли бы вывести, употребляя обозначенія G_u относительно перемѣнной u и G_v относительно v, формулы для $G_u\psi(u,\ v)$ и $G_v\psi(u,\ v)$. Такъ какъ эти операціи не что иное какъ суммованія, то можно сказать вообще, что

$$G_v G_u \psi(u,\ v) = G_u G_v \psi(u,\ v).$$

То же самое можно замѣтить и относительно функцій съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ, и женерализовать ихъ въ какомъ угодно порядкѣ, не измѣняя результата дѣйствія.

Само собой понятно, что каждому женерализованію соотвѣтствуетъ различное характеристическое уравненіе, такъ что

$$G_u e^{au} = \varphi(x+a),\ \ G_v e^{av} = \theta(y+a),\ \ G_w e^{aw} = \chi(z+a)\ \ldots$$

можно принять за характеристическія уравненія, соотвѣтствующія перемѣннымъ $u,\ v,\ w\ \ldots$

Если, напримѣръ, мы разсмотримъ функцію двухъ перемѣнныхъ $\frac{1}{u^2+v}$, значеніе которой можетъ быть выражено интеграломъ

$$\frac{1}{u^2+v} = \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v)\,t}\, dt,$$

то можемъ вывести

$$G_v \frac{1}{u^2+v} = \int_0^\infty e^{-tu^2}\,dt\,.\,Ge^{-vt} = \int_0^\infty e^{-tu^2}\,\theta(y-t)\,dt.$$

По формулѣ (1) § 8:

$$G_u e^{-tu^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4t}} \left\{ \varphi(x+z\sqrt{-1}) + \varphi(x-z\sqrt{-1}) \right\} dz,$$

а потому

$$G_u G_v \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left\{ \varphi(x+z\sqrt{-1}) + \right.$$

$$\left. + \varphi(x-z\sqrt{-1}) \right\} dz \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4t}}\,\theta(y-t)\frac{dt}{\sqrt{t}} \quad . \ . \ (1)$$

Точно такъ же мы найдемъ

$$G_u \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \int_0^\infty e^{-z\sqrt{v}} \left\{ \varphi(x+z\sqrt{-1}) + \varphi(x-z\sqrt{-1}) \right\} dz$$

и слѣдовательно

$$G_v G_u \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \varphi(x+z\sqrt{-1}) + \varphi(x-z\sqrt{-1}) \right\} dz\, G_v \frac{e^{-z\sqrt{v}}}{\sqrt{v}} \quad . \ . \ (2)$$

Но такъ какъ $G_v G_u = G_u G_v$, то формулы (1) и (2) даютъ

$$G \frac{e^{-z\sqrt{u}}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{z^2}{4t}}\,\varphi(x-t)}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Дифференцируя это уравненіе относительно z и полагая $z=a$, можемъ писать

$$Ge^{-a\sqrt{u}} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{4t}}\,\varphi(x-t)\frac{dt}{t\sqrt{t}}\,.$$

Полагаемъ $t = \dfrac{a^2}{4v^2}$; тогда написанное равенство приметъ видъ

$$G e^{-a\sqrt{u}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-v^2} \varphi\left(x - \frac{a^2}{4v^2}\right) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \varphi\left(x - \frac{a^2}{4v^2}\right) dv. \quad (3)$$

Разсмотримъ теперь функцію e^{-vu^2}, изъ которой выведемъ

$$G_u G_v e^{-vu^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1}) \right) dy \, G_v \frac{e^{-\frac{y^2}{4v}}}{\sqrt{v}},$$

но такъ какъ

$$G_v e^{-vu^2} = \theta(p - u^2),$$

то

$$G_u G_v e^{-vu^2} = G_u \theta(p - u^2).$$

Съ другой стороны, формула 8 § 7-го даетъ

$$G \theta(p - u^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \right.$$

$$\left. + \varphi(x - y\sqrt{-1}) \right\} dy \int_0^{\infty} \theta(p - v^2) \cos yv \, dv.$$

Съ помощью этихъ двухъ тождествъ находимъ:

$$G \frac{e^{-\frac{y^2}{4u}}}{\sqrt{u}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(x - v^2) \cos yv \, dv$$

формулу, которая, будучи деженерализована, дастъ извѣстный интегралъ

$$\int_0^{\infty} e^{-vu^2} \cos yv \, dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{u}} e^{-\frac{y^2}{4u}}.$$

§ 12. Хотя мы и не должны бы были заниматься въ этомъ сочиненіи никакими другими операціями кромѣ тѣхъ, которыя опредѣляются равенствомъ

$$G e^{au} = \varphi(x + a),$$

тѣмъ не менѣе однако, въ виду важности вопроса, считаемъ необходимымъ сдѣлать небольшое отступленіе.

Легко понять, что подобная символическая операція можетъ быть опредѣлена всякимъ другимъ отношеніемъ; такимъ образомъ, обозначая черезъ G' новую форму женерализаціи, мы можемъ положить

$$G' e^{au\sqrt{-1}} = \varphi(x+a).$$

Изъ этого отношенія вытекаетъ непосредственно

$$G' e^{-au} = \varphi(x + a\sqrt{-1})$$

$$G' e^{au} = \varphi(x - a\sqrt{-1})$$

$$G' \sin au = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Big\{\varphi(x+a) - \varphi(x-a)\Big\}$$

$$G' \cos au = \frac{1}{2}\Big\{\varphi(x+a) + \varphi(x-a)\Big\}.$$

Не вдаваясь въ большія подробности по этому предмету, укажемъ только, въ видѣ примѣра, на нѣкоторыя выгоды, представляемыя этимъ символическимъ дѣйствіемъ.

Извѣстный интегралъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos aut}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} e^{-au}$$

дастъ намъ послѣ женерализаціи G'

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{1+t^2}\,dt = \pi\varphi(x + a\sqrt{-1}) \quad . \ (1)$$

разсматривая a какъ количество положительное по своей сущности и полагая $t = \frac{t}{a}$, будемъ имѣть

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{a^2+t^2} = \frac{\pi}{a}\varphi(x + a\sqrt{-1}). \quad . \quad (2)$$

Дифференцируя уравненіе (1) относительно a, а затѣмъ, полагая $t = \frac{t}{a}$, выведемъ

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{a^2+t^2}\,t\,dt = \pi\varphi(x + a\sqrt{-1})\sqrt{-1}. \quad . \ (3)$$

Формулы (2) и (3) были даны Коши (Упражнен. 1826 стр. 10) въ формѣ

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)+\varphi(-t)}{a^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{a}\,\varphi(a\sqrt{-1})$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{a^2+t^2}\,t\,dt = \pi\varphi(a\sqrt{-1})\sqrt{-1},$$

соотвѣтствующей значенію $x=0$. Первая предполагаетъ, что функція $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ сохраняетъ конечное значеніе:

во 1-хъ для $x=\pm\infty$ при какомъ угодно y
„ 2-хъ „ $y=\infty$ „ „ „ x,

а вторая предполагаетъ сверхъ того, что $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ уничтожается для $y=\infty$.

Принимая въ разсчетъ замѣчаніе, сдѣланное нами въ § 2, этихъ условій недостаточно; необходимо сверхъ того, чтобы $\varphi(t)$ не была функціей t^n $(n>1)$.

Если бы мы желали вывести формулы Коши, взявъ за характеристическое уравненіе

$$Ge^{au}=\varphi(x+a),$$

то достаточно было бы предположить, что въ извѣстныхъ интегралахъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos bt\,dt}{a^2+t^2}=\frac{\pi}{2a}e^{-ab} \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \frac{\sin bt\,.\,t\,dt}{a^2+t^2}=\frac{\pi}{2}e^{-ab} \quad . \qquad (4)$$

возможно дать b мнимое значеніе $u\sqrt{-1}$, что позволило бы эти формулы написать въ видѣ

$$\int_0^\infty \frac{e^{ut}+e^{-ut}}{a^2+t^2}\,dt=\frac{\pi}{a}e^{-au\sqrt{-1}} \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \frac{e^{ut}-e^{-ut}}{a^2+t^2}\,t\,dt=\pi\sqrt{-1}\,e^{-au\sqrt{-1}}\,. \quad (5)$$

Очевидно, что этимъ способомъ нельзя получить формулъ Коши, потому что интегралы (5) имѣютъ значеніе безконечное и потому нельзя было въ формулѣ (4) дать b мнимое значеніе, взявши же другое характеристическое уравненіе можно избѣжать этого неудобства.

§ **13**. Принявъ за характеристическое уравненіе

$$Ge^{au+bv+cw+\dots} = \varphi(x+a,\ y+b,\ z+c\ \dots),$$

можно бы вывести изъ формулы Фурье, распространенной на случай функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ, значеніе $G\psi(u,\ v,\ w\ \dots)$ въ опредѣленныхъ интегралахъ. Но получаемыя при этомъ формулы до того сложны, что гораздо выгоднѣе избрать болѣе прямой путь. Мы разберемъ этотъ вопросъ подробнѣе.

Женерализація функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ можетъ быть получена по правилу женерализаціи по частямъ, которое примѣняется также и здѣсь, какъ въ этомъ легко убѣдиться доказательствомъ, аналогичнымъ тому, которое мы употребили въ случаѣ функціи одной перемѣнной, наблюдая всегда соотвѣтствіе между x и женерализаціей относительно u, y и женерализаціей относительно v, z и женерализаціей относительно w и т. д.

Если бы функція, которую предполагается женерализовать, состояла изъ произведенія функцій, заключающихъ въ себѣ только по одной перемѣнной, какъ напримѣръ

$$\psi(u,\ v,\ w,\ \dots) = F(u)\ F_1(v)\ F_2(w)\ \dots,$$

то достаточно женерализовать каждый множитель какъ функцію одного перемѣннаго и вывести отсюда полную женерализацію при помощи женерализаціи по частямъ.

Пусть требуется опредѣлить значеніе $G\dfrac{1}{uvw}$, принявъ за характеристическое уравненіе

$$Ge^{au+bv+cw} = \varphi(x+a,\ y+b,\ z+c).$$

Изъ интеграла

$$\frac{1}{u} = \int_0^\infty e^{-tu}\,dt$$

выводимъ

$$G\frac{1}{u} = \int_0^\infty \varphi(x-\omega,\ y,\ z)\,d\omega$$

$$G\frac{1}{v} = \int_0^\infty \varphi(x,\ y-\omega',\ z)\,d\omega'$$

$$G\frac{1}{w} = \int_0^\infty \varphi(x,\ y,\ z-\omega'')\,d\omega'$$

слѣдовательно, чтобы произвести женерализацію по частямъ, мы должны написать

$$G\frac{1}{u} = \int_0^\infty \lambda(x-\omega,\ y,\ z)\,d\omega$$

$$\lambda(x,\ y,\ v) = G\frac{1}{v} = \int_0^\infty \mu(x,\ y-\omega',\ z)\,d\omega'$$

$$\mu(x,\ y,\ w) = G\frac{1}{w} = \int_0^\infty \varphi(x,\ y,\ z-\omega'')\,d\omega''$$

и исключить изъ нихъ λ и μ, что намъ дастъ

$$G\frac{1}{uvw} = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x-\omega,\ y-\omega',\ z-\omega'')d\omega\,.\,d\omega'.\,d\omega'' \quad . \ . \ . \ (1)$$

Предположимъ точно такимъ же образомъ опредѣлить значеніе $Ge^{-tu^2-sv^2}$, принявъ за характеристическое уравненіе

$$Ge^{au+bv} = \varphi(x-a,\ y+b).$$

Мы знаемъ, что

$$Ge^{-tu^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\lambda(x+2\sqrt{t}\,\omega\sqrt{-1},\ y)\,d\omega$$

$$\lambda(x,\ y) = Ge^{-sv^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega'^2}\varphi(x,\ y+2\sqrt{s}\,\omega'\sqrt{-1})\,d\omega',$$

слѣдовательно

$$Ge^{-tu^2-sv^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}\varphi(x+2\sqrt{t}\,\omega\sqrt{-1},\ y+$$
$$+2\sqrt{s}\,\omega'\sqrt{-1})\,d\omega\,d\omega' \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ легко бываетъ произвести раздѣленіе перемѣнныхъ данной функціи при помощи интеграла.

Предположимъ опредѣлить значеніе

$$G\frac{1}{pu^2+qv},$$

принимая за характеристическое уравненіе

$$Ge^{au+bv}=\varphi(x+a,\ y+b).$$

Замѣчая, что

$$\frac{1}{pu^2+qv}=\int_0^\infty e^{-(pu^2+qv)t}\,dt,$$

получимъ

$$G\frac{1}{pu^2+qv}=\int_0^\infty dt\,Ge^{-ptu^2-qtv}$$

откуда, женерализуя по частямъ, будемъ имѣть

$$G\frac{1}{pu^2+qv}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-z^2}\Big\{\varphi(x+2\sqrt{pt}\,z\sqrt{-1},\ y-qt)+$$
$$+\varphi(x-2\sqrt{pt}\,z\sqrt{-1},\ y-qt)\Big\}\,dt\,.\,dz. \quad .\ (3)$$

Пусть дано еще женерализовать функцію двухъ перемѣнныхъ

$$G\frac{u}{u^2+a^2v^2}.$$

Производя непосредственно раздѣленіе функціи на множители съ помощью интеграла

$$\frac{u}{u^2+a^2v^2}=\int_0^\infty e^{-tu}\cos avt\,dt,$$

мы будемъ имѣть такимъ образомъ

$$G\frac{u}{u^2+a^2v^2}=\int_0^\infty dt\,Ge^{-tu}\cos avt.$$

Но такъ какъ

$$Ge^{-tu} = \varphi(x - t,\ y)$$

$$G \cos avt = \frac{1}{2}\left\{\varphi(x,\ y + at\sqrt{-1}) + \varphi(x,\ y - at\sqrt{-1})\right\},$$

то женерализація по частямъ намъ дастъ

$$G\frac{u}{u^2 + a^2v^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big\{\varphi(x - t,\ y + at\sqrt{-1}) +$$

$$+ \varphi(x - t,\ y - at\sqrt{-1})\Big\} \ldots \ldots \quad (4)$$

Можно получить болѣе или менѣе простыя выраженія, смотря по тому способу женерализаціи, который примѣняется.

Такъ напримѣръ, опредѣляя значеніе $G\frac{1}{u^2 + a^2v^2}$ съ помощью интеграла

$$\frac{1}{u^2 + a^2v^2} = \int_0^\infty e^{-tu^2 - a^2tv^2}\,dt,$$

по формулѣ (2) будемъ имѣть

$$G\frac{1}{u^2 + a^2v^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 - \omega'^2}\Big\{\varphi(x + 2\sqrt{t}\,\omega\sqrt{-1},\ y +$$

$$+ 2a\sqrt{t}\,\omega'\sqrt{-1})\Big\}\,d\omega\,.\,d\omega' \ldots \ldots \quad (5)$$

Но легко получить гораздо болѣе простую формулу, замѣчая, что

$$\frac{1}{u^2 + a^2v^2} = \frac{1}{u + av\sqrt{-1}} \times \frac{1}{u - av\sqrt{-1}};$$

женерализуя по частямъ, получимъ

$$G\frac{1}{u + av\sqrt{-1}} = \int_0^\infty \lambda(x - \omega,\ y - a\omega\sqrt{-1})\,d\omega$$

$$\lambda(x, y) = G\frac{1}{u - av\sqrt{-1}} = \int_0^\infty \varphi(x - \omega',\ y + a\omega'\sqrt{-1})\,d\omega$$

и слѣдовательно

$$G\,\frac{1}{u^2+a^2v^2}=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\varphi(x-\omega-\omega',\ y+a(\omega'-\omega)\sqrt{-1})\,d\omega\,d\omega'.\quad .\ (6)$$

Опредѣлимъ еще значеніе Ge^{auv}.

Замѣтимъ сначала, что

$$e^{4\,auv}=e^{a\,(u+v)^2-a\,(u-v)^2}.$$

Съ другой стороны интегралъ

$$e^{au^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{2\sqrt{a}\,tu-t^2}\,dt$$

намъ дастъ

$$e^{a\,(u+v)^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2\sqrt{a}\,t\,(u+v)-t^2}\,dt,$$

женерализація котораго приводитъ къ выраженію

$$Ge^{a\,(u+v)^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,\varphi\,(x+2\sqrt{a}\,t,\ y+2\sqrt{a}\,t)\,dt.$$

Точно такъ же найдемъ

$$Ge^{-a\,(u-v)^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{h^2}\,\varphi\,(x+2\sqrt{a}\,h\sqrt{-1},\ y-2\sqrt{a}\,h\sqrt{-1})\,dh,$$

откуда, женерализуя по частямъ, получимъ

$$Ge^{4auv}=Ge^{a\,(u+v)^2-a\,(u-v)^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2-h^2}\,\varphi\,\Big|\,x-2\sqrt{a}\,(t+$$

$$+h\sqrt{-1}),\ y+2\sqrt{a}\,(t-h\sqrt{-1})\,\Big|\,dt\,dh$$

и полагая $a=\frac{a'}{4}$ имѣемъ

$$Ge^{auv}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2-h^2}\,\varphi\,\Big[\,x+\sqrt{a}\,(t+h\sqrt{-1}),\ y+$$

$$+\sqrt{a}\,(t-h\sqrt{-1})\,\Big|\,dt\,dh.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

Женерализація раціональныхъ функцій и вычисленіе значенія опредѣленныхъ интеграловъ.

§ 14. Разсмотримъ сначала функцію $\frac{1}{a+bu}$, которую легко женерализовать съ помощью интеграла

$$\frac{1}{a+bu} = \int_0^\infty e^{-(a+bu)t}\, dt,$$

при чемъ получается

$$G\frac{1}{a+bu} = \frac{1}{b}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\, \varphi(x-t)\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Точно такъ же изъ формулы

$$\frac{1}{a-bu} = \int_0^\infty e^{-(a+bu)t}\, dt$$

получается

$$G\frac{1}{a-bu} = \frac{1}{b}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\, \varphi(x+t)\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ этихъ двухъ формулъ выводимъ

$$G\frac{u}{a+bu} = \frac{1}{b}\varphi(x) - \frac{a}{b^2}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\, \varphi(x-t)\, dt \quad . \quad . \quad (3)$$

$$G\frac{u}{a-bu} = -\frac{1}{b}\varphi(x) + \frac{a}{b^2}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\, \varphi(x+t)\, dt \quad . \quad . \quad (4)$$

которыя въ свою очередь приводятъ весьма легко къ

$$G\frac{1}{a^2-b^2u^2} = \frac{1}{2ab}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\left\{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)\right\} dt \quad . \quad . \quad (5)$$

$$G\frac{u}{a^2-b^2u^2} = \frac{1}{2b^2}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\left\{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)\right\} dt \quad . \quad . \quad (6)$$

$$G\frac{1}{a^2+b^2u^2}=\frac{1}{2ab}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\left\{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})\right\}(7)$$

$$G\frac{u}{a^2+b^2u^2}=\frac{1}{2b^2\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\left\{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})\right\}.\quad(8)$$

$$G\frac{u^2}{a^2-b^2u^2}=-\frac{1}{b^2}.\varphi(x)+\frac{a}{2b^3}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\left\{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right\}dt\quad.(9)$$

$$G\frac{u^2}{a^2+b^2u^2}=\frac{1}{b^2}\varphi(x)-\frac{a}{2b^3}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\left\{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\right.$$

$$\left.+\varphi(x-t\sqrt{-1})\right\}.\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(10)$$

$$G\frac{1}{a^4-b^4u^4}=\frac{1}{4a^3b}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\left\{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\right.$$

$$\left.+\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})\right\}dt.\;.\;.(11)$$

$$G\frac{u^2}{a^4-b^4u^4}=\frac{1}{4b^3a}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\left\{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right.$$

$$\left.-\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})\right\}dt.\;.\;.(12)$$

$$G\frac{1}{a^4+b^4u^4}=\frac{1}{4a^3b}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\left\{\varphi\left[x+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})t\right]+\right.$$

$$+\varphi\left[x-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})t\right]+\varphi\left[x-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{-1})t\right]+$$

$$\left.+\varphi\left[x+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{-1})t\right]\right\}dt\;.\;.\;.\;.\;(13)$$

$$G\frac{u^2}{a^4+b^4u^4}=\frac{1}{4b^3a\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\left\{\varphi\left[x+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})t\right]+\right.$$

$$+\varphi\left[x-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})t\right]-\varphi\left[x-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{-1})t\right]$$

$$\left.-\varphi\left[x+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{-1})t\right]\right\}dt \quad \ldots . \quad (14)$$

Замѣчая, что

$$\frac{1}{a+bu+cu^2}=\frac{c}{\sqrt{b^2-4ac}}\times\frac{1}{cu+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$-\frac{c}{\sqrt{b^2-4ac}}\times\frac{1}{cu-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac}},$$

получимъ, женерализуя это равенство по формулѣ (1)

$$G\frac{1}{a+bu+cu^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\int_0^\infty e^{-\frac{bt}{2c}}\left\{e^{\frac{1}{2c}\sqrt{b^2-4ac}}\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{1}{2c}\sqrt{b^2-4ac}}\right\}\varphi(x-t)\,dt\ (b^2>4ac)\ \ldots (15)$$

$$G\frac{1}{a+bu+cu^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\int_0^\infty e^{-\frac{bt}{2c}}\sin\frac{1}{2c}\sqrt{4ac-b^2}\,t\,.\,\varphi(x-t)\,dt$$

$$(b^2<4ac)\,.\ \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Вообще, если $\psi(u)$ есть раціональная функція u, то она можетъ быть всегда представлена рядомъ членовъ, имѣющихъ форму Au^m и $\frac{B}{(a+bu)^m}$. Но такъ какъ $G\,Au^m=A\,\varphi^m(x)$, то вопросъ объ опредѣленіи $G\psi(u)$ въ этомъ случаѣ приводится къ вычисленію значенія

$$G\frac{1}{(a+bu)^m}.$$

Дифференцируя $m-1$ разъ интегралъ

$$\frac{1}{u}=\int_0^\infty e^{-ut}\,dt,$$

получимъ

$$\frac{1}{u^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty t^{m-1}\,e^{-ut}\,dt.$$

Положимъ $u=a+bu$ и женерализуя получившійся результатъ, найдемъ:

$$G\,\frac{1}{(a+bu)^m}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty e^{-at}\,t^{m-1}\,dt\,Ge^{-btu}=\frac{1}{b^m\,\Gamma(m)}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\,t^{m-1}\varphi(x-t)dt \quad (17)$$

Точно такъ же мы найдемъ, полагая въ предъидущемъ равенствѣ $u=a-bu$,

$$G\,\frac{1}{(a-bu)^m}=\frac{1}{b^m\Gamma(m)}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\,t^{m-1}\,\varphi\,(x+t)\,dt\,. \quad (18)$$

Взявъ сумму и разность полученныхъ формулъ, будемъ имѣть

$$G\,\frac{(a+bu)^m+(a-bu)^m}{a^2-b^2u^2}=\frac{1}{b^m\Gamma(m)}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\,t^{m-1}\Big\{\varphi\,(x+t)+$$

$$+\varphi\,(x-t)\Big\}\,dt\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (19)$$

и

$$G\,\frac{(a+bu)^m-(a-bu)^m}{a^2-b^2u^2}=\frac{1}{b^m\Gamma(m)}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\,t^{m-1}\Big\{\varphi\,(x+t)$$

$$-\varphi\,(x-t)\Big\}\,dt.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (20)$$

Если въ томъ же самомъ интегралѣ

$$\frac{1}{u^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty t^{m-1}\,e^{-ut}\,dt,$$

положимъ $u = a^2 + b^2u^2$, то принявъ $t = \frac{v}{a^2}$, выведемъ

$$G\frac{1}{(a^2+b^2u^2)^m} = \frac{1}{a^{2m}\Gamma(m)}\int\limits_0^\infty v^{m-1}e^{-v}\,dv\,Ge^{-\frac{b^2}{a^2}vu^2}$$

а подставивъ вмѣсто

$$Ge^{-\frac{b^2}{a}u^2v^2}$$

значенiе ея, данное формулой (1) § 8-го, будемъ имѣть

$$G\frac{1}{(a^2+b^2u^2)^m} = \frac{1}{a^{2m}\Gamma(m)\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty v^{m-1}e^{-v-t^2}\Big\{\varphi(x+$$

$$+2\frac{b}{a}\sqrt{v}.t\sqrt{-1})+\varphi(x-2\frac{b}{a}\sqrt{v}.t\sqrt{-1})\Big\}\,dt\,dv$$

выраженiе, которое можетъ быть написано, полагая въ немъ $t = \frac{ay}{2b\sqrt{v}}$, въ формѣ

$$G\frac{1}{(a^2+b^2u^2)^m} = \frac{1}{2ba^{2m-1}\Gamma(m)\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty v^{m-\frac{3}{2}}e^{-v-\frac{a^2y^2}{4b^2v}}\Big\{\varphi(x+$$

$$+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})\Big\}\,dy\,.\,dv. \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Точно такъ же мы найдемъ, полагая $u = a^2 - b^2u^2$,

$$G\frac{1}{(a^2-b^2u^2)^m} = \frac{1}{2ba^{2m-1}\Gamma(m)\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty v^{m-\frac{3}{2}}e^{-v-\frac{a^2y^2}{4b^2v}}\Big\{\varphi(x+$$

$$+y)+\varphi(x-y)\,dy\,.\,dv. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

§ 15. Изъ сравненiя формулы (7) предъидущаго параграфа съ формулой (4) § 8-го, выводимъ

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\Big\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})\Big\}dy\int\limits_0^\infty\frac{\cos yv\,dv}{a^2+b^2v^2} =$$

$$=\frac{1}{2b}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}y}\Big\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})\Big\}\,dy, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

тождество, приводящее къ извѣстному интегралу

$$\int \frac{\cos yv}{a^2 + b^2 u^2} = \frac{\pi}{2\,ab} e^{-\frac{a}{b} y}$$

Полагая въ той же формулѣ $a = a\sqrt{-1}$, получимъ формулу

$$G \frac{1}{a^2 - b^2 u^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2\,ab} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{b} y \sqrt{-1}} \Big\{ \varphi(x + y\sqrt{-1}) +$$

$$+ \varphi(x - y\sqrt{-1}) \Big\} dy, \quad \ldots \ldots \ldots (a)$$

сравнивъ которую съ формулой (5) § 8-го, будемъ имѣть

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Big\{ \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1}) \Big\} dy \int_0^\infty \frac{\cos yv}{a^2 - b^2 v} dv =$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2ab} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{b} y \sqrt{-1}} \Big\{ \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1}) \Big\} dy,$$

откуда получается

$$\int_0^\infty \frac{\cos yv\, dv}{a^2 - b^2 v^2} = \frac{\pi \sqrt{-1}}{2\,ab} e^{-\frac{a}{b} y \sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2ab} \sin \frac{ay}{b} + \frac{\pi}{2ab} \sqrt{-1} \cos \frac{ay}{b}; \quad (2)$$

дифференцируя же это выраженіе относительно y, получимъ

$$\int_0^\infty \frac{v \sin yv\, dv}{a^2 - b^2 v^2} = -\frac{\pi}{2 b^2} e^{-\frac{a}{b} y \sqrt{-1}} = -\frac{\pi}{2 b^2} \cos \frac{ay}{b} + \frac{\pi}{2 b^2} \sin \frac{ay}{b} \sqrt{-1}\,. \quad (3)$$

Хотя только что выведенныя нами значенія (2) и (3) интеграловъ и были найдены Пуассономъ (P, 18, 295 № 38), но точность ихъ подвергалась большому сомнѣнію; такъ что многіе математики сводили ихъ значеніе только къ дѣйствительной части, считая формулы

$$\int_0^\infty \frac{\cos yv}{a^2 - b^2 v} dv = \frac{\pi}{2ab} \sin \frac{ay}{b} \quad \ldots \ldots \quad (3')$$

$$\int_0^\infty \frac{v \sin yv}{a^2 - b^2v^2}\,dv = -\frac{\pi}{2b^2}\cos\frac{ay}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

точными. На этотъ счетъ можно указать таблицы интеграловъ Bierens de Haan, гдѣ послѣдніе интегралы признаются за точные въ противоположность значенію тѣхъ же интеграловъ, полученныхъ Пуассономъ.

Легко видѣть однако, что оба эти интеграла обладаютъ особенными значеніями, которые представляютъ собою именно мнимыя части полученныхъ нами интеграловъ.

Во вторыхъ, мы можемъ всегда доказать, что формулы (1) и (2) приводятъ къ интеграламъ, признаннымъ за точные, тогда какъ это не имѣетъ мѣста, когда мы уничтожимъ въ нихъ мнимую часть.

Въ этомъ легко убѣдиться: полагаемъ въ формулѣ (2) $a = u$ и женерализуемъ обѣ части, тогда получимъ

$$\int_0^\infty v \sin yv\,dv\,G\,\frac{1}{b^2v^2 - u^2} = \frac{\pi}{2b}\,\varphi\left(x - \frac{y}{b}\sqrt{-1}\right)$$

и замѣняя $G\,\dfrac{1}{b^2v^2 - u^2}$ его значеніемъ, будемъ имѣть

$$\int_0^\infty \left\{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)\right\}\frac{dt}{y^2 + b^2t^2} = \frac{\pi}{by}\,\varphi\left(x - \frac{y}{b}\sqrt{-1}\right),$$

формулу Коши, точность которой не подлежитъ никакому сомнѣнію.

Слѣдуетъ замѣтить, что нѣкоторые аналисты считаютъ себя въ правѣ отбрасывать мнимую часть интеграла; поэтому мы находимъ не лишнимъ остановиться нѣсколько на этомъ вопросѣ, взявъ еще одинъ примѣръ для подтвержденія сдѣланныхъ нами замѣчаній.

Умножая на dp оба члена равенства

$$\int_0^\infty \frac{\cos pt}{t^2 + q^2}\,dt = \frac{\pi}{2q}\,e^{-pq}$$

и интегрируя между предѣлами 0 и p, получимъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin pt}{t^2 + q^2}\cdot\frac{dt}{t} = \frac{\pi}{2q^2}\left(1 - e^{-pq}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

полагая $p = pu$, и женерализуя, имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x+pt\sqrt{-1})-\varphi(x-pt\sqrt{-1})}{t^2+q^2}\,\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{\pi\sqrt{-1}}{q^2}\left\{\varphi(x)-\varphi(x-pq)\right\}\quad.\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

Поставивъ въ формулѣ (5) $q\sqrt{-1}$ вмѣсто q, имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin pt}{q^2-t^2}\,\frac{dt}{t}=\frac{\pi}{2q^2}\left(1-\cos pq+\sqrt{-1}\sin pq\right)\quad.\ .\ (7)$$

формулу, которую вовсе нельзя считать одинаковою съ

$$\int \frac{\sin pt}{t^2-q^2}\,\frac{dt}{t}=\frac{\pi}{2q^2}\left(1-\cos pq\right)\quad.\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

какъ это дѣлаютъ Коши (р. 19. 511) и Шлемильхъ (Stud. II. 15); потому что въ такомъ случаѣ мы отбросили бы особенный интегралъ, значеніе котораго равняется $\frac{\pi}{2q^2}\sin pq\sqrt{-1}$.

Кромѣ того можно убѣдиться въ этомъ, женерализуя уравненіе (7) относительно p, при чемъ получается формула

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x+pt\sqrt{-1})-\varphi(x-p\sqrt{-1})}{t^2-q^2}\,\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{\pi\sqrt{-1}}{q^2}\left\{\varphi(x)-\varphi(x-pq\sqrt{-1})\right\}$$

которая выведена изъ равенства (6) замѣной $q\sqrt{-1}$ вмѣсто q.

§ 16. Складывая формулу (7) § 14-го съ формулой (a) предъидущаго параграфа, получимъ

$$G\,\frac{1}{a^4-b^4 u^4}=\frac{1}{2a^2\,.\,2ab}\int_0^\infty\Big\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+$$

$$+\varphi(x-y\sqrt{-1})\Big\}\,dy\left[e^{-\frac{a}{b}y\sqrt{-1}}\sqrt{-1}+e^{-\frac{a}{b}y}\right]$$

съ другой стороны формула (8) § 7-го даетъ

$$G\frac{1}{a^4-b^4u^4}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+$$

$$+\varphi(x-y\sqrt{-1})\Big\}dy\int_0^\infty\frac{\cos yv}{a^4-b^4v^4}dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

изъ сравненія этихъ двухъ формулъ выводимъ

$$\int_0^\infty\frac{\cos yv}{a^4-b^4v^4}dv=\frac{\pi}{2a^2.2ab}\left\{\sqrt{-1}\ e^{-\frac{a}{b}y\sqrt{-1}}+e^{-\frac{a}{b}y}\right\}.$$

Полагая въ этомъ равенствѣ $b=b\sqrt{\sqrt{-1}}$, имѣемъ:

$$\int_0^\infty\frac{\cos yv}{a^4+b^4v^4}dv=\frac{\pi}{2a^2.2ab}\cdot\frac{\sqrt{-1}\ e^{-\frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{\sqrt{-1}}}}+e^{-\frac{ay}{b\sqrt{\sqrt{-1}}}}}{\sqrt{\sqrt{-1}}},$$

что можно написать, замѣчая что $\sqrt{\sqrt{-1}}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})$, въ формѣ

$$\int_0^\infty\frac{\cos yv}{a^4+b^4v^4}dv=\frac{\pi e^{-\frac{ay}{b\sqrt{2}}}}{ba^2\,2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{ay}{b\sqrt{2}}+\sin\frac{ay}{b\sqrt{2}}\right). \quad \ldots (2)$$

Если положимъ въ формулѣ (1)

$$\psi(b)=\frac{1}{b}\left(e^{-\frac{a}{b}y}+e^{-\frac{a}{b}y\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\right),$$

то можно будетъ написать ее въ формѣ

$$\int_0^\infty\frac{\cos yv}{a^4-b^4v^4}dv=\frac{\pi}{4a^3}\psi(b) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Подобнымъ же образомъ можемъ получить послѣдовательно

$$\int_0^\infty\frac{\cos yv}{a^2-b^2v^2}dv=\frac{\pi}{2^3a^7}\left\{\psi(b)+\psi\left(b\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\right\} \quad \ldots (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos yv}{a^8 + b^8 v^8}\, dv = \frac{\pi}{2^3 a^7} \left\{ \psi\left(b\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \psi\left(b\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}}\ \sqrt{\sqrt{-1}}\right)\right\} \ldots\ldots \quad (5)$$

и такъ далѣе.

Такимъ образомъ можно выразить значеніе интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\cos yv}{a^{2n} \mp v^{2n}}\, dv.$$

§ 17. Формула (8) § 7-го намъ даетъ

$$G\, \frac{1}{a^4 + b^4 u^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \right.$$

$$\left. + \varphi(x - y\sqrt{-1})\, dy \int_0^\infty \frac{\cos yv}{a^4 + b^4 v^4}\, dv. \right.$$

Замѣняя

$$\int_0^\infty \frac{\cos yv}{a^4 + b^4 v^4}\, dv$$

его значеніемъ, даннымъ формулой (2) предъидущаго параграфа, будемъ имѣть:

$$G\, \frac{1}{a^4 + b^4 u^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}\, ba^3} \int_0^\infty \left\{ \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \right.$$

$$\left. + \varphi(x - y\sqrt{-1}) \right\} e^{-\frac{ay}{2\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{ay}{2\sqrt{2}} + \sin \frac{ay}{2\sqrt{2}} \right) dy \ldots \quad (1)$$

Возьмемъ, затѣмъ

$$\int_0^\infty e^{-bt} \sin at\, dt = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

и поставимъ въ немъ a^2 вмѣсто a и $b^2 u^2$ вмѣсто b; тогда получимъ

$$\int_0^\infty e^{-b^2 t u^2} \sin a^2 t\, dt = \frac{a^2}{a^4 + b^4 u^4},$$

женерализуя который, найдемъ

$$G\,\frac{1}{a^4+b^4u^4}=\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \sin a^2\,t\,dt\,Ge^{-b^2tu^2};$$

замѣнивъ $Ge^{-b^2tu^2}$ его значеніемъ и поставивъ t^2 вмѣсто t, будемъ имѣть

$$G\,\frac{1}{a^4+b^4u^4}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,ba^2}\int\Big\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+$$

$$+\varphi(x-y\sqrt{-1})\Big\}dy\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{4b^2t^2}}\sin a^2\,t^2\,dt.\;.\;.\;.\;(2)$$

Сравненіе формулъ (1) и (2), послѣ вставки $\frac{b}{\sqrt{2}}$ вмѣсто b, даетъ

$$\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2b^2t^2}}\sin a^2\,t^2\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}a}\,e^{-\frac{a}{b}y}\left(\cos\frac{ay}{b}+\sin\frac{ay}{b}\right).\;.\;.\;(3)$$

§ 18. Напишемъ формулу (21) § 14-го въ формѣ

$$G\,\frac{1}{(a^2+b^2u^2)^m}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,ba^{2m-1}\,\Gamma(m)}\int_0^\infty\Big\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+$$

$$+\varphi(x-y\sqrt{-1})\Big\}dy\int_0^\infty v^{m-\frac{3}{2}}\,e^{-v+\frac{a^2y^2}{4b^2v}}\,dv;$$

изъ сравненія ея съ той, которая получена съ помощью формулы (8) § 7, будемъ имѣть

$$G\,\frac{1}{(a^2+b^2u^2)^m}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+$$

$$+\varphi(x-y\sqrt{-1})\Big\}dy\int_0^\infty\frac{\cos yv}{(a^2+b^2v^2)^m}\,dv,$$

откуда:

$$\int_0^\infty\frac{\cos yv}{(a^2+b^2v^2)^m}\,dv=\frac{\sqrt{\pi}}{2\,ba^{2m-1}\,\Gamma(m)}\int_0^\infty v^{m-\frac{3}{2}}\,e^{-v-\frac{a^2y^2}{4b^2v}}\,dv.\;.\;.\;(1)$$

Если замѣтимъ, что равенство

$$\int_0^\infty \frac{\cos yv}{a+v^2}\,dv = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}\,e^{-y\sqrt{a}}$$

послѣ дифференцированія его даетъ

$$\int \frac{\cos yv}{(a+v^2)^m}\,dv = \frac{(-1)^{m-1}\pi}{2\,\Gamma(m)}\cdot\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}}\left(\frac{e^{-y\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}\right),$$

то положивъ $b=1$, получимъ

$$\int_0^\infty v^{m-\frac{3}{2}}\,e^{-v-\frac{ay^2}{4v}}\,dv = (-1)^{m-1}\sqrt{\pi}\,a^{m-\frac{1}{2}}\,\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}}\left(\frac{e^{-y\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}\right) \ldots (2)$$

§ 19. Полагая въ извѣстномъ интегралѣ $\sqrt{\pi}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

$$t = t - p,$$

выводимъ

$$\sqrt{\pi}\,e^{p^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+2pt-t^2}\,dt,$$

поставивъ $u\sqrt{a}$ вмѣсто p и женерализуя, имѣемъ

$$Ge^{au^2} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{4a}}\left\{\varphi(x+v)+\varphi(x-v)\right\}dv,$$

а замѣнивъ a посредствомъ $a\sqrt{-1}$,

$$Ge^{au^2\sqrt{-1}} = \frac{1-\sqrt{-1}}{2\sqrt{2a\pi}}\int_0^\infty\left(\cos\frac{v^2}{4a}+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{v^2}{4a}\sqrt{-1}\right)\left\{\varphi(x+v)+\varphi(x-v)\right\}dv,$$

что можно написать въ видѣ

$$G\left(\cos au^2+\sin au^2\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi a}}\int_0^\infty\left\{\left(\cos\frac{v^2}{4a}+\sin\frac{v^2}{4a}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sin\frac{v^2}{4a}-\cos\frac{v^2}{4a}\right)\sqrt{-1}\right\}\left[\varphi(x+v)+\varphi(x-v)\right]dv,$$

откуда слѣдуетъ

$$G\cos au^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty (\sin v^2 + \cos v^2)\Big\{\varphi(x + 2\sqrt{a}\,v) +$$

$$+ \varphi(x - 2\sqrt{a}\,v)\Big\}\,dv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$G\sin au^2 = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty (\sin v^2 - \cos v^2)\Big\{\varphi(x + 2\sqrt{a}\,v) +$$

$$+ \varphi(x - 2\sqrt{a}\,v)\Big\}\,dv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Деженерализуя обѣ полученныя формулы съ подстановкой y вмѣсто a и u вмѣсто u^2, будемъ имѣть

$$\cos yu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sqrt{y}\,v\sqrt{u}}\,(\sin v^2 + \cos v^2)\,dv, \qquad (3)$$

$$\sin yu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sqrt{y}\,v\sqrt{u}}\,(\sin v^2 - \cos v^2)\,dv, \qquad (4)$$

Подвергая снова дѣйствію G оба члена полученныхъ равенствъ, придемъ къ двумъ формуламъ:

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sin v^2 +$$

$$+ \cos v^2)\,dv\,Ge^{-2\sqrt{y}\,v\sqrt{u}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sin v^2$$

$$- \cos v^2)\,dv\,Ge^{-2\sqrt{y}\,v\sqrt{u}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Для опредѣленія величины

$$Ge^{-2\sqrt{y}\,.\,v\sqrt{u}}$$

припомнимъ извѣстный интегралъ

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2t^2 - \frac{1}{t^2}}\,\frac{dt}{t^2} = \sqrt{\pi}\,e^{-2q},$$

гдѣ q имѣетъ значеніе дѣйствительное и положительное.

Полагая $q = \sqrt{y}\, v \sqrt{u}$ и женерализуя, выводимъ

$$Ge^{-2\sqrt{y}\, v \sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}\, dt}{t^2}\, Ge^{-yv^2 t^2 u} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}\, dt}{t^2}\, \varphi(x - yv^2 t^2),$$

выраженія, которыя по вставкѣ ихъ въ формулы (5) и (6), дадутъ

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\sin v^2 +$$

$$+ \cos v^2)\, \varphi(x - yv^2 t^2)\, \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^2}\, dv\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\sin v^2 -$$

$$- \cos v^2)\, \varphi(x - yv^2 t^2)\, \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^2}\, dv\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Абель далъ значеніе выраженія $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$ въ формѣ:

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1}) = \frac{2y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 y^2}\, v\, dv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + t)\, e^{-v^2 t^2} dt.$$

Но легко доказать, что въ вычисленіе знаменитаго геометра вкралась ошибка, такъ что его формула не можетъ быть принята.

Разлагая оба члена равенствъ (7) и (8) и сравнивая коэффиціенты при y, получимъ слѣдующіе два интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{t^2}}\, t^{4n-2}\, v^{4n} \cos v^2\, dv\, dt = \frac{\pi(-1)^n}{\sqrt{2}} \quad . \; . \; . \; (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{t^2}}\, t^{4n-2}\, v^{4n-2} \sin v^2\, dv\, dt = \frac{\pi(-1)^{n-1}}{\sqrt{2}} \quad . \; . \; (10)$$

§ 20. Если проженерализуемъ оба члена интеграла

$$\int e^{-t^2-\frac{a^2}{4t^2}}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a},$$

то, замѣтивъ, что

$$Ge^{-\frac{a^2u^2}{4t^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-v^2}\left\{\varphi\left(x+\frac{av}{t}\sqrt{-1}\right)+\varphi\left(x-\frac{av}{t}\sqrt{-1}\right)\right\}dv,$$

получимъ равенство

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt\int\limits_0^\infty e^{-v^2}\left\{\varphi\left(x+\frac{av}{t}\sqrt{-1}\right)+\varphi\left(x-\frac{av}{t}\sqrt{-1}\right)\right\}dv=$$

$$=\frac{\pi}{2}\varphi(x-a)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

дифференцируя которое n разъ относительно a, и замѣняя въ окончательномъ результатѣ $\varphi^{(n)}$ черезъ φ, будемъ имѣть

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{t^n}\int e^{-v^2}v^n\left\{\varphi\left(x+\frac{av}{t}\sqrt{-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi\left(x-\frac{av}{t}\sqrt{-1}\right)\right\}dv=\frac{\pi(-1)^n\varphi(x+a)}{2(\sqrt{-1})^n}\;.\;\;.\;\;(2)$$

а положивъ $a=0$, —

$$\int\limits_0^\infty\frac{e^{-t^2}dt}{t^n}\int\limits_0^\infty e^{-v^2}v^n\,dv=\frac{(-1)^n\pi}{2(\sqrt{-1})^n[(1+(-1)^n]}=\frac{\pi}{4\cos\frac{n\pi}{2}}\;.\;(3)$$

Выведя это уравненіе, обратимся къ извѣстной формулѣ

$$\int\limits_0^\infty e^{-at}t^{n-1}\,dt=\frac{\Gamma(n)}{a^n},$$

которая, послѣ замѣны въ ней $\frac{2n+1}{2}$ вмѣсто n и t^m вмѣсто t, намъ дасть

$$\int\limits_0^\infty e^{-at^m}t^{mn+\frac{m}{2}-1}\,dt=\frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{ma^n\sqrt{a}};$$

а послѣ того какъ мы положимъ въ ней $mn + \frac{m}{2} - 1 = k$, —

$$\int_0^\infty e^{-at^m}\, t^k\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right)}{ma^{\frac{k+1}{m}}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Но такъ какъ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}\, dt}{t^{\imath}} = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right) \quad \text{и} \quad \int_0^\infty e^{-v}\, v^n\, dv = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right),$$

то равенство (3) доставитъ извѣстное отношеніе

$$\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}}.$$

Поставимъ въ формулѣ (4) $a\sqrt{-1}$ вмѣсто a, тогда получимъ

$$\int_0^\infty \cos at^m\, t^k\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right)\cos\frac{(k+1)\pi}{2m}}{ma^{\frac{k+1}{m}}}$$

и

$$\int_0^\infty \sin at^n\, t^k\, dk = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right)\sin\frac{(k+1)\pi}{2m}}{ma^{\frac{k+1}{m}}}$$

и такъ же

$$\int_0^\infty \sin v^2\, r^{4n}\, dv = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\,\Gamma\left(\frac{4n+1}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty \cos v^2\, v^{4n-2}\, dv = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2}}\,\Gamma\left(\frac{4n-1}{2}\right).$$

Значенія этихъ интеграловъ позволяютъ выразить формулы (9) и

(10) предъидущаго § въ одной и той же формѣ

$$\int e^{-\frac{1}{t^2}} t^{4n-2}\, dt = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{4n+1}{2}\right)}.$$

§ 21. Когда интегралъ принимаетъ безконечное значенiе для нѣкотораго значенiя перемѣнной величины, заключающейся между границами интегрированiя, то онъ имѣетъ обыкновенно мнимое значенiе. Вотъ почему интегралъ

$$\int_0^{\infty} \frac{\psi(x)}{(x-x_1)^m}\, dx,$$

въ которомъ $\psi(x)$ сохраняетъ конечное значенiе, будетъ имѣть видъ $A+B\sqrt{-1}$ для $x=x_1$, если x_1 находится въ предѣлахъ интегрированiя.

Значенiе $B\sqrt{-1}$, которое мы постараемся опредѣлить, очевидно то же самое, что и особеннаго интеграла

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi(x)}{(x-x_1)^m}\, dx$$

когда положимъ въ немъ $\varepsilon=0$.

Интегрированiе по частямъ намъ дастъ

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi(x)}{(x-x_1)^m}\, dx = -\Big|_{x-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi(x)}{(m-1)(x-x_1)^{m-1}} +$$

$$+\frac{1}{m-1}\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi'(x)}{(x-x')^{m-1}}\, dx$$

и замѣчая, что часть, находящаяся внѣ знака интеграла, имѣетъ дѣйствительное значенiе, мы можемъ писать, что

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi(x)}{(x-x_1)^m}\, dx = \frac{1}{m-1}\int \frac{\psi'(x)}{(x-x_1)^{m-1}}\, dx;$$

точно такъ же мы получимъ послѣдовательно слѣдующій рядъ уравненій:

$$\int\limits_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi'(x)}{(x-x_1)^{m-1}}\,dx = \frac{1}{m-2}\int\limits_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi''(x)}{(x-x_1)^{m-2}}\,dx\ \ldots,$$

$$\int\limits_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi^{(m-2)}(x)}{(x-x_1)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi^{(m-1)}(x)}{x-x_1}\,dx.$$

Слѣдовательно мнимое значеніе интеграла

$$\int\limits_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi(x)}{(x-x_1)^m}\,dx$$

будетъ то же самое, что и интеграла

$$\frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \frac{\psi^{(m-1)}(x)}{x-x_1}\,dx,$$

который какъ извѣстно выражается въ видѣ

$$\frac{1}{\Gamma(m)}\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\,\psi(x)\right]\pi\sqrt{-1}.$$

§ **22**. Обратимся теперь снова къ формулѣ (22) § 14-го

$$G\,\frac{1}{(a^2-b^2u^2)^m} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,ba^{2m-1}\,\Gamma(m)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty v^{m-\frac{3}{2}-v-\frac{a^2y^2}{4b^2v}}\{\varphi(x+y)+$$

$$+\varphi(x-y)\}\,dy\,dv \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

полагая въ ней $m=1$ и сравнивая ее съ формулой (1) § 20, выводимъ извѣстный интегралъ (Коши, Sav. Etr. 1827, 124)

$$\int\limits_0^\infty e^{-\left(pv+\frac{q}{v}\right)}\,\frac{dv}{\sqrt{v}} = e^{-2\sqrt{pq}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\ \ldots\ldots (2)$$

При помощи (8) формулы § 19 будемъ имѣть

$$G\frac{1}{(a^2-b^2u^2)^m}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})}{(a^2-b^2v^2)^m}\cos yv\,dy\,dv;$$

изъ сравненія же этой формулы съ формулой (1) получимъ

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})}{(a^2-b^2v^2)^m}\cos yv\,dv\,dy=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2ba^{2m-1}\Gamma(m)}\int_0^\infty\int_0^\infty v^{m-\frac{3}{2}-v-\frac{a^2y^2}{4b^2v}}[\varphi(x+y)+\varphi(x-y)]\,dv\,dy\ . \quad (3)$$

Полагаемъ $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, и полученная формула преобразуется въ

$$\int_0^\infty v^{m-\frac{3}{2}}e^{-v}\,dv\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{y^2}{v}}\,dy}{y^2-x^2}=(-1)^{m-1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)}{x}\int_0^\infty\frac{e^{-2xv}\,dv}{(v^2-1)^m},$$

изъ которой мы можемъ вывести, уравнивая мнимыя части заключающіяся въ интегралахъ каждаго члена,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{v}-v}v^{m-\frac{3}{2}}\,dv=2(-1)^{m-1}\sqrt{\pi}\left[\frac{d^{m-1}}{dv^{m-1}}\left(\frac{e^{-2xv}}{(v+1)^m}\right)\right]^{v=1}.\ .\quad (4)$$

Можно получить значеніе этого интеграла, пользуясь формулой (2), которая можетъ быть написана, полагая въ ней $q=x^2$, въ формѣ

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{v}-pv}\frac{dv}{\sqrt{v}}=\sqrt{\pi}\frac{e^{-2x\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$$

Дифференцируя его $m-1$ разъ относительно p и полагая $p=1$, будемъ имѣть

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{v}-v}v^{m-\frac{3}{2}}\,dv=(-1)^{m-1}\sqrt{\pi}\left[\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left(\frac{e^{-2x\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\right)\right]^{p=1}.\ .\ .\ .\ (5)$$

При помощи (4) и (5) формулъ получается отношенiе

$$\left[\frac{d^{m-1}}{dv^{m-1}}\left(\frac{e^{-2x\sqrt{v}}}{\sqrt{v}}\right)\right]^{v=1} = 2\left[\frac{d^{m-1}}{dv^{m-1}}\left(\frac{e^{-2xv}}{(1+v)^m}\right)\right]^{v=1} \quad . \; . \; . \; (6)$$

женерализуя которое, будемъ имѣть

$$\left[\frac{d^{m-1}}{dv^{m-1}}\;\frac{\varphi(x-h\sqrt{v})}{\sqrt{v}}\right]^{v=1} = 2\left[\frac{d^{m-1}}{dv^{m-1}}\left(\frac{\varphi(x-hv)}{(1+v)^m}\right)\right]^{v=1} \quad . \; . \; (7)$$

§ 23. Иногда случается, что женерализацiонное вычисленiе даетъ значенiе нѣкоторыхъ интеграловъ въ различныхъ формахъ; въ такомъ случаѣ уравнивая результаты, можно получить довольно замѣчательныя отношенiя.

Для примѣра возьмемъ извѣстные интегралы:

$$\int_0^\infty e^{-av}\, v^{m-1} \sin bv\, dv = \frac{\Gamma(m)}{(a^2+b^2)^{\frac{m}{2}}} \sin\left\{m \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right\} \; . \; . \; (1)$$

$$\int_0^\infty e^{-av}\, v^{m-1} \cos bv\, dv = \frac{\Gamma(m)}{(a^2+b^2)^{\frac{m}{2}}} \cos\left\{m \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right\} \; . \; . \; (2)$$

Чтобы получить другое выраженiе этого интеграла, разсмотримъ тождество

$$\frac{1}{(a+bu)^m} = \frac{1}{a^m\,\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-v}\, e^{m-1}\, e^{-\frac{b}{a}vu}\, dv$$

изъ котораго выводимъ

$$G\,\frac{1}{(a+bu)^m} = \frac{1}{a^m\,\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-v}\, v^{m-1}\, \varphi\left(x - \frac{b}{a}v\right) dv \quad . \; . \; (3)$$

а перемѣнивъ b на $-b$

$$G\,\frac{1}{(a-bu)^m} = \frac{1}{a^m\,\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-v}\, v^{m-1}\, \varphi\left(x + \frac{b}{a}v\right) dv \quad . \; . \; (4)$$

Сумма этихъ тождествъ дастъ

$$\int_0^\infty e^{-v}\, v^{m-1}\left\{\varphi\left(x+\frac{b}{a}v\right)+\varphi\left(x-\frac{b}{a}v\right)\right\}dv=$$

$$=a^m\,\Gamma(m)\,G\,\frac{(a+bu)^m+(a-bu)^m}{(a^2-b^2u^2)^m},$$

которое, послѣ замѣны въ немъ b количествомъ $b\sqrt{-1}$, и принявъ въ разсчетъ тождество

$$G\cos\frac{b}{a}uv=\frac{1}{2}\left\{\varphi\left(x+\frac{b}{a}v\sqrt{-1}\right)+\varphi\left(x-\frac{b}{a}v\sqrt{-1}\right)\right\},$$

превратится въ

$$\int_0^\infty e^{-v}\,v^{m-1}\cos\frac{bv}{a}\,dv=\frac{a^m\,\Gamma(m)}{2}\;\frac{(a+b\sqrt{-1})^m+(a-b\sqrt{-1})^m}{(a^2+b^2)^m},\quad(5)$$

гдѣ, полагая $v=av$, получаемъ

$$\int_0^\infty e^{-av}\,v^{m-1}\cos bv\,dv=\frac{\Gamma(m)}{2}\;\frac{(a+b\sqrt{-1})^m+(a-b\sqrt{-1})^m}{(a^2+b^2)^m}.$$

Взявъ разность (3) и (4) равенствъ, мы точно такъ же найдемъ

$$\int_0^\infty e^{-av}\,v^{m-1}\cos bv\,dv=\frac{\Gamma(m)}{2\sqrt{-1}}\;\frac{(a+b\sqrt{-1})^m-(a-b\sqrt{-1})^m}{(a^2+b^2)^m}\;.\quad(6)$$

Сравненіе этихъ выраженій съ формулами (1) и (2) приводитъ насъ къ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\sin\left[m\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{m}{2}}}\;\frac{(a+b\sqrt{-1})^m-(a-b\sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}\;.\;.\;.\quad(7)$$

$$\cos\left[m \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{m}{2}}} \; \frac{(a+b\sqrt{-1})^m + (a-b\sqrt{-1})^m}{2} \quad . \; . \; . \; (8)$$

Женерализація показательныхъ функцій.

§ 24. Если въ интегралѣ

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-k^2}\, dk$$

мы положимъ $k = t - \sqrt{a}\,.\,u$, то будемъ имѣть

$$e^{au^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\sqrt{a}\,tu - t^2}\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

и женерализуя, получимъ извѣстную уже формулу

$$Ge^{au^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, \varphi(x + 2\sqrt{a}\,t)\, dt \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Поставивъ въ формулѣ (1) u^2 вмѣсто u будемъ имѣть

$$e^{au^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\sqrt{a}\,tu^2 - t^2}\, dt; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

женерализуя послѣднее уравненіе, принимая въ разсчетъ формулу (2), придемъ къ слѣдующему

$$Ge^{au^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2-t^2}\, \varphi\left(x + 2^{1+\frac{1}{2}}\, a^{\frac{1}{4}}\, t v^{\frac{1}{2}}\right) dv\, dt \quad . \; . \; . \; (4)$$

Ставимъ въ интегралъ (3) u^2 вмѣсто u и женерализуемъ полученный результатъ, принимая въ разсчетъ предъидущую формулу. Будемъ имѣть

$$Ge^{au^8} = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2-t^2-w^2}\, \varphi\left(x + 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\, a^{\frac{1}{8}}\, t v^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{4}}\right) dv\, dt\, dw.$$

Слѣдуя тому же самому плану, найдемъ вообще

$$Ge^{au^{2n}} = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2-t^2-w^2 \ldots z^2} \varphi\Big(x +$$

$$+ 2^{\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n-1}}\right]} a^{\frac{1}{2^n}} t \,.\, v^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{4}} \ldots z^{\frac{1}{2^{n-1}}}\Big) dv\, dt \,.\, dw \ldots dz \,. \quad (5)$$

Для того, чтобы опредѣлить значенiе Ge^{au^3}, помножимъ интегралъ (1) на e^{bu}, что дастъ

$$e^{bu+au^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+(2\sqrt{a}t+b)u}\, dt,$$

поставимъ въ этомъ послѣднемъ u^2 вмѣсто u и женерализуемъ, тогда получится

$$Ge^{bu^2+au^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-v^2} \varphi\left(x + 2v\sqrt{2\sqrt{a}t+b}\right) dv\, dt \,.\;.\; (6)$$

ставя въ тождествѣ (3) $1+u$ вмѣсто u и $w+\sqrt{a}$ вмѣсто t, выводимъ

$$e^{4au^3} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2+4\sqrt{a}wu+2\sqrt{a}(w-2\sqrt{a})u^2-au^4}\, dw,$$

замѣняя здѣсь a количествомъ $\frac{a}{4}$, получаемъ

$$e^{au^3} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2+2\sqrt{a}wu+\sqrt{a}(w-\sqrt{a})u^2-\frac{au^4}{4}}\, dw \;.\;\;.\;\;. \quad (7)$$

Но такъ какъ формула (6) даетъ

$$Ge^{\sqrt{a}(w-\sqrt{a})u-\frac{au^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-v^2} \varphi\left(x + 2v\sqrt{\sqrt{a}\,(w+t\sqrt{-1}-a)}\right) dv\, dt,$$

то женерализуя уравненіе (7), будемъ имѣть

$$Ge^{cu^4} = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-v^2-w^2} \varphi\,(x + 2\sqrt{a}\,w +$$

$$+ 2v\sqrt{\sqrt{a}\,(w + t\sqrt{-1}) - a}\,)\,dv\,.\,dt\,.\,dw. \quad . \quad . \quad (8)$$

Подобнымъ же образомъ можно опредѣлить значенія

$$Ge^{au^5},\ Ge^{au^6}\ \ldots\ Ge^{au^n}.$$

§ 25. Написавъ интегралъ

$$e^{-q} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{t \sin t}{q^2 + t^2}\,dt$$

въ слѣдующихъ различныхъ формахъ

$$e^{-\frac{a}{u}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{u^2\, t \sin t\, dt}{a^2 + t^2 u^2},\quad \frac{e^{-\frac{a}{u}}}{u} = \int_0^{\infty} \frac{ut \sin t\, dt}{a^2 + t^2 u^2},\quad \frac{e^{-\frac{a}{u}}}{u^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{t \sin t\, dt}{a^2 + t^2 u^2},$$

мы получимъ при помощи формулъ (10), (8) и (7) § 14-го

$$Ge^{-\frac{a}{u}} = \varphi(x) - \frac{a}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{ay}{t}}\, \frac{\sin t}{t^2} \Big\{ \varphi\,(x + y\sqrt{-1}) +$$

$$+ \varphi\,(x - y\sqrt{-1}) \Big\}\, dy\,.\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$G\,\frac{e^{-\frac{a}{u}}}{u} = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{ay}{t}}\, \frac{\sin t}{t} \Big\{ \varphi\,(x + y\sqrt{-1}) -$$

$$- \varphi\,(x - y\sqrt{-1}) \Big\}\, dy\,.\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$G\,\frac{e^{-\frac{a}{u}}}{u^2} = \frac{1}{\pi a}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{ay}{t}} \sin t \Big\{ \varphi\,(x + y\sqrt{-1}) +$$

$$+ \varphi\,(x - y\sqrt{-1}) \Big\}\, dy\,.\,dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Полагая въ (1) формулѣ $t=\frac{1}{h}$, можно дать ей слѣдующій простой видъ:

$$\Theta e^{-\frac{a}{u}}=\varphi(x)-\frac{a}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ahy}\sin\frac{1}{h}\left\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+\right.$$

$$\left.+\varphi(x-y\sqrt{-1})\right\}dh\,dy\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

Деженерализуя эту формулу и замѣчая, что

$$\int_0^\infty e^{-ahy}\cos yu\,dy=\frac{ah}{u^2+a^2h^2},$$

получимъ

$$\int_0^\infty\frac{h\sin\frac{1}{h}\,dh}{u^2+a^2h^2}=\frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-\frac{a}{u}}\right).$$

Дифференцируемъ формулу (2) относительно a. Будемъ имѣть

$$\Theta\frac{e^{-\frac{a}{u}}}{u^n}=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{ay}{t}}\frac{y^{n-1}}{t^{n+1}}\sin t\left\{\varphi(x+y\sqrt{-1})-\right.$$

$$\left.-\varphi(x-y\sqrt{-1})\right\}dy\,dt\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

Если въ интегралѣ

$$e^{-mp}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{y\sin py}{m^2+y^2}\,dy$$

мы положимъ $m=\frac{1}{u+a}$, то получимъ въ результатѣ

$$e^{-\frac{p}{u+a}}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin py}{y}\left(1-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{(u+a)^2+\frac{1}{y^2}}\right)dy,\;.\;\;(6)$$

равенство, женерализуя которое, принявъ въ разсчетъ, что

$$\int_0^\infty\frac{\sin py}{y}\,dy=\frac{\pi}{2},$$

будемъ имѣть

$$Ge^{-\frac{p}{u+a}} = \varphi(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin py}{y^3}\,dy\, G\,\frac{1}{(u+a)^2+\frac{1}{y^2}}\,.$$

Формула (16) § 14-го даетъ

$$G\,\frac{1}{u^2+2au+b} = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\int_0^\infty e^{-av}\sin v\sqrt{b-a^2}\,\varphi(x-v)\,dv.$$

Полагая въ ней $b=a^2+\frac{1}{y^2}$, найдемъ

$$G\,\frac{1}{(u+a)^2+\frac{1}{y^2}} = y\int_0^\infty e^{-av}\sin\frac{v}{y}\,\varphi(x-v)\,dv,$$

равенство, позволяющее написать формулу (6) въ видѣ

$$Ge^{-\frac{p}{u+a}} = \varphi(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin py}{y^2}\sin\frac{v}{y}\,e^{-av}\,\varphi(x-v)\,dy\,dv,$$

гдѣ полагая $y=\frac{1}{h}$, будемъ имѣть

$$Ge^{-\frac{p}{u+a}} = \varphi(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-av}\sin\frac{p}{h}\sin hv\,\varphi(x-v)\,dh\,dv,$$

что можно такъ же написать, поставивъ $\frac{p}{a}$ вмѣсто p и $\frac{b}{a}$ вмѣсто b, въ формѣ

$$Ge^{-\frac{p}{au+b}} = \varphi(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{b}{a}v}\sin\frac{p}{ah}\sin hv\,\varphi(x-v)\,dh\,dv\,. \quad (7)$$

Деженерализуемъ послѣднее выраженіе, поставимъ въ него pu вмѣсто p и женерализуемъ снова; будемъ имѣть

$$Ge^{-\frac{pu}{au+b}} = \varphi(x) - \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{b}{a}v}\sin hv\left\{\varphi\left(x-v+\frac{p}{ah}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-v-\frac{p}{ah}\sqrt{-1}\right)\right\}dh\,dv\,.\,.\quad (8)$$

Для того чтобы получить значеніе $Ge^{-\frac{p}{u^2}}$, достаточно вставить въ интегралъ

$$e^{-mp}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{y\,.\,\sin py}{m^2+y^2}\,dy$$

$\frac{1}{u^2}$ вмѣсто m, причемъ мы получимъ

$$Ge^{-\frac{p}{u^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty y\sin py\,dy\,G\,\frac{u^2}{1+y^2u^4}\,.$$

§ 26. Замѣтимъ, что

$$\frac{e^{cu}}{1-me^{au}}=e^{cu}\left(1+me^{au}+m^2e^{2au}+m^3e^{3au}+\,\ldots\right)=$$

$$=e^{cu}+me^{(c+a)u}+m^2e^{(c+a^2)u}+\,\ldots$$

Женерализуя оба члена этого равенства, будемъ имѣть

$$G\,\frac{e^{cu}}{1-me^{au}}=\varphi(x+c)+m\varphi(x+c+a)+$$

$$+m^2\varphi(x+c+2a)+\,\ldots\,=\sum_{n=0}^{n=\infty}m^n\varphi(x+c+an);$$

ставя $\frac{m}{p}$ вмѣсто m и $a-b$ вмѣсто a, получимъ

$$G\,\frac{e^{(c+b)u}}{pe^{bu}-me^{au}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^n\varphi\left[x+c+(a-b)\,n\right].$$

Полагая $c+b=s$, будемъ имѣть

$$G\,\frac{e^{su}}{pe^{bu}-me^{au}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^n\varphi\left[x+s-b+(a-b)\,n\right].$$

Замѣняемъ s черезъ v—

$$G\,\frac{e^{vu}}{pe^{bu}-me^{au}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^n\varphi\left[x+v-b+(a-b)\,n\right].$$

Изъ двухъ послѣднихъ формулъ выводимъ

$$G\,\frac{he^{su}+ke^{vu}}{pe^{bu}-me^{au}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{n}\{h\varphi\,[x+s-b+(a-b)\,n]+$$

$$+k\varphi\,[x+v-b+(a-b)\,n]\}\;\ldots\ldots\;(1)$$

измѣняя m въ $-m$, будемъ имѣть

$$G\,\frac{he^{su}+ke^{vu}}{pe^{bu}-me^{au}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n}\left(\frac{m}{p}\right)^{n}\{h\varphi\,[x+s-b+(a-b)\,n]+$$

$$+k\varphi\,[x+v-b+(a-b)\,n].\;\ldots\ldots\;(2)$$

Частные случаи этихъ двухъ формулъ:

$$G\,\frac{1}{1-e^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi\,(x+an)\;\ldots\ldots\;(3)$$

$$G\,\frac{1}{1+e^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n}\,\varphi\,(x+an)\;\ldots\ldots\;(4)$$

$$G\,\frac{1}{1-e^{-au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi\,(x+an)\;\ldots\ldots\;(5)$$

$$G\,\frac{1}{1+e^{-au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\,\varphi\,(x-an)\;\ldots\ldots\;(6)$$

$$G\,\frac{1}{e^{au}-e^{-au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi\,[x+(2n+1)\,a]\;\ldots\ldots\;(7)$$

$$G\,\frac{1}{e^{au}+e^{-au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n}\,\varphi\,[x+(2n+1)\,a]\;\ldots\;(8)$$

$$G\,\frac{1}{e^{au}-e^{-au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi\,[x-b+(a-b)\,n]\;\ldots\;(9)$$

$$G\,\frac{1}{e^{bu}-e^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\varphi[x-b+(a-b)n]\,.\quad .\,(10)$$

$$G\,\frac{e^{bu}}{1-e^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi\,[x+b+an]\quad .\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

$$G\,\frac{e^{bu}}{1+e^{au}}=\sum_{u=0}^{n=\infty}(-1)^n\varphi\,(x+b+an)\quad .\;.\;.\;(12)$$

$$G\,\frac{e^{au}+1}{e^{au}-1}=\varphi\,(x)-2\sum_{n=1}^{n=\infty}\varphi\,(x+an)\quad .\;.\;.\;(13)$$

$$G\,\frac{e^{au}-1}{e^{au}+1}=-\varphi\,(x)+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\varphi\,(x+an)\;.\,(14)$$

$$G\,\frac{e^{su}+e^{vu}}{e^{bu}-e^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\{\varphi\,[x+s-b+(a-b)\,n]+$$
$$+\varphi\,[x+r-b+(a-b)\,n]\}\,.\;.\;.\;.\;.\;(15)$$

$$G\,\frac{e^{su}+e^{vu}}{e^{bu}+e^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\,\{\varphi\,[x+s-b+(a+b)\,n]+$$
$$+\varphi\,[x+r-b+(a+b)\,n]\}\quad .\;.\;.\;.\;.\;(16)$$

$$G\,\frac{e^{su}-e^{vu}}{e^{bu}-e^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\{\varphi\,[x+s-b+(a-b)\,n]-$$
$$-\varphi\,[x+r-b+(a-b)\,n]\}\quad .\;.\;.\;.\;.\;(17)$$

$$G\,\frac{e^{su}-e^{vu}}{e^{bu}+e^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\,\{\varphi\,[x+s-b+(a-b)\,n]-$$
$$-\varphi\,[x-r-b+(a-b)\,n]\}\quad .\;.\;.\;.\;(18)$$

Точно такъ же при помощи разложенія въ строки, найдемъ слѣдующія формулы:

$$G\frac{h+ke^{bu}}{p-mue^{au}}=\frac{h}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^n\varphi^{(n)}(x+na)+$$

$$+\frac{k}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^n\varphi^{(n)}(x+b+na)\;.\;.\;.\;.\;.\;(19)$$

$$G\frac{h+ke^{bu}}{pu-me^{au}}=\frac{h}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^n\int^n\varphi(x+na)\,dx^n+$$

$$+\frac{k}{p}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^n\int^{n+1}\varphi(x+b+na)\,dx^{n+1}\;.\;(20)$$

$$G\frac{h+kue^{bu}}{pu-me^{au}}=\frac{h}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^n\int^n\varphi(x+na)\,dx^n+$$

$$+\frac{k}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^n\int^n\varphi(x+b+na)\,dx^n\;.\;.\;.\;.\;(21)$$

$$G\frac{h+kue^{bu}}{p-mue^{au}}=\frac{h}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^n\varphi^{(n)}(x+na)+$$

$$+\frac{k}{p}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{n-1}\varphi^{(n)}[x+b+(n-1)a]\;.\;.\;.\;(22)$$

Женерализація логариѳмическихъ функцій.

§ 27. При помощи извѣстнаго интеграла

$$\lg u=\int_0^\infty(e^{-t}-e^{ut})\frac{dt}{t}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

по способу женерализаціи выводимъ

$$G\lg u=\int_0^\infty e^{-t}\{\varphi(x)-\varphi(x-t)\}\frac{dt}{t}\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Полагая въ интегралѣ (1) $u = au$, получимъ

$$G \lg u + \varphi(x) \lg a = \varphi(x) \int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} - \int_0^\infty \varphi(x - at) \frac{dt}{t} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Перемѣнивъ a на b, будемъ имѣть точно такъ же

$$G \lg u + \varphi(x) \lg b = \varphi(x) \int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} - \int_0^\infty \varphi(x - bt) \frac{dt}{t} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

вычитая одно изъ другого два послѣднія равенства, находимъ

$$\int_0^\infty \{\varphi(x - bt) - \varphi(x - at)\} \frac{dt}{t} = \varphi(x) \lg \frac{a}{b} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

интегралъ, который можно провѣрить, полагая

$$b = -b\sqrt{-1} \;\; et \;\; a = b\sqrt{-1}$$

при чемъ получается извѣстный интегралъ

$$\int_0^\infty \sin bt \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

Полагая въ формулѣ (1) $u = (a + bu)$, получимъ

$$G \lg (a + bu) = \int_0^\infty \{e^{-t} \varphi(x) - e^{-at} \varphi(x - bt)\} \frac{dt}{t} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Точно такъ же будемъ имѣть

$$G \lg (a' + b'u) = \int_0^\infty \{e^{-t} \varphi(x) - e^{-a't} \varphi(x - b't) \frac{dt}{t} \quad . \quad . \quad (7)$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ получается

$$G \lg \frac{a + bu}{a' + b'u} = \int_0^\infty \{e^{-a't} \varphi(x - b't) - e^{-at} \varphi(x - bt)\} \frac{dt}{t} \;. \; (8)$$

и

$$G \lg (a+bu)(a'+b'u) = 2\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} - \int_0^\infty \{e^{-at}\varphi(x-bt) +$$

$$+ e^{-a't}\varphi(x-b't)\}\frac{dt}{t} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \,(9)$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ, полагая $a'=a$ и $b'=-b$, выводимъ

$$G \log (a^2 - b^2 u^2) = 2\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} - \int_0^\infty e^{-at}\{\varphi(x-bt) +$$

$$+ \varphi(x+bt)\}\frac{dt}{t} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \,(10)$$

и замѣня b выраженіемъ $b\sqrt{-1}$,

$$G \lg (a^2 + b^2 u^2) = 2\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} - \int_0^\infty e^{-at}\left\{\varphi(x+bt\sqrt{-1}) +\right.$$

$$\left. + \varphi(x-bt\sqrt{-1})\right\}\frac{dt}{t} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \,(11)$$

слѣдовательно

$$G \lg \left(\frac{a^2 - b^2 u^2}{a^2 + b^2 u^2}\right) = \int_0^\infty e^{-at}\left\{\varphi(x+bt\sqrt{-1}) +\right.$$

$$\left. + \varphi(x-bt\sqrt{-1}) - \varphi(x+bt) - \varphi(x-bt)\right\}\frac{dt}{t} \,.\,. \,(12)$$

Положимъ въ извѣстномъ интегралѣ

$$\lg(1+q^2) = 2\int_0^\infty (1-e^{-qt})\frac{\cos t}{t}\,dt,$$

$q=\frac{p}{q}u$; женерализуя, будемъ имѣть

$$G\{\lg(q^2+p^2u^2 - 2\lg q\} = 2\,G\int_0^\infty \left(1-e^{\frac{p}{q}tu}\right)\frac{\cos t}{t}\,dt. \quad (13)$$

Точно такъ же найдемъ

$$G\left\{\lg\left(q'^2+p'^2u^2\right)-2\lg q'\right\}=2G\int_0^\infty\left(1-e^{-\frac{p'}{q'}tu}\right)\frac{\cos t}{t}\,dt$$

и слѣдовательно

$$G\lg\frac{q^2+p^2u^2}{q'^2+p'^2u^2}=2\lg\frac{q}{q'}\,\varphi(x)+2\int_0^\infty\left\{\varphi\left(x-\frac{p'}{q'}\,t\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi\left(x-\frac{p}{q}\,t\right)\right\}\frac{\cos t}{t}\,dt\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;(14)$$

Женерализація круговыхъ функцій.

§ 28. Пусть $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n \ldots x_p$ $p+1$ корней, удовлетворяющихъ уравненію

$$\varphi(x)=0.$$

Тогда, обозначивъ черезъ Z функцію x, можно написать слѣдующее равенство

$$\varphi(x)=(x-x_n)\,Z,$$

такъ что Z будетъ равно $\varphi'(x_n)$ для $x=x_n$.

Теперь, если мы предположимъ, что

$$\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{N}{x-x_n}+\frac{P}{Z},$$

то выведемъ

$$1=N\,\frac{\varphi(x)}{x-x_n}+P\,(x-x_n),$$

а полагая $x=x_n$, получимъ изъ него

$$N=\frac{1}{\varphi'(x_n)}$$

и слѣдовательно можемъ написать

$$\frac{1}{\varphi(x)}=\sum_{n=0}^{n=p}\frac{1}{(x-x_n)\,\varphi'(x_n)}\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;(1)$$

Предположимъ, затѣмъ, что

$$\frac{1}{[\varphi(x)]^2}=\frac{N}{(x-x_n)^2}+\frac{M}{x-x_n}+\frac{P}{Z}\,.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(2)$$

Мы выведемъ отсюда

$$1=NZ^2+M(x-x_n)Z^2+P(x-x_n)^2Z,$$

а полагая $x=x_n$,—

$$N=\frac{1}{[\varphi'(x_n)]^2}\,.$$

Дифференцируя предъидущее равенство относительно x и ставя x_n вмѣсто x, будемъ имѣть

$$0=2N\frac{dZ}{dx}+MZ$$

и слѣдовательно

$$M=-\frac{2N}{Z}\,\frac{dZ}{dx}=-\frac{2}{[\varphi'(x_n)]^3}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x)}{x-x_u}\right)=-\frac{\varphi''(x_n)}{[\varphi'(x_n)]^3}\,.$$

Вслѣдствіе полученныхъ значеній M и N можемъ писать равенство (2) въ видѣ

$$\frac{1}{[\varphi(x)]^2}=\sum_{n=0}^{n=p}\frac{1}{(x-x_n)^2[\varphi'(x_n)]^2}-\sum_{n=0}^{n=p}\frac{\varphi''(x_n)}{(x-x_n)[\varphi'(x_n)]^3}\,.\quad.\quad(3)$$

Слѣдуя тому же пути, весьма легко опредѣлить значенія M, N ... удовлетворяющія равенству

$$\frac{1}{[\varphi(x)]^m}=\frac{N}{(x-x_n)^m}+\frac{M}{(x-x_n)^{m-1}}+\ldots+\frac{P}{Z},$$

и вывести формулы, аналогичныя тождествамъ (1) и (2).

§ 29. Если въ формулѣ (1) предъидущаго § положимъ $\varphi(x)=$ $=\sin ax$ и $x=u$, то будемъ имѣть

$$\frac{1}{\sin au}=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{au-u\pi}=\frac{1}{au}+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\left\{\frac{1}{au-n\pi}+\frac{1}{au+n\pi}\right\}.$$

Женерализуя это равенство, получимъ

$$G\frac{1}{\sin au}=\frac{1}{a}G\frac{1}{u}+2a\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}G\frac{u}{n^2\pi^2-a^2u^2},$$

которое можно написать въ видѣ

$$G\frac{1}{\sin au}=\frac{1}{a}G\frac{1}{u}+\frac{1}{a}\int_0^\infty\{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)\}\,dt\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}e^{-\frac{n\pi}{a}t}$$

замѣчая, что

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}e^{-\frac{n\pi t}{a}}=\frac{e^{-\frac{\pi t}{a}}}{1+e^{\frac{\pi t}{a}}}=\frac{1}{1+e^{\frac{\pi t}{a}}}$$

а

$$G\frac{1}{u}=\int_0^\infty\varphi(x-t)\,dt,$$

придемъ къ результату

$$G\frac{1}{\sin au}=\frac{1}{a}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{\pi t}{2a}}\varphi(x-t)+e^{-\frac{\pi t}{2a}}\varphi(x+t)}{e^{\frac{\pi t}{2a}}+e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{\pi t}{2a}}\varphi(x+t)\,dt}{e^{\frac{\pi t}{2a}}+e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

Уничтожая знакъ G, получимъ

$$\int_0^\infty\frac{e^{\frac{\pi t}{2a}-ut}+e^{-\frac{\pi t}{2a}-ut}}{e^{\frac{\pi t}{2a}}+e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt=\frac{a}{\sin au},$$

что можно представить въ извѣстной уже формѣ

$$\int_0^\infty\frac{e^{pt}+e^{-pt}}{e^{qt}+e^{-qt}}\,dt=\frac{\pi}{2q\cos\frac{\pi p}{2q}}\quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

Полагая въ этомъ интегралѣ (1) $e^t = v$, получимъ

$$G\frac{1}{\sin au} = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\varphi(x+\lg v)}{1+v^{\frac{\pi}{a}}}\,dv$$

формулу, деженерализація которой, полагая притомъ $a = \frac{\pi}{n}$, дастъ извѣстный интегралъ

$$\int_0^\infty \frac{v^{u-1}\,dv}{1+v^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{u\pi}{n}}.$$

§ **30**. Если въ формулѣ (1) § 28 положимъ $\varphi(x) = \cos ax$ и $x = u$, то выведемъ равенство

$$\frac{1}{\cos au} = 4\pi\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{4a^2u^2-(2n+1)^2\pi^2}$$

и слѣдовательно

$$G\frac{1}{\cos au} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\int_0^\infty e^{-\frac{2n+1}{2a}\pi t}\left\{\varphi(x-t)+\varphi(x+t)\right\}dt,$$

которое можно написать въ видѣ

$$G\frac{1}{\cos au} = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{e^{\frac{\pi t}{2a}}+e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x+t)\,dt}{e^{\frac{\pi t}{2a}}+e^{-\frac{\pi t}{2a}}}. \quad (1)$$

Деженерализуя это равенство, придемъ къ новому—

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tu}+e^{tu}}{e^{\frac{\pi t}{2a}}+e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt = \frac{a}{\cos au},$$

которое можно написать въ формѣ

$$\int_0^\infty \frac{e^{2pt}+e^{-2pt}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}\,dt = \frac{1}{2\cos p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

31. Формула (3) параграфа 28 даетъ, полагая въ ней $\varphi(x) = ax$ и $x = u$:

$$\frac{1}{\sin^2 au} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(au - n\pi)^2}$$

'ю мы можемъ написать въ видѣ

$$\frac{1}{\sin^2 au} = \frac{1}{a^2u^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{(n\pi - au)^2} + \frac{1}{(n\pi + au)^2}\right).$$

енерализуя ее, получимъ

$$\frac{1}{\sin^2 au} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\varphi(x-t)\, e^{\frac{\pi t}{2a}} + \varphi(x+t)\, e^{-\frac{\pi t}{2a}}}{e^{\frac{\pi t}{2a}} - e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\, t dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t e^{-\frac{\pi t}{2a}} \varphi(x+t)}{e^{\frac{\pi t}{2a}} - e^{-\frac{\pi t}{2a}}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

же формула (3) § 28 намъ даетъ, полагая въ ней $\varphi(x) = \cos ax$ u,

$$\frac{1}{\cos^2 au} = 4\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2au - (2n-1)\pi)^2},$$

выводимъ

$$G\,\frac{1}{\cos^2 au} = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)\, t\, dt}{e^{\frac{\pi t}{2a}} - e^{-\frac{\pi t}{2a}}} \quad \ldots\ldots (2)$$

пагая здѣсь $e^t = v$, находимъ интегралъ

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1} \lg v\, dv}{v^{2n} - 1} = \frac{\pi^2}{4n^2 \sin^2 \frac{a\pi}{2n}} \quad \ldots\ldots (3)$$

Слѣдуя тому же пути получимъ

$$G \operatorname{tg} au = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{e^{\frac{\pi t}{2a}}-e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x+at)}{e^{\frac{\pi t}{2}}-e^{-\frac{\pi t}{2}}}\,dt \quad (4)$$

$$G \operatorname{cotg} au = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{\pi t}{2a}}\varphi(x-t)-e^{-\frac{\pi t}{2a}}\varphi(x+t)}{e^{\frac{\pi t}{2a}}-e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{\pi t}{2}}\varphi(x+at)}{e^{\frac{\pi t}{2}}-e^{-\frac{\pi t}{2}}}\,dt \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Та и другая формула даетъ интегралъ

$$\int_0^\infty \frac{e^{2pt}-e^{-2pt}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{tg} p \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

§ 32. Изъ формулы (2) § 8, помощью замѣны въ ней $a\sqrt{-1}$ вмѣсто a, выводимъ

$$Ge^{au^2\sqrt{-1}} = \frac{1-\sqrt{-1}}{2\sqrt{2\pi a}}\int_0^\infty \left\{\cos\frac{v^2}{2a}+\sin\frac{v^2}{2a}\sqrt{-1}\right\}\{\varphi(x+v)+$$

$$+\varphi(x-v)\}\,dv,$$

что можно написать въ видѣ

$$G(\cos au^2+\sqrt{-1}\sin au^2) = \frac{1}{2\sqrt{2a\pi}}\int_0^\infty \left\{\cos\frac{v^2}{4a}+\sin\frac{v^2}{4a}+\right.$$

$$\left.+\left(\sin\frac{v^2}{4a}-\cos\frac{v^2}{4a}\right)\sqrt{-1}\right\}[\varphi(x+v)+\varphi(x-v)]\,dv.$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть двѣ формулы

$$G\cos au^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (\sin v^2 + \cos v^2)\,\{\varphi\,(x + 2\sqrt{a}\,v) +$$

$$+ \varphi\,(x - 2\sqrt{a}\,v)\}\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\sin v^2 + \cos v^2)\,\varphi\,(x + 2\sqrt{a}\,v\,dv \quad . \ (1)$$

$$G\sin au^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (\sin v^2 - \cos v^2)\,\{\varphi\,(x + 2\sqrt{a}\,v) +$$

$$+ \varphi\,(x - 2\sqrt{a}\,v)\}\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (\sin v^2 - \cos v^2)\,\varphi\,(x + 2\sqrt{a}\,v\,dv. \quad . \ (2)$$

Деженерализуя ихъ, положивъ при этомъ $a=y$ и $u^2=u$, получимъ

$$\cos yu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sqrt{y}\,v\sqrt{u}}\,(\sin v^2 + \cos u^2)\,dv \quad . \ . \ (3)$$

и

$$\sin yu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sqrt{y}\,v\sqrt{u}}\,(\sin v^2 - \cos v^2)\,dv \quad . \ . \ (4)$$

Женерализуя это равенство почленно, принявъ въ разсчетъ формулу (3) § 11, получимъ два выраженія

$$\varphi\,(x + y\sqrt{-1}) + \varphi\,(x - y\sqrt{-1}) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}(\sin v^2 + \cos v^2)\,\varphi\left(x - \frac{y v^2}{z^2}\right) dv\,dz \quad . \ . \ (5)$$

$$\varphi\,(x + y\sqrt{-1}) - \varphi\,(x - y\sqrt{-1}) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}(\sin v^2 - \cos v^2)\,\varphi\left(x - \frac{y v^2}{z^2}\right) dv\,dz \ . \ (6)$$

Изъ формулъ (1) и (2) могутъ быть выведены два интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2av} \sin v^2 \, dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, (\cos a^2 + \sin a^2) \quad . \; . \; . \; . \; (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2av} \cos v^2 \, dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, (\cos a^2 - \sin a^2) \quad . \; . \; . \; . \; (8)$$

§ 33. Если въ формулѣ (4) § 25-го поставимъ $a\sqrt{-1}$ вмѣсто a, то получимъ

$$G \sin \frac{a}{u} = \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin \frac{1}{h} \sin ahy \left\{ \varphi\left(x + y\sqrt{-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \varphi\left(x - y\sqrt{-1}\right) \right\} dy \, dh \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$G \cos \frac{a}{u} = \varphi(x) - \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin \frac{1}{h} \sin ahy \left\{ \varphi\left(x + y\sqrt{-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \varphi\left(x - y\sqrt{-1}\right) \right\} dy \, dh \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

§ 34. Возьмемъ функцію arc $(\sin = au)$ и положимъ

$$G \operatorname{arc} (\sin = au) = A.$$

Отсюда мы выведемъ

$$\frac{dA}{da} = G \frac{u}{\sqrt{1 - a^2 u^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z} \varphi'\left(x + 2a\sqrt{t} \, . \, z\right) dz.$$

Интегрируя это выраженіе относительно a между границами 0 и a, будемъ имѣть:

$$A = G \operatorname{arc} (\sin = au) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \, dt}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z} \left\{ \varphi\left(x + 2a\sqrt{t} z\right) \varphi(x) \right\} dz,$$

что можно написать, положивъ $t = t^2$ и измѣняя границы интегрированія, въ видѣ

$$G \operatorname{arc}(\sin = au) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-t^2-z^2}}{tz}\{\varphi(x+2atz) -$$

$$-\varphi(x-2atz)\}\, dz\,.\,dt \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (1)$$

Деженерализуя полученное равенство, получимъ

$$\operatorname{arc}(\sin = au) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-t^2-z^2}}{tz}(e^{2atzu} - e^{-2atzu})\, dt\,.\,dz$$

которое, послѣ замѣны въ немъ $a\sqrt{-1}$ вмѣсто a, напишется въ формѣ

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-t^2-z^2}}{tz}\sin 2atz\, dz\, dt = \frac{\pi}{2}\lg(a+\sqrt{1+a^2})\,.\quad .\, (2)$$

Возьмемъ извѣстный интегралъ

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{b}{a}\right) = \int_0^\infty e^{-at}\sin bt\,\frac{dt}{t}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (a)$$

изъ котораго выведемъ

$$G \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = au) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-t}\{\varphi(x+at\sqrt{-1}) -$$

$$-\varphi(x-at\sqrt{-1})\}\frac{dt}{t}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (3)$$

$$G \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{1}{au}\right) = \int_0^\infty \varphi(x-at)\frac{\sin t}{t}\,dt.\quad .\,.\,. (4)$$

Написавъ затѣмъ интегралъ (a) въ формѣ

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{1}{au^2}\right) = \int_0^\infty e^{-atu^2}\sin t\,\frac{dt}{t}$$

получимъ

$$G \text{ arc}\left(\text{tg} = \frac{1}{au^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-v^2} \frac{\sin t}{t} \{ \varphi (x + 2\sqrt{at}\, v \sqrt{-1}) +$$

$$+ \varphi (x - 2\sqrt{at}\, v \sqrt{-1}) \} \, dv \, dt \, . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

и слѣдовательно

$$G \text{ arc}(\text{tg} = au^2) = \frac{\pi}{2} \varphi (x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-v^2} \frac{\sin t}{t} \{ \varphi (x +$$

$$+ 2\sqrt{at}\, v \sqrt{-1}) + \varphi (x - 2\sqrt{at}\, v \sqrt{-1}) \} \, dv \, dt. \; . \quad (6)$$

Если въ тождествѣ

$$\text{arc}(\text{tg} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

положимъ $x = e^{au}$, то получимъ

$$G \text{ arc}(\text{tg} = e^{au}) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \varphi [x + (2n+1)a]}{2n+1} . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Точно такъ же найдемъ, положивъ $x = e^{au^2}$

$$G \text{ arc}(\text{tg} = e^{au^2}) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{3/2}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{v^2}{4(2n+1)a}} \{ \varphi (x+v) +$$

$$+ \varphi (x - v) \} \, dv. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Женерализація трансцендентныхъ функцій различныхъ формъ.

§ 35. Разложеніе въ строки $\sin be^{au}$ и $\cos be^{au}$ намъ даетъ непосредственно

$$G \sin be^{au} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1} b^{2n-1}}{\Gamma(2n)} \varphi [x + (2n-1)a] \, . \; . \quad (1)$$

$$G\cos be^{au}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n b^{2n}}{\Gamma(2n+1)}\varphi(x+2na).\quad .\ .\ .\ (2)$$

Возьмемъ функцію $e^{be^{au}}$. Разложеніе ея въ строку намъ даетъ

$$e^{be^{au}}=1+\frac{be^{au}}{1}+\frac{b^2e^{2au}}{1.2}+\ldots+\frac{b^n e^{nau}}{1.2\ldots n}+\ldots=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{b^n e^{nau}}{\Gamma(n+1)}$$

и послѣ женерализаціи

$$Ge^{be^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{b^n}{\Gamma(n+1)}\varphi(x+na).\quad .\ .\ .\ .\ (3)$$

Поставивъ въ послѣднее равенство $a\sqrt{-1}$ вмѣсто a, выводимъ

$$Ge^{b\cos au+b\sin au\sqrt{-1}}=Ge^{b\cos au}\left\{\cos(b\sin au)+\sin(b\sin au)\sqrt{-1}\right\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{b^n}{\Gamma(n+1)}\varphi(x+na\sqrt{-1}),$$

и слѣдовательно

$$Ge^{b\cos au}\cos b\sin au)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{b^n}{\Gamma(n+1)}\left\{\varphi(x+na\sqrt{-1})+\right.$$

$$\left.+\varphi(x-na\sqrt{-1})\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

$$Ge^{b\cos au}\sin(b\sin au)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{b^n}{\Gamma(n+1)}\left\{\varphi(x+na\sqrt{-1})-\right.$$

$$\left.-\varphi(x-na\sqrt{-1})\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

Деженерализуя эти равенства и ставя $au=x$, $b=a$, будемъ имѣть

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{a^n}{\Gamma(n+1)}\cos nx=e^{a\cos x}\cos(a\sin x)\quad .\ .\ .\ (6)$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a^n}{\Gamma(n+1)} \sin nx = e^{a\cos x} \sin(a \sin x) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Если, обозначивъ черезъ m число цѣлое, мы помножимъ первое изъ полученныхъ уравненій на $\cos mx$, и если при этомъ примемъ въ расчетъ, что въ томъ случаѣ когда m не равно n —

$$\int_0^\pi \cos nx \cos mu \, dx = o$$

а когда $m = n$,

$$\int_0^\pi \cos^2 nx \, px = \frac{\pi}{2},$$

то будемъ имѣть

$$\int_0^\pi e^{a\cos x} \cos(a \sin x) \cos nx \, dx = \frac{\pi}{2} \frac{a^n}{\Gamma(n+1)} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

точно такимъ же образомъ изъ второй формулы получимъ

$$\int_0^\pi e^{a\cos x} \sin(a \sin x) \cos nx \, dx = \frac{\pi}{2} \frac{a^n}{\Gamma(n+1)} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

§ 36. Чтобы опредѣлить значеніе $G \log(\cos au)$, положимъ

$$G \lg(\cos au) = A.$$

Отсюда выводимъ

$$\frac{dA}{da} = -G \frac{\sin au}{\cos au} u = -G u \operatorname{tg} au.$$

Но такъ какъ

$$G \operatorname{tg} au = \int_0^\infty \frac{\varphi(x+at) - \varphi(x-at)}{e^{\frac{\pi t}{2}} - e^{-\frac{\pi t}{2}}} dt,$$

то женерализуя по частямъ, получимъ

$$G\, u\, \mathrm{tg}\, au = \int_0^\infty \frac{\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)}{e^{\frac{\pi t}{2}}-e^{-\frac{\pi t}{2}}}\, dt$$

и слѣдовательно

$$\frac{dA}{da} = -\int_0^\infty \frac{\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)}{e^{\frac{\pi t}{2}}-e^{-\frac{\pi t}{2}}}\, dt$$

а послѣ интегрированія относительно a между границами 0 и a—

$$G\, \lg(\cos au) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)-2\varphi(x)}{e^{\frac{\pi t}{2}}-e^{-\frac{\pi t}{2}}}\, \frac{dt}{t} \dots (1)$$

Поставивъ въ этой формулѣ $\frac{\pi}{2}-au$ вмѣсто au, найдемъ

$$G\, \lg(\sin au) = \int_0^\infty \frac{e^{\frac{\pi t}{2}}\varphi(x-at)+e^{-\frac{at}{2}}\varphi(x+at)-2\varphi(x)}{e^{\frac{\pi t}{2}}-e^{-\frac{\pi t}{2}}}\, \frac{dt}{t} \dots (2)$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$G\, \lg(\mathrm{tg}\, au) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x+2at)-e^{\pi t}\varphi(x-2at)}{1+e^{\pi t}}\, \frac{dt}{t} \dots (3)$$

и замѣняя au черезъ $\frac{\pi}{2}-au$, будемъ имѣть

$$G\, \lg(\mathrm{cotg}\, au) = \int_0^\infty \frac{e^{\pi t}\varphi(x-2at)-\varphi(x+2at)}{1+e^{\pi t}}\, \frac{dt}{t} \dots (4)$$

§ 37. Если возьмемъ тождество

$$\log(a+b\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{a}{b}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(a^2+b^2)\sqrt{-1},$$

которое можно представить въ видѣ

$$\left((a+b)\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}=e^{\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{a}{b}\right)+\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)\sqrt{-1}},$$

а возвысивъ въ степень $\sqrt{-1}$ —

$$\frac{1}{b+au\sqrt{-1}}=\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2u^2}}\left[\cos\left\{\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{au}{b}\right)\right\}+\right.$$

$$\left.+\sin\left\{\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{au}{b}\right)\right\}\sqrt{-1}\right]$$

получимъ равенство, которое даетъ

$$\cos\left\{\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{au}{b}\right)\right\}=\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2u^2}}\quad\ldots\ldots\quad(a)$$

$$\sin\left\{\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{au}{b}\right)\right\}=\frac{au}{\sqrt{b^2+a^2u^2}}\quad\ldots\ldots\quad(b)$$

Женерализуя ихъ, получимъ

$$G\cos\left\{\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{au}{b}\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-v-\frac{b^2y^2}{4a^2v}}}{v}\left\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+\right.$$

$$\left.+\varphi(x-y\sqrt{-1})\right\}dy\,dv\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

$$G\sin\left\{\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{au}{b}\right)\right\}=\frac{a}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-v-\frac{b^2y^2}{4a^2v}}}{v}\left\{\varphi'(x+y\sqrt{-1})+\right.$$

$$\left.+\varphi'(x-y\sqrt{-1})\right\}dy\,dv\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

Точно такъ же мы найдемъ

$$G\cos\left\{\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{b}{au}\right)\right\}=\frac{a}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-v-\frac{b^2y^2}{4a^2v}}}{v}\left\{\varphi'(x+y\sqrt{-1})+\right.$$

$$\left.+\varphi'(x-y\sqrt{-1})\right\}dy\,dv\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

$$G \sin\left\{ \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{b}{au}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{e^{-v-\frac{b^2 y^2}{4a^2 v}}}{v}\{\varphi(x+y\sqrt{-1})+$$

$$+\varphi(x-y\sqrt{-1})\}\, dy\, dv \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4)$$

Легко способомъ подобнымъ предъидущимъ получить слѣдующія формулы:

$$G \lg(1+be^{au}) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} b^n \varphi(x+na) \;.\;.\;. \quad (5)$$

$$G \lg(1-be^{au}) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{b^n}{n}\varphi(x+na) \;.\;.\;.\;.\;. \quad (6)$$

$$G \lg\frac{1+be^{au}}{1-be^{au}} = -2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{b^{2n}}{2n}\varphi(x+2na) \;.\;.\;. \quad (7)$$

Выраженіе ${}^n\!\!\int \varphi(x)\, dx^n$ помощью опредѣленнаго интеграла.

§ 38. Замѣтимъ, что выраженіе $G\,\frac{1}{u^n}$ можетъ быть дано въ двухъ видахъ:

$$G\,\frac{1}{u^n} = {}^n\!\!\int\varphi(x)\,dx^n \quad \text{и} \quad G\,\frac{1}{u^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_0^\infty t^{n-1}\varphi(x-t)\,dt;$$

отсюда слѣдуеть, что, обозначивъ черезъ C, C_1, C_2 ... C_n произвольныя постоянныя, будемъ имѣть

$${}^n\!\!\int\varphi(x)\,dx^n = C + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} +$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_0^\infty t^{n-1}\varphi(x-t)\,dt, \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

когда функція $\varphi(x-t)$ такова, что, при какомъ угодно значеніи x, выраженіе $t^{n-1}\varphi(x-t)$ превращается въ нуль для $t=\infty$. Для провѣрки этой формулы дифференцируемъ ее относительно x.

Получимъ

$$\int^{n-1}\varphi(x)\,dx^{n-1}=C_1+2C_2x+\ldots+(n-1)\,C_{n-1}x^{n-2}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}t^{n-1}\varphi'(x-t)\,dt\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Но такъ какъ интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^{\infty}t^{n-1}\varphi'(x-t)\,dt=-t^{n-1}\varphi(x-t)+(n+1)\int_0^{\infty}t^{n-2}\varphi(x-t)\,dt,$$

то, зная что выраженіе $t^{n-1}\varphi(x-t)$ уничтожается для $t=0$ и $t=\infty$, придемъ къ формулѣ (1), въ которой n будетъ замѣнено $n-1$.

Отсюда слѣдуетъ, что если формула (1) справедлива для $n=1$, въ чемъ легко убѣдиться, то она будетъ вѣрна вообще.

Точно такъ же легко выразить значеніе $\int^n\varphi(x)\,dx^n$ двойнымъ интеграломъ, замѣчая, что

$$G\,\frac{1}{u^n}=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x+y\sqrt{-1})}{v^n}e^{-yv\sqrt{-1}}\,dv\,dy.$$

Въ этомъ случаѣ требуется, чтобы функція $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ уничтожалась для $y=\pm\infty$ при какомъ угодно значеніи x.

Дифференцированіе и интегрированіе, выраженное дробными указателями.

§ 39. Если помножимъ на $u^n e^{xu}$ обѣ части тождественнаго уравненія

$$u^{\mu-n}=\frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\int_0^{\infty}e^{-ut}\,t^{n-\mu-1}\,dt$$

то получимъ

$$e^{xu}\,u^{\mu}=\frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\int_0^{\infty}e^{-(t-x)u}\,u^n\,t^{n-\mu-1}\,dt$$

и женерализуя

$$\frac{d^\mu \varphi(x)}{dx^\mu} = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^\infty t^{n-\mu-1}\, dt\, \frac{d^n \varphi(x-t)}{dx^n} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

замѣняя здѣсь μ черезъ $-\mu$ и полагая $n=0$, будемъ имѣть

$$\int^\mu \varphi(x)\, dx^\mu = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} \varphi(x-t)\, dt.$$

Точно такъ же, если мы возьмемъ тождество

$$\frac{1}{(-u)^\mu} = \frac{1}{(-1)^\mu\, \Gamma(\mu)} \cdot \frac{\Gamma(\mu)}{u^\mu}$$

и замѣтимъ, что

$$\int_0^\infty e^{-tu}\, t^{\mu-1}\, dt = \frac{\Gamma(\mu)}{u^\mu},$$

то получимъ отношеніе

$$\frac{1}{(-u)^\mu} = \frac{1}{(-1)^\mu\, \Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{-tu}\, t^{\mu-1}\, dt$$

поставивъ $-u$ вмѣсто u и умноживъ на e^{xu}, будемъ имѣть

$$\frac{e^{xu}}{u^\cdot} = \frac{1}{(-1)\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{(x+t)\,u}\, t^{\mu-1}\, dt$$

женерализуя

$$\int^\mu \varphi(x)\, dx^\mu = \frac{1}{(-1)^\mu\, \Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} \varphi(x+t)\, dt. \; . \; . \quad (3)$$

Ставимъ $n-\mu$ вмѣсто n и дифференцируемъ n разъ относительно x

$$\frac{d^\mu \varphi(x)}{dx^\mu} = \frac{1}{(-1)^\mu\, \Gamma(n-\mu)} \int_0^\infty t^{n-\mu-1}\, dt\, \frac{d^n \varphi(x+t)}{dx^n} . \; . \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) даны Льювилемъ для дифференцированія, выраженнаго дробными указателями. Ихъ можно замѣнить формулами (1) и (2).

Указанное дифференцированіе и интегрированіе можетъ быть распространено на функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ, причемъ получаются двѣ формулы:

$$\frac{d^{\mu+\nu+\rho+\dots}\varphi(x,y,t\dots)}{dx^{\mu}\,dy^{\nu}\,dt^{\rho}}=\frac{1}{\Gamma(n-\mu)\,\Gamma(p-\nu)\,\Gamma(q-\rho)\dots}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\dots$$

$$\dots\,\omega^{n-\mu-1}\,\omega'^{p-\nu-1}\,\omega''^{q-\rho-1}\,\frac{d^{n+p+q+\dots}\varphi(x-\omega,\,y-\omega'\dots)}{dx^n\,dy^p\,dt^q\dots}\,d\omega\,d\omega'\,d\omega''\dots$$

$$^{\mu+\nu+\rho\dots}\int\varphi(x,y,t\dots)\,dx^{\mu}\,dy^{\nu}\,dt^{\rho}\dots=\frac{1}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho)\dots}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\dots$$

$$\dots\,\omega^{\mu-1}\,\omega'^{\nu-1}\,\omega''^{\rho-1}\dots\varphi(x-\omega,\,y-\omega',\,t-\omega''\dots)\,d\omega\,.\,y\omega'\,d\omega''\dots$$

Преобразованіе строкъ въ опредѣленные интегралы и наоборотъ.

§ **40**. Женерализуя оба члена тождества

$$\frac{1}{1-e^{au}}=1+e^{au}+e^{2au}+e^{3au}+\dots$$

получимъ:

$$G\,\frac{1}{1-e^{au}}=\varphi(x)+\varphi(x+a)+\varphi(x+2a)+\dots=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi(x+na)=C-\sum\varphi(x).$$

Возьмемъ теперь равенство (8) § 7-го и положимъ въ $\psi(u)=1$, будемъ имѣть

$$G\,1=\varphi(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\varphi(x+y\sqrt{-1}+\varphi(x-y\sqrt{-1})\right\}\cos yv\,dv\,dy.$$

Положивъ въ томъ же самомъ равенствѣ

$$\psi(u)=\frac{1}{1-e^{au}}$$

получимъ, замѣчая, что

$$\psi(v) + \psi(-v) = 1$$

и

$$\psi(v) - \psi(-v) = \frac{1+e^{av}}{1-e^{av}},$$

а такъ же, принимая въ разсчетъ предъидущую формулу,

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi(x+na) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^\infty \{\varphi(x+y\sqrt{-1}) -$$

$$-\varphi(x-y\sqrt{-1})\}\, dy \int_0^\infty \frac{1+e^{av}}{1-e^{av}} \sin yv\, dv \ldots \quad (1)$$

Чтобы получить значенiе интеграла

$$\int_0^\infty \frac{1+e^{av}}{1-e^{av}} \sin yv\, dv,$$

замѣтимъ, что тождество

$$\frac{e^{av}+1}{e^{av}-1} = 1 + 2\{e^{-av} + e^{-2av} + e^{-3av} + \ldots\}$$

будучи умножено на $\sin yv\, dv$ и проинтегрировано между границами 0 и ∞, даетъ намъ при помощи

$$\int_0^\infty e^{-nav} \sin yv\, dv = \frac{y}{y^2+(na)^2}$$

значенiе

$$\int_0^\infty \frac{e^{av}+1}{e^{av}-1} \sin yv\, dv = \frac{1}{y} + 2y \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{y^2+(na)^2};$$

но извѣстно, что (Эйлеръ, *Введен.*)

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{y^2+(na)^2} = \frac{\pi}{2ay} \frac{e^{\frac{2\pi y}{a}}+1}{e^{\frac{2\pi y}{a}}-1} - \frac{1}{2y^2},$$

слѣдовательно

$$\int_0^\infty \frac{1+e^{av}}{1-e^{av}} \sin yv\, dv = \frac{\pi}{a} \frac{1+e^{\frac{2\pi y}{a}}}{1-e^{\frac{2\pi y}{a}}}.$$

Если поставимъ это значеніе въ формулу (1), то положивъ въ ней $y = ay$, получимъ

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi(x+na) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1} \{\varphi(x+$$

$$+ ay\sqrt{-1}) - \varphi(x - ay\sqrt{-1})\} dy \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

что можемъ написать въ видѣ

$$\sum_a \varphi(x) = C - \frac{1}{2}\varphi(x) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1} \varphi(x + ay\sqrt{-1})\, dy \quad . \quad . \quad (3)$$

Эта формула замѣчательна тѣмъ, что даетъ значеніе $\sum\limits_a \varphi(x)$ при помощи одного опредѣленнаго интеграла.

Въ сочиненіяхъ Абеля находится опредѣленіе этой суммы, для которой онъ далъ слѣдующую формулу

$$\sum_a \varphi(x) = \frac{1}{a}\int \varphi(x)\, dx - \frac{1}{2}\varphi(x) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \{\varphi(x + ay\sqrt{-1}) - \varphi(x - ay\sqrt{-1})\} \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1}.$$

Чтобы установить согласіе между этой формулой и формулой (3), достаточно убѣдиться въ томъ, что

$$\frac{1}{a}\int\varphi(x)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int\limits_0^\infty\left\{\varphi(x+ay\sqrt{-1})-\right.$$

$$\left.-\varphi(x-ay\sqrt{-1})\right\}dy.$$

Но для этого стоитъ только проженерализовать интегралъ

$$\int\limits_0^\infty \sin ay\,dy=\frac{1}{a},$$

поставивъ въ немъ предварительно au вмѣсто a.

§ 41. Если мы напишемъ равенство (3) предъидущаго § въ формѣ

$$\sum_a\varphi(x)=G\,\frac{1}{e^{au}-1}=C+\frac{1}{2}\varphi(x)-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi t}+1}{e^{2\pi t}-1}\,\varphi\,(x+at\sqrt{-1})\,dt,$$

то дифференцируя относительно a, получимъ

$$G\frac{e^{au}\,u}{(e^{au}-1)^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+e^{2\pi t}}{1-e^{2\pi t}}\varphi'\,(x+at\sqrt{-1})\,t\,dt,$$

что можно написать въ видѣ

$$\sum_a^2\varphi(x)=G\,\frac{1}{(e^{au}-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+e^{2\pi t}}{1-e^{2\pi t}}\varphi\,[x-(1-t\sqrt{-1})\,a]\,t\,dt\quad\ldots\quad(1)$$

Дифференцируя снова это тождество относительно a, мы выведемъ точно такъ же

$$\sum_a^3 \varphi(x) = G\frac{1}{(e^{au}-1)^3} =$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+e^{2\pi t}}{1-e^{2\pi t}}\varphi[x-(2-t\sqrt{-1})a]t(1-t\sqrt{-1})dt. \quad (2)$$

И вообще

$$\sum_a^n \varphi(x) = \frac{1}{2\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+e^{2\pi t}}{1-e^{2\pi t}}\varphi[x-(n-1-$$

$$-t\sqrt{-1})a]t(1-t\sqrt{-1})(2-t\sqrt{-1})\dots(n-$$

$$-2-t\sqrt{-1})dt. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

§ 42. Женерализуя оба члена тождества

$$\frac{1-e^{mau}}{1-e^{au}} = 1+e^{au}+e^{2au}+\dots+e^{(m-1)au},$$

выводимъ

$$\varphi(x)+\varphi(x-a)+\varphi(x+2a)+\dots+$$

$$+\varphi[x+m-1)a] = G\frac{1-e^{mau}}{1-e^{au}};$$

но формула (17) § 26 даетъ

$$G\frac{1-e^{mau}}{1-e^{au}} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi(x+na)-\sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi(x+ma+na),$$

слѣдовательно съ помощію формулы (2) § 40 будемъ имѣть

$$\varphi(x)+\varphi(x+a)+\varphi(x+2a)+\dots+\varphi[x+(m-1)a] =$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x)-\varphi(x+ma)\right\}+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1}\left\{\varphi(x+\right.$$

$$\left.ma+ay\sqrt{-1})-\varphi(x+ay\sqrt{-1})\right\}dy.$$

Поставивъ $\operatorname{tg}\varphi(x)$ вмѣсто $\varphi(x)$, получимъ

$$\lg \varphi(x)\varphi(x+a)\varphi(x+2a)\ldots\varphi[x+(m-1)a] = \frac{1}{2}\log\sqrt{\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+ma)}} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1}\log\frac{\varphi(x+ma+ay\sqrt{-1})}{\varphi(x+ay\sqrt{-1})}dy$$

что можно написать такъ:

$$\varphi(x)\varphi(x+a)\varphi(x+2a)\;.\;\;.\;\;.\;\varphi[x+(m-1)a] =$$

$$=\sqrt{\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+ma)}}\,e^{\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1}\lg\frac{\varphi(x+ma+ay\sqrt{-1})}{\varphi(x+ay\sqrt{-1})}dy}.$$

§ **43**. Напишемъ формулу (2) § 40 въ формѣ

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\varphi(x+na) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi t}+1}{e^{2\pi t}-1}\varphi(x+ay\sqrt{-1})\,dy$$

и выведемъ изъ нея помощію m-кратнаго дифференцированія и замѣны $(\sqrt{-1})^{m-1}$ его значеніемъ $\sin\frac{m\pi}{2} - \cos\frac{m\pi}{2}\sqrt{-1}$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} n^m\varphi(x+na) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{m\pi}{2} -\right.$$

$$\left.-\cos\frac{m\pi}{2}\sqrt{-1}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1}y^m\varphi(x+ay\sqrt{-1})\,dy\ldots(1)$$

Женерализуемъ два тождества:

$$\frac{1}{1+e^{au}} = 1 - e^{au} + e^{2au} + e^{2au} - \;.\;\;.\;\;.$$

и

$$\frac{1}{1+e^{au}} = \frac{1}{2} - 2\int_0^{\infty}\frac{\sin ayu}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}dy.$$

Получимъ

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\varphi(x+na)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x+ay\sqrt{-1})}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}\,dy.$$

Дифференцируя ее m разъ относительно a, будемъ имѣть

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}n^m\varphi(x+na)=\Big(\sin\frac{m\pi}{2}-$$

$$-\cos\frac{m\pi}{2}\sqrt{-1}\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x+ay\sqrt{-1})}{e^{\pi y}-e^{\pi y}}y^m\,dy\ldots\quad(2)$$

§ **44**. Если помножить обѣ части тожества

$$\frac{1}{e^y-1}=e^{-y}+e^{-2y}+e^{-3y}+\ldots+e^{-ny}+\ldots$$

на $y^{m-1}\varphi(x-y)dy$ и проинтегрировать между предѣлами 0 и ∞, то получится

$$\int_0^{\infty}\frac{y^{m-1}\varphi(x-y)}{e^y-1}dy=\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^{\infty}y^{m-1}e^{-ny}\varphi(x-y)\,dy.$$

Но такъ какъ

$$G\frac{1}{(n+u)^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{\infty}y^{m-1}e^{-ny}\varphi(x-y)\,dy$$

то

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}G\frac{1}{(n+u)^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{\infty}\frac{y^{m-1}\varphi(x-y)}{e^y-1}\,dy,$$

что можно написать въ видѣ

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(n+u)^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{\infty}\frac{y^{m-1}e^{-uy}}{e^y-1}\,dy\ldots\ldots\quad(1)$$

Подобное же вычисленіе, выполненное надъ строкой

$$\frac{1}{e^y+1} = e^{-y} - e^{-2y} + e^{-3y} + \ldots$$

приведетъ насъ къ формулѣ

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+u)^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{y^{m-1}\, e^{-uy}\, dy}{e^y+1} \ldots \ldots \quad (2)$$

Если разложимъ въ строку выраженіе $(e^{-au} - e^{au})^{-p}$ и будемъ женерализовать обѣ части полученнаго тождества, то найдемъ

$$G\, \frac{1}{(e^{-au} - e^{au})^p} = \varphi(x+pa) + p\,[x + (p+2)\,a] +$$

$$+ \frac{p\,(p+1)}{1\,.\,2}\, \varphi\,[x + (p+4)\,a] + \ldots$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$G\, \frac{1}{e^{-au} - e^{au}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi\,[x + (2n+1)\,a]$$

$$G\, \frac{1}{(e^{-au} - e^{au})^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+1)\, \varphi\,[x + (2n+2)\,a]$$

$$G\, \frac{1}{(e^{-au} - e^{au})^3} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2}\, \varphi\,[x + (2n+3)\,a]$$

и вообще

$$G\, \frac{1}{(e^{-au} - e^{au})^p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)}\, \varphi\,[x + (2n+p)\,a].$$

Чтобы выразить эти суммы въ интегралахъ, достаточно замѣтить, что формула (7) § 7-го намъ даетъ послѣ необходимыхъ вычисленій

$$G\, \frac{1}{e^{-au} - e^{au}} = \frac{1}{4a\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{\frac{\pi y}{a}}}{1 + e^{\frac{\pi y}{a}}}\, \varphi\,(x + y\sqrt{-1})\, dy.$$

Женерализація по частямъ насъ приведетъ къ

$$G\frac{1}{(e^{-au}-e^{au})^2}=-\frac{1}{2^2a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{\frac{\pi y}{a}}}{1+e^{\frac{\pi y}{a}}}\cdot\frac{1-e^{\frac{\pi v}{a}}}{1+e^{\frac{\pi v}{a}}}\varphi[x+$$

$$+(y+v)\sqrt{-1}]\,dy\,dv$$

$$G\frac{1}{(e^{-au}-e^{au})^3}=\frac{-1}{2^3a^3\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{\frac{\pi y}{a}}}{1+e^{\frac{\pi y}{a}}}\cdot\frac{1-e^{\frac{\pi v}{a}}}{1+e^{\frac{\pi v}{a}}}\cdot\frac{1-e^{\frac{\pi w}{a}}}{1+e^{\frac{\pi w}{a}}}\varphi[x+$$

$$+(y+v+w)\sqrt{-1}]\,dy\,dv\,dw,$$

отсюда слѣдуетъ, что вообще мы можемъ писать

$$\sum\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)}{1.2\dots(p-1)}\varphi[x+(2n+p)a]=$$

$$=\frac{1}{2^{2p}a^p(\sqrt{-1})^p}\int_{-\infty}^{\infty p}\frac{1-e^{\frac{\pi y}{a}}}{1+e^{\frac{\pi y}{a}}}\cdots\frac{1-e^{\frac{\pi t}{a}}}{1+e^{\frac{\pi t}{a}}}\varphi[x+(y+\dots+t)\sqrt{-1}]\,dy\dots d$$

Полагая $p=1$, получимъ

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi[x+(2n+1)a]=\frac{1}{2^2a\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{\frac{\pi y}{a}}}{1+e^{\frac{\pi y}{a}}}\varphi(x+y\sqrt{-1})\,dy$$

формулу, которую мы можемъ написать еще въ слѣдующей формѣ

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi[x+(2n+1)a]=$$

$$=\frac{1}{2^2a\sqrt{-1}}\int_{0}^{\infty}\frac{1-e^{\frac{\pi y}{a}}}{1+e^{\frac{\pi y}{a}}}\{\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1}\}\,dy. \quad (1)$$

Деженерализуя и положивъ $y = -ay$, будемъ имѣть

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi y}-1}{e^{\pi y}+1} \sin ay\, dy = -2\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-(2n+1)a} = \frac{2}{e^a - e^{-a}}.$$

Если въ формулѣ (8) § 7 положимъ

$$\psi(u) = \frac{1}{e^{au}+e^{-au}},$$

то получимъ

$$G\frac{1}{e^{au}+e^{-au}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})}{e^{av}+e^{-av}} \cos yv\, dv.$$

Но такъ какъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos yv\, dv}{e^{av}+e^{-av}} = \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi y}{2a}}+e^{-\frac{\pi y}{2a}}},$$

то

$$G\frac{1}{e^{au}+e^{-au}} = \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})}{e^{\frac{\pi y}{2a}}+e^{-\frac{\pi y}{2a}}}\, dy.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$G\frac{1}{e^{au}+e^{-au}} = G(e^{au}-e^{3au}+e^{5au}-\ldots) = \varphi(x+a)-\varphi(x+3a)\ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \varphi[x+(2n+1)a],$$

поэтому

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \varphi[x+(2n+1)a] =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})}{e^{\frac{\pi y}{2a}}+e^{-\frac{\pi y}{2a}}}\, dy \quad . \; . \; . \quad (2)$$

§ 45. Если мы будемъ женерализовать по частямъ выраженіе $\frac{1}{(1-e^{au})(1-e^{bu})}$, принимая во вниманіе, что

$$G\frac{1}{1-e^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi(x+na),$$

то выведемъ

$$G\frac{1}{1-e^{au}}\cdot\frac{1}{1-e^{bu}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=\infty}\varphi(x+na+mb).$$

Съ другой стороны, мы знаемъ, что

$$G\frac{1}{1-e^{au}}=\frac{1}{2}\lambda(x)+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_0^\infty\frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1}\lambda(x+ay\sqrt{-1})\,dy$$

$$\lambda(x)=G\frac{1}{1-e^{bu}}=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_0^\infty\frac{e^{2\pi t}+1}{e^{2\pi t}-1}\varphi(x+bt\sqrt{-1})\,dt.$$

Изъ этихъ двухъ формулъ слѣдуетъ

$$G\frac{1}{1-e^{au}}\cdot\frac{1}{1-e^{bu}}=\frac{1}{4}\varphi(x)+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{2\pi t}+1}{e^{2\pi t}-1}\left\{\varphi(x+at\sqrt{-1})+\varphi(x+bt\sqrt{-1})\right\}dt-$$

$$-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1}\cdot\frac{e^{2\pi t}+1}{e^{2\pi t}-1}\varphi\left[x+(ay+bt)\sqrt{-1}\right]dy\,dt$$

а также

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=\infty}\varphi[x+na+mb]=\frac{1}{4}\varphi(x)+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{2\pi t}+1}{e^{2\pi t}-1}\left\{\varphi[x+at\sqrt{-1}]+\varphi[x+bt\sqrt{-1}]\,dt-\right.$$

$$-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1}\cdot\frac{e^{2\pi t}+1}{e^{2\pi t}-1}\,\varphi\left[x+(ay+bt)\sqrt{-1}\right]dy\,dt,$$

полагая $b=a$, получимъ

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=\infty}\varphi\left[x+(m+n)\,a\right]=\frac{1}{4}\varphi(x)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi t}+1}{e^{2\pi t}-1}\,\varphi\left(x+at\sqrt{-1}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1}\cdot\frac{e^{2\pi t}+1}{e^{2\pi t}-1}\,\varphi\left[x+a(y+t)\sqrt{-1}\right]dy\,dt.$$

Выраженіе суммы нѣкоторыхъ строкъ въ опредѣленныхъ интегралахъ.

§ 46. Женерализуемъ обѣ части равенства

$$1+au+a^2u^2+\ldots+=\frac{1}{1-au}.$$

Получимъ

$$\varphi(x)+a\varphi'(x)+a^2\varphi'(x)+\ldots=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t}{a}}\varphi(x+t)\,dt.$$

Женерализуя снова относительно a будемъ имѣть:

$$\varphi(x)^2+a\varphi'(x)^2+a^2\varphi''(x)^2+\ldots=$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\varphi(x+t)\,dt\,G\,\frac{e^{-\frac{t}{au}}}{u}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

Полагая въ формулѣ (7) § 25 $b=0$ имѣемъ

$$Ge^{-\frac{p}{au}} = \varphi(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\frac{p}{ah}\sin hv\,\varphi(x-v)\,dv$$

а продифференцировавъ относительно p, найдемъ

$$G\frac{e^{-\frac{p}{au}}}{u} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\frac{p}{ah}\,\frac{\sin hv}{h}\,\varphi(x-v)\,dv.$$

Пользуясь этимъ отношеніемъ, мы можемъ написать формулу (1) въ формѣ

$$\varphi(x)^2 + a\varphi'(x)^2 + a^2\varphi''(x)^2 + \ldots =$$

$$= \frac{2}{a\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\frac{t}{ah}\,\frac{\sin hv}{h}\,\varphi(x-v)\,dt\,dv\,dh\,\varphi(x+t)\ldots(2)$$

Мы могли бы это выраженіе женерализовать снова относительно a, при чемъ получили бы

$$\varphi(x)^3 + a\varphi'(x)^3 + a^2\varphi''(x)^3 + \;.\;\;.\;\;.$$

и такъ далѣе.

§ **47**. Женерализуемъ обѣ части тождества

$$au - \frac{a^3u^3}{3} + \frac{a^5u^5}{5} - \ldots = \mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = au).$$

Получимъ

$$a\varphi'(x) - \frac{a^3}{3}\varphi'''(x) + \frac{a^5}{5}\varphi^{\mathrm{v}}(x) - \;.\;\;.\;\;. =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-t}\left\{\varphi(x+at\sqrt{-1}) - \varphi(x-at\sqrt{-1})\right\}\frac{dt}{t}\ldots(1)$$

и послѣ вторичной женерализаціи относительно a

$$a\varphi'(x)^2 - \frac{a^3}{3}\varphi'''(x)^2 + \frac{a^5}{5}\varphi^{V}(x)^2 - \ldots = -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}\{\varphi(x+atv\sqrt{-1}) -$$

$$-\varphi(x-atv\sqrt{-1})\,Y\sin yv\,dy\,dv\,dt\}$$

гдѣ

$$Y = \varphi(x+y\sqrt{-1}) - \varphi(x-y\sqrt{-1}).$$

§ 48. Мы нашли, что

$$G\ \mathrm{arc}(\sin = au) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-t-z^2}}{tz}\{\varphi(x+2atz) - \varphi(x-2atz)\}\,dz\,dt$$

и такъ какъ сверхъ того

$$\mathrm{arc}(\sin = au) = au + \frac{1}{2}\,\frac{a^3}{3}u^3 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{a^5}{5}u^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{a^7}{7}u^7 + \ldots$$

то изъ этихъ двухъ формулъ получимъ

$$a\varphi'(x) + \frac{1}{2}\,\frac{a^3}{3}\varphi'''(x) + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{a^5}{5}\varphi^{V}(x) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-t^2-z^2}}{t.z}\{\varphi(x+2atz) - \varphi(x-2atz)\}\,dz\,dt \ldots (1)$$

Полагая $\varphi(x) = \sin x_1$, получимъ

$$a - \frac{1}{2}\,\frac{a^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{a^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{a^7}{7} + \ldots =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-t^2-z^2}}{tz}\sin 2atz\,dz\,dt \ldots\ldots (2)$$

а дифференцируя относительно a

$$1-\frac{1}{2}a^2+\frac{1.3}{2.4}a^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}a^6+\ .\ .\ .=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t^2-z^2}\cos 2\,atz\,dz\,dt=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\ .\ .\ .\quad (3)$$

Женерализуя формулы (2) и (3) получимъ

$$a\varphi'(x)-\frac{1}{2}\frac{a^3}{3}\varphi'''(x)+\frac{1.3}{2.4}\frac{a^5}{5}\varphi^{\mathrm{V}}(x)-\ .\ .\ .=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-t^2-z^2}}{tz}\{\varphi(x+2\,atz\sqrt{-1})-\varphi(x-2\,atz\sqrt{-1})\}\,dz\,dt.\ (4)$$

$$\varphi(x)-\frac{1}{2}a^2\varphi''(x)+\frac{1.3}{2.4}a^4\varphi^{\mathrm{IV}}(x)-\ .\ .\ .=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t^2-z^2}\{\varphi(x+2\,atz\sqrt{-1})+$$

$$+\varphi(x-2\,atz\sqrt{-1})\}\,dz\,dt\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

§ 49. Возьмемъ тождество

$$e^{2a\cos t}=1+\frac{2\,a\cos t}{1}+\frac{2^2a^2\cos^2 t}{1\,.\,2}+\ .\ .\ .\ ,$$

помножимъ обѣ части его на dt, и проинтегрируемъ между границами o и π, тогда получимъ

$$1+\frac{a^2}{1^2}+\frac{a^4}{(1.2)^2}+\frac{a^6}{(1.2.3)^2}+\ .\ .\ .=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{2a\cos t}\,dt.\ .\quad (1)$$

Женерализуя относительно a, будемъ имѣть

$$\varphi(x)+a^2\frac{\varphi''(x)}{1^2}+a^4\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}(x)}{(1.2)^2}+a^6\frac{\varphi^{\mathrm{VI}}(x)}{(1.2.3)^2}+\ .\ .\ .=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x+2\,a\cos t)\,dt\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (2)$$

§ 50. Женерализуя обѣ части равенства

$$\int_0^1 t^{-at}\, dt = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a^{n-1}}{n^n} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

выводимъ

$$\varphi(x) + \frac{a}{2^2}\varphi'(x) + \frac{a^2}{3^3}\varphi''(x) + \ldots = \int_0^1 \varphi(x - a \lg t^t)\, dt \quad (2)$$

перемѣняя a на $-a$, получимъ

$$\varphi(x) - \frac{a}{2^2}\varphi'(x) + \frac{a^2}{3^3}\varphi''(x) - \ldots = \int_0^1 \varphi(x + a \lg t^t)\, dt. \; . \quad (3)$$

Если положить въ этихъ формулахъ $\varphi(x) = \sin x$, то онѣ дадутъ

$$1 - \frac{a^2}{3^3} + \frac{a^4}{5^5} - \frac{a^6}{7^7} + \ldots = \int_0^1 \cos(a \log t^t)\, dt \quad . \; . \quad (4)$$

и

$$\frac{a}{2^2} - \frac{a^3}{4^4} + \frac{a^5}{6^6} - \ldots = -\int_0^1 \sin(a \log t^t)\, dt \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Женерализуя ихъ получимъ

$$\varphi(x) - \frac{a^2}{3^3}\varphi''(x) + \frac{a^4}{5^5}\varphi^{\mathrm{IV}}(x) - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\int \{\varphi(x + a \lg t^t \sqrt{-1}) + \varphi(x - a \log t^t \sqrt{-1})\}\, dt. \; . \quad (6)$$

$$\frac{\varphi'(x)}{2^2} - \frac{a^3}{4^4}\varphi'''(x) + \frac{a^5}{6^6}\varphi^{\mathrm{V}}(x) - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_0^1 \{\varphi(x - a \lg t^t \sqrt{-1}) - \varphi(x + a \lg t^t \sqrt{-1})\}\, dt \; . \quad (7)$$

Интегрированіе уравненій.

§ 51. Женерализаціонное вычисленіе примѣняется весьма легко къ опредѣленію интеграловъ нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій, а также уравненій съ конечными разностями; преимущественно же къ рѣшенію линейныхъ уравненій.

Разсмотримъ общіе принципы, служащіе къ облегченію изслѣдованія предположенной задачи.

Мы уже знаемъ, что всякая функція n независимыхъ перемѣнныхъ $F(x, y, z, \ldots t)$ можетъ быть выражена символическимъ равенствомъ

$$F(x, y, z, \ldots t) = G e^{xu+yv+zw+\ldots+ts} \quad \ldots\ldots (1)$$

гдѣ u, v, $w \ldots s$ суть n перемѣнныхъ женерализаціи, къ которымъ относится знакъ G.

Если x, y, $z \ldots t$, перемѣнныя величины, вполнѣ независимы между собою, то независимы одна отъ другой такъ же и перемѣнныя женерализаціи, и наоборотъ; но если существуетъ какое нибудь отношеніе между перемѣнными функціи,—то должно существовать въ свою очередь отношеніе и между перемѣнными женерализаціи, и при томъ такое, которое можетъ быть всегда выражено уравненіемъ между соотвѣтствующими перемѣнными.

Если вмѣстѣ съ уравненіемъ (1) дано отношеніе

$$\psi(u, v, w, \ldots s) = 0$$

то легко понять, что выведя изъ этого уравненіе значеніе одной изъ перемѣнныхъ въ функціи другихъ и подставивъ его въ тожество (1), мы будемъ имѣть только $n - 1$ перемѣнныхъ женерализаціи, что сократитъ операцію G на одну перемѣнную, при чемъ F останется всегда функціей n перемѣнныхъ, только эти перемѣнныя уже перестанутъ быть независимы между собою, но пріобрѣтутъ извѣстную связь, зависящую отъ формы уравненія (2).

Если бы это уравненіе давало для одной изъ своихъ перемѣнныхъ нѣсколько значеній въ функціи $n - 1$ другихъ, то выраженіе (1) имѣло бы столько значеній, сколько существовало бы различныхъ корней и символическое выраженіе распространилось бы на всѣ эти значенія, такъ что представляло бы нѣсколько различныхъ между собою функцій.

Если вмѣсто уравненія (2) существуетъ m совмѣстныхъ уравненій между перемѣнными женерализаціи

$$\psi(u, v, w, \dots s) = 0, \ \psi_1(u, v, w, \dots s) = 0, \ \psi_2(u, v. w, \dots s) = 0$$

и т. д.,

то не трудно понять, что выведя изъ нихъ m однѣхъ перемѣнныхъ въ функціи $n - m$ другихъ, мы приведемъ задачу къ женерализаціи $n - m$ перемѣнныхъ.

Въ томъ случаѣ, когда $m = n$, всѣ перемѣнныя женерализаціи будутъ исключены; вслѣдствіе этого функція сдѣлается вполнѣ опредѣленной, и женерализація приводится къ умноженію на произвольное постоянное количество.

Если бы рядомъ съ уравненіемъ (1) мы имѣли отношеніе (2) въ наиболѣе простомъ видѣ

$$u = v,$$

то поставивъ v вмѣсто u въ уравненіе (1), мы получили бы

$$Ge^{(x+y)\,v+zw+\dots} = F\,(x + y, z, \ . \ . \ . \ );$$

откуда видно, что перемѣнныя x и y перестали быть независимыми и входятъ въ составъ функціи F своей суммой.

Если наряду съ равенствомъ (1), отношеніе (2) имѣетъ видъ

$$u^2 = v^2$$

то u будетъ имѣть два значенія: $u = v$ и $u = - v$.

Первое изъ нихъ даетъ

$$Ge^{xu+yv+zw+\dots} = Ge^{(x+y)\,v+zw+\dots} = F\,(x + y, z, \ . \ . \ . \ )$$

а второе —

$$Ge^{xu+yv+zw+\dots} = Ge^{(y-x)\,v+zw+\dots} = F\,(x - y, z \ . \ . \ . \ ).$$

Отсюда видно, что равенству (1) соотвѣтствуютъ двѣ функціи: одна изъ нихъ заключаетъ въ себѣ сумму, а другая — разность перемѣнныхъ y и x.

§ 52. Общій принципъ. *Если дано нѣсколько функцій какого либо числа перемѣнныхъ x, y, t . . ., опредѣленныхъ характеристическими уравненіями*

$$Ge^{xu+yv+zw+\cdots} = \varphi(x, y, z \ldots) \ldots \ldots \quad (1)$$

$$Ge^{xu'+yv'+zw'+\cdots} = \varphi_1(x, y, z \ldots) \ldots \ldots \quad (2)$$

$$Ge^{xu''+yv''+zw''+\cdots} = \varphi_2(x, y, z \ldots) \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

гдѣ знаки G относятся къ перемѣннымъ u, v, w . . . въ первомъ уравненіи, къ u', v' w' . . . во 2-мъ, и т. д., то мы можемъ въ данномъ символическимъ равенствѣ

$$Ge^{xu+yv+zw+\cdots} F(u, v, w \ldots) + Ge^{xu'+yv'+zw'+\cdots} F_1(u', v', w' \ldots) +$$
$$+ Ge^{xu''+yv''+zw''+\cdots} F_2(u'', v'', w'' \ldots) + \ldots = 0 \ . \ . \quad (4)$$

умножить или раздѣлить каждый членъ на нѣкоторую функцію $\psi(u, v, w \ldots)$, съ тѣмъ условіемъ: чтобы перемѣнныя u, v, w . . . были измѣнены на u', v', w' . . . во второмъ членѣ на u'' v'' w'' въ третьемъ членѣ и т. д., то есть мы можемъ написать равенство въ новомъ видѣ

$$Ge^{xu+yv+zw+\cdots} F(u, v, w \ldots) \psi(u, v, w \ldots) +$$
$$+ Ge^{xu'+yv'+zw'+\cdots} F_1(u', v', w' \ldots) \psi(u', v', w' \ldots) +$$
$$+ Ge^{xu''+yv''+zw''+\cdots} F_2(u'', v'', w'' \ldots) \psi(u'', v'', w'' \ldots) + \ldots = 0. \quad (5)$$

Зная въ чемъ состоитъ способъ женерализаціи выраженія, мы безъ особеннаго затрудненія могли бы перейти отъ тождества (4) къ (5). Но не желая оставлять никакой неясности въ нашемъ вычисленіи, мы дадимъ строгое доказательство

Замѣтимъ, что тождество (4) имѣетъ мѣсто при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ x, y, z ... поэтому мы можемъ не нарушая его вѣрности поставить $x+p$, $y+q$, $z+r$ вмѣсто x, y, z ... и вслѣдствіе этого написать его въ формѣ

$$Ge^{xu+yv+zw+\dots} F(u,\ v,\ w\dots)\ e^{pu+qv+rw+\dots} +$$
$$+ Ge^{xu'+yv'+zw'+\dots} F_1(u',\ v',\ w'\dots)\ e^{pu'+qv'+rw'+\dots} = 0.$$

Женерализуемъ обѣ части послѣдняго равенства относительно p, q, $r\dots$ принявъ за характеристическое уравненіе

$$Ge^{up+vq+wr+\dots} = \psi(u,\ v,\ w\dots),$$

и мы получимъ отношеніе (5).

Отсюда слѣдуетъ, что если бы требовалось опредѣлить значеніе $Ge^{xu+yv+zw+\dots}$, удовлетворяющее символическому уравненію

$$Ge^{xu+yv+zw+\dots} F(u,\ v,\ w\dots) = Ge^{xu'+yv'+zw+\dots} F_1(u',\ \psi',\ w'\dots),$$

то для этого достаточно было бы раздѣлить обѣ части этого равенства на $F(u,\ v,\ w\dots)$ и написать, согласно нашему принципу

$$Ge^{xu+yv+zw+\dots} = G\,\frac{e^{xu'+yv'+zw'+\dots} F_1(u',\ v',\ w'\dots)}{F(u',\ v',\ w'\dots)}.$$

Способъ интегрированія данныхъ уравненій будетъ состоять въ замѣнѣ извѣстныхъ и неизвѣстныхъ функцій, входящихъ въ уравненіе, другими, обладающими символической формой женерализаціи, а потомъ въ удовлетвореніи полученнымъ такимъ образомъ уравненіямъ помощію установленныхъ нами общихъ принциповъ.

Часто бываетъ легко получить интегралъ уравненія удовлетворяя ему выраженіемъ, содержащимъ одну или нѣсколько постоянныхъ величинъ; причемъ женерализуя это выраженіе относительно указанныхъ постоянныхъ, мы получимъ частный интегралъ съ произвольной функціей. Иногда изъ этого интеграла можно вывести другіе и такимъ образомъ опредѣлить полный интегралъ.

Опредѣленіе частнаго интеграла дифференціальнаго уравненія или уравненія съ частными производными и конечными разностями.

§ 53. Если обозначимъ черезъ z главную перемѣнную, и черезъ x, y, $t\dots$ независимыя перемѣнныя, то указанное уравненіе можетъ быть выражено во всѣхъ случаяхъ черезъ

$$\sum A \Delta_x^m \Delta_y^n \ldots \frac{d^p z}{dx^r dy^s \ldots} = \varphi (x, y \ldots) \quad . (1)$$

частный интегралъ котораго мы постараемся опредѣлить, предполагая, что второй членъ не равенъ нулю.

Такъ какъ главная перемѣнная z есть функція x, y ... то мы можемъ положить

$$z = F (x, y, \ldots) = Ge^{xu+yv+\ldots}$$

и слѣдовательно, обозначая черезъ a, b ... конечныя разности, получаемыя перемѣнными x, y..., мы можемъ написать первую часть предложеннаго уравненія въ видѣ

$$G \sum A e^{xu+yv+\ldots} (e^{au} - 1)^m (e^{bu} - 1)^n \ldots u^r v^s \ldots$$

Если, далѣе, мы положимъ

$$\varphi (x, y, \ldots) = Ge^{xu'+yv'+\ldots} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (2)$$

то предложенное уравненіе выразится такимъ образомъ

$$G \sum A e^{xu+yv+\ldots} (e^{au} - 1)^m (e^{bv} - 1)^n \ldots u^r v^s \ldots = Ge^{xu'+yv'+\ldots},$$

откуда, по общему способу, мы можемъ вывести значеніе z

$$z = Ge^{xu+yv+\ldots} = G \frac{e^{xu'+yv'+\ldots}}{\sum A (e^{au'} - 1)^m (e^{bv'} - 1)^n \ldots u'^r v'^s \ldots}$$

это уравненіе выражаетъ частный интегралъ даннаго уравненія, причемъ уравненіе (2) слѣдуетъ считать характеристическимъ.

Такимъ образомъ вопросъ сводится къ простой женерализаціи, что не представляетъ другихъ трудностей, кромѣ продолжительности счета. Въ виду важности этого способа возьмемъ нѣсколько примѣровъ.

§ 54. Приложимъ этотъ способъ къ интегрированію очень простого уравненія

$$\Delta_x z = \varphi (x),$$

интегралъ котораго выражается уравненіемъ

$$z = \sum_a \varphi(x).$$

Примемъ за характеристическое уравненіе $Ge^{au'} = \varphi(x)$ и предположимъ, что интегралъ дается символическимъ выраженіемъ

$$z = Ge^{xu}.$$

Мы можемъ написать предложенное уравненіе въ формѣ

$$Ge^{xu}(e^{au} - 1) = Ge^{xu'},$$

откуда выводимъ

$$Ge^{xu} = G\frac{e^{xu'}}{e^{au'} - 1}.$$

Женерализуя, находимъ

$$z = \sum_a \varphi(x) = C - \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi\omega}+1}{e^{2\pi\omega}-1}\varphi(x + a\omega\sqrt{-1})\,d\omega$$

уже извѣстную намъ формулу.

Возьмемъ еще уравненіе

$$\Delta_y \Delta_x z = \varphi(x, y)$$

интегралъ котораго выражается уравненіемъ

$$z = \sum_b \sum_a \varphi(x, y)$$

отсюда мы точно такъ же выведемъ, принявъ $Ge^{xu'+yv'} = \varphi(x, y)$ за характеристическое уравненіе и $z = Ge^{xu+yv}$ за интегралъ,

$$Ge^{xu+yv}(e^{au} - 1)(e^{bv} - 1) = Ge^{xu'+yv'}$$

выраженіе, которое даетъ

$$Ge^{xu+yv} = \frac{e^{xu'+yv'}}{(e^{au'} - 1)(e^{bv'} - 1)}.$$

Вторую часть равенства можно женерализовать по частямъ, замѣчая, что

$$G\frac{e^{xu'}}{1 - e^{au'}} = \frac{1}{2}\lambda(x, y) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi\omega}+1}{e^{2\pi\omega}-1}\lambda(x + a\omega\sqrt{-1}, y)\,d\omega$$

$$\lambda(xy) = G\frac{e^{yv'}}{1-e^{bv'}} = \frac{1}{2}\varphi(x,\ y) -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi\omega'}+1}{e^{2\pi\omega'}-1}\varphi(x,\ y+b\omega'\sqrt{-1})\,d\omega'.$$

Такимъ образомъ, получимъ

$$z=\sum_b\sum_a\varphi(xy)=\left\{\begin{aligned}&\psi(x,c)+\psi_1(c',y)-\\&-\frac{1}{4\sqrt{-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi\omega}+1}{e^{2\pi\omega}-1}\varphi(x+a\omega\sqrt{-1},y)\,d\omega\\&-\frac{1}{4\sqrt{-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi\omega'}+1}{e^{2\pi\omega'}-1}\varphi(x,y+b\omega'\sqrt{-1})\,d\omega'\\&-\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi\omega}+1}{e^{2\pi\omega}-1}\cdot\frac{e^{2\pi\omega'}+1}{e^{2\pi\omega'}-1}\varphi(x+a\omega\sqrt{-1},\\&\qquad\qquad y+b\omega'\sqrt{-1})\,d\omega\,d\omega'\end{aligned}\right.$$

гдѣ ψ и ψ_1 двѣ произвольныя функціи. C періодическая функція y, а C' періодическая функція x.

Слѣдуя тому же способу, найдемъ, что

$$\sum_h\cdots\sum_b\sum_a\varphi(x,\ y\ \ldots\ s) = G\frac{e^{xu'+yv'+\ldots+sw'}}{(1-e^{au'})(1-e^{bv'})\ldots(1-e^{hw'})}$$

уравненіе, женерализовать которое весьма легко по частямъ, принявъ за характеристическое равенство

$$Ge^{xu'+yv'+\ldots+sw'} = \varphi(x,\ y\ \ldots\ s).$$

§ **55**. Возьмемъ уравненіе

$$\Delta_x z + 2z = F(x)$$

общій интегралъ котораго Коши (Exerc. 1827 стр. 209) далъ въ формѣ

$$z = e^{\pi\left(\frac{x}{h}-1\right)\sqrt{-1}}\sum e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}F(x).$$

Предположимъ вторую часть равенства равною нулю, и будемъ интегрировать уравненіе

$$\Delta_x z + 2z = 0.$$

Полагая $z = \psi(x)$, имѣемъ для опредѣленія $\psi(x)$ отношеніе

$$\psi(x+h) + \psi(x) = 0$$

ψ есть функція періодическая. Она обладаетъ свойствами измѣнять свой знакъ, сохраняя въ то же время одинаковую абсолютную величину, въ томъ случаѣ когда перемѣнная x измѣняется на количество h.

Для опредѣленія частнаго интеграла предложеннаго уравненія со вторымъ членомъ, положимъ

$$z = Ge^{xu} \quad \text{и} \quad F(x) = Ge^{xu'},$$

вслѣдствіе чего мы можемъ написать его въ символической формѣ

$$Ge^{xu}(e^{hu} + 1) = Ge^{xu'}$$

откуда выводимъ

$$z = Ge^{xu} = G\frac{e^{xu'}}{1 + e^{hu'}}.$$

Женерализуя это послѣднее по отношенію u', получимъ

$$z = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{\sqrt{-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x + hy\sqrt{-1})}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}dy.$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть для интеграла взятаго уравненія

$$z = \psi(x) + \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{\sqrt{-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x + hy\sqrt{-1})}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}dy$$

гдѣ $\psi(x)$ произвольная функція удовлетворяющая условіямъ, указаннымъ выше.

§ **56**. Тотъ же способъ можетъ быть приложенъ къ интегрированію уравненія, порядокъ дифференціала въ которомъ безконечно великъ.

Пусть дано уравненіе

$$z - \frac{1}{1.2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4 z}{dx^4} - \ldots = \varphi(x) \quad . \quad . (1)$$

Полагая

$$z = Ge^{xu} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = Ge^{xu'}$$

получаемъ

$$Ge^{xu}\left(1 - \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) = Ge^{xu} \cos u = Ge^{xu}.$$

Такимъ образомъ частный интегралъ будетъ

$$Ge^{xu} = G\,\frac{e^{xu'}}{\cos u'} = \int_0^\infty \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{e^{\frac{\pi t}{2}} + e^{-\frac{\pi t}{2}}}\,dt$$

а общій

$$z = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{\frac{2n+1}{2}\pi} + \int \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{e^{\frac{\pi t}{2}} + e^{-\frac{\pi t}{2}}}\,dt. \;. \;. (2)$$

Интегрированіе дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, а также линейныхъ уравненій съ конечными разностями, причемъ главная перемѣнная въ немъ есть функція одной независимой перемѣнной.

§ 57. Очевидно, что указанное уравненіе есть линейное дифференціальное уравненіе съ постоянными коэффиціентами вида

$$\frac{d^n z}{dx^n} + p\,\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + k\,\frac{dz}{dx} + hz = \varphi(x). \;. \;. \quad (1)$$

Полагая $\varphi(z) = 0$ и $z = Ge^{xu}$, получимъ символическое уравненіе

$$Ge^{xu}(u^n + pu^{n-1} + \;\ldots\; + ku + h) = 0,$$

которое можетъ быть удовлетворено помощію u, удовлетворяющаго равенству

$$F(u) = u^n + pu^{n-1} + \;\ldots\; + ku + h = 0$$

Обозначивъ черезъ $m_1,\ m_2, \ldots m_n$ n корней этого уравненія, будемъ имѣть

$$z = Ge^{m_n x} = C_n e^{m_n x}$$

и слѣдовательно

$$z = \sum_{n=1}^{n=n} C_n e^{m_n x}$$

Такимъ образомъ мы пришли къ обыкновенному способу интегрированія предложеннаго уравненія безъ второй части.

Въ томъ случаѣ, когда вторая часть есть нѣкоторая функція перемѣнной величины мы можемъ положить $\varphi(x) = Ge^{xu'}$ и $z = Ge^{xu}$, такъ что будемъ имѣть

$$Ge^{xu}(u^n + pu^{n-1} + \;.\;\;.\;\;.\; + ku + + h) = Ge^{xu'}$$

равенство, которое даетъ намъ

$$z = Ge^{xu} = G\frac{e^{xu'}}{u'^n + pu'^{n-1} + \;.\;\;.\;\;.\; + ku' + h} = G\frac{e^{xu'}}{F(u')}\,.$$

Женерализація этого выраженія можетъ быть произведена нѣсколькими способами.

1°. Обозначивъ черезъ V интегралъ предложеннаго уравненія безъ второй части, будемъ имѣть при помощи формулы (7) § 7-го

$$z = V + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x + y\sqrt{-1})}{F(v)}\,e^{-yv\sqrt{-1}}\,dv\,.\,dy.$$

2°. Назвавъ черезъ m_1, m_2, $m_3 \ldots m_n$ n корней уравнененія

$$F(u') = u'^n + pu'^{n-1} + \;.\;\;.\;\;.\; + ku' + h = 0$$

мы можемъ положить

$$\frac{1}{F(u')} = \frac{1}{(u' - m_1)(u' - m_2)\;.\;\;.\;\;.\;(u' - m_n)}$$

и женерализаціи по частямъ приведетъ насъ къ значенію z

$$z = V + \frac{1}{h}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} e^{-v-w\ldots-s}\,\varphi\Big(x + \frac{v}{m_1} +$$

$$+ \frac{w}{m_2} + \ldots + \frac{s}{m_n}\Big)\,dv\,.\,dw\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;ds.$$

Въ случаѣ, если корни m_1, m_2, $m_3 \dots m_n$ дѣйствительные и неравные мы можемъ дать значенію z форму

$$z = V - \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{m_1 v}}{F'(m_1)} + \frac{e^{-m_2 v}}{F'(m_2)} + \dots + \frac{e^{m_n v}}{F'(m_n)}\right] \varphi(x+v)\, dv.$$

Легко понять, какъ пришлось бы измѣнить эту формулу въ случаѣ равныхъ или мнимыхъ корней.

§ **58**. Лонгшамъ (Longchamps) опредѣлилъ въ замѣткѣ сообщенной французской ассоціаціи (на конгрессѣ въ Греноблѣ) частный интегралъ уравненія съ конечными разностями

$$\psi(x) + a\psi(x-1) + b\psi(x-2) + \dots + k\psi(x-n) = F(x)\,.\,(1)$$

въ томъ случаѣ, когда $F(x)$ цѣлый полиномъ относительно x. По мнѣнію автора указанный имъ способъ не можетъ быть примѣненъ, если функція $F(x)$ какая угодно.

Между тѣмъ при помощи женерализаціоннаго вычисленія можно опредѣлить интегралъ этого уравненія во всѣхъ случаяхъ.

Для этого полагаемъ

$$\psi(x) = Ge^{xu'} \text{ и } F(x) = Ge^{xu}$$

при чемъ получится символическое уравненіе

$$Ge^{xu'}(1 + ae^{-u'} + be^{-2u'} + \dots + ke^{-nu'}) = Ge^{xu}$$

и обозначивъ для краткости

$$F(u) = e^{nu} + ae^{(n-1)u} + be^{(n-2)u} + \dots + k$$

будемъ имѣть

$$\psi(x) = G\frac{e^{(x+n)u}}{F_1(u)} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x+n+y\sqrt{-1})}{F_1(v)}\, c^{-yv\sqrt{-1}}\, dy.dv.$$

Впрочемъ можно женерализовать еще и иначе.

Пусть m_1, m_2, $m_3 \dots m_n$ будутъ n корней уравненія

$$m^n + am^{n-1} + bm^{n-2} + \dots + k = 0$$

мы можемъ писать

$$\psi(x) = G\frac{e^{(x+n)u}}{F_1(u)} = Ge^{xu}\frac{e^u}{e^u - m_1}\cdot\frac{e^u}{e^u - m_2}\cdot\cdot\cdot\frac{e^u}{e^u - m_u}.$$

Зная $G\dfrac{e^u}{e^u - m}$ мы легко найдемъ значеніе $\psi(x)$ съ помощію женерализаціи по частямъ.

Что же касается $G\dfrac{e^u}{e^u - m}$, то его можно опредѣлить замѣчая, что

$$G\frac{e^u}{e^u - m} = G\frac{1}{1 - me^{-u}} = G(1 + me^{-u} + m^2 e^{2-2u} + \ldots) =$$

$$= \varphi(x) + m\varphi(x-1) + m^2\varphi(x-2) + \ldots = \sum_{n=0}^{n=\infty} m^n F(x-n),$$

сумму весьма легко превращаемую въ интегралъ.

§ 59. Предположимъ, что требуется опредѣлить функцію $f(x)$, удовлетворяющую уравненію

$$f(x+a) + f(x-a) = F(x),$$

гдѣ $F(x)$ есть данная функція перемѣннаго x.

Чтобы найти частный интегралъ, удовлетворяющій уравненію со со второй частью, полагаемъ

$$f(x) = Ge^{xu'},\ F(x) = Ge^{xu}$$

Вставивъ эти значенія въ предложенное уравненіе, получимъ

$$Ge^{xu'}(e^{au} + e^{-au}) = Ge^{xu};$$

откуда

$$Ge^{xu'} = G\frac{e^{xu}}{e^{au} + e^{-au}},$$

произведя женерализацію, будемъ имѣть

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x + 2ay\sqrt{-1})}{e^{\pi y} + v^{-\pi y}}dy = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n F[x + (2n+1)a].$$

Чтобы получить общее значеніе интеграла даннаго уравненія, нужно прибавить къ найденному выраженію полный интегралъ уравненія (1) безъ второй части, т. е.

$$f(x+a)+f(x-a)=0$$

который, какъ въ этомъ легко убѣдиться, имѣетъ видъ

$$\sum_{n=0}^{n=2n-1} C_n\left(\cos\frac{n\pi x}{a}+\sin\frac{n\pi x}{a}\sqrt{-1}\right)$$

Интегрированіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, а также уравненій съ конечными разностями, имѣющими постоянные коэффиціенты, причемъ главная перемѣнная есть функція двухъ или нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

§ **60**. Пусть дано линейное уравненіе съ постоянными коэффиціентами, въ которыхъ главная перемѣнная z есть функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ t и s и которое можетъ быть написано въ видѣ

$$a\frac{d^m z}{dt^m}+b\frac{d^m z}{dt^{m-1}ds}+\ldots+k\frac{d^m z}{ds^m}+a_1\frac{d^{m-1}z}{dt^{m-2}ds}+\ldots$$

$$+k_1\frac{d^{m-1}z}{ds^{m-1}}+\ldots+a_{m-1}\frac{dz}{dt}+b_{m-1}\frac{dz}{ds}+a_m z=0\,. \quad (1)$$

Такъ какъ z есть функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, то положимъ

$$z=Ge^{su+tv}$$

это значеніе, послѣ вставки въ данное уравненіе, дастъ намъ

$$Ge^{su+tv}\{av^m+(a_1+bu)v^{m-1}+(a_2+b_1u+cu^2)v^{m-2}$$
$$+\ldots+a_m\}=0$$

равенство, которое будетъ удовлетворено, если мы установимъ между u и v отношеніе

$$av^m+(a_1+bu)v^{m-1}+(a_2+b_1u+cu^2)v^{m-2}+\ldots+a_m=0 \quad (2)$$

Отсюда слѣдуетъ, что если рѣшить это уравненіе относительно u какъ функціи v или же относительно v, какъ функціи u, то значеніе z полученное вслѣдствіе подстановки u или v даетъ, при помощи женерализаціи, интегралъ; этотъ частный интегралъ будетъ заключать одну произвольную функцію.

Замѣтимъ при этомъ, что каждому дифференціальному уравненію соотвѣтствуетъ уравненіе между перемѣнными женерализаціи и, наоборотъ, каждому уравненію между перемѣнными женерализаціи соотвѣтствуетъ дифференціальное уравненіе, которое всегда легко изъ него вывести.

Отсюда мы можемъ заключить, что еслибъ уравненіе между перемѣнными женерализаціи возможно было разложить на нѣсколько множителей, то каждому множителю отвѣчало бы дифференціальное уравненіе низшаго порядка нежели данное и эти уравненія были бы ихъ интегралами.

§ 61. Разсмотримъ уравненіе съ частными производными второго порядка—

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial t.\partial s}+c\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}+k\frac{\partial z}{\partial t}+f\frac{\partial z}{\partial s}+lz=0\ldots\quad(1)$$

и предположимъ, что интегралъ этого уравненія выражается въ видѣ

$$z=Ge^{su+tv}$$

это значеніе, послѣ вставки его въ данное уравненіе доставитъ намъ отношеніе между перемѣнными женерализаціи u и v

$$av^2+bvu+cu^2+kv+fu+l=0\ldots.\quad(2)$$

Отсюда получаются двѣ величины для v

$$v=-\frac{bu+k}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)u^2+2(bk-2af)u+k^2-4ab}.$$

Такимъ образомъ для опредѣленія значенія z мы имѣемъ

$$z=Ge^{su+\frac{bu+k}{2a}t\pm}$$

$$\pm\frac{t}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)u^2+2(bu-2af)u+(k^2-4ab)};$$

женерализуя это выраженіе, получимъ.

$$z = e^{-\frac{kt}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2 - \omega^2 - \frac{k^2 - 4ab}{16a^2\omega^2}t^2} \varphi\left(s - \frac{bt}{2a} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{4ac - b^2}\frac{tw}{2a\omega} - \frac{bk - 2af}{8a^2\omega^2}t^2\right) d\omega\, dw. \quad . \quad . \quad (3)$$

Чтобы получить второй интегралъ, достаточно замѣтить, что данное уравненія не измѣнится, если въ немъ измѣнить a въ c, k въ f, t въ s и наоборотъ то же самое можно сдѣлать въ полученномъ интегралѣ и написать

$$z = e^{-\frac{fs}{2c}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2 - \omega^2 - \frac{f^2 - 4cb}{16c^2\omega^2}s^2} \psi\left(t - \frac{bs}{2c} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{4ac - b^2}\frac{sw}{2c\omega} - \frac{bf - 2ck}{8c^2\omega^2}s^2\right) d\omega\, dw. \quad . \quad . \quad (4)$$

Сумма этихъ двухъ интеграловъ (3) и (4) удовлетворитъ данному уравненію.

§ 62. Если коэффиціенты $\frac{d^2z}{dt^2}$ и $\frac{d^2z}{ds^2}$ оба вмѣстѣ равны нулю, то данное уравненіе приметъ видъ

$$\frac{d^2z}{dt.ds} + a\frac{dz}{dt} + b\frac{dz}{ds} + cz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

а отношеніе между перемѣнными жёнерализаціи превратится въ

$$vu + av + bu + c = 0.$$

Изъ этого уравненія

$$v = -\frac{bu + c}{u + a}$$

и вслѣдствіе этого

$$z = Ge^{su - bt - \frac{c - ab}{u + a}t}$$

что дастъ, послѣ женерализаціи

$$z = e^{-bt}\varphi(s) - \frac{2e^{-bt}}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-aw}\sin\frac{c-ab}{h}t\sin hw\,\varphi(s-w)\,dh.dw. \quad (2)$$

Это интегралъ уравненія (1) съ одной произвольной функціей φ; чтобы получить второй интегралъ того же уравненія, достаточно замѣтить, что можно, не измѣняя даннаго уравненія измѣнить s въ t и t въ s, измѣнивъ, въ то же время, a въ b и b въ a. Такимъ образомъ мы получимъ

$$z = e^{-as}\psi(t) - \frac{2e^{-as}}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-bw}\sin\frac{c-ab}{h}s\sin hw\,\psi(t-w)\,dh\,dw.$$

Изъ этихъ двухъ интеграловъ выводится интегралъ съ двумя произвольными функціями —

$$z = e^{-bt}\varphi(s) + e^{-as}\psi(t) - \int_0^\infty\int_0^\infty \sin hw\left\{e^{-aw-bt}\sin\frac{c-ab}{h}\varphi(s-\right.$$

$$\left.-w) + e^{-bw-as}\sin\frac{c-ab}{h}s\,\psi(t-w)\right\}dh\,dw.$$

Предположимъ, что въ послѣднемъ уравненіи a и b равны нулю, а $c = -a$, тогда мы будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{d^2z}{ds.dt} = az$$

интегралъ котораго выразится въ формѣ

$$z = \varphi(s) + \psi(t) + \int_0^\infty\int_0^\infty \sin hw\left\{\sin\frac{at}{h}(s-w) + \right.$$

$$\left.+\sin\frac{as}{h}\psi(t-w)\right\}dh\,dw.$$

Обращаемъ вниманіе, что интегралъ уравненія

$$\frac{d^2z}{ds.dt} = z$$

которое представляетъ собою частный случай только что разсмотрѣннаго нами, былъ данъ Пуассономъ въ видѣ

$$z = \varphi(s) + \frac{t}{1}\int \varphi(s)\,ds + \frac{t^2}{1.2}\int^2 \varphi(s)\,ds^2 + \ldots + \psi(t) +$$

$$+ \frac{s}{1}\int \psi(t)\,dt + \frac{s^2}{1.2}\int^2 \psi(t)\,dt^2 + \ .\ .\ .$$

Этотъ интегралъ есть не что иное какъ значеніе

$$z = Ge^{tu+\frac{s}{u}} + Ge^{su+\frac{t}{u}}$$

въ томъ случаѣ когда $e^{\frac{s}{u}}$ и $e^{\frac{t}{u}}$ разлагаются въ строки и когда производится женерализація каждаго члена.

§ **63**. Пусть требуется интегрировать уравненіе

$$\frac{d^nz}{dt^n} + a\,\frac{d^nz}{dt^{n-1}\,ds} + b\,\frac{d^nz}{dt^{n-2}\,ds^2} + \ldots + k\frac{d^nz}{ds^n} = F(s,t)\ .\ \ .\quad (1)$$

Полагая вторую часть уравненія равною нулю и

$$z = Ge^{su+tv}$$

будемъ имѣть для опредѣленія v въ функціи u уравненіе

$$v^n + av^{n-1}u + bv^{n-2}\,u^2 + \ .\ \ .\ \ . + ku^n = 0$$

если положимъ $v = mu$, то для опредѣленія m получимъ уравненіе

$$m^n + am^{n-1} + bm^{u-2} + \ .\ \ .\ \ . + k = 0;$$

обозначивъ черезъ m_1, m_2. m_3 . . . m_n n корней этого уравненія предположимъ эти послѣдніе неравными и поставимъ ихъ въ выраженіе для z. Тогда послѣ женерализаціи получится

$$z = \psi_1(s + m_1t) + \psi_2(s + m_2t) + \ .\ \ .\ \ . + \psi_n(s + m_n\,t)$$

гдѣ ψ_1, ψ_2 . . . ψ_n обозначаютъ n различныхъ произвольныхъ функцій.

Для того чтобы получить интегралъ уравненія со второй частью достаточно прибавить къ этому значенію z частный интегралъ

$$G\frac{e^{su+tv}}{(v-m_1u)(v-m_2u)\ldots(v-m_nu)}.$$

Такимъ образомъ полный интегралъ уравненія (1) будетъ

$$z=\psi_1(s+m_1t)+\psi_2(s+m_2t)+\ldots+\psi_n(s+m_nt)+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty F(s+m_1\omega+m_2\omega'+\ldots,t-\omega-\omega'\ldots d\omega\,d\omega'.$$

§ 63 bis. Предположимъ, что требуется опредѣлить интегралъ уравненія

$$\frac{d^nz}{dy_n}+A\frac{d^{n-1}\Delta_xz}{dy^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}\Delta^2{}_xz}{dy^{n-i}}+\ldots+N\Delta_x^nz=F(x,y).\ (1)$$

рѣшеннаго уже Лапласомъ, въ томъ случаѣ когда вторая часть его предполагается равною нулю (Théorie analyt. des Probab.).

Полагая вторую часть уравненія равною нулю, допустимъ, что интегралъ выражается формулой

$$z=Ge^{xv+m(e^{au}-1)y}$$

гдѣ m выражаетъ неопредѣленное постоянное, a — конечное приращеніе x. Подставляя это значеніе въ данное равенство, получимъ

$$Ge^{xu+m(e^{au}-1)y}(e^{au}-1)^n(m^n+Am^{n-1}+Bm^{n-2}+\ldots+N)=0.$$

Если обозначимъ черезъ m_1, m_2, . . . m_n n корней уравненія

$$m_n+Am^{n-1}+Bm^{n-2}+\ldots+N=0$$

то получимъ n выраженій для z въ формѣ

$$z=Ge^{xu+m_p(e^{au}-1)y}$$

Женерализуя, будемъ имѣть n интеграловъ съ n произвольными функціями.

Чтобы получить частный интегралъ уравненія (1) со второй частью, мы напишемъ

$$z=Ge^{xu+yv},\ F(x,y)=Ge^{xu'+yv'}$$

что даетъ возможность выразить предложенное уравненіе въ видѣ

$$Ge^{xu+yv}\{v^n + A(e^{au}-1)v^{n-1} + B(e^{au}-1)^2 v^{n-2} + \dots$$
$$+ N(e^{au}-1)^n = Ge^{xu'+yv'}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$Ge^{xu+yv} = G\frac{e^{xu'+yv'}}{v'^n + A(e^{au'}-1)v'^{n-1} + \dots + N(e^{au'}-1)^n};$$

такимъ образомъ полный интегралъ даннаго уравненія выразится

$$z = \sum_{p=1}^{p=n} Ge^{xu+mp(e^{au}-1)y} +$$
$$+ G\frac{e^{xu'+yv'}}{v'^n + A(e^{au'}-1)v'^{n-1} + \dots + N(e^{au'}-1)^n} \dots (2)'$$

Интегрированіе уравненій съ частными производными линейныхъ, а также линейныхъ уравненій съ конечными разностями, въ которыхъ главная перемѣнная есть функція двухъ или нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

§ 64. Предположимъ, что дано интегрировать линейное уравненіе перваго порядка

$$a\frac{\partial z}{\partial t} + b\frac{\partial z}{\partial s} + c\frac{\partial z}{\partial p} + \dots + h\frac{\partial z}{\partial r} = F(t, s, p \dots r) \dots (1)$$

Разсмотримъ сначала данное уравненіе безъ второй части и опредѣлимъ интегралъ уравненія

$$a\frac{\partial z}{\partial t} + b\frac{\partial z}{\partial s} + c\frac{\partial z}{\partial p} + \dots + h\frac{\partial z}{\partial r} = 0 \dots \quad (2)$$

Положимъ, что

$$z = Ge^{tu+sv+pw+\dots+kr} \dots \dots \dots \quad (3)$$

тогда мы получимъ символическое уравненіе

$$Ge^{tu+sv+pw+\dots+kr}\{au + bs + cp + \dots + hk\} = 0,$$

которому можно удовлетворить полагая

$$au + bs + cp + \dots + hk = 0.$$

Изъ этого уравненія

$$k=-\frac{a}{h}u-\frac{b}{h}s-\frac{c}{h}p\ .\ .\ .$$

вставивъ значеніе k въ (3), получимъ

$$z=Ge^{\left(t-\frac{a}{h}r\right)u+\left(s-\frac{b}{h}r\right)v+\left(p+\frac{c}{h}r\right)w+\ldots}$$

Женерализуя, будемъ имѣть интегралъ уравненія (2)

$$z=\psi(ht-ar,\ hs-br,\ hp-cr\ .\ .\ .)\ .\ .\ .\ \ (4)$$

гдѣ ψ есть произвольная функція.

Если теперь мы разсмотримъ уравненіе (1), то, положивъ въ немъ

$$z=Ge^{tu+sv+pw+\ldots}$$

и

$$F(t,s,p\ldots)=Ge^{tu'+sv'+pw'+\ldots}$$

получимъ символическое уравненіе

$$Ge^{tu+sv+pw+\ldots}\ \{au+bv+cw+\ldots\}=Ge^{tu'+sv'+pw'+\ldots}$$

которое дасть

$$z=Ge^{tu+sv+pw+\ldots}=G\frac{e^{tu'+sv'+pw'+\ldots}}{au'+bv'+cw'+\ldots};$$

а послѣ женерализаціи —

$$z=\int_0^\infty F(t-a\omega,\ s-b\omega,\ p-c\omega,\ldots)p\omega.$$

Этотъ частный интегралъ въ суммѣ съ интеграломъ (4) даетъ полный интегралъ уравненія (3).

§ 65. Тотъ же способъ можетъ быть приложенъ къ интегрированію уравненія

$$\frac{\partial^m z}{\partial t^m}=a\frac{\partial z}{\partial s}+b\frac{\partial z}{\partial p}+\ldots+h\frac{\partial z}{\partial r}\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (1)$$

Предположимъ, что интегралъ даннаго уравненія имѣетъ видъ

$$z=Ge^{tu+sv+pw+\ldots+rk}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Тогда символическое уравненіе будетъ

$$Ge^{tu+sv+pw+\ldots+rk}(u^m - av - bw - \ldots - hk) = 0$$

которому можно удовлетворить положивъ

$$u^m - av - bw - \ldots - hk = 0$$

что даетъ

$$k = \frac{u^m}{h} - \frac{av}{h} - \frac{bw}{h} - \ldots - k.$$

Вставивъ это значеніе k въ уравненіе (2) получимъ

$$z = Ge^{tu + \frac{r}{h}u^m + \left(s - \frac{ar}{h}\right)v + \left(p - \frac{br}{h}\right)w + \ldots} \quad (3)$$

Женерализація этого выраженія приведетъ къ частному интегралу предложеннаго выраженія.

Изъ этого интеграла можно вывести другіе помощью простой перемѣны буквъ. Сумма же всѣхъ ихъ удовлетворитъ данному уравненію.

Если мы предположимъ $m = 2$ предложенное уравненіе приметъ видъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a\frac{\partial z}{\partial s} + b\frac{\partial z}{\partial p} + \ldots$$

и формула (3) послѣ женерализаціи ея дастъ намъ

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\varphi\left(t + 2\omega\sqrt{\frac{r}{h}},\ hs - ar,\ ph - ar\ldots\right)d\omega.$$

Изъ этого интеграла можно вывести новый помощью простой перестановки входящихъ въ него буквъ.

Частные случаи:

1°. Уравненіе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a\frac{\partial z}{\partial s} + b\frac{\partial z}{\partial p}$$

будетъ имѣть интегралъ

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\left\{\varphi\left(t + 2\omega\sqrt{\frac{p}{b}},\ ap - bs\right) + \right.$$

$$\left. + \psi\left(t + 2\omega\sqrt{\frac{s}{a}},\ ap - bs\right)\right\} d\omega$$

гдѣ φ и ψ суть двѣ произвольныя функціи.

2°. Уравненіе:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a\frac{\partial z}{\partial s} + b\frac{\partial z}{\partial p} + c\frac{\partial z}{\partial q}$$

дастъ интегралъ

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega^2}\left\{\varphi\left(t + 2\omega\sqrt{\frac{q}{c}},\ aq - bs,\ bq - cp\right) + \right.$$

$$+ \psi\left(t + 2\omega\sqrt{\frac{s}{a}},\ aq - cs,\ ap - bs\right) +$$

$$\left. + \chi\left(t + 2\omega\sqrt{\frac{p}{b}},\ ap - bs,\ bq - cp\right\} d\omega\right.$$

φ, ψ, χ здѣсь произвольныя функціи.

§ 66. Предположимъ въ уравненіи (1) предъидущаго параграфа $m = 4$, тогда оно приметъ видъ

$$\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} = a\frac{\partial z}{\partial s} + b\frac{\partial z}{\partial p} + \ .\ \ .\ \ . + n\frac{\partial z}{\partial r}.$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть частный интегралъ

$$z = Ge^{tu + \frac{r}{h}u^4 + \left(s - \frac{ar}{h}\right)v + \left(p - \frac{br}{h}\right)w + \dots}$$

женерализуя который получимъ

$$z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 - \omega'^2}\varphi\left(t + 2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{h}},\ hs - ar,\ ph - br, \dots\right) d\omega \,.\, d\omega'.$$

Частные случаи

1°. Пусть дано уравненіе

$$\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} = a\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Частный интегралъ его будетъ

$$z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}\varphi\left(t + 2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{a}}\right)d\omega\, d\omega'.$$

Вслѣдствіе того, что $\sqrt[4]{\frac{r}{a}}$ имѣетъ четыре отдѣльныхъ значенія, мы можемъ вывести четыре частныхъ интеграла, такъ что полный интегралъ даннаго уравненія выразится формулой

$$z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}\left\{\varphi\left(t + 2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{a}}\right) + \chi\left(t - 2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{a}}\right) + \right.$$

$$+ \psi\left(t + 2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{a}}\sqrt{-1}\right) +$$

$$\left. + \theta\left(t - 2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{a}}\sqrt{-1}\right)\right\} d\omega\, d\omega'.$$

2°. Предположимъ уравненіе

$$\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} = a\frac{\partial z}{\partial s} + b\frac{\partial z}{\partial p}.$$

Частный интегралъ его будетъ

$$z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}\left\{\varphi\left(t + 2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{b}},\ bs - ap\right)\right\} d\omega\,.\,d\omega',$$

полный же интегралъ выражается формулой

$$z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}\left\{\varphi\left(t + 2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{b}},\ bs - ap\right) + \right.$$

$$\left. + \chi\left(t - 2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{b}},\ bs - ap\right)\right\} d\omega\, d\omega' +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}\left\{\lambda\left(t+2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{b}}\sqrt{-1},\ bs-ap\right)+\right.$$

$$\left.+\,\theta\left(t-2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{b}}\sqrt{-1},\ bs-ap\right)\right\}d\omega\,.\,d\omega'+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}\left\{\psi\left(t+2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{a}},\ bs-ap\right)+\right.$$

$$\left.+\,\rho\left(t-2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{a}},\ bs-ap\right)\right\}d\omega\,.\,d\omega'+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}\left\{\xi\left(t+2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{a}}\sqrt{-1},\ bs-ap\right)+\right.$$

$$\left.+\,\mu\left(t-2\sqrt{2}\,\omega'\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{r}{a}}\sqrt{-1},\ bs-ap\right)\right\}d\omega\,.\,d\omega'.$$

въ которую вошло восемь произвольныхъ функцій.

§ 67. Попробуемъ интегрировать уравненіе

$$\frac{\partial z}{\partial t}=a\frac{\partial^m z}{\partial s^m}+b\frac{\partial^m z}{\partial p^m}+\ldots\ \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Полагая

$$z=Ge^{tu+sv+pw+\ldots}$$

получимъ

$$Ge^{tu+sv+pw+\ldots}\,(u-av^m-bw^m-\ldots)=0$$

уравненіе удовлетворяющееся значеніемъ

$$u-av^m-bw^m-\ \ldots\ =0$$

изъ котораго находимъ

$$u=av^m+bw^m+\ \ldots$$

Такъ что

$$z=Ge^{sv+atv^m+pw+btw^m+\ldots}\ \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Женерализація намъ даетъ частный интегралъ уравненія (1).

Разсмотримъ случай, гдѣ $m=2$. Уравненіе будетъ

$$\frac{\partial z}{\partial t}=a\frac{\partial^2 z}{\partial s}+b\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}+\ldots$$

Интегралъ его

$$z=Ge^{sv+atv^2+pw+btw^2+\ldots}$$

превратится послѣ женерализаціи въ

$$z=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2-\omega'^2}\varphi(s+2\omega\sqrt{at},\ p+2\omega'\sqrt{bt},\ldots)\,d\omega.d\omega'.$$

Это извѣстный интегралъ, данный Пуассономъ какъ полное рѣшеніе уравненія (3). (Poisson théorie de la chaleur § 76).

Прямой способъ, который мы только что употребили для опредѣленія интеграла уравненія (3) привелъ насъ къ рѣшенію съ одной произвольной функціей нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Мы можетъ здѣсь обратить вниманіе на то, что, вообще, если извѣстно выраженіе, которое, заключая одно или нѣсколько постоянныхъ, удовлетворяетъ предложенному дифференціальному уравненію, каково бы ни было значеніе этихъ постоянныхъ, то женерализуя это выраженіе мы получимъ частный интегралъ.

Въ томъ случаѣ, когда главная перемѣнная есть функція нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ и когда выраженіе удовлетворяющее ей есть функція одной лишь произвольной постоянной или же такого числа ихъ, которое меньше числа независимыхъ перемѣнныхъ, то мы получимъ множество частныхъ интеграловъ, сумма которыхъ даетъ полный интегралъ даннаго уравненія.

Если взявъ уравненіе (3) мы положимъ

$$z=e^{tu^2+\left(\frac{gs}{\sqrt{a}}+\frac{hp}{\sqrt{b}}+\ldots\right)u},$$

то это выраженіе удовлетворитъ данному уравненію, каково бы ни было значеніе перемѣннаго u. Предположивъ, что g, h, ... удовлетворяютъ равенству

$$1-g^2-h^2-\ldots=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

мы можемъ заключить, что женерализуя выраженіе z относительно u

мы будемъ имѣть

$$z = Ge^{tu^2 + \left(\frac{gs}{\sqrt{a}} + \frac{hp}{\sqrt{b}} + \dots\right)u} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(\omega - \frac{gs}{\sqrt{a}} - \frac{hp}{\sqrt{b}} + \dots\right)^2}{4t}} \cdot \varphi(\omega)\, d\omega.$$

Это выраженіе z, въ которомъ мы можемъ дать количествомъ g, h ... всѣ значенія, удовлетворяющія уравненію (4), а произвольной функціи различныя формы, доставитъ безчисленное множество интеграловъ, каждый изъ которыхъ будетъ заключать произвольную функцію одной перемѣнной; сумма же этихъ частныхъ интеграловъ даетъ полный интегралъ даннаго уравненія.

Интегрированіе двучленныхъ уравненій.

§ 68. Предположимъ, что дано интегрировать уравненіе съ частными производными вида

$$\frac{\partial^m z}{\partial t^m} = a \frac{\partial^n z}{\partial s^n}.$$

Пусть

$$z = Ge^{tu+sv}$$

будетъ интеграломъ этого уравненія. Тогда, вставивъ его туда вмѣсто z, получимъ

$$Ge^{tu+sv}(u^m - av^n) = 0,$$

слѣдовательно отношеніе между перемѣнными женерализаціи выразится уравненіемъ

$$u^m - av^n = 0,$$

откуда

$$v = \frac{u^{\frac{m}{n}}}{\sqrt[n]{a}},$$

Такимъ образомъ

$$z = Ge^{tu + \frac{s}{\sqrt[n]{a}} u^{\frac{m}{n}}}$$

Подъ этой формой женерализація представляетъ нѣкоторыя трудности вслѣдствіе входящаго въ нее радикала $u^{\frac{m}{n}}$, но если мы замѣтимъ, что полученное нами значеніе удовлетворяетъ данному уравненію при какомъ угодно u, то вмѣсто u мы можемъ поставить въ эту формулу u^n, такъ что выраженіе z приметъ видъ

$$z = Ge^{tu^n + \frac{s}{\sqrt[n]{a}} u^m}$$

Женерализація его дастъ намъ частный интегралъ уравненія.

I) Если положимъ $m=2$, $n=1$, то уравненіе (1) приметъ видъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a\frac{\partial z}{\partial s},$$

и выраженіе для z будетъ

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \varphi(t\sqrt{a} + 2v\sqrt{s})\, dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ φ обозначаетъ произвольную функцію.

Сверхъ того, такъ какъ уравненіе не мѣняется, если въ немъ измѣнить знакъ t, то мы можемъ написать второй интегралъ

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \psi(-t\sqrt{a} + 2v\sqrt{s})\, dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

и полный интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \left\{\varphi(t\sqrt{a} + 2v\sqrt{s}) + \psi(-t\sqrt{a} + 2v\sqrt{s})\right\} dv \, . \quad (5)$$

Но если замѣтимъ, что измѣняя v въ $-v$, мы не измѣнимъ интеграла (4) по отношенію къ интегралу (3), то можемъ, подобно Пуассону, считать (3) интегралъ полнымъ интеграломъ даннаго уравненія.

Слѣдуетъ замѣтить, что не всегда возможно на интегралъ (5) смотрѣть, какъ на тождественный интегралу (3). Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $a=0$, то получится уравненіе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

интегралъ котораго будетъ

$$z = \varphi(s)\,t + \psi(s)$$

съ двумя произвольными функціями φ и ψ. Его нельзя вывести изъ формулы (3), тогда какъ онъ есть прямое слѣдствіе формулы (5).

Замѣнимъ (3) равенство равнозначущимъ ему,

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{v^2} \left\{ \frac{\varphi(t\sqrt{a} + 2v\sqrt{s}) - \varphi(-t\sqrt{a} + 2v\sqrt{s})}{2\sqrt{a}} + \right.$$

$$\left. + \psi(-t\sqrt{a} + 2v\sqrt{s}) \right\} dv.$$

Полагая $a = 0$ имѣемъ

$$z = \varphi(s)\,t + \psi(s).$$

II) Если положимъ въ (1) уравненіи $m = 2$ и $n = 2$, то будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$$

а для интеграла его—два выраженія

$$z = Ge^{\left(t + \frac{s}{\sqrt{a}}\right) u^2} \quad \text{и} \quad z = Ge^{\left(-t + \frac{s}{\sqrt{a}}\right) u^2}$$

Женерализуя и взявъ ихъ сумму получимъ полный интегралъ

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \left\{ \varphi\left(2v\sqrt{t + \frac{s}{\sqrt{a}}}\right) + \psi\left(2v\sqrt{-t + \frac{s}{\sqrt{a}}}\right) \right\} dv,$$

который мы можемъ написать въ обыкновенной и извѣстной формѣ

$$z = \varphi(s + t\sqrt{a}) + \psi(s - t\sqrt{a}).$$

III) Положивъ $m = 3$ и $n = 2$ будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{\partial^3 z}{\partial t^3} = a \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$$

интегралъ котораго выразится въ формѣ —

$$z = Ge^{tu^3 + \frac{s}{\sqrt{a}} u^2};$$

но замѣчая, что дифференціальное уравненіе не мѣняется, если измѣнить t въ αt и βt, гдѣ α и β суть два кубическихъ корня изъ 1, т. е. $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, z будемъ имѣть три значенія, женерализуя которыя и взявъ сумму полученныхъ результатовъ, будемъ имѣть полный интегралъ даннаго уравненія.

Можно произвести женерализацію при помощи формулы (8) § 24.

IV) Разсмотримъ еще случай, гдѣ $m = 4$, $n = 2$. Уравненіе (1) приметъ видъ

$$\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2};$$

мы можемъ, вслѣдствіе того, что въ m и n входитъ множитель 2, написать выраженіе для z въ болѣе простой формѣ

$$z = Ge^{tu + \frac{s}{a} u^2}.$$

Женерализуя его, получимъ

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \varphi\left(t + 2v\sqrt{\frac{s}{a}}\right) dv = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega - t)^2}{4s} a} \varphi(\omega) d\omega.$$

Въ этой формулѣ мы можемъ измѣнить знаки s и t, и такимъ образомъ будемъ имѣть четыре интеграла, сумма которыхъ дастъ полный интегралъ

$$z = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(\omega - t)^2 a}{4s}} \varphi(\omega) + e^{\frac{(\omega - t)^2}{4s} a} \psi(\omega) + e^{-\frac{(\omega + t)^2}{4s} a} \chi(\omega) + \right.$$
$$\left. + e^{\frac{(\omega + t)^2}{4s} a} \theta(\omega) \right\} d\omega,$$

гдѣ φ, ψ, χ, θ выражаютъ произвольныя функціи.

Положивъ въ данномъ уравненіи $a = a\sqrt{-1}$, получимъ интегралъ уравненія

$$\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 0,$$

выражающійся формулой

$$z = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \cos \frac{(\omega + t)^2}{4s} a\, \varphi(\omega) + \sin \frac{(\omega + t)^2}{4s} a\, \psi(\omega) + \right.$$

$$\left. + \cos \frac{(\omega - t)^2}{4s} a\, \chi(\omega) + \sin \frac{(\omega - t)^2}{4s} a\, \theta(\omega) \right\} d\omega.$$

Коши въ своей теоріи волнъ далъ интегралъ этого уравненія въ другой формѣ.

§ 69. Линейныя уравненія съ постоянными коэффиціентами, относя къ этому классу какъ дифференціальныя съ частными производными, такъ и уравненія съ конечными разностями или же уравненія смѣшанныя, могутъ являться въ различной формѣ. Но въ какой бы формѣ онѣ ни были, ихъ интегралы опредѣляются весьма легко помощью женерализаціоннаго вычисленія. Тотъ же способъ можетъ быть приложенъ къ опредѣленію функцій, удовлетворяющихъ совмѣстнымъ уравненіямъ, какъ мы покажемъ это сейчасъ на примѣрѣ.

Пусть даны три уравненія:

$$\varphi(x, y+1, z) - \varphi(x+1, y, z+1) + \varphi(x, y+2, z) = 0 \quad . \quad (1)$$

$$\varphi(x, y, z) - \varphi(x+1, y+1, z-1) + \varphi(x, y+1, z) = 0 \quad . \quad (2)$$

$$\varphi(x, y-1, z) - \varphi(x+1, y+1, z) + \varphi(x, y, z+1) = 0 \quad . \quad (3)$$

и требуется опредѣлить функцію $\varphi(x, y, z)$ такъ, чтобы она удовлетворяла

1° уравненію (1),

2° уравненіямъ (1) и (2) вмѣстѣ,

3° всѣмъ тремъ уравненіямъ разомъ.

1°. Если мы положимъ

$$\varphi(x, y, z) = Ge^{xu+yv+zw}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

то уравненіе (1) напишется въ видѣ

$$Ge^{xu+yv+zw}(e^v - e^{u+w} + e^w) = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что для того чтобы удовлетворить данному уравненію, мы должны въ выраженіи функціи съ тремя перемѣнными установить отношеніе

$$e^{v}-e^{u+w}+e^{2v}=0.$$

Послѣднее уравненіе дастъ

$$e^{u}=(1+e^{v})e^{v-w}.$$

Такимъ образомъ, поставивъ значеніе e^{u} въ выраженіе (4), будемъ имѣть

$$Ge^{xu+yv+zw}=G(1+e^{v})^{x}e^{(y+x)v+(z-x)w}$$

формулу, въ которой знакъ женерализаціи относится только къ v и w. Для того чтобы женерализовать полученное выраженіе, мы разложимъ $(1+e^{v})^{x}$ по формулѣ Ньютона и такимъ образомъ получимъ, обозначивъ черезъ χ произвольную функцію,

$$\varphi(x,y,z)=Ge^{xu+yv+zw}=\chi(y+x,\ z+x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\chi(x+y+k,\ z-x).$$

2°. Полагая, какъ въ предыдущемъ случаѣ

$$\varphi(x,\ y,\ z)=Ge^{xu+yv+zw},$$

мы можемъ написать (1) и (2) уравненія въ формѣ

$$Ge^{xu+yv+zw}(e^{v}-e^{u+w}+e^{2v})=0$$

$$Ge^{xu+yv+zw}(1-e^{u+v-w}+e^{v})=0,$$

удовлетворить которымъ можно, взявъ u, v и w такъ, чтобы было

$$e^{u}=1+e^{v},$$

$$e^{w}=e^{v}.$$

Такимъ образомъ, подстановляя эти значенія въ выраженіе $\varphi(x,\ y,\ z)$, будемъ имѣть

$$Ge^{xu+yv+zw}=G(1+e^{v})^{x}e^{(y+z)w},$$

равенство, въ которомъ знакъ женерализаціи относится къ одной только перемѣнной v. Женерализуя получимъ

$$\varphi(x,y,z)=\psi(y+z)+\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1\,.\,2\,.\;.\;.\,k}\psi(y+z+k),$$

гдѣ ψ есть произвольная постоянная функція.

3°. Чтобы удовлетворить тремъ совмѣстнымъ уравненіямъ (1), (2) и (3), мы положимъ, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ,

$$\varphi(x,y,z)=Ge^{xu+yv+zw}$$

и изъ данныхъ уравненій выведемъ

$$Ge^{xu+yv+zw}\,(e^{v}-e^{u+w+a}+e^{2v})=0$$

$$Ge^{xu+yv+zw}\,(1-e^{u+v-w}+e^{v})=0$$

$$Ge^{xu+yv+zw}\,(e^{-v}-e^{u+v}+e^{w})=0,$$

которымъ можно удовлетворить, положивъ

$$e^{v}-e^{u+v}+e^{2v}=0,$$

$$1-e^{u+v-w}+e^{v}=0,$$

$$e^{-v}-e^{u+v}+e^{w}=0\,.$$

Рѣшивъ эти уравненія, находимъ три системы значеній перемѣнныхъ u, v и w.

$e^{u}=2\,,\qquad e^{v}=1\,,\qquad e^{w}=1\,,$

$$e^{u}=\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\quad e^{v}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad e^{w}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

$$e^{u}=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},\quad e^{v}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},\quad e^{w}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Подставляя ихъ въ выраженіе $Ge^{xu+yv+zw}$, получимъ три формулы:

$$Ge^{xu+yv+zw}=G2^{x}$$

$$Ge^{xu+yv+zw}=G\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{x}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{y+z}$$

$$Ge^{xu+yv+zw} = G\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^x\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{y+z}$$

Вторые части ихъ не содержатъ перемѣнныхъ женерализаціи, поэтому, принимая во вниманіе, что $G1$ равняется произвольной постоянной, мы получимъ для $\varphi\,(x,\ y,\ z)$ выраженіе

$$\varphi\,(x, y, z) = C_1 2^x + C_2\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^x\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{y+z} +$$

$$+ C_3\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^x\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{y+z},$$

въ которое не входитъ болѣе произвольныхъ функцій, а только три постоянныхъ.

§ **70**. *Дано опредѣлить значеніе функціи $\varphi\,(x,\ y)$, удовлетворяющей уравненію съ частными производными*

$$\varphi\,(x, y) = p\,\varphi\,(x, y-1) + q\,\varphi\,(x-1, y)\,.\ .\ .\ .\ (1)$$

при томъ условіи, что для $x = 0$, $\varphi(0,\ y) = 1$ при всѣхъ значеніяхъ y, заключающихся между 0 и y.

Этотъ вопросъ приводится къ задачѣ, рѣшеніе которой дано Лапласомъ въ его теоріи вѣроятностей, а именно:

Два игрока, относительныя силы которыхъ суть p и q, имѣютъ первый x а второй y очковъ до окончанія партіи; опредѣлить вѣроятность $\varphi\,(x,\ y)$, что первый выиграетъ.

Полагая

$$\varphi\,(x, y) = Ge^{xu+yv},$$

получимъ отношеніе

$$Ge^{xu+yv}\,(1 - pe^{-v} - qe^{-u}) = 0,$$

которое приводится къ уравненію

$$1 - pe^{-v} - qe^{-u} = 0.$$

откуда

$$e^u = \frac{q}{1 - pe^{-v}}$$

и слѣдовательно, при помощи уравненія (2)

$$Ge^{xu+yv} = q^x G \frac{e^{yv}}{(1-pe^{-v})^x}.$$

Разлагая $(1-pe^{-v})^{-x}$ по формулѣ Ньютона и женерализуя, получимъ

$$\varphi(x,y) = q^x \Big\{\psi(y) + xp\psi(y-1) + \frac{x(x+1)}{1\,.\,2}p^2\psi(y-2) +$$

$$+ \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+k-1)}{1\,.\,2\ldots k}\psi(y-k) + \ldots\Big\}$$

$\psi(y)$ обозначаемъ произвольную функцію; она должна быть опредѣлена соотвѣтственно тѣмъ условіямъ, которымъ удовлетворяетъ функція $\varphi(x, y)$.

Съ помощію этого интеграла мы имѣемъ

$\psi(y) = 1$, $\psi(y-1) = 1$, $\psi(y-2) = 1$ и т. д. $\psi(y-k) = 1$, если $k < y$.

Слѣдовательно мы можемъ написать рѣшеніе задачи такимъ образомъ:

$$\varphi(x,y) = q^x\Big\{1 + xp + \frac{x(x+1)}{1\,.\,2}p^2 \ldots +$$

$$+ \frac{x(x+1)\ldots(x+y-2)}{1\,.\,2\ldots(y-1)}p^{y+1}\Big\};$$

этотъ результатъ, полученный нами по способу женерализаціи, ничѣмъ не отличается отъ того, который данъ Лапласомъ и былъ найденъ имъ съ помощью его fonctions génératrices. (Prob. 1.7).

Точно такъ же женерализаціонное вычисленіе даетъ возможность легко опредѣлить интегралъ уравненія

$$\varphi(x,y,z\ldots s) = p\varphi(x-1,y,z\ldots s) + q\varphi(x,y-1,z,\ldots s) +$$

$$+ \ldots + r\varphi(x,y,z\ldots s-1),$$

которое относится къ той же задачѣ, только въ случаѣ n игроковъ.

§ 71. *Предположимъ, что требуется опредѣлить функцію $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую уравненію*

$$\varphi(x+2, y) - a\varphi(x+1, y+1) - b\varphi(x, y+2) = F(x, y), \quad (1)$$

гдѣ $F(x, y)$ — данная функція.

Предположимъ вторую часть равенства равною нулю и опредѣлимъ $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую уравненію

$$\varphi(x+2, y) - a\varphi(x+1, y+1) - b\varphi(x, y+2) = F(x, y). \quad (2$$

Полагая

$$\varphi(x, y) = Ge^{xu+yv}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

будемъ имѣть

$$Ge^{xu+yv}(e^{2u} - ae^{u+v} - be^{2v}) = 0,$$

уравненіе, которое можетъ быть удовлетворено, если возьмемъ

$$e^{2u} - ae^{u+v} - be^{2v} = 0.$$

Отсюда

$$e^u = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} e^v \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$e^u = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} e^v \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$e^v = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2b} e^u \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

$$e^v = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2b} e^u \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Значеніе e^u, опредѣляемое уравненіемъ (4), будучи поставлено въ (3), дастъ

$$\varphi(x, y) = G\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\right)^x e^{(y+x)v}.$$

Женерализуя, получимъ первый интегралъ

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\right)^x \psi(y + x), \quad \ldots \quad (8)$$

гдѣ ψ выражаетъ произвольную функцію.

Уравненія (5), (6) и (7) дадутъ въ свою очередь три интеграла.

$$\varphi(x,y)=\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^x\chi(y+z),$$

$$\varphi(x,y)=\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}\right)^y\theta(y+z),$$

$$\varphi(x,y)=\left(\frac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2b}\right)^y\xi(y+z),$$

гдѣ χ, θ и ξ суть произвольныя функціи.

Отсюда слѣдуетъ, что (2) уравненіе будетъ имѣть рѣшеніе равное суммѣ этихъ четырехъ частныхъ рѣшеній, а именно

$$\varphi(x,y)=\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^x\psi(y+z)+$$

$$+\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^x\chi(y+z)+\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}\right)^y\theta(y+z)+$$

$$+\left(\frac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2b}\right)^y\xi(y+z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Теперь опредѣлимъ частный интегралъ уравненія (1), полагая

$$\varphi(x,y)=G'e^{xu+yv},$$

$$F(x,y)=Ge^{xu'+yv'},$$

причемъ получится символическое уравненіе

$$Ge^{xu+yv}\left(e^{2u}-ae^{u+v}-be^{2v}\right)=Ge^{xu'+yv'},$$

изъ котораго выводимъ

$$\varphi(x,y)=Ge^{xu+yv}=G\frac{e^{xu'+yv'}}{e^{2u'}-ae^{u'+v'}-be^{2v'}}.$$

Прежде чѣмъ произвести женерализацію, замѣтимъ, что

$$G\frac{1}{e^{2u'}-ae^{u'+v'}-be^{2v'}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\left\{G\frac{1}{e^{u'+v'}-\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}\right)e^{2v'}}\right.$$

$$\left.-G\frac{1}{e^{u'+v'}-\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}\right)e^{2v'}}\right\}.$$

Но такъ какъ

$$G\frac{1}{e^{u'+v'}-me^{2v'}}=G\frac{1}{e^{u'+v'}\left(1-\frac{me^{2v'}}{e^{u'+v'}}\right)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}m^n F(x+n-1,\ y+n-1),$$

то

$$\varphi(x,y)=Ge^{xu'+yv'}=\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\sum_{u=0}^{a=\infty}\left[\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}\right)^n-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}\right)^n\right]F(x+n-1,\ y+n-1)\ .\ .\ (10)$$

Сумма интеграловъ, даваемыхъ формулами (9) и (10), будетъ полнымъ интеграломъ предложеннаго уравненія.

§ 72. *Опредѣлить функцію $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую уравненію*

$$\varphi(x+p,\ y+q)-a\varphi(x,y)=F(x,y)\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Предположивъ, что вторая часть равна нулю, будемъ имѣть

$$\varphi(x+p,\ y+q)-a\varphi(x,y)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

и взявъ

$$\varphi(x,y)=Ge^{xu+yv},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

получимъ уравненіе

$$Ge^{xu+yv}(e^{pu+qv}-a)=0,$$

откуда выводимъ

$$e^u = \sqrt[p]{a}\, e^{-\frac{q}{p} v}, \quad e^v = \sqrt[q]{a}\, e^{-\frac{p}{q} u}.$$

Поставивъ въ (3) значенiе e^u, будемъ имѣть

$$\varphi(x,y) = Ge^{xu+yv} = (\sqrt[p]{a})^x \psi\left(y - \frac{q}{p} x\right)$$

или опредѣливъ p корней $\sqrt[p]{a}$ и взявъ сумму всѣхъ соотвѣтствующихъ имъ частныхъ интеграловъ, получимъ

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=0}^{n=p-1} a^{\frac{x}{p}} \left(\cos\frac{2\pi nx}{p} + \sin\frac{2\pi nx}{p}\sqrt{-1}\right) \Psi_n\left(y - \frac{q}{p} x\right), \quad (4)$$

гдѣ мы имѣемъ n произвольныхъ функцiй ψ_0, ψ_1, $\psi_2 \ldots \psi_{p-1}$.

Такимъ же образомъ, замѣнивъ въ уравненiи (3) e^v его выраженiемъ, получимъ

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=0}^{n=q-1} a^{\frac{y}{q}} \left(\cos\frac{2\pi ny}{q} + \sin\frac{2\pi ny}{q}\sqrt{-1}\right) \theta_n\left(x - \frac{p}{q} y\right) \ldots (5)$$

формулу, заключающую въ себѣ q произвольныхъ функцiй θ_0, θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_{q-1}$.

Чтобы получить интегралъ уравненiя (1) со вторымъ членомъ, мы опредѣлимъ частный интегралъ этого уравненiя, полагая

$$\varphi(x, y) = Ge^{xu+yv} F(x,y) = Ge^{xu'+yv'}.$$

Такимъ образомъ у насъ получится символическое уравненiе

$$Ge^{xu+yv}(e^{pu+qv} - a) = Ge^{xu'+yv'},$$

изъ котораго выводимъ

$$\varphi(x,y) = Ge^{xu+yv} = G\frac{e^{xu'+yv}}{e^{pu'+qv'} - a} = -\frac{1}{a} G \frac{e^{xu'+yv'}}{1 - \frac{1}{a} e^{pu'+qv'}}.$$

Чтобы произвести женерализацiю, развернемъ вторую часть равенства въ строку, написавъ:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{a}e^{pu'+qv'}} = 1+\frac{1}{a}e^{pu'+qv'}+\frac{1}{a^2}e^{2pu'+2qv'}+\ldots+\frac{1}{a^n}e^{npu'+nqv'}+\ldots$$

Женерализуя, будемъ имѣть —

$$\varphi(x,y) = -\frac{1}{a}\Big\{F(x,y)+\frac{1}{a}F(x+p,y+q)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{a^n}F(x+np,y+nq)+\ \ldots\Big\},$$

что можно написать еще въ видѣ уравненія

$$\varphi(x,y) = -\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{a^{n+1}}F(x+np,y+nq)\ \ldots \quad (6)$$

Полный же интегралъ даннаго уравненія выразится суммою частныхъ интеграловъ, данныхъ формулами (4), (5) и (6), и будетъ заключать въ себѣ $p+q$ произвольныхъ функцій.

§ 73. Разсмотримъ еще уравненіе.

$$\varphi(x,y)-a\varphi(x+p,y+q)-b\varphi(x-p,y-q)=0, \ \ldots \quad (1)$$

изъ котораго мы выведемъ, полагая

$$\varphi(x,y)=Ge^{xu+yv}, \ \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

символическое уравненіе

$$Ge^{xu+yv}\left[1-ae^{pu+pv}-be^{-(pu+qv)}\right]=0,$$

которое дастъ намъ

$$1-ae^{pu+qv}-be^{-(pu+qv)}=0.$$

Рѣшивъ послѣднее уравненіе относительно e^u и e^v, будемъ имѣть

$$e^u=\left(\frac{1\pm\sqrt{1-4ab}}{2a}\right)^{\frac{1}{p}}e^{-\frac{q}{p}v}$$

$$e^v=\frac{1\pm\sqrt{1-4ab}}{2a}\Big)^{\frac{1}{q}}e^{-\frac{p}{q}u}.$$

Полагаемъ для краткости

$$\frac{1+\sqrt{1-4ab}}{2a}=\lambda, \qquad \frac{1-\sqrt{1-4ab}}{2a}=\mu.$$

Поставивъ затѣмъ въ формулу (2) значенія e^u и e^v и женерализуя полученный результатъ, а также взявъ сумму интеграловъ, получимъ окончательно

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=0}^{n=p-1}\left\{\lambda^{\frac{x}{p}}\Psi_n\left(y-\frac{q}{p}x\right)+\right.$$

$$\left.+\mu^{\frac{x}{p}}\theta_n\left(y-\frac{q}{p}x\right)\right\}\left(\cos\frac{2n\pi x}{p}+\sin\frac{2n\pi x}{p}\sqrt{-1}\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{n=q-1}\left\{\lambda^{\frac{y}{q}}\chi_n\left(x-\frac{p}{q}y\right)+\mu^{\frac{y}{q}}\xi_n\left(x-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{p}{q}y\right)\right\}\left(\cos\frac{2n\pi y}{q}+\sin\frac{2n\pi y}{q}\sqrt{-1}\right)$$

интегралъ, заключающій въ себѣ $2(q+p)$ произвольныхъ функцій.

§ 74. *Опредѣлить функцію $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющую двумъ совмѣстнымъ уравненіямъ*

$$\varphi(x, y+1, z)-\varphi(x+1, y, z+1)+\varphi(x, y+2, z)=0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+b\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \ldots \ldots \quad (2)$$

Полагаемъ

$$\varphi(x, y, z)=Ge^{xu+yv+zw} \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Тогда предположенныя уравненія выразятся въ формѣ

$$Ge^{xu+yv+zw}(e^v-e^{u+w}+e^{2v})=0$$

$$Ge^{xu+yv+zw}(u-av^2-bw)=0,$$

что даетъ

$$e^v - e^{u+w} + e^{2v} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

$$u - av^2 - bw = 0,$$

Вмѣсто второго изъ этихъ уравненій мы можемъ писать

$$e^{u-av^2-bw} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Изъ уравненій (4) и (5) выводимъ

$$e^u = (1+e^v)^{\frac{b}{1+b}} e^{\frac{av+b}{1+b}v}$$

$$e^w = (1+e^v)^{\frac{1}{1+b}} e^{\frac{1-av}{1+b}v}$$

Подставляя эти выраженія въ формулу (3), будемъ имѣть

$$Ge^{xu+yv+zw} = G(1+e^v)^{\frac{z+bx}{1+b}} e^{\left(y+\frac{z+bx}{1+b}\right)v+\frac{a(x-z)}{1+b}v^2}.$$

Производя женерализацію, получимъ рѣшеніе въ видѣ

$$\varphi(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\theta\left(y+\frac{z+bx}{1+b}+2\omega\sqrt{\frac{a(x-z)}{1+b}}\right)d\omega +$$

$$+\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\theta\left(y+\frac{z+bx}{1+b}+2\omega\sqrt{\frac{a(x-z)}{1+b}}\right)d\omega\right.$$

$$\left.\frac{\frac{z+bx}{1+b}\left(\frac{z+bx}{1+b}-1\right)\left(\frac{z+bx}{1+b}-2\right)\ldots\left(\frac{z+bx}{1+b}-k+1\right).}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,k}\right\}$$

§ 75. *Найти интегралъ уравненія.*

$$\varphi(x+1,\,y+1) - \frac{d}{dy}\varphi(x,y) = F(x,y),$$

въ которомъ F $(x,\,y)$ есть данная функція.

Если предположимъ, что вторая часть этого уравненія равна нулю, такъ что

$$\varphi(x+1, y+1) - \frac{d}{dy}\varphi(x,y) = 0,$$

то, полагая

$$\varphi(x,y) = Ge^{xu+yv}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

получимъ символическое уравненіе

$$Ge^{xu+yv}(e^{u+v} - v) = 0,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что

$$e^{u+v} - v = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

откуда

$$e^u = ve^{-u}.$$

Вставляя это значеніе въ уравненіе (3) и женерализуя, получимъ

$$\varphi(x,y) = \frac{d^x}{dy^x}\chi(y-x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

χ здѣсь обозначаетъ произвольную функцію. Легко видѣть, что полученное выраженіе представляетъ собою интегралъ уравненія (1).

Если бы было возможно вывести изъ уравненія (4) значеніе e^v въ функціи u, то получился бы второй частный интегралъ; но такъ какъ уравненіе не представляетъ для этого необходимыхъ удобствъ, то мы должны прибѣгнуть къ косвенному способу для полученія новаго интеграла. Разрѣшая уравненіе (4) относительно e^v въ функціи u и v, получимъ

$$e^v = ve^{-u}.$$

Поставивъ это значеніе въ (3), будемъ имѣть

$$\varphi(x,y) = Gv^y e^{(x-y)u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Если бы съ помощью уравненія (4) оказалось возможнымъ выразить v^y въ функціи u, то женерализація этой функціи привела бы насъ по второму интегралу; но легко понять, что даже произведя женерализацію второй части равенства какъ функціи двухъ перемѣнныхъ u и v, мы получимъ значеніе, въ которомъ произвольная функція, явившаяся какъ результатъ вычисленія, будетъ отличаться большей общностью, нежели въ томъ случаѣ, когда вторая часть была бы функціей лишь одного перемѣннаго u. Поэтому пришлось бы сдѣлать нѣкоторое ограниченіе по отношенію къ этой функціи.

Женерализуя уравненіе (6) по частямъ, будемъ имѣть

$$\varphi(x, y) = \frac{d^y}{dy^y}\theta(x-y),$$

гдѣ θ есть произвольная функція перемѣннаго $x - y$.

Чтобы узнать, какія ограниченія слѣдуетъ дать функціи $\theta(x-y)$, замѣнимъ въ уравненіи (2) $\varphi(x, y)$ его значеніемъ; мы получимъ тождество, что показываетъ, что выраженіе это есть второй интегралъ, при чемъ θ должна быть взята безъ всякаго измѣненія. Отсюда слѣдуетъ, что общій интегралъ уравненія (2) выразится формулой

$$\varphi(x,y) = \frac{d^x}{dy^x}\chi(y-x) + \frac{d^y}{dy^y}\theta(x-y).$$

Послѣ этого намъ остается опредѣлить интегралъ уравненія (1) со второй частью. Для этого полагаемъ

$$\varphi(x,y) = Ge^{xu'+yv'}, \qquad F(x,y) = Ge^{xu+yv},$$

при чемъ будемъ имѣть

$$Ge^{xu'+yv'}(e^{u'+v'} - v') = Ge^{xu+yv};$$

откуда

$$Ge^{xu'+yv'} = G\frac{e^{xu+yv}}{e^{u+v}-v}.$$

Если замѣтимъ, что

$$\frac{1}{e^{u+v}-v} = \int_0^\infty e^{-t(e^{u+v}-v)}\,dt;$$

то можемъ написать

$$G\frac{e^{xu+yv}}{e^{u+v}-v} = \int_0^\infty Ge^{xu+(y+t)v-te^{u+v}}\,dt.$$

Разложимъ $e^{-te^{u-v}}$ въ строку, тогда получимъ

$$G\,\frac{e^{xu+yv}}{e^{u+v}-v}=\int_0^\infty G\left\{e^{xu+(y+t)v}-\frac{t}{1}e^{(x+1)u+(y+t+1)v}+\right.$$

$$\left.+\frac{t^2}{1.2}e^{(x+2)u+(y+t+2)v}-\ .\ .\ .\right\}dt;$$

слѣдовательно, женерализуя будемъ имѣть

$$G\,\frac{e^{xu+yv}}{e^{u+v}-v}=\int_0^\infty\left\{F(x,y+1)-\frac{t}{1}F(x+1,y+t+1)+\right.$$

$$\left.+\frac{t^2}{1.2}F(x+2,y+t+2)-\ .\ .\ .\right\}dt.$$

Отсюда получаемъ частное рѣшенiе въ видѣ

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=0}^{u=\infty}\int_0^\infty\frac{(-1)^n t^n}{\Gamma(n+1)}F(x+n,y+t+n)\,dt;$$

а общее рѣшенiе будетъ

$$\varphi(x,y)=\frac{d^x}{dy^x}\chi(y-x)+\frac{d^y}{dy^y}\theta(x-y)+$$

$$+\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty F(x+n,y+t+n)\,t^n\,dt.$$

Интегрированiе нѣкоторыхъ дифференцiальныхъ уравненiй съ частными производными, имѣющихъ перемѣнные коэффицiенты.

§ 76. Несмотря на то, что весьма немного уравненiй съ частными производными, имѣющихъ перемѣнные коэффицiенты, могутъ быть интегрируемы при помощи женерализацiоннаго вычисленiя, тѣмъ не менѣе мы разсмотримъ нѣсколько довольно замѣчательныхъ уравненiй, которыя все таки можно интегрировать.

Если обозначимъ черезъ z главную перемѣнную функцiи, въ которой s и t суть перемѣнныя независимыя, то всегда возможно, пользуясь женерализацiоннымъ вычисленiемъ, найти частный интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія, въ которомъ коэффиціенты будутъ функціями одной перемѣнной s, а дифференціальные коэффиціенты, входящіе въ уравненіе, — перваго порядка.

Пусть α, β ... α', β' ... α'', β'' ... и т. д. суть функціи одного перемѣннаго s, и положимъ для краткости

$$T_m = \frac{\partial^m z}{\partial t^m} + \alpha \frac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}} + \beta \frac{\partial^{m-2} z}{\partial t^{m-2}} + \ldots + \zeta z,$$

$$T_n = \frac{\partial^n z}{\partial t^n} + \alpha' \frac{\partial^{n-1} z}{\partial t^{n-1}} + \beta' \frac{\partial^{n-2} z}{\partial t^{n-2}} + \ldots + \zeta' z,$$

$$T_p = \frac{\partial^p z}{\partial t^p} + \alpha'' \frac{\partial^{p-1} z}{\partial t^{p-1}} + \beta'' \frac{\partial^{p-2} z}{\partial t^{p-2}} + \ldots + \zeta'' z,$$

. . . .

Данное уравненіе будетъ имѣть видъ

$$T_m + P \frac{\partial T_n}{\partial s} + Q \frac{\partial T_p}{\partial s} + \ldots = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

гдѣ P, Q ... суть функціи перемѣннаго s.

Если назовемъ интегралъ даннаго уравненія

$$z = Ge^{ut} S,$$

гдѣ S обозначаетъ неопредѣленную функцію s и u, то легко получить

$$T_m = Ge^{ut} (u^m + \alpha u^{m-1} + \beta u^{m-2} + \ldots + \zeta) S$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial s} = Ge^{ut} (u^n + \alpha' u^{n-1} + \beta' u^{n-2} + \ldots \zeta') \frac{\partial S}{\partial s} +$$

$$+ Ge^{ut} \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial s} u^{n-1} + \frac{\partial \beta'}{\partial s} u^{n-2} + \ldots \right) S$$

$$\frac{\partial T_p}{\partial s} = Ge^{ut} (u^p + \alpha'' u^{p-1} + \beta'' u^{p-2} + \ldots) \frac{\partial S}{\partial s} +$$

$$+ Ge^{ut} \left(\frac{\partial \alpha''}{\partial s} u^{p-1} + \frac{\partial \beta''}{\partial s} u^{p-2} + \ldots \right) S.$$

. . . .

Вслѣдствіе этого данное уравненіе приметъ символическую форму —

$$Ge^{ut}\left[\left\{u^m + \alpha u^{m-1} + \beta u^{m-2} + \ldots + \zeta + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial s} u^{n-1} + \frac{\partial \beta'}{\partial s} u^{n-2} + \ldots\right) P + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \alpha''}{\partial s} u^{p-1} + \frac{\partial \beta''}{\partial s} u^{p-2} + \ldots\right) Q + \ldots\right\} S + \left\{ (u^n + \alpha' u^{n-1} + \right.$$

$$\left.\left. + \beta' u^{n-2} + \ldots) P + (u^p + \alpha'' u^{p-1} + \beta'' u^{p-2} + \ldots) Q + \ldots\right\} \frac{\partial S}{\partial s}\right] = 0.$$

Очевидно, что ему удовлетворяетъ

$$\int \frac{\partial S}{S} = \lg S = -$$

$$- \int \frac{\left\{u^m + \alpha u^{m-1} + \ldots + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial s} u^{n-1} + \ldots\right) P + \left(\frac{\partial \alpha''}{\partial s} u^{p-1} + \ldots\right) Q + \ldots\right\}}{(u^n + \alpha' u^{n-1} + \ldots) P + (u^p + \alpha'' u^{p-1} + \ldots) Q + \ldots} ds \quad (2)$$

Поэтому интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$z = Ge^{ut - \int \frac{u^m + \alpha u^{m-1} + \ldots + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial s} u^{n-1} + \ldots\right) P + \left(\frac{\partial \alpha''}{\partial s} u^{p-1} + \ldots\right) Q + \ldots}{(u^n + \alpha' u^{n-1} + \ldots) P + (u^p + \alpha'' u^{p-1} + \ldots) Q + \ldots} ds} \quad . (3)$$

Такимъ образомъ остается лишь женерализовать это выраженіе, при чемъ въ окончательный результатъ войдетъ одна произвольная функція.

§ **77.** Разсмотримъ частный случай—

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 z}{\partial s \, \partial t} + Qz = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Здѣсь

$$T_m = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + Qz, \quad T_n = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Уравненіе (3) предыдущаго параграфа намъ даетъ

$$z = Ge^{\left(t - \int \frac{ds}{P}\right) u - \frac{1}{u} \int \frac{Q\,ds}{P}}.$$

Женерализуя послѣднее выраженіе, находимъ

$$z = \psi\left(t - \int \frac{ds}{P}\right) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin \frac{\int \frac{Q\,ds}{P}}{h} \sin hv\, \psi\left(t - \int \frac{ds}{P} - v\right) dh\,.\,dv, \;.\;. \quad (2)$$

гдѣ ψ обозначаетъ произвольную функцію.

Если Q равняется постоянному количеству a, то уравненіе (1) представится въ видѣ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 z}{\partial s\,.\,\partial t} + az = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (3)$$

и мы получимъ при помощи формулы (2) первый интегралъ

$$z = \psi\left(t - \int \frac{ds}{P}\right) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin \left(\frac{a}{h} \int \frac{ds}{P}\right) \sin hv\, \psi\left(t - \int \frac{ds}{P} - v\right) dh\,.\,dv.\;.\;. \quad (4)$$

Чтобы получить второй интегралъ, положимъ

$$z = Ge^{Su + Vt};$$

S обозначаетъ функцію s и V функцію u. Отсюда выводимъ

$$Ge^{Su+Vt}\left(V^2 + P \frac{dS}{ds} Vu + a\right) = 0.$$

Но этому уравненію мы можемъ удовлетворить, полагая

$$S = -2 \int \frac{ds}{P}, \quad V = a - \sqrt{u^2 - a}\,.$$

Слѣдовательно мы можемъ написать значеніе z въ видѣ

$$z = Ge^{\left(t - 2\int \frac{ds}{P}\right)u - t\sqrt{u^2 - a}};$$

а такъ какъ

$$Ge^{-t\sqrt{u^2-a}}=\frac{2}{\pi t}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty ve^{-t^2+\frac{at^2}{4v^2}-\frac{k^2v^2}{t^2}}\left\{\varphi(x+k\sqrt{-1})+\right.$$

$$\left.+\varphi(x-k\sqrt{-1})\right\}dk\,dv,$$

то женерализація по частямъ доставитъ новый частный интегралъ уравненія (3)

$$z=\frac{1}{t}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty ve^{-v^2+\frac{at^2}{4v^2}-\frac{k^2v^2}{t^2}}\left\{\varphi\left(t-2\int\frac{ds}{P}+k\sqrt{-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi\left(t-2\int\frac{ds}{P}-k\sqrt{-1}\right)\right\}dv\,dt,\quad\ldots\ldots(5)$$

гдѣ φ обозначаетъ произвольную функцію. Сумма интеграловъ (4) и (5) будетъ полнымъ интеграломъ уравненія (3).

§ 78. Къ типу уравненія (1) § 76 принадлежитъ еще уравненіе—

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\,.\,\partial t}+Q\frac{\partial z}{\partial s}+Rz=0,\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

въ которомъ Q и R выражаютъ собою функцію s.

Въ этомъ случаѣ для уравненія (3) § 76 мы имѣемъ

$$z=Ge^{ut-\int\frac{R\,ds}{u+Q}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

выраженіе вполнѣ удовлетворяющее данному уравненію.

Женерализація этого выраженія очень сложна въ томъ случаѣ, когда R и Q даны въ общемъ видѣ; но при нѣкоторыхъ ихъ частныхъ значеніяхъ это удается довольно легко.

1°. Пусть $Q=as$ и $R=b$, тогда мы имѣемъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\,.\,\partial t}+as\frac{\partial z}{\partial t}+bz=0,$$

частный интегралъ котораго есть

$$z=Ge^{ut-b\int\frac{ds}{u+as}}=G\frac{e^{ut}}{(as+u)^{\frac{b}{a}}}=s^{-\frac{b}{a}}\int\limits_0^\infty e^{-v}v^{\frac{b}{a}-1}\varphi\left(t-\frac{v}{as}\right)dv\quad.(3)$$

2°. Пусть Q есть постоянная равная a, тогда предложенное уравненіе будетъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\,.\,dt} + a\frac{\partial z}{\partial s} + Rz = 0,$$

а частный интегралъ его—

$$z = Ge^{ut - \frac{\int R\,ds}{u+a}} = \varphi(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-av}\sin\frac{\int R\,ds}{h}\sin hv\,\varphi(t-v)dv.dh.$$

§ 79. Предположимъ интегрировать уравненіе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\,.\,\partial t} = \theta(s)\,.\,\chi(t)\,z\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Полагаемъ въ этомъ случаѣ

$$z = Ge^{u(S+T)}.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

гдѣ S есть функція s и u, T—функція t и u.

Отсюда выводимъ

$$z = Ge^{u(S+T)}\left\{u^2\frac{\partial S}{\partial s}\frac{\partial T}{\partial t} - \theta(s)\chi(t)\right\},$$

выраженіе, которому можно удовлетворить, полагая

$$\frac{\partial S}{\partial s}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\theta(s)\chi(t)}{u^2}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Изъ этого уравненія выводимъ слѣдующія равенства:

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\theta(s)}{u^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \chi(t),\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \theta(s) \quad \text{и} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi(t)}{u^2},\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\theta(s)}{u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi(t)}{u}.\;.\;.\;.\;.\;.\;(6)$$

Система уравненій (4) даетъ намъ

$$S = \frac{1}{u^2}\int\theta(s)\,ds, \quad T = \int\chi(t)\,dt,$$

поэтому значеніе z выразится въ формѣ

$$z = Ge^{u\int \chi(t)\,dt + \frac{1}{u}\int \theta(s)\,ds};$$

женерализуя это выраженіе, получимъ частный интегралъ:

$$z = \varphi[\int \chi(t)\,dt] - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\frac{\int \theta(s)\,ds}{h} \sin hv\,\varphi\,(\int \chi(t)\,dt + v)\,dv\,.\,dh.$$

Система (5) даетъ

$$z = Ge^{u\int \theta(s)\,ds + \frac{1}{u}\chi(t)\,dt}$$

и послѣ женерализаціи

$$z = \psi[\int \theta\,(s)\,ds] - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\left[\frac{\int \chi(t)\,dt}{h}\right] \sin hv\,\psi\,(\int \theta(s)\,ds + v)\,dv\,.\,dh \quad (8)$$

При помощи этихъ двухъ частныхъ интеграловъ (7) и (8) мы имѣемъ общій интегралъ уравненія (1)

$$z = \varphi\,[\int \chi\,(t)]\,dt + \psi\,[\int \theta\,(s)\,ds] -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin hv\left\{\sin\frac{\int \theta(s)\,ds}{h}\,\varphi[\int \chi\,(t)]\,dt + v +\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\int \chi\,(t)\,dt}{h}\,\psi\,[\int \theta\,(s)\,ds + v]\right.dv\,.\,dh\,, \quad .\ .\ .\ (9)$$

гдѣ φ и ψ обозначаютъ двѣ произвольныхъ функціи.

Здѣсь мы не приняли въ разсчетъ системы (6) именно потому, что въ этомъ случаѣ значеніе z выражается уравненіемъ

$$z = Ge^{\int \theta(s)\,ds + \int \chi(t)\,dt} = Ce^{\int \varphi(s)\,ds + \int \chi(t)\,dt}$$

которое, не заключая въ себѣ произвольной функціи, есть не что иное, какъ частный интегралъ.

§ 80. *Дано интегрировать уравненіе*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + Pt\frac{\partial z}{\partial t} + Q\frac{\partial z}{\partial s} + Rtz = 0\,, \quad \ldots . (1)$$

гдѣ P, Q и R суть функціи перемѣннаго s.

Обозначивъ черезъ K и H двѣ неизвѣстныя функціи перемѣнныхъ s и u, положимъ, что интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$z = Ge^{Kt}\,.\,H \quad \ldots\ldots\ldots . (2)$$

Подстановка этого значенія z въ уравненіе (1) доставитъ

$$Ge^{Kt}\left\{Q\frac{\partial H}{\partial s} + K^2 H + Ht\left(Q\frac{\partial K}{\partial s} + PK + R\right)\right\} = 0$$

равенство, которому удовлетворимъ, полагая

$$\frac{\partial K}{\partial s} + \frac{P}{Q}K + \frac{R}{Q} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots . (3)$$

и

$$Q\frac{\partial H}{\partial s} + K^2 H = 0. \quad \ldots\ldots\ldots . (4)$$

Интегрируя уравненіе (3), мы будемъ имѣть, обозначивъ черезъ u произвольное постоянное

$$K = e^{-\int\frac{P\,ds}{Q}}\left\{u - \int e^{\int\frac{P\,ds}{Q}}\frac{R}{Q}\,ds\right\}$$

выраженіе, которое можемъ написать въ формѣ

$$K = \alpha u - \beta,$$

гдѣ

$$\alpha = e^{-\int\frac{P\,ds}{Q}} \quad \text{и} \quad \beta = e^{-\int\frac{P\,ds}{Q}}\int e^{\int\frac{P\,ds}{Q}}\frac{R}{Q}\,ds.$$

Такъ какъ уравненіе (4) сверхъ того даетъ

$$H = e^{-\int\frac{K^2\,ds}{Q}},$$

то значеніе z выразится формулою

$$z = Ge^{(\alpha u - \beta)t} - \int \frac{(\alpha u - \beta)^2}{Q} ds =$$

$$= Ge^{-\beta t - \int \frac{\beta^2 ds}{Q} + \left(\alpha t + 2\int \frac{\alpha\beta\, ds}{Q}\right) u - \int \frac{\alpha^2 ds}{Q} u^2},$$

женерализація которой дастъ

$$z = e^{-\beta t - \int \frac{\beta^2 ds}{Q}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \varphi\left(at + 2\int \frac{\alpha\beta}{Q} ds + 2v\sqrt{\int \frac{\alpha^2 ds}{Q}} \sqrt{-1}\right) dv; \quad . (5)$$

интегралъ даннаго уравненія.

§ 81. *Пусть требуется интегрировать уравненіе*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + (R - b)\frac{\partial^2 z}{\partial s \,.\, \partial t} - bR\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0\,, \quad . \; . \; . \quad (1)$$

въ которомъ R *есть функція перемѣннаго* s^2, *а* b — *постоянное количество.*

Если замѣтимъ, что это уравненіе есть результатъ исключенія K изъ двухъ уравненій

$$\frac{\partial z}{\partial s} - b\frac{\partial z}{\partial t} = K \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} + R\frac{\partial K}{\partial t} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

то интегрируя второе изъ нихъ, получимъ

$$K = \theta\,(t - \int R\, ds),$$

гдѣ θ обозначаетъ произвольную функцію, а положивъ $\int R\,ds = \chi(s)$, можемъ написать уравненіе (2) въ видѣ

$$\frac{\partial z}{\partial s} - b\frac{\partial z}{\partial t} = \theta\,[t - \chi(s)] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Чтобы интегрировать это уравненіе, полагаемъ

$$z = Ge^{su'+tv'}$$

$$Ge^{su+tv} = F(s,\ t) = \theta\,(t - \chi(s).$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (4) можетъ быть написано слѣдующимъ образомъ

$$Ge^{su'+tv'}(u' - bv') = Ge^{su+tv},$$

а стало быть

$$z = Ge^{su'+tv'} = G\,\frac{e^{su+tv}}{u - bv}.$$

Но такъ какъ

$$G\,\frac{1}{u-bv} = G\int\limits_0^\infty e^{-\omega u - b\omega v}\,d\omega = \int\limits_0^\infty F\,(-\omega,\ b\omega)\,d\omega,$$

то женерализація по частямъ доставитъ

$$z = \int\limits_0^\infty F\,(s - \omega, t + b\omega)\,d\omega = \int\limits_0^\infty \theta\,(t + b\omega - \chi\,(s - \omega))\,d\omega, \quad (5)$$

интегралъ даннаго уравненія.

Замѣчая, что уравненіе (1) не измѣнится, если перемѣнимъ въ немъ знаки s и t, мы получимъ второй частный интегралъ; сумма же двухъ полученныхъ интеграловъ дастъ

$$z = \int\limits_0^\infty \{\theta\,[t + b\omega - \chi\,(s - \omega)] + \varphi\,[-t + b\omega - \chi\,(-s - \omega)]\}\,d\omega\ . \quad (6)$$

полный интегралъ даннаго уравненія.

Въ немъ φ и θ обозначаютъ произвольныя функціи.

Если положимъ $R = b$ въ уравненіи (1), то съ помощью значенія z (6) получимъ

$$z = \theta\,(t - bs) + \varphi\,(t + bs)$$

интегралъ уравненія

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = b^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

§ 82. Тотъ же способъ можетъ иногда привести къ интегрированію смѣшанныхъ линейныхъ уравненій съ конечными разностями и съ перемѣнными коэффиціентами.

Пусть дано интегрировать уравненіе

$$t\Delta_t z + Q\frac{\partial z}{\partial s} + Rtz = 0.$$

въ которомъ Q *и* R *суть функціи* s.

Обозначивъ черезъ K функцію s, положимъ, что интегралъ уравненія будетъ

$$z = Ge^{Kt}.$$

Поставимъ это выраженіе въ данное уравненіе, тогда получимъ, назвавъ черезъ h конечное приращеніе t,—

$$Ge^{Kt}t\left\{Q\frac{\partial K}{\partial s} + R + e^{hK} - 1\right\} = 0$$

— уравненіе, которому удовлетворимъ, полагая

$$Q\frac{\partial K}{\partial s} + R + e^{hK} - 1 = 0.$$

Назвавъ e^{hK} черезъ v, получимъ

$$\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{h(1-R)}{Q}v + \frac{h}{Q}v^2 = 0,$$

интегрируя это уравненіе, находимъ

$$v = \frac{e^{h\int\frac{R-1}{Q}ds}}{u - h\int\frac{e^{h\int\frac{R-1}{Q}ds}}{Q}ds},$$

гдѣ u есть произвольное постоянное, которое мы будемъ считать перемѣннымъ женерализаціи. Таким образомъ

$$Ge^{Kt} = Ge^{\lg v \frac{t}{h}} = Gv^{\frac{t}{h}} = G\frac{e^{t\int\frac{R-1}{Q}ds}}{\left(u - h\int\frac{e^{h\int\frac{R-1}{Q}ds}}{Q}ds\right)^{\frac{t}{h}}}.$$

Женерализуя получимъ интегралъ даннаго уравненія

$$z = \frac{e^{t\int\frac{R-1}{Q}ds}}{\Gamma\left(\frac{t}{h}\right)} \int_0^\infty e^{-h\int\frac{e^{h\int\frac{R-1}{Q}ds}\cdot\omega}{Q}ds}\,\omega^{\frac{t}{h}-1}\,\varphi(\omega)\,d\omega,$$

φ здѣсь—произвольная функція.

Въ частномъ случаѣ

$$t\Delta_t z + Q\frac{dz}{ds} + tz = 0$$

имѣемъ интегралъ, полагая $h=1$

$$z = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^\infty e^{-\int\frac{ds}{Q}\omega}\,\omega^{t-1}\,\varphi(\omega)\,d\omega,$$

въ чемъ легко убѣдиться.

§ 83. *Разсмотримъ еще уравненіе*

$$\Delta_t^2 z + Pt\Delta_t z + Q\frac{\partial z}{\partial s} + Rtz = 0,$$

въ которомъ P, Q и R суть функціи одной перемѣнной s.

Пусть интегралъ этого уравненія будетъ

$$z = Ge^{Kt}H,$$

K и H здѣсь обозначаютъ двѣ неопредѣленныя функціи s и u. Назвавъ черезъ h конечное приращеніе перемѣннаго t, мы отсюда выведемъ

$$\Delta_t z = Ge^{Kt}H(e^{hK}-1)$$

$$\Delta_t^2 z = Ge^{Kt}H(e^{hK}-1)^2$$

$$\frac{dz}{ds} = Ge^{Kt}\left\{\frac{dH}{ds} + tH\frac{dK}{ds}\right\}.$$

Такимъ образомъ мы можемъ писать данное уравненіе въ формѣ

$$Ge^{Kt}\left\{Q\frac{dH}{ds} + H(e^{hK}-1)^2 + Ht\left(Q\frac{dK}{ds} + P(e^{hK}-1) + R\right)\right\} = 0.$$

Это послѣднее можетъ быть удовлетворено, если

$$Q\frac{dH}{ds}+H\,(e^{hK}-1)^2=0\,\ldots\ldots\ldots\,(2)$$

$$Q\frac{dK}{ds}+P\,(e^{hK}-1)+R=0.\,\ldots\ldots\,(3)$$

Чтобы удовлетворить уравненію (3), достаточно положить

$$e^{hK}=v\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(4)$$

и мы выведемъ отсюда

$$\frac{dv}{ds}+\frac{h\,(R-P)}{Q}\,v+\frac{hP}{Q}\,v^2=0\,\ldots\ldots\,(5)$$

интегралъ этого уравненія будетъ

$$v=\frac{e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}}{u-h\int\frac{P}{Q}\,e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}\,.\,ds},$$

гдѣ u есть произвольное постоянное, которое примемъ за перемѣнное женерализаціи.

Такимъ образомъ съ помощью уравненія (4)

$$K=\frac{1}{h}\,\lg\frac{e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}}{u-h\int\frac{P}{Q}\,e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}\,.\,ds}.$$

Это значеніе, поставленное въ уравненіе (2), дастъ

$$Q\frac{dH}{ds}+H\left(\frac{e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}}{u-h\int\frac{P}{Q}\,e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}\,.\,ds}\right)^2=0.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$H=e^{-\int\frac{1}{Q}\left(\frac{e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}}{u-h\int\frac{P}{Q}e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}\,.\,ds}\right)^2ds}.$$

Съ помощью значеній K и H уравненіе (1) можетъ быть написано въ видѣ

$$z = G\frac{e^{t\int\frac{P-R}{Q}ds}}{\left(u-h\int\frac{P}{Q}e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}ds\right)^{\frac{t}{h}}}\,e^{-\int\frac{1}{Q}\left(\frac{e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}}{u-h\int\frac{P}{Q}e^{h\int\frac{P-R}{Q}ds}.\,ds}-1\right)^2 ds}.$$

Женерализація этого выраженія дастъ интегралъ даннаго уравненія съ одной произвольной функціей.

§ 84. *Интегрированіе уравненія*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+Q\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{Pdz}{t\partial t}=0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

гдѣ P и Q суть функціи перемѣннаго s.

Полагаемъ

$$z = Ge^{St},$$

при чемъ S есть неопредѣленная функція перемѣннаго s.

Подставивъ это значеніе въ данное уравненіе, будемъ имѣть

$$Ge^{St}\left(S^2+QS+P\frac{dS}{ds}\right)=0.$$

Для опредѣленія S у насъ получится уравненіе

$$\frac{dS}{ds}+\frac{Q}{P}S+\frac{S^2}{P}=0,$$

интегралъ котораго

$$S=\frac{1}{K\left(C+\int\frac{ds}{KP}\right)}.$$

Въ немъ C есть произвольное постоянное и $K=e^{\int\frac{Qds}{P}}$.

Такимъ образомъ интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$z = Ge^{\frac{\frac{t}{K}}{C+\int\frac{ds}{KP}}}.$$

Положивъ $C = a_n$ постоянному относительно знака G, получаемъ

$$z = \sum C_n e^{\frac{e^{\frac{t}{K}}}{a_n + \int \frac{ds}{KP}}};$$

это сумма безконечнаго числа членовъ безъ произвольной функціи.

Но если мы положимъ $C = -u$ и станемъ женерализовать по отношенію къ u выраженіе

$$z = Ge^{\frac{-\frac{t}{K}}{u - \int \frac{ds}{KP}}},$$

то получимъ

$$z = \varphi(0) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{v \int \frac{ds}{KP}} \sin \frac{t}{Kh} \sin hv \, \varphi(-v) \, dv \, . \, dh$$

или въ болѣе простомъ видѣ

$$z = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{v \int \frac{ds}{KP}} \sin \frac{t}{Kh} \sin hv \, \varphi(-v) \, dv \, . \, dh \, . \, . \, . \quad (2).$$

при чемъ φ обозначаетъ произвольную функцію.

§ 85. *Интегрированіе уравненія*

$$\frac{\partial^n z}{\partial t^n} = \frac{\varphi(s)}{t} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + az \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$

Достаточно положить

$$z = Ge^{st} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (2)$$

Подставивъ это значеніе въ данное уравненіе, выводимъ

$$Ge^{st}\left(S^n - \varphi(s) \frac{dS}{ds} - a\right) = 0.$$

Въ этомъ случаѣ для опредѣленія S имѣемъ уравненіе

$$\int \frac{dS}{S^n - a} = \int \frac{ds}{\varphi(s)} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (3)$$

Интегрированіе этого уравненія дастъ намъ значеніе S съ однимъ произвольнымъ постояннымъ; вставивъ его въ уравненіе (2) и женерализуя полученный результатъ, найдемъ частный интегралъ даннаго уравненія съ однимъ произвольнымъ постояннымъ.

Частные случаи:

Пусть $n=1$; уравненіе (1) превратится въ

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\varphi(s)}{t}\,\frac{dz}{ds}+az, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

а уравненіе (3) послѣ его интегрированія дастъ

$$S=a+u\int\frac{ds}{\varphi(s)};$$

при помощи же уравненія (2) мы будемъ имѣть

$$z=Ge^{at+ut\int\frac{ds}{\varphi(s)}}=e^{at}\varphi\left(t\int\frac{ds}{\varphi(s)}\right) \quad \ldots \quad (5)$$

какъ интегралъ уравненія (4).

Предположимъ затѣмъ, что $n=2$; тогда уравненіе (1) можетъ быть написано

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\varphi(s)}{t}\,\frac{dz}{dt}+a^2z. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Интегралъ уравненія (3) имѣетъ видъ

$$S=a\left(\frac{1+ue^{2a\int\frac{ds}{\varphi(s)}}}{1-ue^{2a\int\frac{ds}{\varphi(s)}}}\right).$$

Съ помощью же уравненія (2)

$$z=Ge^{at\left(\frac{1+ue^{2a\int\frac{ds}{\varphi(s)}}}{1-ue^{2a\int\frac{ds}{\varphi(s)}}}\right)}.$$

Женерализуя это выраженіе, получимъ

$$z = e^{at}\Big[\varphi(0) -$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{ve^{-2a\int\frac{ds}{\varphi(s)}}} \sin hv \left\{\varphi\left(-v + \frac{2a}{h}\sqrt{-1}\right)\right.$$

$$\left. - \varphi\left(-v - \frac{2a}{h}\sqrt{-1}\right)\right\} dv\, dh\Big] \ldots\ldots (7)$$

Замѣтивъ, что уравненіе (6) не измѣнится, если замѣнить въ немъ a черезъ $-a$, мы будемъ имѣть второй интегралъ

$$z = e^{-at}\Big[\psi(0) -$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{ve^{2a\int\frac{ds}{\varphi(s)}}} \sin hv \left\{\psi\left(-v - \frac{2a}{h}\sqrt{-1}\right)\right.$$

$$\left. - \psi\left(-v + \frac{2a}{h}\sqrt{-1}\right)\right\} dv\,.\,dh\Big] \ldots\ldots (8)$$

Сумма этихъ двухъ интеграловъ (7) и (8) будетъ общимъ интеграломъ уравненія (6).

§ 86. Иногда бываетъ возможно найти интегралы нѣкоторыхъ уравненій съ частными производными и съ перемѣнными коэффиціентами, пользуясь обратнымъ способомъ, то есть опредѣляя—какимъ уравненіямъ можетъ удовлетворять данное выраженіе.

Предположимъ, обозначивъ черезъ T функцію перемѣннаго t и черезъ S — функцію перемѣннаго s, что мы имѣемъ

$$z = Ge^{(t+as)u}(T + Su) \ldots\ldots (1)$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned}
0 &= a^2 + P \\
0 &= 2a\frac{dS}{ds} + Ta^2 + QS + PT + RSa \\
0 &= \frac{d^2S}{ds} + R\frac{dS}{ds} + 2P\frac{dT}{dt} + QT + LS + RTa \\
0 &= P\frac{d^2T}{dt^2} + R\frac{dT}{dt} + LT.
\end{aligned}\right| \quad (2)$$

Тогда изъ (2) при помощи (1) мы выведемъ уравненіе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}+P\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+Q\frac{\partial z}{\partial s}+Lz=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(3)$$

Если мы опредѣлимъ значенія P, Q, R, L, T и S такъ, чтобы уравненія (2) были удовлетворены, то значеніе z, данное формулой (1), удовлетворитъ уравненію (3). Но эти уравненія удовлетворяются:

1°. Полагая

$$P=-a^2,\; Q=0,\; R=0,\; L=\frac{2a^2}{t^2},\; T=\frac{1}{t} \text{ и } S=-1;$$

слѣдовательно мы будемъ имѣть выраженіе

$$z=\frac{1}{t}Ge^{(t+as)u}-Gue^{(t+as)u}=\frac{1}{t}\varphi(t+as)-\varphi'(t+as),$$

которое будетъ удовлетворять уравненію

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{2a^2}{t^2}z=0.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(4)$$

Такъ какъ это уравненіе не мѣняется отъ перемѣны знака количества a, то мы можемъ написать второй интегралъ

$$z=\frac{1}{t}\psi(t-as)-\psi'(t-as).$$

Слѣдовательно полный интегралъ уравненія (4) выразится формулой

$$z=\frac{1}{t}\{\varphi(t+as)+\varphi(t-as)\}-\{\varphi'(t+as)+\varphi'(t-as)\}.\quad(5)$$

2°. Полагая $P=-a^2$, $Q=0$, $R=-\frac{2}{s}$, $L=0$, $T=1$, $S=-as$, получимъ выраженіе

$$z=Ge^{(t+as)u}(1-asu)=\varphi(t+as)-a\varphi'(t+as),$$

которое удовлетворитъ уравненію

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{2}{s}\frac{\partial z}{\partial s}=0;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(6)$$

измѣнивъ знакъ a, будемъ имѣть полный интегралъ этого уравненія

$$z = \varphi(t + as) + \psi(t - as) - as\{\varphi'(t + as) - \psi'(t - as)\}. \quad (7)$$

Интегралы (5) и (7) были даны въ первый разъ Лакруа (Calc. diff. et integr. §§ 783 и 790).

Интегрированіе нѣкоторыхъ уравненій, которыя могутъ быть приведены къ уравненіямъ линейнымъ.

§ 87. *Пусть требуется опредѣлить функцію $\varphi(x)$ такъ, чтобы она удовлетворяла уравненію*

$$\varphi(x)\,\varphi(x + a) = F(x), \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ $F(x)$ есть функція данная.

Взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей, имѣемъ

$$\lg\varphi(x) + \lg\varphi(x + a) = \lg F(x) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Полагаемъ

$$\lg\varphi(x) = Ge^{xu}, \quad \lg F(x) = Ge^{xu'} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Тогда данное уравненіе напишется въ формѣ

$$Ge^{xu}(1 + e^{au}) = Ge^{xu'}$$

и слѣдовательно

$$\lg\varphi(x) = Ge^{xu} = G\frac{e^{xu'}}{1 + e^{au'}}.$$

Произведя женерализацію, получимъ

$$\lg\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \lg F(x + an)$$

$$\varphi(x) = \frac{F(x)\,F(x + 2a)\;\ldots}{F(x + a)\,.\,F(x + 3a)\;\ldots} = \prod_{n=0}^{n=\infty}\frac{F[x + 2an]}{F[x + a(2n+1)]}$$

что можно написать еще въ видѣ

$$\varphi(x) = \sqrt{F(x)}\,.\,e^{-\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{\log\left(\frac{F(x + ay\sqrt{-1})}{F(x - ay\sqrt{-1})}\right)}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}dy} \quad \ldots \quad (4)$$

Это и есть частный интегралъ даннаго уравненія.

Чтобы получить полный интегралъ этого уравненія, найдемъ интегралъ уравненія (2) безъ второго члена.

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$Ge^{xu}(1+e^{au})=0,$$

уравненіе, которое можетъ быть удовлетворено, если положимъ

$$e^{au}=-1\ .$$

Обозначимъ черезъ β_n одинъ изъ a корней единицы, тогда

$$e^{u}=\beta_n\sqrt[a]{-1}$$

это значеніе e^u послѣ его подстановки въ уравненіе (3) дастъ

$$\lg\varphi(x)\,C(\beta_n\sqrt[a]{-1})^x,$$

откуда путемъ женерализаціи получается

$$\varphi(x)=C_n{}^{(\beta_n\sqrt[a]{-1})^x}\ .$$

Если $\beta_1,\ \beta_2\ldots\beta_a$ обозначаютъ a корней единицы, то

$$\varphi(x)=C_1{}^{(\beta_1\sqrt[a]{-1})^x}\ .\ C_2{}^{(\beta_2\sqrt[a]{-1})^x}\ .\ .\ .\ C_\alpha{}^{(\beta_\alpha\sqrt[a]{-1})^x},$$

а полный интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$\varphi(x)=C_1{}^{(\beta_1\sqrt[a]{-1})^x}\,C_2{}^{(\beta_2\sqrt[a]{-1})^x}\ldots C_\alpha{}^{(\beta_\alpha\sqrt[a]{-1})^x}\frac{F(x)F(x+2a)F(x+4a)\ldots}{F(x+a)F(x+3a)F(x+5a)\ldots}\ (5$$

§ 88. *Возьмемъ уравненіе въ болѣе общемъ видѣ*

$$\varphi(x+a)^m\ .\ \varphi(x-b)^n=F(x),$$

гдѣ $F(x)$ *обозначаетъ данную функцію.*

Логариѳмуя обѣ части, получимъ

$$m\lg\varphi(x-a)+n\lg\varphi(x-b)=\lg F(x)\ .\ .\ .\ (2)$$

Полагая

$$\lg\varphi(x)=Ge^{xu'},$$

$$\lg F(x)=Ge^{xu},$$

будемъ имѣть символическое уравненіе

$$Ge^{xu'}\left(me^{au'}+ne^{-bu'}\right)=Ge^{xu},$$

и, слѣдовательно, какъ частный интегралъ уравненія

$$Ge^{xu'}=\lg\varphi(x)=G\frac{e^{xu}}{me^{au}+n^{-bu}},$$

который послѣ женерализаціи превратится въ

$$\varphi(x)=e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{p=\infty}\left(-\frac{m}{n}\right)^{p}\lg F[x+pa+(p+1)b]}$$

Полагая въ уравненіи (2) вторую часть равной нулю, имѣемъ

$$me^{au'}+ne^{-bu'}=0,$$

откуда

$$e^{(a+b)u'}=-\frac{n}{m},$$

слѣдовательно

$$e^{u'}=\sqrt[a+b]{-\frac{n}{n}}=\left(\cos\frac{2k\pi}{a+b}+\sin\frac{2k\pi}{a+b}\sqrt{-1}\right)\sqrt[a+b]{-\frac{n}{m}}.$$

Это значеніе послѣ его подстановки въ тождество (3) дастъ

$$\lg\varphi(x)=\sum_{k=0}^{k=a+b-1}C_k\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{a+b}}e^{\frac{2k\pi}{a+b}x\sqrt{-1}},$$

отсюда

$$\varphi(x)=e^{\sum\limits_{k=0}^{k=a+b-1}C_k\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{a+b}}e^{\frac{2k\pi}{a+b}x\sqrt{-1}}}$$

Полный же интегралъ даннаго уравненія выразится формулой

$$\varphi(x)=e^{\sum\limits_{k=0}^{k=a+b-1}C_k\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{a+b}}e^{\frac{2k\pi}{a+b}x\sqrt{-1}}+\frac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{p=\infty}\left(-\frac{m}{n}\right)^{p}\lg F[x+pa+(p+1)b]}$$

которую можно еще написать въ видѣ

$$\varphi(x) = \frac{[F(x+b)]^{\frac{1}{n}} [F(x+2a+3b)]^{\frac{m^2}{n^3}} \dots}{[F(x+a+2b)]^{\frac{m}{n^2}} [F x+3a+4b)]^{\frac{m^3}{n^4}} \dots} e^{\sum\limits_{k=0}^{k=a+b-1} C_k \left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{a+b}} e^{\frac{2k\pi}{a+b} x \sqrt{-1}}}$$

§ **89**. *Опредѣлить значеніе функціи* $\varphi(x)$, *удовлетворяющей уравненію*

$$[\varphi(x+1)]^m [\varphi(x-1)]^n - F(x) [\varphi(x)]^{2a} = 0, \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ $F(x)$ *данная функція.*

Возьмемъ логариѳмы отъ обѣихъ частей равенства. Будемъ имѣть:

$$m \lg \varphi(x+1) + n \lg \varphi(x-1) - 2a \lg \varphi(x) = \lg F(x) \quad . \quad (2)$$

Полагая

$$\lg \varphi(x) = G e^{xu'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\lg F(x) = G e^{xu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

получимъ символическое уравненіе

$$G e^{xu'} (m e^{u'} + n e^{-u'} - 2a) = G e^{xu}$$

и слѣдовательно частный интегралъ уравненія (2) будетъ

$$\lg \varphi(x) = G e^{xu'} = G \frac{e^{xu}}{m e^u + n e^{-u} - 2a} .$$

Чтобы получить общій интегралъ того же уравненія, мы положимъ вторую часть его равною нулю и найдемъ интегралъ уравненія

$$m \lg \varphi(x+1) + n \lg \varphi(x-1) - 2a \lg \varphi(x) = 0, \quad . \quad . \quad (5)$$

а затѣмъ возьмемъ сумму обѣихъ найденныхъ интеграловъ.

Полагая какъ и раньше

$$\lg \varphi(x) = G e^{xu'},$$

будемъ имѣть

$$Ge^{xu'}\left(e^{u'}+\frac{n}{m}e^{-u'}-\frac{2a}{m}\right)=0,$$

откуда

$$e^{u'}+\frac{n}{m}e^{-u'}-\frac{2a}{m}=0.$$

Рѣшеніе этого уравненія даетъ

$$e^{u'}=\frac{a}{m}\pm\frac{1}{m}\sqrt{a^2-nm}.$$

Такимъ образомъ при помощи уравненія (3)

$$\lg\varphi(x)=C\left(\frac{a}{m}+\frac{1}{m}\sqrt{a^2-mn}\right)^x+C_1\left(\frac{a}{m}-\frac{1}{m}\sqrt{a^2-mn}\right)^x,$$

интегралъ уравненія (5).

Слѣдовательно общій интегралъ уравненія (2) будетъ

$$\lg\varphi(x)=C\left(\frac{a}{m}+\frac{1}{m}\sqrt{a^2-mn}\right)^x+$$

$$+C_1\left(\frac{a}{m}-\frac{1}{m}\sqrt{a^2-mn}\right)^x+G\,\frac{e^{xu}}{me^u+ne^{-u}-2a}.$$

Такимъ образомъ уравненіе (1) можетъ быть удовлетворено значеніемъ

$$\varphi(x)=C^{\left(\frac{a}{m}+\frac{1}{m}\sqrt{a^2-mn}\right)^x}\,C_1^{\left(\frac{a}{m}-\frac{1}{m}\sqrt{a^2-nm}\right)^x}\,e^{G\frac{e^{xu}}{me^u+ne^{-u}-2a}}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $m=1$, $n=1$ и $a=1$, уравненіе, которое предполагается рѣшить, будетъ

$$\varphi(x+1)\varphi(x-1)=F(x)\varphi(x)^2.$$

Но тогда

$$G\,\frac{e^{xu}}{me^u+ne^{-u}-2a}=G\,\frac{e^{(x+1)u}}{(1-e^u)^2}=Ge^{(x+1)u}\left\{1+2e^u+3e^{2u}+\ldots\right\}$$

и значеніе $\varphi(x)$ выразится въ формѣ

$$\varphi(x)=CF(x+1)\,.\,[F(x+2)]^2\,.\,[F(x+3)]^2\,.\;.\;.$$

§ 90. *Пусть требуется опредѣлить функцію* $\varphi(x)$, *удовлетворяющую уравненію*

$$\varphi(x+1)^X-\varphi(x-1)^{X_1}=0,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

гдѣ X и X_1 *суть данныя функціи* x.

Взявъ логариѳмы, получимъ

$$\lg\,.\,\lg\varphi(x+1)-\lg\,.\,\lg\varphi(x-1)=\lg\frac{X_1}{X}\;.\;.\;.\;(2)$$

Если положимъ

$$\lg\lg\varphi(x)=Ge^{xu'},$$

$$\lg\frac{X_1}{X}=Ge^{xu},$$

то будемъ имѣть

$$Ge^{xu'}=\lg\lg\varphi(x)=G\,\frac{e^{xu}}{e^u-e^{-u}}=-$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{\pi y}}{1+e^{\pi y}}\lg\frac{X_1(x+y\sqrt{-1})}{X(x+y\sqrt{-1})}\,dy;$$

слѣдовательно частный интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$\varphi(x)=e^{e^{-\frac{1}{4\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{\pi y}}{1+e^{\pi y}}lg\frac{X_1(x+y\sqrt{-1})}{X(x+y\sqrt{-1})}dy}}.$$

Полагая вторую часть уравненія (2) равною нулю, имѣемъ

$$Ge^{xu'}(e^{u'}-e^{-u'})=0,$$

уравненіе, которое можетъ быть удовлетворено значеніемъ

$$e^{u'}-e^{u'}=0,$$

откуда

$$e^{u'}=\pm 1$$

и слѣдовательно

$$\lg . \lg \varphi(x) = C + C_1(-1)^x.$$

Такимъ образомъ полный интегралъ уравненія (1) будетъ

$$\varphi(x) = e^{e^{C + C_1(-1)^x}} + e^{e^{-\frac{1}{4\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{\pi y}}{1+e^{\pi y}} \lg \frac{X_1(x+y\sqrt{-1})}{X(x+y\sqrt{-1})} dy}}.$$

§ 91. *Пусть требуется опредѣлить функцію* $\varphi(x)$ *такъ, чтобы она удовлетворяла уравненію*

$$[F(x)]^{\varphi(x+a)} - [F_1(x)]^{\varphi(x-b)} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

въ которомъ $F(x)$ *и* $F(x)$ *двѣ данныя функціи.*

Логариѳмуя данное уравненіе, получимъ линейное уравненіе съ конечными разностями

$$\log \varphi(x+a) - \lg \varphi(x-b) = \lg \frac{\lg F_1(x)}{\lg F(x)}, \quad . \quad . \quad (2)$$

которое можемъ интегрировать слѣдующимъ образомъ: полагаемъ

$$Ge^{xu'} = \lg \varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$Ge^{xu} = \lg \frac{\lg F_1(x)}{\lg F(x)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

тогда уравненіе (2) безъ второй части намъ дастъ

$$Ge^{xu'}(e^{au'} - e^{-bu'}) = 0,$$

откуда

$$e^{au'} - e^{-bu'} = 0$$

и

$$e^{u'} = \sqrt[a+b]{1} = \cos\frac{2k\pi}{a+b} + \sin\frac{2k\pi}{a+b}\sqrt{-1}$$

и слѣдовательно при помощи отношенія (3)

$$\lg \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=a+b-1} C_k\left(\cos\frac{2\pi kx}{a+b} + S\frac{2\pi kx}{a+b}\sqrt{-1}\right) . \quad . \quad (5)$$

Это интегралъ уравненія (2) безъ второй части.

Тоже уравненіе со второй частью доставить

$$Ge^{xu'}(e^{au'} - e^{-bu'}) = Ge^{xu};$$

а потому

$$\varphi(x) = Ge^{xu'} = G\frac{e^{xu}}{e^{au} - e^{-bu}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lg \frac{\lg F_1[x - a - (a+b)n]}{\lg F[x - a - (a+b)n]} \quad (6)$$

будетъ частнымъ интеграломъ уравненія (3) со второй частью.

Полный же интегралъ логариѳмованнаго уравненія выразится суммой двухъ найденныхъ интеграловъ (5) и (6), а именно:

$$\lg\varphi(x) = \sum_{k=0}^{k=a+b-1} C_k\left[\cos\frac{2k\pi x}{a+b} + \sin\frac{2k\pi x}{a+b}\sqrt{-1}\right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty} \lg \frac{\lg F_1[x - a - (a+b)n]}{\lg F[x - a - (a+b)n]}.$$

Слѣдовательно интегралъ даннаго уравненія (1) будетъ

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lg \frac{\lg F_1[x - a - (a+b)n]}{\lg F(x - a - (a+b)n]} e^{\sum\limits_{k=0}^{k=a+b-1} C_k\left(\cos\frac{2\pi kx}{a+b} + \sin\frac{2\pi kx}{a+b}\sqrt{-1}\right)}.$$

Вычисленіе подъинтегральныхъ функцій.

§ 92. Опредѣленіе значенія функцій, находящихся подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла, въ сущности есть не что иное, какъ интегрированіе дифференціальнаго уравненія съ постоянными коэффиціентами и безконечнымъ числомъ членовъ, каждый изъ которыхъ представляетъ собою весьма малую величину; слѣдовательно въ этомъ случаѣ можно поступать какъ было указано при опредѣленіи частнаго интеграла линейныхъ уравненій.

Предложимъ слѣдующій вопросъ:

пусть $\varphi(x, y, z \ldots)$ — *данная функція нѣсколькихъ перемѣн-*

ныхъ, и попробуемъ опредѣлить $F(x, y, z \ldots)$ *такъ, чтобы*

$$\int_\alpha^\beta F(x-z,\ y-z\ .\ .\ .)Z\,dz = \varphi(x, y,\ .\ .\ .),$$

гдѣ Z *есть функція* z.

Положимъ въ этомъ случаѣ, что

$$F(x, y\ .\ .\ .) = Ge^{xu'+yv'+\cdots}$$

$$\varphi(x, y\ .\ .\ .) = Ge^{xu+yv+\cdots}$$

мы можемъ написать данный интегралъ въ формѣ

$$Ge^{xu'+yv'+\cdots}\int_\alpha^\beta e^{-(u'+v'+\cdots)z}\,Z\,dz = Ge^{xu+yv+\cdots}$$

и слѣдовательно

$$Ge^{xu'+yv'+\cdots} = F(x, y, z\ldots) = G\,\frac{e^{xu+yv+\cdots}}{\int_\alpha^\beta e^{-(u+v+\cdots)z}\,Z\,dz}.$$

Частные примѣры. —

1) *Требуется опредѣлить функцію* $F(x)$, *которая удовлетворяла бы опредѣленному интегралу*

$$\int_0^\infty \{e^{-a^2t}F(x-b^2t) + e^{-b^2t}F(x-a^2t)\}\,dt = \varphi(x).$$

Положимъ

$$F(x) = Ge^{xu'},\ \ \varphi(x) = Ge^{xu}.$$

Тогда данный интегралъ напишется въ видѣ

$$Ge^{xu'}\left\{\int_0^\infty e^{-(a^2+b^2u)t} + e^{-(b^2+au^2)t}\right\}dt = Ge^{xu},$$

а послѣ интегрированія

$$Ge^{xu}\,\frac{(a^2+b^2)(1+u')}{(a^2+b^2u)(b^2+a^2u)} = Ge^{xu},$$

откуда

$$\mathfrak{G}e^{xu'} = \frac{1}{a^2 + b^2}\, \mathfrak{G}\, \frac{(a^2 + b^2 u)(b^2 + a^2 u)}{1 + u}\, e^{xu}.$$

Если замѣтимъ, что

$$\frac{(a^2 + b^2 u)(b^2 + a^2 u)}{1 + u} = a^4 + b^4 + a^2 b^2 - \frac{a^4 + b^4}{1 + u},$$

то женерализуя, будемъ имѣть

$$\mathfrak{G}e^{xu'} = F(x) = \frac{a^4 + a^2 b^2 + b^4}{a^2 + b^2}\, \varphi(x) + \frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} \int_0^\infty e^{-v} \varphi(x - v)\, dv,$$

функцію, удовлетворяющую данному интегралу.

2) *Опредѣлить $F(x)$ такъ, чтобы она удовлетворяла интегралу*

$$\int_0^\infty F(x - z) \sin qz \,.\, z\, dz = \varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть данная функція.

Полагаемъ

$$F(x) = \mathfrak{G}e^{xu'}, \quad \varphi(x) = \mathfrak{G}e^{xu},$$

тогда символическое уравненіе

$$\mathfrak{G}e^{xu'} \int_0^\infty e^{u'z} \sin qz \,.\, z\, dz = \mathfrak{G}e^{x},$$

въ которомъ

$$\int_0^\infty e^{-u'z} \sin qz \,.\, z\, dz = \frac{2qu'}{(q^2 + u'^2)^2},$$

доставитъ

$$\mathfrak{G}e^{xu'} \frac{u'}{(q^2 + u'^2)^2} = \frac{1}{2q}\, \mathfrak{G}e^{xu},$$

откуда

$$\mathfrak{G}e^{xu'} = \frac{1}{2q}\, \mathfrak{G}e^{xu} \left(u^3 + 2q^2 u + \frac{q^4}{u}\right),$$

а послѣ женерализаціи

$$F(x) = \frac{1}{2q}\left\{\varphi'''(x) + 2q^2\varphi'(x) + q^4\int\varphi(x)\,dx\right\},$$

искомое значеніе $F(x)$.

3) *Предположимъ, что требуется найти функцію $F(x)$, удовлетворяющую интегралу—*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x-z)\,e^{-pz^2+qz}\,dz = \varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ дана.

Полагаемъ

$$F(x) = Ge^{xu'},$$

$$\varphi(x) = Ge^{xu};$$

тогда данный интегралъ выразится въ формѣ

$$Ge^{xu'}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(q-u')z-pz^2}\,dz = Ge^{xu}.$$

Но такъ какъ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(q-u')z-pz^2}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{\frac{(q-u')^2}{4p}},$$

то

$$Ge^{xu'+\frac{(q-u')^2}{4p}} = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\,Ge^{xu}$$

и слѣдовательно

$$Ge^{xu'} = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\,Ge^{xu-\frac{(q-u)^2}{4p}}.$$

Женерализуя получимъ

$$F(x) = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\,e^{-\frac{q^2}{4p}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\varphi\left(x+\frac{y}{2p}+\frac{t}{\sqrt{p}}\sqrt{-1}\right)dt.$$

4) *Опредѣлимъ еще функцію двухъ перемѣнныхъ* $F(x, y)$, *которая удовлетворяла бы интегралу*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x-z,\ y-z)\, e^{-p^2z+qz}\, dz = \varphi(x, y).$$

Положимъ

$$F(x,\ y) = Ge^{xu'+yv'}, \quad \varphi(x,\ y) = Ge^{xu+yv}.$$

Тогда можно будетъ написать данный интегралъ въ формѣ

$$Ge^{xu'+yv'} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(q-v'-u')z-pz^2}\, dz = Ge^{xu+yv};$$

такимъ образомъ мы будемъ имѣть

$$Ge^{xu'+yv'} = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\, e^{-\frac{q^2}{4p}}\, Ge^{\left(x+\frac{q}{2p}\right)u+\left(y+\frac{q}{2p}\right)v-\frac{u^2}{4p}-\frac{v^2}{4p}+\frac{uv}{2p}}.$$

Женерализуя по частямъ, получимъ

$$Ge^{\left(x+\frac{q}{4p}\right)u-\frac{u^2}{4p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2}\, \lambda\left(x+\frac{q}{2p}+\frac{t}{\sqrt{p}}\sqrt{-1},\ y\right) dt$$

$$Ge^{\left(y+\frac{q}{2p}\right)v-\frac{v^2}{4p}} = \lambda(x,\ y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{w^2}\, \mu\left(x, y+\frac{q}{2p}+\frac{w}{\sqrt{p}}\sqrt{-1}\right) dw$$

$$Ge^{\frac{uv}{2\mu}} = \mu(x,\ y) =$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2-k'^2-k''^2}\, \varphi\left(x+\frac{k''}{\sqrt{p}}+\frac{k}{\sqrt{p}}\sqrt{-1}, y+\frac{k''}{\sqrt{p}}+\frac{k'}{\sqrt{p}}\sqrt{-1}\right) dk\,.\,dk'\,.\,dk''.$$

Отсюда слѣдуетъ, что значеніе $Ge^{xu'+yv'} = F(x,\ y)$ будетъ дано выраженіемъ

$$F(x,\ y) = \frac{\sqrt{p}}{\pi^{\frac{5}{2}}}\, e^{-\frac{q^2}{4p}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2-k'^2-k''^2-t^2-u^2}\, \varphi\left(x+\frac{q}{2p}+\right.$$

$$\left.+\frac{k''}{\sqrt{p}}+\frac{t+k}{\sqrt{p}}\sqrt{-1},\ y+\frac{q}{2p}+\frac{k''}{\sqrt{p}}+\frac{w+k''}{\sqrt{p}}\sqrt{-1}\right) dt\,.\,dw\,.\,dk\,.\,dk'\,.\,dk''.$$

§ 93. Задача 1. *Опредѣлить функцію двухъ перемѣнныхъ $F(p, q)$, такъ, чтобы она удовлетворяла выраженію*

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} F(x+T,\ x+Z)\, T_1 \,.\, Z_1 \,.\, dt \,.\, dz = \psi(x)\,, \quad . \ (1)$$

гдѣ T и T_1 суть функціи перемѣннаго t, Z и Z_1—функціи перемѣннаго z и $\psi(x)$—функціи перемѣннаго x.

Замѣтимъ, что такъ какъ функція $\psi(x)$ можетъ быть представлена безчисленными способами, въ видѣ функціи двухъ перемѣнныхъ $\varphi(x, y)$, въ которой мы полагаемъ $x = y$, то задача представляется неопредѣленной, и мы будемъ имѣть безчисленное множество рѣшеній, если удастся опредѣлить функцію $F(p, q)$ такъ, чтобы она удовлетворяла болѣе общему уравненію

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} F(x+T,\ y+Z)\, T_1 Z_1\, dt \,.\, dz = \varphi(x, y). \ . \ . \ (2)$$

Для рѣшенія этой задачи, положимъ

$$\left.\begin{aligned} F(p,\ q) &= Ge^{pu+qv} \\ \varphi(x,\ y) &= Ge^{xu'+yv'} \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Тогда уравненію (2) можно будетъ дать форму

$$Ge^{xu+yv} \int_a^b e^{Tu}\, T_1\, dt \int_{a'}^{b'} e^{Zv}\, Z_1\, dz = Ge^{xu'+yv'}.$$

Полагая для краткости

$$\int_a^b e^{Tu}\, T_1\, dt = \xi(u)\,, \quad \int_{a'}^{b'} e^{Z_1 v}\, Z_1\, dz = \chi(v),$$

будемъ имѣть рѣшеніе уравненія (2)—

$$F(x,\ y) = G\, \frac{e^{xu'+yv'}}{\xi(u')\, \chi(v')}.$$

При женерализаціи этого выраженія надо принять уравненіе (3) за характеристическое.

Пусть требуется опредѣлить функцію $F(p, q)$ такъ, чтобы она удовлетворяла уравненію

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x-t,\ y-z)\, e^{-at^2-bz^2}\, dt\,.\,dz = \varphi(x,\ y).$$

Мы знаемъ, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ut-at^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{u^2}{4a}},\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vz-bz^2}\, dz = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{\frac{v^2}{4b}},$$

слѣдовательно

$$F(x,\ y) = \frac{\sqrt{ab}}{\pi}\, Ge^{-\frac{u^2}{4a}-\frac{v^2}{4b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}\, \varphi\left(x + \frac{\omega}{\sqrt{a}}\sqrt{-1},\ y + \frac{\omega'}{\sqrt{b}}\sqrt{-1}\right) d\omega\, d\omega'.$$

§ **94**. **Задача 2**. *Опредѣлить—какое должно существовать отношеніе между $F(x)$ и $\varphi(x)$ такъ, чтобы возможно было равенство*

$$\int_a^b F(x+T)\, T_1\, dt = \int_{a'}^{b'} \varphi(x+Z)\, Z_1\, dz,$$

гдѣ T и T_1 суть данныя функціи t, а Z и Z—данныя функціи.

Полагаемъ, какъ обыкновенно

$$F(x) = Ge^{xu'},\quad \varphi(x) = Ge^{xu}.$$

Тогда будемъ имѣть

$$Ge^{xu'}\int_a^b e^{Tu'}\, T_1\, dt = Ge^{xu}\int_{a'}^{b'} e^{Zu}\, Z_1\, dz,$$

откуда выводимъ

$$Ge^{xu'} = F(x) = G\,\frac{\int_{a'}^{b'} e^{Zu}\, Z_1\, dz}{\int_a^b e^{Tu}\, T_1\, dt}\ .$$

Женерализація второй части послѣдняго равенства должна быть произведена при условіи, что $\varphi(x) = Ge^{xu}$ есть характеристическое уравненіе.

Въ частномъ случаѣ:

$$\int_0^\infty F(x-t)\cos bt\,dt = \int_0^\infty \varphi(x-t)\sin at\,dt$$

легко получить

$$F(x) = \frac{1}{a}\varphi'(x) + \frac{a^2-b^2}{2a\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-bv}\left\{\varphi(x+v\sqrt{-1}) - \right.$$

$$\left. - \varphi(x-v\sqrt{-1})\right\} dv.$$

Примѣчанія.

Къ § 13-му. Женерализацію функціи многихъ перемѣнныхъ можно произвести болѣе общимъ способомъ, не прибѣгая къ раздѣленію перемѣнныхъ, а женерализуя по отношенію къ каждой изъ нихъ отдѣльно. При этомъ для каждой женерализаціи нужно брать одно и то же характеристическое уравненіе и относить къ x женерализацію по u, къ y женерализацію по v и т. д.

Такимъ образомъ, если дана функція $\psi(u, v, w, \ldots)$, то

$$G\psi(u, v, w, \ldots) = G_u G_v G_w \ldots \psi(u, v, w, \ldots), \quad . \quad . \quad (1)$$

Чтобы доказать точность этого выраженія, примемъ за характеристическое уравненіе

$$Ge^{au+bv+cw+\cdots} = \varphi(x+a, y+b, z+c \ldots)$$

и положимъ

$$\psi(u, v, w \ldots) = G' e^{uu'+vv'+ww'+\cdots},$$

гдѣ G' показываетъ, что женерализація должна быть произведена относительно u', v', w',...

При этомъ условіи мы можемъ написать уравненіе (1) въ видѣ

$$G\,G' c^{uu'+vv'+ww'+\cdots} = G_u\, G_v\, G_w \ \ldots \ G' e^{uu'+vv'+ww'+\cdots}$$

или, измѣнивъ порядокъ женерализаціи,

$$G'\, G e^{uu'+vv'+ww'+\cdots} = G'\,(G_u e^{uu'})\,(G_v e^{vv'})\,(G_w e^{ww'})\ldots$$

Женерализуя послѣднее выраженіе, получимъ

$$G'\varphi(x+u',\ y+v',\ z+w',\ldots)=$$

$$=G'\psi(x+u',y,z\ldots)\,.\,\chi(x,y+v',z\ldots)\,.\,\theta(x,y,z+w'\ldots).$$

Примѣръ. Пусть требуется опредѣлить значеніе $G\dfrac{1}{pu^2+qv}$, принявъ за характеристическое уравненіе $Ge^{au+bv}=\varphi(x+a,\ y+b)$.

По доказанному выше

$$G_v\frac{1}{pu^2+qv}=\int\limits_0^\infty e^{-ptu^2}\varphi(x,\ y-qt)\,dt$$

и слѣдовательно

$$G\frac{1}{pu^2+qv}=G_u G_v\frac{1}{pu^2+qv}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\left\{\varphi(x+2\sqrt{pt}\,.\,z\sqrt{-1},\ y-qt)+\right.$$

$$\left.+\varphi(x-2\sqrt{pt}\,.\,z\sqrt{-1},\ y-qt)\right\}dz\,dt.$$

Такимъ образомъ мы получимъ значеніе $G\dfrac{1}{pu^2+qv}$, выведенное нами раньше [см. § 13 (3)].

Особенныя удобства имѣетъ этотъ способъ въ томъ случаѣ, когда раздѣленіе перемѣнныхъ представляетъ нѣкоторыя трудности.

Предположимъ, напримѣръ, что требуется женерализовать $e^{-\frac{p}{au+bv}}$, принявъ за характеристическое уравненіе $Ge^{au+bv}=\varphi(x+a,\ y+b)$.

Женерализуя его относительно u (формула 7, § 25), получимъ

$$G_u e^{-\frac{p}{au+bv}}=\varphi(x,\ y)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\frac{bv}{a}\cdot t}\sin\frac{p}{ah}\sin ht\,\varphi(x-t,\ y)\,dh\,.\,dt$$

и слѣдовательно

$$Ge^{-\frac{p}{au+bv}}=G_v G_u e^{-\frac{p}{au+bv}}=\varphi(x,\ y)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\sin\frac{p}{ah}\sin ht\,\varphi\left(x-t,\ y-\frac{bt}{a}\right)dh\,dt.$$

Послѣднее замѣчаніе приводитъ насъ къ весьма простому способу женерализаціи нѣкоторыхъ функцій одной перемѣнной помощью преобразованія ея въ функцію нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Не вдаваясь на этотъ счетъ въ подробности, пояснимъ сказанное нами примѣромъ. Пусть требуется женерализовать выраженіе $e^{-\frac{p}{au+bv^2}}$. Положивъ въ немъ $u^2=v$, найдемъ

$$Ge^{-\frac{p}{au+bv}} = G_u G_v e^{-\frac{p}{au+bv}}.$$

Женерализуя это выраженіе относительно u, получимъ

$$G_u e^{-\frac{p}{au+bv}} = \varphi(x,\ y) -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{bt}{a}v} \sin\frac{p}{ah} \sin ht\, \varphi\left(x-t,\ y-\frac{bt}{a}\right) dh\, dt.$$

Поставивъ въ это выраженіе u^2 вмѣсто v и женерализуя снова относительно u, будемъ имѣть

$$Ge^{-\frac{p}{au+bu^2}} = \varphi(x,\ y) -$$

$$-\frac{2}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-z^2} \sin\frac{p}{ah} \sin ht \left\{\varphi\left(x-t+2\sqrt{\frac{bt}{a}}\,z\sqrt{-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi\left(x-t-2\sqrt{\frac{bt}{a}}\,z\sqrt{-1}\right)\right\} dz\,.\,dh\,.\,dt.$$

Къ § 26. Сравнивъ выведенныя здѣсь формулы съ полученными въ § 40 и слѣдующихъ за нимъ, получимъ рядъ равенствъ

$$G\frac{1}{1-e^{au}} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\varphi(x-an) = -\frac{1}{2}\varphi(x) +$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{\pi y}{a}}+e^{-\frac{\pi y}{a}}}{e^{\frac{\pi y}{a}}-e^{-\frac{\pi y}{a}}}\varphi(x+y\sqrt{-1})\,dy \quad . \ . \ (3)$$

$$G\,\frac{1}{1+e^{au}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)\,\varphi\,(x+an)=\frac{1}{2}\,\varphi\,(x)\,-$$

$$-\frac{1}{a\sqrt{-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi\,(x+y\sqrt{-1})}{e^{\frac{\pi y}{a}}-e^{-\frac{\pi y}{a}}}\,dy\;\ldots\ldots\;(4)$$

$$G\,\frac{1}{1-e^{au}}=-\,G\,\frac{e^{au}}{1-e^{au}}=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\varphi\,(x+an)=\frac{3}{2}\,\varphi\,(x)\,-$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{\pi y}{a}}+e^{-\frac{\pi y}{a}}}{e^{\frac{\pi y}{a}}-e^{-\frac{\pi y}{a}}}\,\varphi\,(x+y\sqrt{-1})\,dy\;\;\ldots(5)$$

$$G\,\frac{1}{1+e^{-au}}=G\,\frac{e^{au}}{1+e^{au}}=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\,\varphi\,(x+an)=\frac{1}{2}\,\varphi\,(x)\,+$$

$$+\frac{1}{a\sqrt{-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi\,(x+y\sqrt{-1})}{e^{\frac{\pi y}{a}}-e^{-\frac{\pi y}{a}}}\,dy.\;\ldots\ldots\;(6)$$

и т. д.

Къ § 37. *Отношеніе между опредѣленными интегралами.*

Изъ формулъ

$$\sin\,(a+b)\,y=\sin\,ay\,.\,\cos\,by+\sin\,by\,.\,\cos\,ay$$

$$\sin\,(a-b)\,y=\sin\,ay\,.\,\cos\,by-\sin\,by\,.\,\cos\,ay$$

выводимъ

$$2\,\sin\,ay\,.\,\cos\,by=\sin\,(a+b)\,y+\sin\,(a-b)\,y.$$

Помноживъ оба члена равенства на dy, а затѣмъ интегрируя между границами 0 и ∞, получимъ

$$\int\limits_{0}^{\infty}\sin\,ay\,\cos\,by\,dy=\frac{a}{a^2+b^2}\cdot$$

Женерализуемъ это выраженіе сначала по a, а потомъ по b, — будемъ имѣть два тождества

$$\int_0^\infty \left\{ \varphi(x + ay\sqrt{-1}) - \varphi(x - ay\sqrt{-1}) \right\} \cos by\, dy =$$

$$= -\frac{\sqrt{-1}}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{a}t} \{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)\}\, dt \quad \ldots (1)$$

$$\int_0^\infty \left\{ \varphi(x + by\sqrt{-1}) + \varphi(x - by\sqrt{-1}) \right\} \sin ay\, dy =$$

$$= \frac{1}{b} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t} \{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)\}\, dt.$$

Перемѣнивъ въ послѣднемъ a на b и b на a, получимъ

$$\int_0^\infty \left\{ \varphi(x + ay\sqrt{-1}) + \varphi(x - ay\sqrt{-1}) \right\} \sin by\, dy =$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{a}t} \{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)\}\, dt. \quad \ldots (2)$$

Женерализуемъ (1) формулу относительно b, принявъ $Ge^{au} = \psi(z+a)$ за характеристическое уравненіе; будемъ имѣть

$$\int_0^\infty \left\{ \varphi(x + ay\sqrt{-1}) - \varphi(x - ay\sqrt{-1}) \right\} \left\{ \psi(z + by\sqrt{-1}) + \right.$$

$$\left. + \psi(z - by\sqrt{-1}) \right\} dy =$$

$$= -\frac{2\sqrt{-1}}{a} \int_0^\infty \psi\left(z - \frac{b}{a}\,.\,t\right) \left\{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)\right\} dt. \quad \ldots (3)$$

Подобнымъ же образомъ, женерализуя уравненіе (2), придемъ къ новому—

$$\int_0^\infty \left\{ \varphi(x + ay\sqrt{-1}) + \varphi(x - ay\sqrt{-1}) \right\} \left\{ \psi(z + by\sqrt{-1}) - \right.$$

$$\left. - \psi(z - by\sqrt{-1}) \right\} dy =$$

$$= \frac{2\sqrt{-1}}{a} \int_0^\infty \psi\left(z - \frac{b}{a}t\right) \left\{ \varphi(x + t) + \varphi(x - t) \right\} dt.$$

Перемѣнивъ въ послѣдней формулѣ φ на ψ, a на b, x на z и наоборотъ, получимъ формулу

$$\int_0^\infty \left\{ \psi(x + by\sqrt{-1}) + \psi(x - by\sqrt{-1}) \right\} \left\{ \varphi(x + ay\sqrt{-1}) - \right.$$

$$\left. - \varphi(x - ay\sqrt{-1}) \right\} dy =$$

$$= \frac{2\sqrt{-1}}{b} \int_0^\infty \varphi\left(x - \frac{a}{b}t\right) \left\{ \psi(z + t) + \psi(z - t) \right\} dt, \quad . \quad . \quad (4)$$

изъ сравненія которой съ формулой (3) выводимъ

$$\int_0^\infty \psi\left(z - \frac{t}{p}\right) \{\varphi(x + t) - \varphi(x - t)\} dt =$$

$$= p \int_0^\infty \varphi(x - pt) \{\psi(z + t) + \psi(z - t)\} dt, \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

гдѣ $p = \frac{a}{b}$.

Положивъ въ уравненіяхъ (1) и (2) $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, будемъ имѣть

$$\int_0^\infty \frac{y \cos by\, dy}{x^2 + a^2 y^2} = -\frac{1}{a^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{b}{a}t}\, t\, dt}{x^2 - t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\sin by\, dy}{x^2 + a^2 y^2} = \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{b}{a}t}\, dt}{x^2 - t^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

женерализуя которыя относительно b, получимъ

$$\int_0^\infty \left\{ \varphi(x+by\sqrt{-1}) + \varphi(x-by\sqrt{-1}) \right\} \frac{y\,dy}{x^2+a^2y^2} =$$

$$= -\frac{2}{a^2}\int_0^\infty \frac{\varphi\left(x-\frac{b}{a}t\right)}{x^2-t^2}\,t\,dt \quad \ldots\ldots\ (8)$$

$$\int_0^\infty \left\{ \varphi(x+by\sqrt{-1}) - \varphi(x-by\sqrt{-1}) \right\} \frac{dy}{x^2+a^2y^2} =$$

$$= 2\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{\varphi\left(x-\frac{b}{a}t\right)}{x^2-t^2}\,dt \ldots\ldots\ (9)$$

Для второго примѣра возьмемъ формулу (4) § 31:

$$G\,\frac{\sin au}{\cos au} = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{e^{\frac{\pi t}{2a}} - e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt.$$

Женерализуя первый членъ равенства по частямъ, получимъ

$$G\sin au = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{ \lambda(x+a\sqrt{-1}) - \lambda(x-a\sqrt{-1}) \right\},$$

$$\lambda(x) = G\,\frac{1}{\cos au} = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{e^{\frac{\pi t}{2a}} + e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt,$$

откуда

$$G\,\frac{\sin au}{\cos au} = \frac{1}{2a\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{\varphi(x-t+a\sqrt{-1})-\varphi(x-t-a\sqrt{-1})}{e^{\frac{\pi t}{2a}} + e^{-\frac{\pi t}{2a}}} +$$

$$+ \frac{\varphi(x+t+a\sqrt{-1})-\varphi(x+t-a\sqrt{-1})}{e^{\frac{\pi t}{2a}} + e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt.$$

Такимъ образомъ мы найдемъ слѣдующее уравненіе

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{e^{\frac{\pi t}{2a}}-e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\varphi(x-t+a\sqrt{-1})-\varphi(x-t-a\sqrt{-1})}{e^{\frac{\pi t}{2a}}+e^{-\frac{\pi t}{2a}}}+$$

$$+\frac{\varphi(x+t+a\sqrt{-1})-\varphi(x+t-a\sqrt{-1})}{e^{\frac{\pi t}{2a}}+e^{-\frac{\pi t}{2a}}}\,dt,$$

деженерализуя которое, будемъ имѣть отношеніе между двумя интегралами

$$\int_0^\infty \frac{e^{ut}-e^{-ut}}{e^{bt}-e^{-bt}}\,dt=\sin\frac{\pi u}{2b}\int_0^\infty \frac{e^{ut}-e^{-ut}}{e^{bt}+e^{-bt}}\,dt;$$

значеніе каждаго изъ этихъ интеграловъ намъ извѣстно, и полученное уравненіе устанавливаетъ именно существующее между ними отношеніе.

Изъ этихъ примѣровъ достаточно ясно видно, что такое отысканіе отношеній между интегралами не представляетъ никакихъ трудностей.

Къ § 45. Женерализаціонное вычисленіе даетъ весьма легкій способъ выразить значеніе нѣкоторыхъ строкъ въ формѣ болѣе простой, чѣмъ это удается сдѣлать, пользуясь другими пріемами анализа.

Пусть требуется найти значеніе суммы членовъ ряда

$$z=\varphi(x)+a\varphi'(x)+a^2\varphi''(x)+\ldots$$

Дифференцируя по x, находимъ

$$\frac{dz}{dx}=\varphi'(x)+a\varphi''(x)+a^2\varphi'''(x)+\ldots$$

и слѣдовательно для опредѣленія z мы имѣемъ линейное уравненіе

$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{a}=-\frac{\varphi(x)}{a},$$

интегралъ котораго выражается въ формѣ

$$z = Ge^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}} \int e^{-\frac{x}{a}} \varphi(x)\, dx,$$

не вполнѣ удобной для опредѣленія z.

Но если положимъ $\varphi(x) = Ge^{xu}$, то будемъ имѣть

$$z = \varphi(x) + a\varphi'(x) + a^2\varphi''(x) + \ldots$$

$$= G\frac{e^{xu}}{1 - au} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{v}{a}} \varphi(x + v)\, dv, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

что можетъ быть написано въ видѣ

$$z = \int_0^\infty e^{-v} \varphi(x + av)\, dv. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Чтобы привести въ согласіе (1) и (3) формулы, положимъ

$$x + av = \omega,$$

тогда

$$dv = \frac{d\omega}{a}, \quad v = \frac{\omega - x}{a}$$

и слѣдовательно

$$\int_0^\infty e^{-v} \varphi(x + av)\, dv = \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{\omega}{a}} \varphi(\omega)\, d\omega = -\frac{e^{\frac{x}{\omega}}}{a}\int_\infty^x e^{-\frac{x}{a}} \varphi(\omega)\, d\omega =$$

$$= -\frac{e^{\frac{x}{a}}}{a}\int_{x_0}^x e^{-\frac{x}{a}} \varphi(x)\, dx - \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a}\int_\infty^{x_0} e^{-\frac{\omega}{a}} \varphi(\omega)\, d\omega.$$

Но

$$-\frac{1}{a}\int_\infty^{x_0} e^{-\frac{\omega}{a}} \varphi(\omega)\, d\omega$$

есть величина постоянная, слѣдовательно

$$\int_0^\infty e^{-v} \varphi(x + av)\, dv = Ce^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}} \int_{x_0}^x e^{-\frac{x}{a}} \varphi(x)\, dx.$$

Къ § 49. Если въ формулу (1) поставимъ $-\sqrt{a}$ вмѣсто a, то получимъ:

$$1 + \frac{a}{1^2} + \frac{a^2}{(1\,.\,2)^2} + \frac{a^3}{(1\,.\,2\,.\,3)^3} + \ldots = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{2\sqrt{a}\cos t}\,dt.$$

Женерализуя это уравненіе относительно a, будемъ имѣть—

$$\varphi(x) + a\,\frac{\varphi'(x)}{1^2} + a^2\,\frac{\varphi''(x)}{(1\,.\,2)^2} + a^3\,\frac{\varphi'''(x)}{(1\,.\,2\,.\,3)^2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\pi dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,\varphi\left(x - \frac{a\cos^2 t}{v^2}\right) dv,$$

Женерализуемъ относительно a еще разъ, причемъ получимъ

$$[\varphi(x)]^2 + a\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^2 + a^2\left[\frac{\varphi''(x)}{(1\,.\,2)}\right]^2 + a^3\left[\frac{\varphi'''(x)}{1\,.\,2\,.\,3}\right]^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\sqrt{\pi}}\int_0^\pi dt \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v-zy\sqrt{-1}}\,\varphi\left(x - \frac{az\cos^2 t}{v^2}\right) dv\,dy\,dz,$$

поставимъ въ немъ a^2 вмѣсто a, тогда оно приметъ видъ—

$$[\varphi(x)]^2 + \left[\frac{a\,\varphi'(x)}{1}\right]^2 + \left[\frac{a^2\varphi''(x)}{1\,.\,2}\right]^2 + \left[\frac{a^3\varphi'''(x)}{1\,.\,2\,.\,3}\right]^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\sqrt{\pi}}\int_0^\pi dt \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v-zy\sqrt{-1}}\,\varphi\left(x - \frac{a^2 z\cos^2 t}{v^2}\right) dv\,.\,dy\,.\,dz.$$

Это—сумма квадратовъ всѣхъ членовъ формулы Тейлора.

Задача. *Даны двѣ строки, происходящія отъ разложенія функцій $\psi(x+a)$ и $\theta(y+b)$ по формулѣ Тейлора, а именно—*

$$\psi(x) + \frac{a\,\psi'(x)}{1} + \frac{a^2\,\psi''(x)}{1\,.\,2} + \ldots + a^n\,\frac{\psi^{(n)}(x)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} + \ldots$$

$$\theta(y) + \frac{b\,\theta'(y)}{1} + \frac{b^2\,\theta''(y)}{1\,.\,2} + \ldots + b^n\,\frac{\theta^{(n)}(y)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}.$$

Найти сумму произведеній членовъ одного и того же порядка, т. е.

$$\psi(x)\,\theta(y) + ab\,\frac{\psi'(x)\,\theta'(y)}{1^2} + a^2 b^2 \frac{\psi''(x)\,\theta''(y)}{(1\,.\,2)^2} + \ldots +$$

$$+ a^n b^n \frac{\psi^{(n)}(x)\,.\,\theta^{(n)}(y)}{(1\,.\,2\,.\,3\ldots n)^2} + \ldots$$

Для рѣшенія этой задачи поставимъ въ тождествѣ (1) $-\sqrt{ab}$ вмѣсто a,—будемъ имѣть

$$1 + \frac{ab}{1} + \frac{a^2 b^2}{(1\cdot 2)^2} + \frac{a^3 b^3}{(1\,.\,2\,.\,3)^2} + \ldots = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{-2\sqrt{ab}\cos t}\,dt.$$

Замѣнимъ въ этомъ послѣднемъ a произведеніемъ au и женерализуемъ относительно u, принявъ

$$Ge^{au} = \psi(x + a)$$

за характеристическое уравненіе, тогда придемъ къ новому выраженію

$$\psi(x) + \frac{ab\,\psi'(x)}{1^2} + \frac{a^2 b^2 \psi''(x)}{(1\,.\,2)^2} + \frac{a^3 b^3 \psi'''(x)}{(1\,.\,2\,.\,3)^2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{\pi^{3/2}}\int\limits_0^\pi dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,\psi\left(x - \frac{ab\cos^2 t}{z^2}\right) dz,$$

гдѣ поставимъ bv вмѣсто b и произведемъ женерализацію обѣихъ частей, принявъ за характеристическое уравненіе

$$Ge^{bv} = \theta(y + b).$$

Послѣ этого мы будемъ имѣть

$$\psi(x)\,\theta(y) + \frac{ab\,\psi'(y)\,\theta'(y)}{1^2} + \frac{a^2 b^2\,\psi''(y)\,\theta''(y)}{(1\,.\,2)^2} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\pi^{3/2}}\int\limits_0^\pi dt \int\limits_{\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,G_v\,\psi\left(x - \frac{ab\cos^2 t}{z^2}\,v\right) dz.$$

Теперь остается лишь женерализовать

$$\psi\left(x - \frac{ab\cos^2 t}{z^2}\right);$$

но это легко производится по формулѣ (7) § 7, которая даетъ непосредственно

$$G\psi\left(x - \frac{ab\cos^2 t}{z^2}v\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(x - \frac{ab\cos^2 t}{z^2}h\right)\theta(y + \omega\sqrt{-1})\,e^{-\omega h+\sqrt{-1}}\,d\omega\,.\,dh,$$

слѣдовательно

$$\psi(x)\,\theta(y) + \frac{ab\,\psi'(x)\,\theta'(y)}{1^2} + \frac{a^2b^2\,\psi''(x)\,\theta''(y)}{(1\,.\,2)^2} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\pi^{5/2}}\int_0^{\pi} dt\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(x - \frac{ab\cos^2 t}{z^2}h\right)\theta(y + \omega\sqrt{-1})\,e^{-\omega h\sqrt{-1}}\,d\omega\,.\,dh\,.\,dz.$$

Къ § 53. Въ видѣ примѣра изложеннаго здѣсь принципа, попробуемъ исключить $\varphi(x)$ изъ двухъ уравненій

$$\varphi(x + a) - \varphi(x - b) = F(x)$$

$$\varphi(x + s) + \varphi(x - r) = F_1(x),$$

гдѣ $F(x)$ и $F_1(x)$ суть данныя функціи.

Полагая

$$F(x) = Ge^{xu'};\ F_1(x) = Ge^{xu''},\ \varphi(x) = Ge^{xu},$$

имѣемъ

$$Ge^{xu}(e^{au} - e^{bu}) = Ge^{xu'}$$

$$Ge^{xu}(e^{su} + e^{ru}) = Ge^{xu''}.$$

Отсюда

$$Ge^{xu} = \varphi(x) = G\,\frac{e^{xu'}}{e^{au'} - e^{bu'}},$$

$$Ge^{xu} = \varphi(x) = G\,\frac{e^{xu''}}{e^{su''} - e^{ru''}},$$

слѣдовательно

$$G\frac{e^{xu'}}{e^{au'}-e^{bu'}}=G\frac{e^{xu''}}{e^{su''}+e^{ru''}}$$

и

$$Ge^{xu''}=Ge^{xu'}\frac{e^{su'}+e^{ru'}}{e^{au'}-e^{bu}}.$$

Женерализуя это выраженіе [формула (15) § 26], получимъ

$$F_1(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\{F[x+s-b+(a-b)n]-F[x-r-b+(a-b)n]\}.$$

Это уравненіе представляетъ собою исключеніе $\varphi(x)$ изъ двухъ данныхъ уравненій. Оно устанавливаетъ отношеніе, которое должно существовать между функціями $F(x)$ и $F_1(x)$ для того, чтобы предложенныя уравненія были совмѣстными.

Къ § 67. *Пусть требуется опредѣлить интегралъ уравненія*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}=mV.$$

Если положимъ, что

$$V=Ge^{su+tv+pw},$$

то получимъ символическое уравненіе

$$Ge^{su+tv+pw}(u^2+v^2+w^2-m)=0,$$

которому удовлетворимъ, положивъ

$$u^2+v^2+w^2-m=0.$$

Изъ послѣдняго выводимъ

$$u=-\sqrt{m-v^2-w^2},$$

вслѣдствіе чего значеніе V будетъ выражено формулой

$$V=Ge^{tv+pw-s\sqrt{m-v^2-w^2}}.$$

Чтобы произвести раздѣленіе перемѣнныхъ, разсмотримъ интегралъ

$$e^{-s\sqrt{n}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2-\frac{s^2n}{4\omega^2}}\,d\omega.$$

Полагая въ немъ $u = m - v^2 - w^2$ и женерализуя, будемъ имѣть

$$Ge^{-s\sqrt{m-v^2-w^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 - \frac{ms^2}{4\omega^2}} d\omega \, Ge^{\frac{s^2v^2}{4\omega^2} + \frac{s^2w^2}{4\omega^2}}$$

и слѣдовательно

$$V = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 - \frac{ms^2}{4\omega^2}} d\omega \, Ge^{tv + \frac{s^2v^2}{4\omega^2}} e^{pw + \frac{s^2w^2}{4\omega^2}},$$

а послѣ женерализаціи —

$$V = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 - k^2 - h^2 - \frac{ms^2}{4\omega^2}} \varphi\left(t + \frac{sk}{\omega}, p + \frac{sh}{\omega}\right) d\omega . dk . dh,$$

частный интегралъ даннаго уравненія.

Поставивъ въ этой формулѣ сначала s вмѣсто t и t вмѣсто s, а потомъ t вмѣсто p и p вмѣсто t, получимъ два новыхъ интеграла. Сумма же этихъ трехъ интеграловъ дастъ полный интегралъ предложеннаго уравненія

$$V = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 - k^2 - h^2} \left\{ e^{-\frac{ms^2}{4\omega^2}} \varphi\left(t + \frac{sk}{\omega}, p + \frac{sh}{\omega}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{mt^2}{4\omega^2}} \psi\left(s + \frac{tk}{\omega}, \; p + \frac{th}{\omega}\right) + e^{-\frac{mp^2}{4\omega^2}} \theta\left(t + \frac{pk}{\omega}, s + \frac{ph}{\omega}\right)\right\} d\omega . \, dk . \, dh,$$

гдѣ φ, ψ, θ обозначаютъ произвольныя функціи.

Предположимъ еще, что требуется найти полный интегралъ дифференціальнаго уравненія съ частными производными

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} = F(t, s, p),$$

гдѣ $F(t, s, p)$ есть данная функція.

Полагаемъ вторую часть даннаго уравненія равною нулю и интегрируемъ

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} = 0.$$

Пусть

$$z = Ge^{tu+sv+pw},$$

тогда данное уравненіе напишется въ видѣ

$$Ge^{tu+sv+pw}(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2) = 0,$$

которому удовлетворимъ, полагая

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 0,$$

откуда

$$u = -\frac{\sqrt{-1}}{a}\sqrt{b^2v^2 + c^2w^2}\,.$$

По вставкѣ послѣдняго выраженія въ значеніе z придемъ къ равенству

$$z = Ge^{sv+pw-\frac{t\sqrt{-1}}{a}\sqrt{b^2v^2+c^2w^2}};$$

которое послѣ указанной женерализаціи приметъ видъ

$$z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2-\omega''^2}\varphi\left(s - \frac{bt\omega'}{4a\omega}, p - \frac{ct\omega''}{4a\omega}\right) d\omega.\, d\omega'.\, d\omega'' \quad (a)$$

Такъ какъ не измѣняя даннаго уравненія мы можемъ поставить b вмѣсто a, s вмѣсто t и наоборотъ, а также c вмѣсто a, p вмѣсто t и наоборотъ, то слѣдующія два выраженія

$$z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2-\omega''^2}\psi\left(t - \frac{as\omega'}{4b\omega}, p - \frac{cs\omega''}{4b\omega}\right) d\omega.\, d\omega'\, d\omega'', \quad (b)$$

$$z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2-\omega''^2}\theta\left(s - \frac{bp\omega'}{4c\omega}, t - \frac{ap\omega''}{4c\omega}\right) d\omega.\, d\omega'\, d\omega'', \quad (c)$$

гдѣ ψ и θ суть произвольныя функціи, будутъ два другихъ частныхъ интеграла, сумма же ихъ дастъ полный интегралъ даннаго уравненія безъ второй части.

Послѣ этого, чтобы получить частный интегралъ того же уравненія со второй частью, равною $F(t, s, p)$, мы должны положить

$$z = Ge^{tu+sv+pw}, \quad F(t,s,p) = Ge^{tu'+sv'+pw'};$$

тогда данное уравненіе напишется

$$Ge^{tu+sv+pw}(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2) = Ge^{tu'+sv'+pw'},$$

откуда

$$z = Ge^{tu+sv+pw} = G\frac{e^{tu'+sv'+pw'}}{a^2u'^2 + b^2v'^2 + c^2w'^2}.$$

Женерализовать это выраженіе весьма легко, замѣтивъ, что

$$\frac{1}{a^2u'^2 + b^2v'^2 + c^2w'^2} = \int_0^\infty e^{-(a'^2u^2 + b^2v'^2 + w'^2)\omega}\,d\omega.$$

Въ такомъ случаѣ

$$z = G\frac{e^{tu'+sv'+pw'}}{a^2u'^2 + b^2v'^2 + c^2w'^2} = G\int_0^\infty e^{tu'^2+sv'^2+pw'^2-a^2\omega u'^2+b^2\omega v'^2+c^2\omega w'^2}\,d\omega,$$

а послѣ женерализаціи по частямъ —

$$z = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2-k'^2-k''^2} F(t + 2ak\sqrt{\omega}\sqrt{-1},\, s +$$

$$+ 2bk'\sqrt{\omega}\sqrt{-1},\, p + 2ck''\sqrt{\omega}\sqrt{-1})\,dk.\,dk'.\,dk''. \;.\;.\;. \quad (d)$$

Сумма интеграловъ (a), (b), (c) и (d) дастъ полный интегралъ даннаго уравненія.

Къ § **68**. Попробуемъ интегрировать уравненіе

$$\varphi(x,y) = \varphi(x-1,y) + \varphi(x+1,\ y-1).$$

Его изслѣдовалъ Лакруа (Calc. diff. et integr. № 1095) и довольно простымъ способомъ нашелъ, что интегралъ его выражается въ формѣ

$$\varphi(x,y) = \sum^{y}\psi(x).$$

Весьма легко убѣдиться, что это выраженіе, въ самомъ дѣлѣ, удовлетворяетъ данному уравненію. Но представляетъ ли оно полный интегралъ со входящей въ него произвольной функціей $\psi(x)$, это еще вопросъ, на который намъ можетъ отвѣтить пока только женерализаціонное вычисленіе.

Въ этомъ случаѣ, какъ увидитъ читатель, способъ основанный на женерализаціонномъ вычисленіи оказывается болѣе плодотворнымъ по своей однородности и по формѣ своихъ рѣшеній.

Если мы положимъ

$$\varphi(x,y) = Ge^{xu+yv}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

то данное уравненіе приметъ символическую форму

$$Ge^{xu+yv}\left(1 - e^{-u} - e^{-u-v}\right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и ему нельзя удовлетворить иначе, какъ положивъ

$$1 - e^{-u} - e^{-u-v} = 0,$$

откуда

$$e^{u} = 1 + e^{-v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$e^{v} = \frac{1}{e^{u} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Поставимъ значеніе e^{u}, данное уравненіемъ (3), въ выраженіе (1); тогда будемъ имѣть

$$\varphi(x,y) = Ge^{yv}\left(1 + e^{-v}\right)^{x},$$

женерализуя которое, придемъ къ равенству

$$\varphi(x,y) = \psi(y) + x\psi(y-1) + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\psi(y-2) +$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\psi(y-3) + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Вставка въ то же равенство (1) значенія e^{v}, даннаго уравненіемъ (4), и женерализація полученнаго выраженія приведетъ насъ къ рѣшенію

$$\varphi(x,y) = Ge^{(x-y)u}(1-e^{-u})^y = \theta(x-y) +$$

$$+ y\theta(x-y-1) + \frac{y(y+1)}{1 \cdot 2}\theta(x-y-2) + \ldots \quad (6)$$

здѣсь ψ и θ суть двѣ произвольныя функціи.

Данное уравненіе имѣетъ линейную форму, поэтому ему можно удовлетворить, взявъ сумму этихъ интеграловъ, и такъ какъ между перемѣнными женерализаціи не можетъ быть установлено другихъ отношеній кромѣ тѣхъ, которыя выражаются формулами (3) и (4), то слѣдуетъ заключить, что сумма интеграловъ (5) и (6) представляетъ собою полный интегралъ даннаго уравненія.

Возьмемъ еще примѣръ: Пусть требуется интегрировать уравненіе

$$\varphi(x+1, y+1) = a\varphi(x, y-1).$$

Полагаемъ

$$\varphi(x,y) = Ge^{xu+yv};$$

тогда данное уравненіе выразится въ формѣ

$$Ge^{xu+yv}(e^{u+v} - ae^{-v}) = 0$$

и слѣдовательно

$$e^{u+v} = ae^{-v}.$$

Изъ этого послѣдняго уравненія выводимъ

$$e^u = ae^{-2v}, \quad e^v = \sqrt{a}\, e^{\frac{u}{2}}.$$

Первое изъ этихъ значеній даетъ

$$\varphi(x,y) = Ge^{xu+yv} = Ga^x e^{(y-2x)v} = a^x \psi(y-2x).$$

Помощью второго получается

$$\varphi(x,y) = G(\sqrt{a})^y e^{\left(x-\frac{1}{2}y\right)u} = (\sqrt{a})^y \theta\left(x - \frac{y}{2}\right).$$

Полный же интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$\varphi(x, y) = a^x \psi(y - 2x) + (\sqrt{a})^y \theta\left(x - \frac{4}{2}\right) =$$

$$= a^x \psi(y - 2x) + a^{\frac{y}{2}} \theta(y - 2x),$$

гдѣ φ и θ суть двѣ произвольныя функціи.

Въ томъ случаѣ когда $a = 1$, полный интегралъ будетъ заключать въ себѣ только одну произвольную функцію и выразится формулой:

$$\varphi(x, y) = \psi(y - 2x).$$

Окончимъ эту замѣтку слѣдующимъ примѣромъ:

Пусть требуется опредѣлить значеніе функціи $V = \varphi(s, t, p)$ такъ, чтобы она удовлетворяла совмѣстно двумъ уравненіямъ

$$\frac{\partial^3 V}{\partial s^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial p^3} + mV = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

Положивъ

$$V = Ge^{su+tv+pw},$$

придемъ къ двумъ характеристическимъ уравненіямъ:

$$u^3 + v^3 + w^3 + m = 0$$

и

$$u + v + w = 0,$$

изъ которыхъ выводимъ

$$u = -\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{v^2 + \frac{4m}{3v}},$$

$$v = v,$$

$$w = -\frac{v}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{v^2 + \frac{4m}{3v}},$$

такъ что интегралъ уравненія выразится формулой

$$V = Ge^{\left(t - \frac{s+p}{2}\right)v - \frac{p-s}{2}\sqrt{v^2 + \frac{4m}{3v}}}.$$

Женерализовать это выраженіе не трудно. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ интегралъ

$$e^{-a\sqrt{u}} = \frac{2}{\sqrt{u}}\int_0^\infty e^{-z^2-\frac{a^2}{4z^2}}\,dz.$$

Положивъ въ немъ

$$a = \frac{p-s}{2},\ u = v^2 + \frac{4m}{3v},$$

получаемъ

$$e^{-\frac{p-s}{2}\sqrt{v^2+\frac{4m}{3v}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2-\left(\frac{p-s}{4z}\right)^2 v^2-\frac{(p-s)^2 m}{12z^2}\cdot\frac{1}{v}}\,dz$$

и слѣдовательно

$$V = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz\,Ge^{\left(t-\frac{s+p}{2}\right)v-\left(\frac{p-s}{4z}\right)^2 v^2-\frac{(p-s)^2 m}{12z^2}\cdot\frac{1}{v}}.$$

Женерализуя по частямъ, имѣемъ

$$V = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\omega^2-z^2}\left\{\varphi\left(t-\frac{s+p}{2}+\frac{p-s}{2z}\,\omega\sqrt{-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi\left(t-\frac{s-p}{2}-\frac{p-s}{2z}\,\omega\sqrt{-1}\right)\right\}dz\,.\,d\omega-$$

$$-\frac{(p-s)^2 m}{6\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-\omega^2-z^2-\frac{(p-s)^2}{6z^2}mkh}}{z^2}\,.$$

$$\sin.\left\{\frac{1}{h}\left(t-\frac{s-p}{2}+\frac{p-s}{2}\frac{\omega}{z}\sqrt{-1}+k\sqrt{-1}\right)+\right.$$

$$+\varphi\left(t-\frac{s-p}{2}-\frac{p-s}{2}\frac{\omega}{z}\sqrt{-1}+k\sqrt{-1}\right)+$$

$$+\varphi\left(t-\frac{s-p}{2}+\frac{p-s}{2}\frac{\omega}{z}\sqrt{-1}-k\sqrt{-1}\right)+$$

$$\left.+\varphi\left(t-\frac{s-p}{2}-\frac{p-s}{2}\frac{\omega}{z}\sqrt{-1}-k\sqrt{-1}\right)\right\}ds.d\omega.dk.dh.$$

Отсюда можно получить два другіе интеграла перемѣнной буквъ. Сумма ихъ дастъ полный интегралъ данныхъ совмѣстныхъ уравненій.

Къ § **72**. *Примѣчаніе* а. Частный интегралъ уравненія

$$\varphi(x+p, y+q) - a\varphi(x,y) = F(x)$$

въ которомъ вторая часть есть функція одной лишь перемѣнной, будетъ

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{F(x+np)}{a^{n+1}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая вторую часть даннаго уравненія равною произведенію $F(x)$, $F_1(y)$, будемъ имѣть при помощи формулы (6) интегралъ этого новаго уравненія въ видѣ

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{F(x+np) \,.\, F_1(y+nq)}{a^{n+1}};$$

а затѣмъ, сдѣлавъ $F_1(y) = 1$, получимъ значеніе, указанное выше и представляющее собою функцію независящую отъ y.

Примѣчаніе b. Если бы вторая часть была равна постоянной величинѣ, то уравненіе приняло бы видъ

$$\varphi(x+p, y+q) - a\varphi(x,y) = b.$$

Здѣсь слѣдуетъ различать два случая, смотря по тому—будетъ ли a равно 1 или не равно ей.

Въ первомъ случаѣ частный интегралъ не зависитъ ни отъ x, ни отъ y, т. е. величина постоянная.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $\varphi(x, y) = C$ и подстановляя эту величину въ данное уравненіе, получимъ

$$C - aC = b,$$

откуда

$$C = \frac{b}{1+a}.$$

Во второмъ случаѣ уравненіе является въ формѣ

$$\varphi(x+p, y+q) - \varphi(x,y) = b.$$

Частный интегралъ его получается безъ особеннаго затрудненія. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ λ общій наибольшій дѣлитель между p и q, въ томъ случаѣ когда эти числа не первыя между собою. Тогда будемъ имѣть $p=\lambda p'$, $q=\lambda q'$. Кромѣ того, мы можемъ всегда опредѣлить значеніе m и n такъ, что равенство

$$p'm+q'n=1,$$

будетъ удовлетворено. При такомъ условіи частный интегралъ даннаго уравненія выразится формулой

$$\varphi(x,y)=\frac{b}{\lambda}(mx+ny),$$

въ чемъ легко убѣдиться поставивъ это значеніе $\varphi(x, y)$ въ данное уравненіе.

Къ § **73**. *Пусть требуется найти рѣшеніе двухъ совмѣстныхъ уравненій* —

$$\begin{cases}\varphi(x,y)=\varphi(x-1,y)+\varphi(x-1,y-1),\\ \varphi(x+1,y+1)=a\varphi(x,y-1)\end{cases}$$

Положимъ

$$\varphi(x,y)=Ge^{xu+yv}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

тогда вмѣсто данныхъ получатся два слѣдующихъ символическихъ уравненія —

$$Ge^{xu+yv}(1-e^{-u}-e^{-u-v})=0,$$

$$Ge^{xu+yv}(e^{u+v}-ae^{-v})=0,$$

въ которыхъ e^u и e^v должны быть опредѣлены такъ, чтобы равенства

$$1-e^{-v}-e^{-u-v}=0,$$

$$e^{u+v}-ae^{-v}=0$$

были удовлетворены. Рѣшая эти послѣднія, находимъ

$$\begin{cases}e^u=\dfrac{a}{\frac{1}{2}+a-\frac{1}{2}\sqrt{1+4a}}\\[2ex] e^v=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4a}\end{cases} \qquad \begin{cases}e^u=\dfrac{a}{\frac{1}{2}+a+\frac{1}{2}\sqrt{1+4a}}\\[2ex] e^v=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4a}\end{cases}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что, подставивъ эти значенія въ уравненіе (1) и женерализуя полученный результатъ, найдемъ два частныхъ интеграла

$$\varphi(x.y) = Ge^{xu+yv} = C_1 a^x \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4a}\right)^y}{\left(\frac{1}{2}+a-\frac{1}{2}\sqrt{1+4a}\right)^x},$$

$$\varphi(x,y) = Ge^{xu+yv} = C_2 a^x \frac{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4a}\right)^y}{\left(\frac{1}{2}+a+\frac{1}{2}\sqrt{1+4a}\right)^x},$$

сумма которыхъ дастъ его полный интегралъ съ двумя произвольными постоянными C_1 и C_2.

Къ формулѣ (3) § 78. Замѣтимъ, что данное уравненіе не мѣняется отъ перемѣны s въ $-s$ и b въ $-b$, а потому мы можемъ написать второй интегралъ его въ формѣ

$$z = (-s)^{\frac{b}{a}} \int_0^\infty e^{-v} v^{-\frac{b}{a}-1} \psi\left(t+\frac{v}{as}\right) dt. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Сумма же этихъ интеграловъ даетъ общій интегралъ уравненія

$$z = \int_0^\infty e^{-v} \left\{ s^{\frac{b}{a}} v^{\frac{b}{a}-1} \varphi\left(t-\frac{v}{as}\right) + s^{-\frac{b}{a}} v^{-\frac{b}{a}-1} \psi\left(t+\frac{v}{as}\right) \right\} dt.$$