Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

М.Н. Подоксенов
В.В. Бабич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Краткий курс лекций с примерами решения задач

Витебск
УО «ВГУ им. П.М. Машерова»
2010

УДК 514.7(075)
ББК 22.151.6я73
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 24.06.2009 г.

Авторы: доцент кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук **М.Н. Подоксенов**; старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **В.В. Бабич**

Р е ц е н з е н т:
доцент кафедры прикладной математики и механики УО «ВГУ им. П.М. Машерова»,
кандидат физико-математических наук *Л.В. Командина*

Подоксенов, М.Н.

П44 Дифференциальная геометрия : краткий курс лекций с примерами решения задач / М.Н. Подоксенов, В.В. Бабич. – Витебск : УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2010. – 95 с.
ISBN 978-985-517-096-0.

Учебное издание подготовлено в соответствии с типовой учебной программой по курсу «Геометрия» для студентов очного и заочного отделений математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Математика и физика», а также студентов физического факультета. Излагаются теоретический материал и примеры решения задач.

УДК 514.7(075)
ББК 22.151.6я73

ISBN 978-985-517-096-0

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Раздел курса геометрии «Аналитическая геометрия» использует для изучения кривых и поверхностей методы линейной алгебры. Поэтому в этом разделе изучались только множества, задающиеся линейными или квадратичными уравнениями. В разделе «Дифференциальная геометрия» используются методы математического анализа исследования функций одной или двух переменных (дифференциальное и интегральное исчисления). Эти методы позволяют исследовать любые кривые и поверхности, заданные уравнениями, в которых используются дифференцируемые функции.

В главе 1 приведены необходимые сведения из раздела «Топология». Данный раздел изучается в качестве отдельного предмета только студентами, обучающимися по научной специальности «Математика». Отдельные сведения из этого раздела изучаются студентами других специальностей в курсе математического анализа. Основная задача главы 1: ознакомить студентов с понятием «гомеоморфизм», без которого невозможно определить понятие поверхности.

Главы 2 и 3 посвящены соответственно теории кривых и теории поверхностей. При этом авторы исходят из следующего принципа. Сложные и достаточно длинные доказательства следует приводить только в том случае, если в процессе этих доказательств получаются попутно результаты, имеющие значение для дальнейшего изложения. Более важным является изложение фактического материала, пусть даже в стиле обзора результатов.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

§ 1. *Понятие метрического пространства. Расстояние между множествами. Диаметр множества*

Напомним, что в точечном евклидовом пространстве E^n расстояние между точками $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $Q(y_1, y_2, \ldots y_n)$ вычисляется по формуле

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2},$$

если координаты точек заданы относительно ортонормированной системы координат. Мы можем рассматривать это расстояние, как функцию, сопоставляющую двум точкам P и Q число $\rho(P, Q)$. Функция ρ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(P, Q) = \rho(Q, P)$;

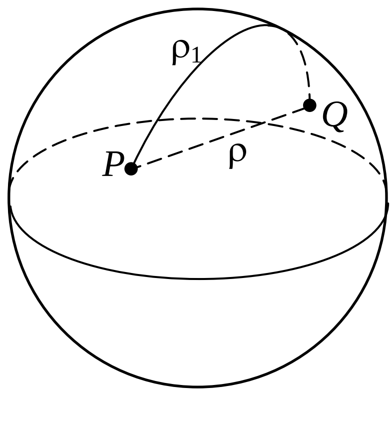
2. $\rho(P, Q) + \rho(Q, R) \geq \rho(P, R)$ (неравенство треугольника);

3. $\rho(P, Q) \geq 0$, и $\rho(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

Пусть теперь M – произвольное множество, элементы которого будем называть точками. Пусть на M задана функция ρ, сопоставляющая любым двум точкам $P, Q \in M$ число $\rho(P, Q)$, которое называется расстоянием между этими точками, и такая, что выполнены свойства (аксиомы) **1**, **2**, **3**. Тогда пара (M, ρ) называется *метрическим пространством*, а функция ρ – *метрикой*.

Примеры **1.** Пусть V – произвольное подмножество евклидова пространства. Расстояние между двумя точками $P, Q \in V$ будем считать таким же, как во всем пространстве. Тогда (V, ρ) – метрическое пространство. Метрика ρ называется *индуцированной из* E^n.

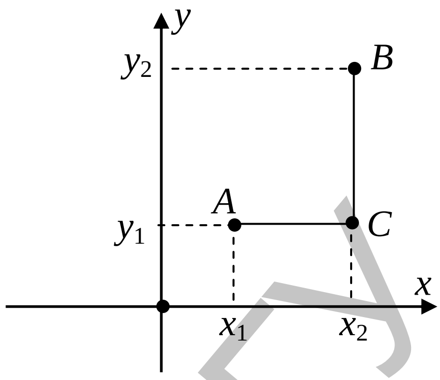
2. Сфера S^2 в трехмерном геометрическом пространстве. Расстояние ρ_1 между $P, Q \in S^2$ определяется как длина кратчайшей кривой по поверхности, соединяющей P и Q. Как известно, этой кривой является дуга большой окружности (у которой радиус равен радиусу сферы).



Мы также можем определить расстояние как в примере 1: $\rho(P, Q)$ – это длина хорды PQ. Тогда (S^2, ρ_1) и (S^2, ρ) – это разные метрические пространства.

3. Определим на плоскости расстояние между точками $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ по формуле $\rho_2(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Получается, что $\rho_2(A, B)$ равно длине ломаной AMB, изображенной на следующем чертеже.

Упражнение. Самостоятельно проверьте, что для плоскости с метрикой ρ_2 выполняются все аксиомы метрического пространства.



<u>*Диаметром множества*</u> V в метрическом пространстве (M, ρ) называется точная верхняя грань расстояний между точками этого множества:

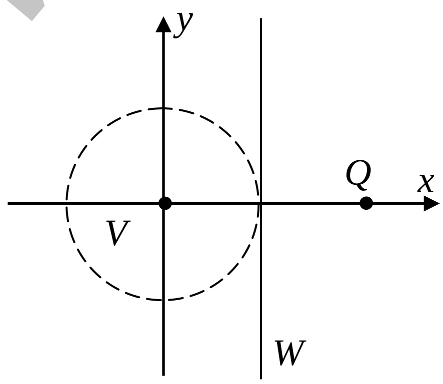
$$d(V) = \sup_{P,Q \in V} \rho(P, Q).$$

<u>*Расстоянием между двумя множествами*</u> V, W называется точная нижняя грань расстояний между точками этих множеств:

$$\rho(V, W) = \inf_{P \in V, Q \in W} \rho(P, Q).$$

В частности, если одно из множеств состоит из одной точки, то получаем определение <u>*расстояния от точки до множества*</u>.

Почему в этом определении супрэмум, а не максимум, инфинум, а не минимум? Поясним на примере.



Пример. Пусть V – это открытый (без границы) круг радиуса 1 на плоскости с центром в начале координат, а $W = Q(2,0)$. Тогда $d(V) = 2$, хотя таких точек, расстояние между которыми равно 2, в V нет. Таким образом, максимум не достигается. Аналогично, $\rho(Q, V) = 1$, хотя такой точки $P \in V$, что $\rho(Q, P) = 1$, не существует. Значит, минимум не достигается.

Отметим, что если множества пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Обратное неверно. Например, если W есть прямая $x = 1$, то $\rho(V, W) = 0$, но $V \cap W = \varnothing$.

Определение. Множество V в метрическом пространстве (M, ρ) называется <u>*ограниченным*</u>, если $d(V) < \infty$.

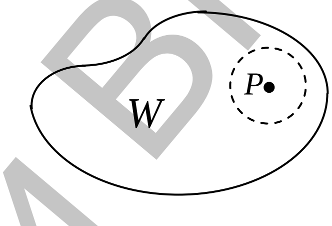
Заметим, что и все метрическое пространство может быть ограниченным, как например, (S^2, ρ_1).

Упражнение. Чему равны диаметры метрических пространств (S^2, ρ_1) и (S^2, ρ)?

§ 2. *Открытые множества. Понятие топологического пространства*

Обозначим $U(P,\varepsilon)=\{Q\in M|\ \rho(P,Q)<\varepsilon\}$ – открытый шар в метрическом пространстве $(M,\ \rho)$. В частности, на плоскости это будет открытый круг, а на прямой – интервал.

Определение. Пусть V – некоторое множество в метрическом пространстве $(M,\ \rho)$. Точка $P\in V$ называется *внутренней точкой* этого множества, если она входит в V вместе с некоторым содержащим ее открытым шаром, т.е. если существует такое $\varepsilon>0$, что $U(P,\varepsilon)\subset V$.



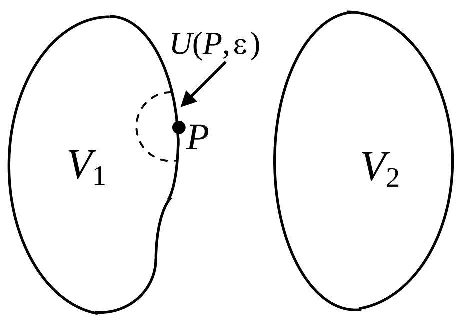
Определение. Множество $V\subset(M,\ \rho)$ называется *открытым*, если все его точки являются внутренними для этого множества. Пустое множество считается открытым.

Определение. Множество V в евклидовом пространстве называется *связным*, если для любых точек $P,\ Q\in V$ существует непрерывная кривая $\gamma\subset V$, соединяющая P и Q.

Это привычное определение связного множества обладает существенным недостатком: мы еще не знаем, что такое «непрерывная кривая», и даже не знаем, что такое кривая. Тем более это определение не годится для произвольного метрического пространства. Математически более точное определение требует пояснений.

Определение. Множество V в метрическом пространстве $(M,\ \rho)$ называется *несвязным*, если его можно представить в виде объединения $V=V_1\bigcup V_2$ двух непересекающихся множеств, каждое из которых открыто в V (в индуцированной топологии).

Представим себе, что множество состоит из двух непересекающихся частей V_1 и V_2, которые не являются открытыми во всем метрическом пространстве, а P – точка, лежащая на границе V_1. Рассмотрим метрическое пространство $(V,\ \rho)$ с индуцированной из M метрикой. Тогда шар $U(P,\varepsilon)$ в (V,ρ) выглядит так, как это показано на рисунке. Согласно определению, точка P оказывается внутренней точкой множества V_1. Аналогично это верно и для произвольной точки множества V_1. Таким образом, V_1 оказывается открытым в V. Такая ситуация невозможна, если V связно в интуитивном понимании этого слова.



Определение. Множество V в метрическом пространстве (M, ρ) называется *<u>связным</u>*, если оно не является несвязным. Открытое связное множество называется *<u>областью</u>*. Любая область, содержащая точку P, называется *<u>окрестностью</u>* этой точки.

***Теорема* 1. I.** *Объединение любого числа открытых множеств есть открытое множество.*

II. *Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.*

Оставим эту теорему без доказательства.

Следующий пример показывает, что пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открытым.

Пример. Пусть

$$V_1 = (-2; 2),\ V_2 = (-1{,}5; 1{,}5),\ V_3 = (-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}), \ldots,\ V_i = (-1 - \frac{1}{i}; 1 + \frac{1}{i}), \ldots$$

Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} V_i = [-1, 1]$.

Определение. Говорят, что система всех открытых подмножеств метрического пространства (M, ρ) образует *<u>топологию</u>* этого пространства. Эта система обозначается буквой $\boldsymbol{\tau}$.

Мы выяснили, совокупность подмножеств $\boldsymbol{\tau}$ обладает следующими свойствами:

I. $V_1, V_2, V_3, \ldots \in \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in J} V_i \in \boldsymbol{\tau}$ (J – множество индексов);

II. $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n \in \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \in \boldsymbol{\tau}$;

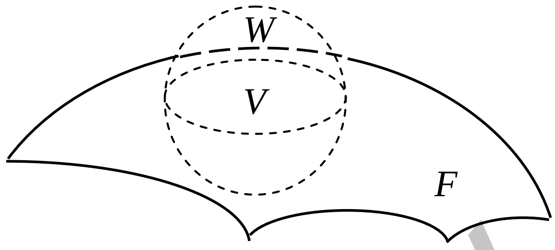
III. $\varnothing \in \boldsymbol{\tau}$, $M \in \boldsymbol{\tau}$.

Определение. Пусть M – произвольное множество, на котором задана система подмножеств $\boldsymbol{\tau}$, удовлетворяющая аксиомам I, II, III. Тогда пара $(M, \boldsymbol{\tau})$ называется *<u>топологическим пространством</u>*, а $\boldsymbol{\tau}$ – *<u>топологией</u>*. Множества, входящие в $\boldsymbol{\tau}$, будем называть *<u>открытыми</u>*.

Мы видим, что любое метрическое пространство является топологическим. Та топология, которая определяется на нем метрикой ρ, называется *<u>метрической топологией</u>*.

Пусть $(M, \boldsymbol{\tau})$ – топологическое пространство, а F – подмножество в M. Тогда мы можем задать на F топологию, т.е. превратить F в топологическое пространство следующим образом. Множество $V \subset F$ назовем открытым, если существует множество W, открытое во всем M, такое, что $V = W \cap F$. Такая топология на F называется индуцированной из $(M, \boldsymbol{\tau})$.

Для нас наиболее важен случай, когда F – это поверхность в трехмерном пространстве. Получается, мы можем определить, что такое открытое множество на поверхности.



§ 3. *Замкнутые множества. Замыкание*

***Определение* 1.** Точка P называется <u>*точкой прикосновения*</u> множества W, если любая ее окрестность пересекается с W. Это равносильно тому, что $\rho(P,\ W)=0$. Множество $W\subset(M,\boldsymbol{\tau})$ называется <u>*замкнутым*</u>, если оно содержит все свои точки прикосновения.

***Определение* 2.** Множество W в топологическом пространстве $(M,\boldsymbol{\tau})$ называется <u>*замкнутым*</u>, если его дополнение $M\backslash W$ открыто в M.

Примем без доказательства, что эти два определения равносильны.

Очевидно, что каждая точка самого множества V является его точкой прикосновения. Но, если V не замкнуто, то существуют еще точки, которые в V не входят, но являются его точками прикосновения.

Определение. Совокупность всех точек прикосновения множества V называется <u>*замыканием множества*</u> V. Будем использовать обозначения для замыкания: $\overline{V}$.

Определение. Совокупность всех внутренних точек множества называется его <u>*внутренностью*</u> и обозначается $\mathring{V}$. Множество $\overline{V}\backslash\mathring{V}$ называется <u>*границей*</u> множества V.

***Пример* 1.** Пусть $U(O,1)$ – открытый круг на плоскости. Тогда его замыканием является $B(O,1)=\overline{U}(O,1)=\{Q|\ \rho(O,Q)\leq 1\}$ – замкнутый круг, а граница есть окружность $S^1=\{Q|\ \rho(O,Q)=1\}$.

Свойства операции замыкания:

1. $\overline{V\cup W}=\overline{V}\cup\overline{W}$;
2. $\overline{V\cap W}\subseteq\overline{V}\cap\overline{W}$;
3. $V\subset\overline{V}$, $\overline{\overline{V}}=\overline{V}$;
4. $\overline{\varnothing}=\varnothing$.

***Пример* 2.** Пусть $V=(-1,0)$, $W=(0,1)$. Тогда $V\cap W=\varnothing\Rightarrow\overline{V\cap W}=\varnothing$. С другой стороны, $\overline{V}=[-1,0]$, $\overline{W}=[0,1]$, $\Rightarrow\overline{V}\cap\overline{W}=\{0\}$. Данный пример показывает, что равенство в пункте **2.** может не выполняться.

Теорема 2. **I.** *Пересечение любого числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

II. *Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

III. $\varnothing$ и M – замкнутые множества.

Данные свойства и теорему принимаем без доказательства.

§ 4. *Непрерывные отображения. Гомеоморфизм*

Напомним определение непрерывной функции курса математического анализа.

Определение. Числовая функция $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ называется *непрерывной в точке* x_o, если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ такое, что $|x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

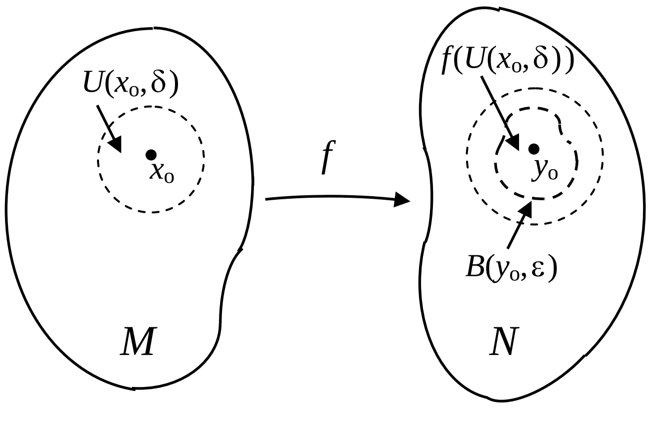
Это определение можно переформулировать на языке открытых шаров.

Определение. Числовая функция $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ называется *непрерывной в точке* x_o, если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ такое, что $x \in U(x_o, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_o), \varepsilon)$.

Это определение годится и для отображения двух метрических пространств $f\colon (M, \rho) \to (N, \rho_1)$. Можно также записать его в следующем виде.

Определение. Пусть (M, ρ) и (N, ρ_1) – два метрических пространства. Отображение $f\colon M \to N$ называется *непрерывным в точке* $x_o \in M$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $f(B(x_o, \delta)) \subset B(y_o, \varepsilon)$, где $y_o = f(x_o)$.

Смысл этого определения: точки близкие к x_o после отображения оказываются близкими к y_o: каким бы маленьким ни был открытый шар с центром в y_o, найдется такой шар с центром в x_o, который отображается внутрь первого шара. Для того, чтобы получить определение непрерывного в точке отображения двух топологических пространств, достаточно заменить открытые шары на произвольные окрестности.



Определение. Пусть $(X, \boldsymbol{\tau})$ и $(Y, \boldsymbol{\tau}_1)$ – два топологических пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_o \in X$, если для каждой окрестности V точки $y_o = f(x_o) \in Y$ найдется такая окрестность U точки x_o, что $f(U) \subset V$.

Условие, использованное в определении: «для каждой окрестности V точки $y_0 = f(x_0) \in Y$ найдется такая окрестность U точки x_0, что $f(U) \subset V$», называется <u>*условием Коши*</u>. Отображение $f: X \to Y$ называется <u>*непрерывным*</u>, если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

***Теорема* 3**. *Отображение $f: X \to Y$ двух топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества $V \subset Y$ есть открытое множество $f^{-1}(V) = U \subset X$* (без доказательства).

Определение. Отображение $f: X \to Y$ двух топологических пространств называется <u>*открытым*</u>, если образ любого открытого в X множества U есть открытое в Y множество $V = f(U)$.

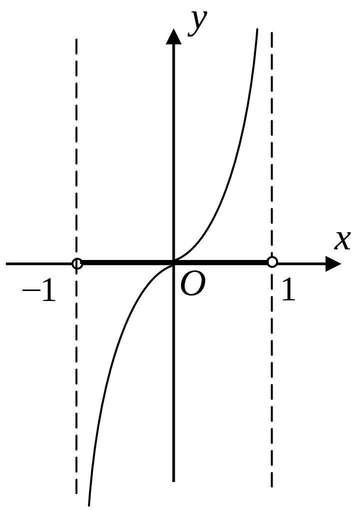
Определение. Отображение $f: X \to Y$ двух топологических пространств называется <u>*гомеоморфизмом*</u>, или <u>*топологическим отображением*</u>, если это отображение

1) биективное (т.е. взаимно-однозначное отображение X на все Y);
2) непрерывное;
3) открытое.

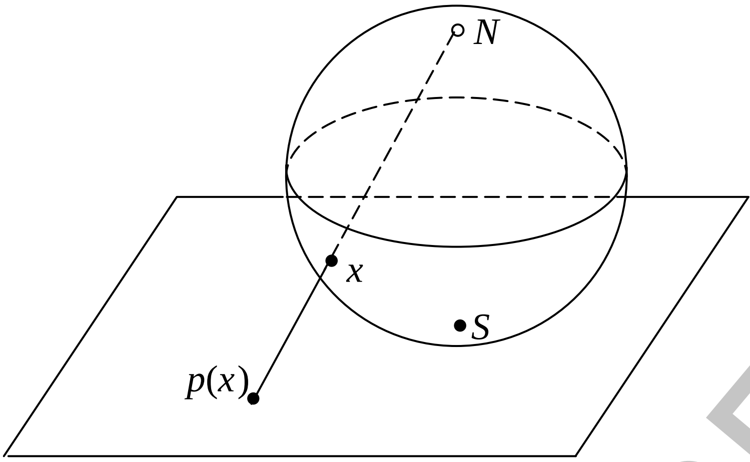
Это равносильно тому, что f обратимо и оба отображения f и f^{-1} являются непрерывными.

Получается, что топологическое отображение $f: X \to Y$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между открытыми множествами пространства (X, τ) и открытыми множествами пространства (Y, τ_1). Поэтому с точки зрения топологии пространства (X, τ) и (Y, τ_1) устроены одинаково, если между ними существует гомеоморфизм $f: X \to Y$. В этом случае эти пространства называются <u>*гомеоморфными*</u>, или <u>*топологически эквивалентными*</u>.

***Примеры.* 1.** Открытый интервал $(-1, 1)$ и вся числовая прямая гомеоморфны. Гомеоморфизм устанавливает отображение $f: (-1,1) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}x$.

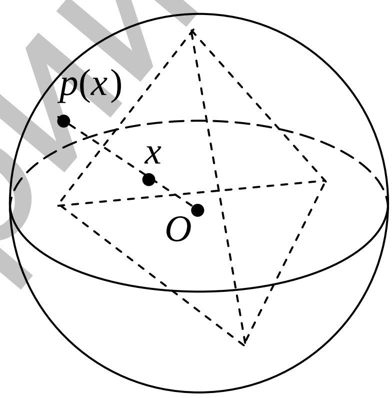


2. Сфера S^2 и плоскость $\boldsymbol{R}^2$ не гомеоморфны. Однако если из сферы выколоть одну точку, то оставшееся множество будет гомеоморфно плоскости. Гомеоморфизм устанавливает, так называемая, стереографическая проекция $p: S^2 \setminus \{N\} \to \boldsymbol{R}^2$ (см. рисунок ниже).



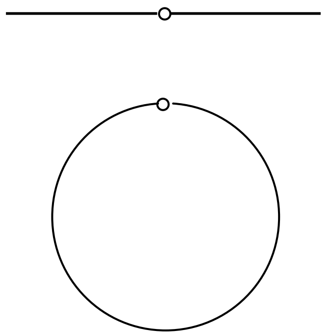
Когда речь идет о поверхностях, гомеоморфизм можно наглядно представить так. Мы можем поверхность как угодно мять, сжимать и растягивать (как резиновую), нельзя только разрезать и склеивать. Все, что в результате получится, будет гомеоморфно исходной поверхности.

3. Сфера и любой выпуклый многогранник (тетраэдр, куб…) гомеоморфны. Для того, чтобы построить гомеоморфизм, мы поместим многогранник внутрь сферы так, чтобы центр сферы находился внутри многогранника и спроецируем его из центра на поверхность сферы.



Для того, чтобы доказать, что поверхности или кривые гомеоморфны, достаточно построить гомеоморфизм. Если гомеоморфизм построить не удается, это еще не означает, что он не существует. Поэтому для доказательства того, что два топологических пространства не гомеоморфны, надо найти такие величины, которые сохраняются при гомеоморфизме. Они называются топологическими инвариантами. Это одна из тем спецкурса по топологии, который вы можете прослушать на 4 или 5 курсе в рамках «дисциплины по выбору». Приведем лишь один пример.

4. Топологическим инвариантом для кривых является наличие и количество разбивающих точек. Например, удалив из прямой одну точку, мы разобьем ее на два несвязных множества. Если из окружности удалить одну точку, то она останется связной. Следовательно, окружность S^1 и числовая прямая не гомеоморфны.



ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ КРИВЫХ

§1. *Вектор-функция скалярного аргумента*

Определение. Пусть E^3 – евклидово векторное пространство, U – некоторое множество на прямой, плоскости или в пространстве. Говорят, что на U <u>*задана вектор-функция*</u>, если каждой точке $A \in U$ сопоставлен вектор $\vec{\mathbf{r}}(A) \in E^3$. Если $I \subseteq \boldsymbol{R}$ – некоторый интервал числовой прямой, то $\vec{\mathbf{r}}: I \to E^3$ называется <u>*вектор-функцией скалярного аргумента*</u>.

Пусть $t \in I$, а $\vec{\mathbf{r}}(t) \in E^3$ – его образ при отображении $\vec{\mathbf{r}}: I \to E^3$. В E^3 выберем ОНБ $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Тогда вектор $\vec{\mathbf{r}}(t)$ мы можем разложить по базису:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

(в других обозначениях: $\vec{\mathbf{r}}(t) = r_1(t)\mathbf{i} + r_2(t)\mathbf{j} + r_3(t)\mathbf{k}$). Таким образом, задание одной вектор-функции равносильно заданию трех скалярных (обычных) функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; $x: I \to \boldsymbol{R}$, $y: I \to \boldsymbol{R}$, $z: I \to \boldsymbol{R}$.

Понятия предела, непрерывности и производной вводится аналогично таким же понятиям для обычных функций.

Определение. Пишем, что $\vec{\mathbf{a}} = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{\mathbf{r}}(t)$, если $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{\mathbf{a}}| = 0$ (здесь уже получается предел обычной функции). Это равносильно следующему:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta: \ |t - t_0| < \delta \ \Rightarrow \ |\vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{\mathbf{a}}| < \varepsilon.$$

Говорим, что $\vec{\mathbf{r}}(t)$ <u>*непрерывна при*</u> $t = t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} \vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r}}(t_0);$$

$\vec{\mathbf{r}}(t)$ <u>*непрерывна на интервале*</u> I, если она непрерывна $\forall\, t \in I$.

Определение. <u>*Производная*</u> вектор-функции $\vec{\mathbf{r}}: I \to E^3$ в точке $t_0 \in I$ определяется по формуле

$$\vec{\mathbf{r}}\,'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{\mathbf{r}}(t_0)}{t - t_0}.$$

Если предел существует для каждого $t_0 \in I$ и t_0 не фиксировать, то получим новую вектор-функцию $\vec{\mathbf{r}}\,': I \to E^3$.

Примем без доказательства, что $\vec{\mathbf{r}}\,'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$, т.е. вычислять производную вектор-функции можно покоординатно.

Вектор-функцию $\vec{\mathbf{r}}'(t)$ также можно дифференцировать. Получим вектор-функцию $\vec{\mathbf{r}}''(t)$. Далее, естественным образом можем определить и производные высших порядков.

Определение. Говорим, что $\vec{\mathbf{r}}(t)$ *принадлежит классу* $C^n(I)$, если она определена на интервале I, у нее существуют все производные до порядка n включительно, и они непрерывны.

Определение. Вектор-функция $\vec{\mathbf{r}}(t)$ называется *регулярной* на интервале I, если $|\vec{\mathbf{r}}'(t)| > 0$ $(\Leftrightarrow \vec{\mathbf{r}}'(t) \neq \vec{\mathbf{o}})$ $\forall\, t \in I$.

Пусть $\vec{\mathbf{r}}(t)$ и $\vec{\mathbf{p}}(t)$ – две вектор-функции, определенные на одном интервале I. Тогда для них можно ввести такие же алгебраические операции, что и для обычных векторов: сложение, вычитание, умножение на число, скалярное, векторное произведения.

$$(\vec{\mathbf{r}} \pm \vec{\mathbf{p}})(t) = \vec{\mathbf{r}}(t) \pm \vec{\mathbf{p}}(t), \quad (\lambda\vec{\mathbf{r}})(t) = \lambda\vec{\mathbf{r}}(t),$$

$$(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{p}})(t) = \vec{\mathbf{r}}(t) \cdot \vec{\mathbf{p}}(t), \;\; (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}})(t) = \vec{\mathbf{r}}(t) \times \vec{\mathbf{p}}(t), \; \forall\, t \in I.$$

Для трех вектор-функций, определенных на одном и том же интервале I, можно определить смешанное произведение $(\vec{\mathbf{r}}\,\vec{\mathbf{p}}\,\vec{\mathbf{h}})(t) = \vec{\mathbf{r}}(t)\vec{\mathbf{p}}(t)\vec{\mathbf{h}}(t)$ $\forall\, t \in I$. Мы получим новые функции (векторные или скалярные), которые тоже можно дифференцировать. При этом выполняются те же правила дифференцирования, что и для операций над обычными функциями:

$$(\vec{\mathbf{r}} \pm \vec{\mathbf{p}})' = \vec{\mathbf{r}}' \pm \vec{\mathbf{p}}', \quad (\lambda\vec{\mathbf{r}})' = \lambda\vec{\mathbf{r}}',$$

$$(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{p}})' = \vec{\mathbf{r}}' \cdot \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{p}}', \;\; (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}})' = \vec{\mathbf{r}}' \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}'.$$

Упражнение. Используя формулу для вычисления скалярного произведения по координатам, самостоятельно докажите, что имеет место равенство $(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{p}})' = \; = \vec{\mathbf{r}}' \cdot \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{p}}'$.

Также для вектор-функции имеет место *формула Тейлора*:

$$\vec{\mathbf{r}}(t+\Delta t) = \vec{\mathbf{r}}(t) + \Delta t\vec{\mathbf{r}}'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\vec{\mathbf{r}}''(t) + \ldots + \frac{(\Delta t)^n}{n!}(\vec{\mathbf{r}}^{(n)}(t) + \varepsilon(t, \Delta t)),$$

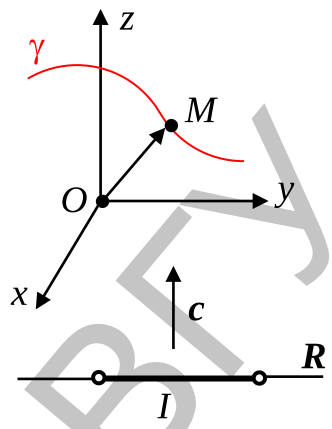
где $\varepsilon(t, \Delta t)$ – бесконечно малая вектор-функция, т.е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(t, \Delta t) = \vec{\mathbf{o}}$.

Для вектор-функции также можно определить понятия первообразной, неопределенного и определенного интегралов.

Если отложить все векторы $\vec{\mathbf{r}}(t)$, $t \in I$ от одной точки O – начала координат, то их концы образуют множество точек, которое называется *годографом вектор-функции* $\vec{\mathbf{r}}(t)$.

В дальнейшем стрелочку над обозначением вектор-функции ставить не будем.

§ 2. *Понятия пути и кривой. Гладкая и регулярная кривая. Замена параметра*



Пусть $\mathcal{E}$ – обычное геометрическое пространство или плоскость. Тогда $\mathcal{E}$ является точечным евклидовым пространством. Мы будем вести речь про пространство, но все сказанное ниже с незначительными изменениями верно и для случая, когда $\mathcal{E}$ – плоскость. Пусть в пространстве задана декартова СК $Oxyz$. Мы будем отождествлять произвольную точку M и ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$.

Определение. <u>*Путем*</u> (или <u>*параметризованной кривой*</u>) называется непрерывное отображение $\boldsymbol{c}\colon I \to \mathcal{E}$, где I – некоторый интервал числовой прямой.

Таким образом, путь сопоставляет каждому значению $t \in I$ точку в пространстве. В силу нашей договоренности об отождествлении, можно сказать, что путь сопоставляет каждому значению $t \in I$ вектор. Поэтому путь – это непрерывная вектор-функция. Подчеркнем, что путь – это отображение (в отличие от кривой).

Определение. Пусть $\boldsymbol{c}\colon I \to \mathcal{E}$ – путь. Тогда его траектория – множество $\gamma = \boldsymbol{c}(I)$ в пространстве называется <u>*кривой*</u>. Вектор-функция $\boldsymbol{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ называется параметризацией кривой γ. Запись

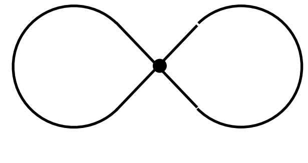
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \ t \in I, \end{cases}$$

называется <u>*параметрическими уравнениями кривой*</u> γ. Если использовать обозначение $\vec{\mathbf{r}}$ – это вектор с переменными координатами (x, y, z), то параметрические уравнения можно записать в виде одного векторного равенства $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t)$. Также можно сказать, что кривая γ – это годограф вектор-функции $\boldsymbol{c}(t)$.

Замечание. При таком определении кривая может выглядеть совсем непохоже на интуитивное представление о кривой. Например, кривая Пеано проходит через каждую точку квадрата, и поэтому она имеет ненулевую площадь. Такой пример рассматривается в рамках спецкурса по топологии. Это говорит о том, что понятие кривой на самом деле не такое простое.

Определение. <u>*Простой дугой*</u> (или элементарной кривой) называется множество γ в пространстве или на плоскости, гомеоморфное открытому интервалу числовой прямой.

Простыми дугами не являются кривые с самопересечениями (например, «восьмерка») и даже окружность.



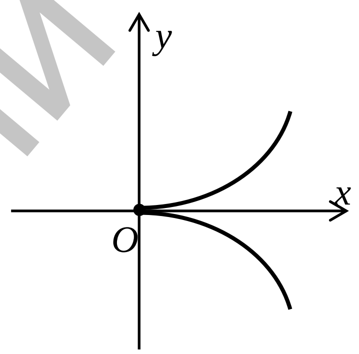
Определение. Путь $\boldsymbol{c}$ называется *простым*, если $\boldsymbol{c}$ – взаимнооднозначное отображение.

Простой путь задает кривую без самопересечений: при движении по кривой мы проходим каждую точку ровно один раз. Но образ интервала при таком отображении не всегда является простой дугой.

Определение. Кривая γ называется *регулярной*, если у нее существует регулярная параметризация. Кривая называется *гладкой класса* C^n, если у нее существует регулярная класса C^n параметризация.

Вы привыкли, что если функция дифференцируема, то ее график не имеет изломов. Но кривая, определяемая вектор-функцией, не является ее графиком.

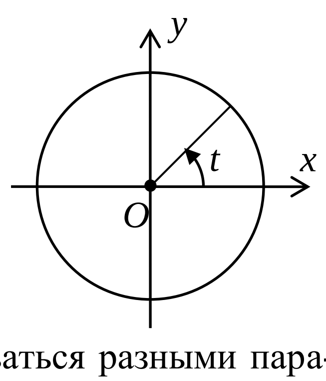
***Пример* 1.** Путь $\boldsymbol{c}(t) = (t^2,\ t^3)$, $t \in \boldsymbol{R}$ определяет на плоскости кривую, которая называется *полукубической параболой*. Этот путь дифференцируемый класса $C^\infty(R)$.



Имеем $\boldsymbol{c}'(t) = (2t,\ 3t^2)$ и $\boldsymbol{c}'(0) = \vec{\mathbf{o}}$, т.е. данный путь не является регулярным. Причем регулярность нарушается как раз в той точке, где кривая имеет излом.

Из теоремы 1 (следующий параграф) следует, что гладкая класса C^1 регулярная кривая не имеет изломов. Полукубическая парабола – это пример простой дуги.

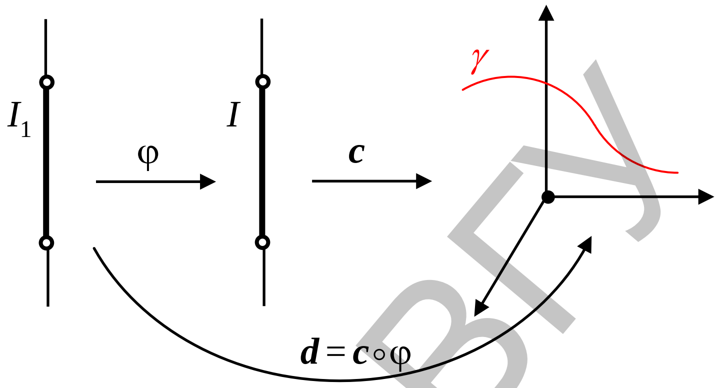
***Пример* 2.** Путь $\boldsymbol{c}(t) = (a\cos t,\ a\sin t)$, $t \in \boldsymbol{R}$ определяет на плоскости окружность радиуса a с центром в начале координат. Этот путь не является простым: в процессе изменения параметра мы «проходим» через каждую точку окружности бесконечное количество раз.



***Пример* 3.** Одна и та же кривая может задаваться разными параметрическими уравнениями. Например, верхняя половина полукубической параболы может быть задана следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \ t \in (0, +\infty), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = e^{2\tau}, \\ y = e^{3\tau}, \ \tau \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Ясно, что вторая система получается из первой с помощью замены $t = e^{\tau}$, $\tau \in R$. Обозначим $\varphi(\tau) = e^{\tau}$; тогда φ – это отображение φ: $\boldsymbol{R} \to (0, +\infty)$. Так возникает понятие «замена параметра».



Определение. Пусть $\boldsymbol{c}{:}I \to \mathcal{E}$ – путь, задающий кривую γ, а $I_1 \in R$ – другой интервал числовой прямой. Пусть φ: $I_1 \to I$ – непрерывное отображение, $t = \varphi(u)$. Рассмотрим композицию отображений $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} \circ \varphi$: $I_1 \to \Pi$, $\boldsymbol{d}(u) = \boldsymbol{c}(\varphi(u))$. Это будет другой путь, но его образ $\boldsymbol{d}(I_1)$ – та же самая кривая γ. Говорят, что отображение φ осуществляет замену параметра кривой.

Определение. *<u>Замена параметра</u>* $t = \varphi(u)$ называется *<u>допустимой</u>*, если φ – функция касса $C^n(I_1)$ и $\varphi'(u) \neq 0$ $\forall u \in I_1$.

Пусть $\boldsymbol{c}$ – регулярный путь. Тогда

$$\boldsymbol{d}'(u) = \boldsymbol{c}(\varphi(u))' = \varphi'(u)\boldsymbol{c}'(t).$$

Мы видим, что путь $\boldsymbol{d}(u)$ является регулярным тогда и только тогда, когда замена параметра является допустимой. Другими словами, допустимая замена параметра сохраняет регулярность пути.

Определение. Регулярные пути $\boldsymbol{c}$: $I \to \mathcal{E}$ и $\boldsymbol{d}$: $I_1 \to \mathcal{E}$ называются *<u>эквивалентными</u>*, если существует такая допустимая замена параметра φ: $I_1 \to I$, $t = \varphi(u)$, что $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} \circ \varphi$. Иногда говорят, что регулярная кривая – это класс эквивалентных друг другу регулярных путей.

Можно сказать, что эквивалентные пути имеют одинаковую траекторию, но проходят ее за различные промежутки времени и с разной скоростью.

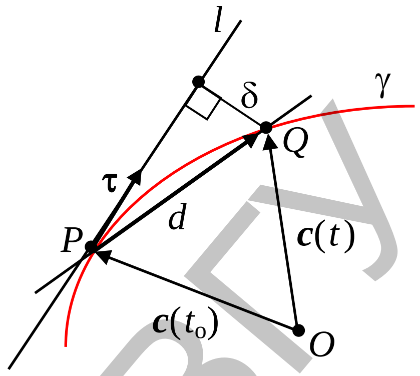
Например, замена параметра $t = e^{\tau}$ является допустимой, и поэтому пути $\boldsymbol{c}(t) = (t^2, t^3)$, $t \in (0, +\infty)$ и $\boldsymbol{d}(\tau) = (e^{2\tau}, e^{3\tau})$, $\tau \in R$ являются эквивалентными.

Упражнения. **1**. Является ли регулярным путь $(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, $t \in \boldsymbol{R}$?

2. Является ли допустимой замена параметра $t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $u \in \boldsymbol{R}$? В какой интервал она переводит числовую прямую?

§ 3. *Касательная прямая. Нормальная плоскость кривой*

Определение. Пусть γ – некоторая кривая, P – точка на ней. Выберем близкую к ней точку $Q\in\gamma$. Прямую PQ назовем секущей. Если при $Q\to P$ секущая стремится занять определенное положение l, то прямая l называется <u>*касательной к кривой γ в точке P*</u>.



Математически более точным является следующее определение.

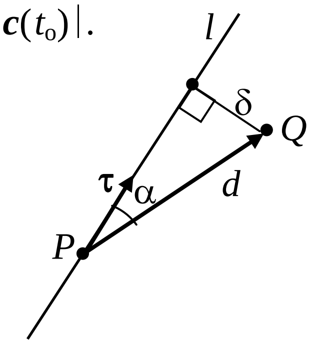
Определение. Пусть γ – некоторая кривая, P – точка на ней, а l – некоторая прямая, проходящая через P. Выберем близкую к P точку $Q\in\gamma$. Обозначим $d=|PQ|$, δ – расстояние от Q до l. Если $\lim\limits_{Q\to P}\dfrac{\delta}{d}=0$, то прямая l называется <u>*касательной к кривой γ в точке P*</u>.

***Теорема* 1.** *Гладкая класса C^1 (т.е. регулярная) кривая имеет в каждой своей точке касательную, и притом единственную.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{c}(t)$ – гладкая регулярная параметризация кривой γ, $P=\boldsymbol{c}(t_0)$, $Q=\boldsymbol{c}(t)$ – близкая к P точка. Тогда

$$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{c}(t)-\boldsymbol{c}(t_0),\quad d=|\overrightarrow{PQ}|=|\boldsymbol{c}(t)-\boldsymbol{c}(t_0)|.$$

Пусть l – некоторая прямая, проходящая через P, $\boldsymbol{\tau}$ – единичный направляющий вектор этой прямой, а α – угол между $\boldsymbol{\tau}$ и $\overrightarrow{PQ}$. Тогда



$$\delta=d\cdot\sin\alpha=|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\boldsymbol{\tau}|\cdot\sin\alpha=|\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{\tau}|,$$

(мы домножили на $|\boldsymbol{\tau}|$, т.к. $|\boldsymbol{\tau}|=1$). Отсюда

$$\frac{\delta}{d}=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{\tau}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{|(\boldsymbol{c}(t)-\boldsymbol{c}(t_0))\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{c}(t)-\boldsymbol{c}(t_0)|}=\frac{\left|\dfrac{\boldsymbol{c}(t)-\boldsymbol{c}(t_0)}{t-t_0}\times\boldsymbol{\tau}\right|}{\left|\dfrac{\boldsymbol{c}(t)-\boldsymbol{c}(t_0)}{t-t_0}\right|}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $d\to 0\ \Leftrightarrow\ t\to t_0$:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\delta}{d}=\frac{|\boldsymbol{c}'(t_0)\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{c}'(t_0)|}.$$

Значит, равенство нулю этого предела равносильно $\boldsymbol{c}'(t_0)\times\boldsymbol{\tau}=\vec{\boldsymbol{o}}$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{c}'(t_0)\,||\,\boldsymbol{\tau}$. Таким образом, прямая l будет касательной $\Leftrightarrow$ вектор

$\boldsymbol{c}'(t_o)$ будет ее направляющим вектором. Поскольку путь $\boldsymbol{c}(t)$ регулярный, то $\boldsymbol{c}'(t_o) \neq \vec{\mathbf{o}}$, а значит, касательная прямая существует и однозначно определяется данным вектором и точкой $P = \boldsymbol{c}(t_o)$. ■

Пусть кривая γ задана уравнением $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t)$. Из теоремы вытекает, что касательная к γ, проходящая через точку $P(x_o, y_o, z_o) = \boldsymbol{c}(t_o)$, задается уравнением:

$$\frac{x - x_o}{c_1'(t_o)} = \frac{y - y_o}{c_2'(t_o)} = \frac{z - z_o}{c_3'(t_o)}. \qquad (1)$$

Если кривая расположена на плоскости, то в этом уравнении будет отсутствовать второе равенство (координата z).

Кривая на плоскости может быть задана уравнением в неявном виде:

$$F(x, y) = 0. \qquad (2)$$

Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t)$ – параметрическое уравнение этой же кривой; в развернутом виде:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Тогда при подстановке этих уравнений в (2) мы получаем тождество:

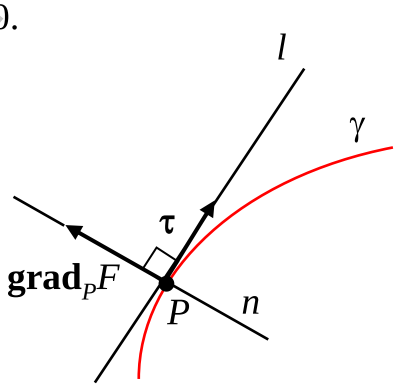
$$F(x(t), y(t)) \equiv 0.$$

Продифференцируем его по t:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) = 0. \qquad (*)$$

Обозначим $\mathbf{grad}\, F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$. Тогда равенство $(*)$ равносильно

$$(\mathbf{grad}\, F) \cdot \boldsymbol{c}'(t) \equiv 0.$$



Это означает, что в каждой точке $P = \boldsymbol{c}(t_o)$ на кривой γ *вектор градиента* $\mathbf{grad}_P F$, вычисленный в этой точке, перпендикулярен вектору $\boldsymbol{c}'(t_o)$, т.е. является вектором нормали для касательной к кривой в этой точке P. Значит, уравнение касательной в точке P имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_o) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_o) = 0, \qquad (3)$$

где все производные вычисляются в точке $P(x_o, y_o)$.

Если кривая задана уравнением в явном виде $y = f(x)$, то мы можем переписать уравнение так: $y - f(x) = 0$, и, применяя уравнение (2), получим уравнение касательной:

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o). \qquad (4)$$

Определение. Любая прямая, проходящая через точку $P \in \gamma$ перпендикулярно касательной к кривой γ, в этой точке называется *нормалью кривой*. Если регулярная кривая расположена на плоскости, то нормаль у нее в каждой точке одна, а если кривая находится в пространстве – то бесконечно много. Тогда все нормали лежат в одной плоскости перпендикулярной касательной. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью к кривой* γ *в точке* P.

Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t)$ – параметрическое уравнение кривой, $P(x_o, y_o, z_o) = \boldsymbol{c}(t_o)$. Тогда вектор $\boldsymbol{c}'(t_o)$ будет перпендикулярен нормальной плоскости, а значит, уравнение этой плоскости имеет вид:

$$c_1'(t_o)(x - x_o) + c_2'(t_o)(y - y_o) + c_3'(t_o)(z - z_o) = 0. \qquad (5)$$

Если кривая расположена на плоскости, то уравнение нормали к ней в точке P:

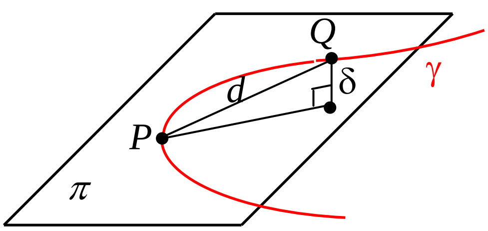
$$c_1'(t_o)(x - x_o) + c_2'(t_o)(y - y_o) = 0.$$

Если кривая задана уравнением в неявном виде (2), то вектор $\mathbf{grad}_P F$ будет направляющим вектором нормали к ней в точке P, а значит уравнение нормали:

$$\frac{x - x_o}{F_x'(x_o)} = \frac{y - y_o}{F_y'(y_o)}. \qquad (6)$$

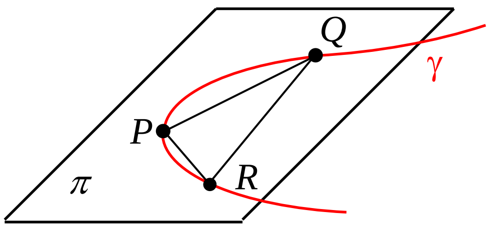
§ 4. *Соприкасающаяся плоскость к кривой. Главная нормаль. Бинормаль*

Определение. Пусть γ – некоторая кривая, P – точка на ней, $Q \in \gamma$ – близкая к P точка. Пусть π – плоскость, проходящая через P. Обозначим $d = |PQ|$, δ – расстояние от Q до этой плоскости. Если $\lim\limits_{Q \to P} \frac{\delta}{d^2} = 0$, то плоскость π называется *соприкасающейся плоскостью к кривой* γ *в точке* P.



Смысл этого определения в следующем: соприкасающаяся плоскость – это та плоскость, которая плотнее всего прилегает к кривой. Следующее определение эквивалентно данному.

Определение. Пусть γ – некоторая кривая, P – точка на ней. Выберем две близкие к P точки Q и R на кривой. Если при $Q \to P$ и $R \to P$ плоскость



PQR стремится занять определенное положение π, то плоскость π называется *соприкасающейся плоскостью к кривой* γ *в точке* P.

Теорема 2. *Если кривая γ дважды дифференцируема и регулярна в точке P, то она имеет в этой точке соприкасающуюся плоскость. Если $\boldsymbol{c}(t)$ – параметризация класса C^2 кривой γ и $P=\boldsymbol{c}(t_0)$, то соприкасающаяся плоскость будет параллельна векторам $\boldsymbol{c}'(t_0)$ и $\boldsymbol{c}''(t_0)$. Если эти векторы не коллинеарны, то соприкасающаяся плоскость единственна, а если $\boldsymbol{c}'(t_0) \,||\, \boldsymbol{c}''(t_0)$, то любая плоскость, проходящая через касательную к кривой γ в точке P, будет соприкасающейся плоскостью к кривой* (без доказательства).

Можно определить соприкасающуюся плоскость, как параллельную векторам $\boldsymbol{c}'(t_0)$ и $\boldsymbol{c}''(t_0)$, а потом доказать, что именно она наиболее плотно прилегает к кривой.

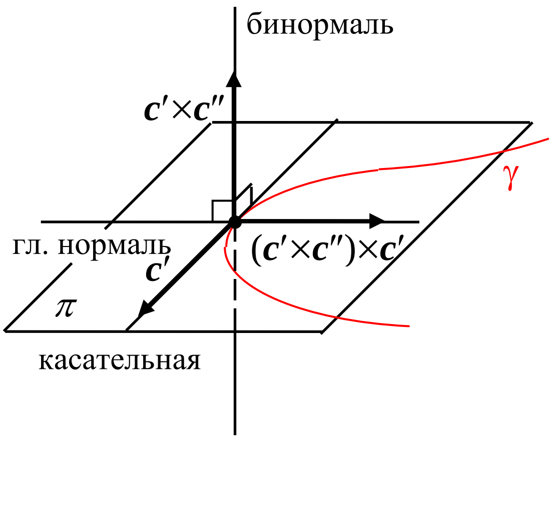
Если $\boldsymbol{c}'(t_0) \nparallel \boldsymbol{c}''(t_0)$, то соприкасающаяся плоскость в точке $P=\boldsymbol{c}(t_0)$ задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ c_1' & c_2' & c_3' \\ c_1'' & c_2'' & c_3'' \end{vmatrix} = 0\,. \tag{7}$$

Определение. Прямая перпендикулярная к соприкасающейся плоскости к кривой γ в точке P называется *бинормалью к кривой* γ *в точке* P. Нормаль к кривой γ в точке P, лежащая в соприкасающейся плоскости называется *главной нормалью*.

Поскольку $\boldsymbol{c}'(t_0)$ и $\boldsymbol{c}''(t_0)$ параллельны соприкасающейся плоскости, то вектор $\boldsymbol{c}'(t_0)\times\boldsymbol{c}''(t_0)$ будет вектором нормали к ней, а значит, он будет направляющим вектором бинормали. Значит, бинормаль задается уравнением

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} c_2' & c_3' \\ c_2'' & c_3'' \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} c_3' & c_1' \\ c_3'' & c_1'' \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} c_1' & c_2' \\ c_2'' & c_3'' \end{vmatrix}}\,.$$



Главная нормаль перпендикулярна касательной и бинормали. Поэтому ее направляющий вектор перпендикулярен $\boldsymbol{c}'$ и $\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}''$. Значит, направляющий вектор главной нормали – это $(\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}'')\times\boldsymbol{c}'$. Для того, чтобы составить уравнение главной нормали, надо сначала вычислить этот вектор в данной точке.

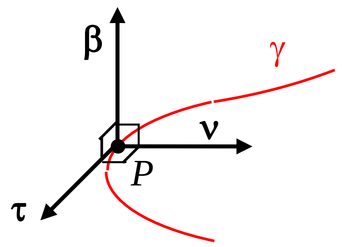
Определение. Плоскость перпендикулярная главной нормали к кривой γ в точке P, называется <u>*спрямляющей плоскостью к кривой*</u> γ <u>*в точке*</u> P.

Для спрямляющей плоскости вектор $(\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}'')\times\boldsymbol{c}'$ будет вектором нормали. Для того, чтобы составить уравнение спрямляющей плоскости, надо сначала вычислить вектор $(\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}'')\times\boldsymbol{c}'$ в данной точке.

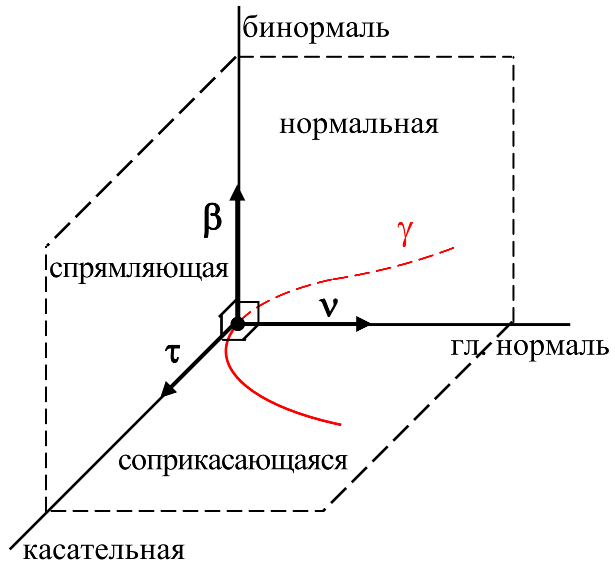
Единичные направляющие векторы касательной, главной нормали и бинормали принято обозначать соответственно $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$. Тогда для того, чтобы они образовывали правую тройку, необходимо, чтобы выполнялось $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\beta}$ – именно в этом порядке. Тогда

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{c}'}{|\boldsymbol{c}'|}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}''}{|\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}''|}, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{(\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}'')\times\boldsymbol{c}'}{|\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}''|\,|\boldsymbol{c}'|}. \tag{8}$$

Говорят, что вместе с точкой $P = \boldsymbol{c}(t_0)$ эти векторы, вычисленные в данной точке, образуют <u>*подвижной репер кривой*</u> $\{P, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}\}$, или <u>*репер Френе*</u>. Именно в этом репере удобнее всего исследовать поведение кривой в окрестности точки P.

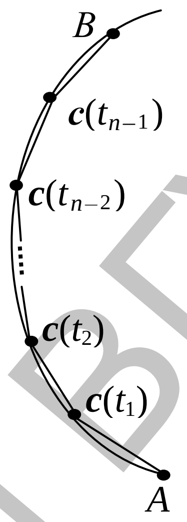


Изобразим теперь кривую вместе с репером Френе, а также всеми прямыми и плоскостями, относящимися к кривой.



§ 5. *Длина кривой. Естественный параметр*

Определение. Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t)$ – параметрическое уравнение кривой γ, $A = \boldsymbol{c}(a)$, $B = \boldsymbol{c}(b)$ – две точки на кривой ($a<b$). Разобьем промежуток $[a, b]$:



$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Тогда <u>*ломаная*</u> с вершинами

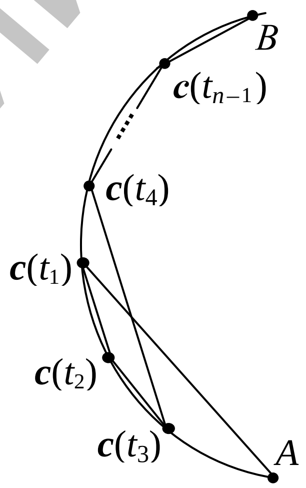
$$\boldsymbol{c}(a), \boldsymbol{c}(t_1), \boldsymbol{c}(t_2), \ldots, \boldsymbol{c}(t_{n-1}), \boldsymbol{c}(b)$$

называется <u>*вписанной в кривую*</u>.

Будем неограниченно измельчать это разбиение так, чтобы длина максимального звена ломаной стремилась к нулю:

$$\delta = \max_i |\boldsymbol{c}(t_{i+1}) - \boldsymbol{c}(t_i)| \to 0 .$$

Определение. Если при этом длина ломаной



$$l = \sum_i |\boldsymbol{c}(t_{i+1}) - \boldsymbol{c}(t_i)|$$

стремится к определенному пределу L, то L называется <u>*длиной участка пути*</u> $\boldsymbol{c}(t)$ от a до b.

Подчеркнем, что данная величина может не совпадать с длиной кривой от A до B, поскольку путь по кривой может осуществляться с “возвратами” (например, вписанная ломаная может выглядеть, как на втором рисунке). Но если $\boldsymbol{c}(t)$ – это гладкая и регулярная параметризация, то величина L будет <u>*длиной дуги кривой*</u> γ от A до B, потому что в точках, где движение по кривой меняет направление, обязательно выполняется $\boldsymbol{c}' = \vec{\mathbf{o}}$, что невозможно для регулярной параметризации.

Теорема 3. *Пусть $\boldsymbol{c}(t)$ – гладкая параметризация кривой γ. Длина дуги кривой γ от точки $A = \boldsymbol{c}(a)$ до точки $B = \boldsymbol{c}(b)$ вычисляется по формуле*

$$L(A, B) = \int_a^b |\boldsymbol{c}'(t)|\, dt. \qquad (9)$$

При этом эта величина не зависит от выбора конкретной параметризации кривой γ, т.е. при допустимой замене параметра эта величина не изменяется.

Доказательство. Длина ломаной, вписанной в кривую, равна сумме длин ее звеньев:

$$l=\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{c}(t_{i+1})-\boldsymbol{c}(t_i)|.$$

Добавим и отнимем справа два выражения:

$$\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{c}'(t_i)|(t_{i+1}-t_i)\ ,\quad \int_a^b|\boldsymbol{c}'(t)|\,dt,$$

а затем сгруппируем:

$$l=\int_a^b|\boldsymbol{c}'(t)|\,dt+\{\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{c}'(t_i)|(t_{i+1}-t_i)-\int_a^b|\boldsymbol{c}'(t)|\,dt\}+$$

$$+\{\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{c}(t_{i+1})-\boldsymbol{c}(t_i)|-\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{c}'(t_i)|(t_{i+1}-t_i)\},$$

Первая фигурная скобка стремится к нулю при измельчении разбиения по определению интеграла. Вторую перепишем так:

$$\sum_{i=1}^{n}(t_{i+1}-t_i)\left\{\frac{|\boldsymbol{c}(t_{i+1})-\boldsymbol{c}(t_i)|}{t_{i+1}-t_i}-|\boldsymbol{c}'(t_i)|\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках стремится к нулю по определению производной, а

$$\sum_{i=1}^{n}(t_{i+1}-t_i)=b-a,$$

поэтому и все выражение стремится к нулю. Получается, что при измельчении разбиения длина вписанной ломаной стремится к

$$\int_a^b|\boldsymbol{c}'(t)|\,dt.$$

Пусть теперь $t=\varphi(u)$ – допустимая замена параметра, $f(u)=\boldsymbol{c}(\varphi(u))$, $a=\varphi(u_1)$, $b=\varphi(u_2)$. Тогда φ – монотонная функция.

1 *случай.* Функция φ – возрастающая. Тогда $\varphi'>0$ и $u_1<u_2$. В соответствии с формулами замены параметра в определенном интеграле получаем

$$\int_{u_1}^{u_2}|f'(u)|\,du=\int_{u_1}^{u_2}|\boldsymbol{c}(\varphi(u))'_u|\,du=\int_{u_1}^{u_2}|\boldsymbol{c}'_t\cdot\varphi'_u|\,du=\int_{u_1}^{u_2}|\boldsymbol{c}'(t)|\,\varphi'_u\,du=\int_a^b|\boldsymbol{c}'(t)|\,dt.$$

2 *случай.* Функция φ – убывающая. Тогда $\varphi'<0$ и $u_1>u_2$. Поэтому u_1 будет верхним пределом, а u_2 – нижним. При перестановке пределов в определенном интеграле меняется знак, а φ'_u выносится из-под модуля со знаком минус; оба минуса компенсируют друг друга:

$$\int_{u_2}^{u_1} |f'(u)|\,du = \int_{u_2}^{u_1} |\boldsymbol{c}(\varphi(u))'_u|\,du = \int_{u_2}^{u_1} |\boldsymbol{c}'_t \cdot \varphi'_u|\,du = -\int_{u_1}^{u_2} |\boldsymbol{c}'(t)|\,(-\varphi'_u)\,du =$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} |\boldsymbol{c}'(t)|\,\varphi'_u\,du = \int_{a}^{b} |\boldsymbol{c}'(t)|\,dt.$$

Таким образом, формула для вычисления длины одинакова как для параметра t, так и для параметра u на кривой γ. ■

Определение. Выберем произвольную точку $A = \boldsymbol{c}(t_o)$ на кривой γ и будем от нее отсчитывать длину кривой до произвольной точки B, в одну сторону со знаком “+” , в другую – со знаком “–”; т.е. если длина дуги AB равна s, то точке B приписывается новое значение параметра s или $-s$. Тем самым на кривой получается новый параметр s, который называется <u>*естественным параметром кривой*</u>. Если параметр, с помощью которого задана кривая, является естественным, то такая параметризация называется <u>*естественной параметризацией кривой*</u>.

Естественная параметризация означает, что в качестве параметра на кривой выбрана длина дуги, отсчитываемая от некоторой начальной точки A в одну сторону – со знаком “+”, а в другую – со знаком “–”.

Если $A=\boldsymbol{c}(t_o)$, $B=\boldsymbol{c}(t)$, то в соответствии с теоремой 3

$$s(t) = \pm\int_{t_o}^{t} |\boldsymbol{c}'(t)|\,dt. \qquad (10)$$

Это формула для нахождения естественного параметра. В качестве t_o можно выбирать любое значение из интервала, на котором кривая определена и регулярна, и знак «+» или «–» можно выбирать по желанию, но для всей кривой сразу. В дальнейшем мы считаем, что в данной формуле выбран знак «+».

По формуле дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом

$$\frac{ds}{dt} = |\boldsymbol{c}'(t)|\,.$$

Обозначим естественную параметризацию кривой той же буквой $\boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{c}(s)=\boldsymbol{c}(t(s))$, тогда

$$\frac{d\boldsymbol{c}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\boldsymbol{c}}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{\boldsymbol{c}'(t)}{|\boldsymbol{c}'(t)|},$$

т.е. $d\boldsymbol{c}/ds$ – это единичный вектор, что и следовало ожидать, потому что при движении по кривой с естественным параметром мы за единицу изменения параметра проходим единицу пути. Дифференцирование по параметру s будем обозначать точкой:

$$\frac{d\boldsymbol{c}}{ds} = \dot{\boldsymbol{c}}(s).$$

Мы установили, что $|\dot{\boldsymbol{c}}(s)|=1$, значит единичный направляющий вектор касательной – это $\boldsymbol{\tau}=\dot{\boldsymbol{c}}(s)$. Кроме того, равенство $|\dot{\boldsymbol{c}}(s)|=1$ равносильно $|\dot{\boldsymbol{c}}|^2=\dot{\boldsymbol{c}}\cdot\dot{\boldsymbol{c}}=1$. Продифференцируем последнее равенство:

$$(\dot{\boldsymbol{c}}\cdot\dot{\boldsymbol{c}})'_s=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ddot{\boldsymbol{c}}\cdot\dot{\boldsymbol{c}}+\dot{\boldsymbol{c}}\cdot\ddot{\boldsymbol{c}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \dot{\boldsymbol{c}}\cdot\ddot{\boldsymbol{c}}=0\,.$$

Это означает, что в случае естественной параметризации

$$\dot{\boldsymbol{c}}\perp\ddot{\boldsymbol{c}}\,. \tag{**}$$

Благодаря этому очень многие формулы упрощаются.

Вектор $\ddot{\boldsymbol{c}}$ параллелен соприкаюсающейся плоскости, а в силу (**) он перпендикулярен касательной, значит он направлен по главной нормали, т.е. $\boldsymbol{\nu}\,||\,\ddot{\boldsymbol{c}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nu}=\ddot{\boldsymbol{c}}/|\ddot{\boldsymbol{c}}|$. Тогда $\beta=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}=\dot{\boldsymbol{c}}\times\ddot{\boldsymbol{c}}/|\ddot{\boldsymbol{c}}|$. Итак,

$$\boldsymbol{\tau}=\dot{\boldsymbol{c}}\,,\quad \boldsymbol{\nu}=\frac{\ddot{\boldsymbol{c}}}{|\ddot{\boldsymbol{c}}|}\,,\quad \boldsymbol{\beta}=\frac{\dot{\boldsymbol{c}}\times\ddot{\boldsymbol{c}}}{|\ddot{\boldsymbol{c}}|}\,.$$

(именно, учитывая последнее равенство, мы делаем вывод, что $\boldsymbol{\nu}\uparrow\uparrow\ddot{\boldsymbol{c}}$, для того, чтобы тройка $(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})$ получалась правой). Главная нормаль имеет уравнение:

$$\frac{x-x_o}{\ddot{c}_1(s_o)}=\frac{y-y_o}{\ddot{c}_2(s_o)}=\frac{z-z_o}{\ddot{c}_3(s_o)}\,,$$

а спрямляющая плоскость:

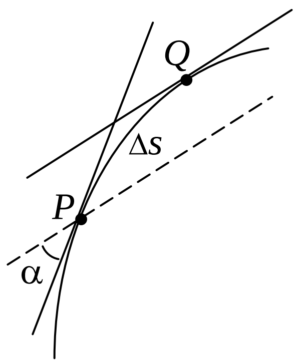
$$\ddot{c}_1(s_o)(x-x_o)+\ddot{c}_2(s_o)(y-y_o)+\ddot{c}_3(s_o)(z-z_o)=0.$$

Отметим также, что если $A=\boldsymbol{c}(s_1)$, $B=\boldsymbol{c}(s_2)$, то длина участка кривой от A до B вычисляется очень просто: $L(A,B)=|s_2-s_1|$.

§ 6. *Кривизна и кручение кривой. Формулы Френе*

Определение. Пусть γ – регулярная кривая, $P\in\gamma$ – любая точка, а $Q\in\gamma$ – близкая к ней точка. Обозначим: α – угол между касательными к кривой в точках P и Q, Δs – длина дуги PQ. Если существует предел

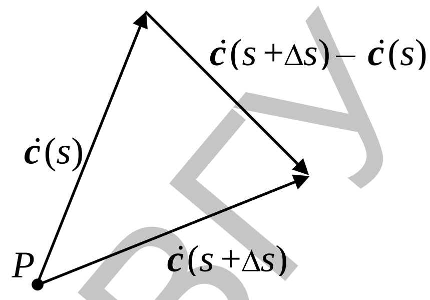
$$\lim_{Q\to P}\frac{\alpha}{\Delta s}=k,$$



то эта величина называется <u>*кривизной кривой*</u> γ <u>*в точке*</u> P. Другими словами, кривизна кривой – это скорость поворота ее касательной.

***Теорема* 4.** *Регулярная кривая* γ *класса* C^2 *в каждой своей точке имеет кривизну. Если* $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(\mathrm{s})$ *– уравнение кривой с естественным параметром, то* $k = |\,\ddot{\boldsymbol{c}}(s)|$.

Доказательство. Пусть $P = \boldsymbol{c}(s)$, $Q = \boldsymbol{c}(s + \Delta s)$, тогда векторы $\dot{\boldsymbol{c}}(s)$ и $\dot{\boldsymbol{c}}(s + \Delta s)$ будут единичными направляющими векторами касательных в этих точках. Отложим их из одной точки. Получим равнобедренный треугольник с боковой стороной равной 1. Тогда находим основание:



$$|\dot{\boldsymbol{c}}(s+\Delta s) - \dot{\boldsymbol{c}}(s)| = 2\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Отсюда

$$\frac{|\dot{\boldsymbol{c}}(s+\Delta s) - \dot{\boldsymbol{c}}(s)|}{\Delta s} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\Delta s} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\Delta s}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\Delta s}\,.$$

Перейдем здесь к пределу при $\Delta \mathrm{s} \to 0$.

$$|\,\ddot{\boldsymbol{c}}(s)| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = 1 \cdot k\,,$$

т.к. при $\Delta s \to 0$ также $\alpha \to 0$. Что и требовалось доказать. ■

Примем без доказательства, что для кривой, заданной уравнением с произвольным параметром

$$k = \frac{|\boldsymbol{c}'(t) \times \boldsymbol{c}''(t)|}{|\boldsymbol{c}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} c_2' & c_3' \\ c_2'' & c_3'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_3' & c_1' \\ c_3'' & c_1'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1' & c_2' \\ c_1'' & c_2'' \end{vmatrix}^2}}{(c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2)^{3/2}}\,. \qquad (11)$$

Если кривая расположена на плоскости, то мы имеем $\boldsymbol{c}_3 \equiv 0$. Поэтому получаем формулу для плоских кривых:

$$k = \frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} c_1' & c_2' \\ c_1'' & c_2'' \end{vmatrix}}{(c_1'^2 + c_2'^2)^{3/2}}\,. \qquad (11')$$

(в данном случае mod означает числовой модуль).

Если кривая на плоскости задана уравнением в явном виде $y = f(x)$, то мы можем переписать его в параметрическом виде

$$x = t, \quad y = f(t).$$

Применим формулу (11′):

$$k = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 1 & f'(t) \\ 0 & f''(t) \end{vmatrix}}{(1+(f'(t))^2)^{3/2}}.$$

Раскроем определитель и заменим обратно t на x. Окончательно получаем:

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}. \tag{12}$$

***Теорема* 5.** 1) *Если кривизна кривой равна нулю всюду, то эта кривая есть прямая линия.*

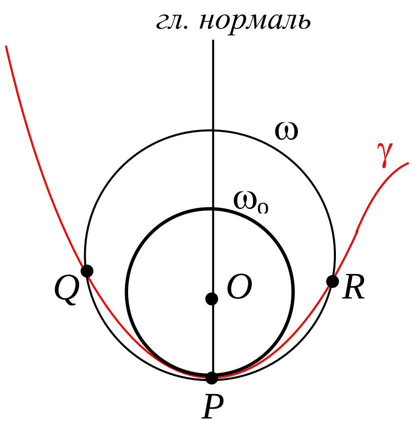
2) *Если кривая плоская и ее кривизна постоянна* $k = k_o = \text{const} > 0$, *то это кривая – дуга окружности радиуса* $R = 1/k_o$.

Доказательство. Докажем только первый пункт. Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(s)$ – параметрическое уравнение кривой с естественным параметром. Имеем $k = |\ddot{\boldsymbol{c}}(s)| \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \ddot{\boldsymbol{c}}(s) \equiv \vec{\mathbf{o}}$. В развернутом виде получаем систему дифференциальных уравнений, и находим ее решение:

$$\begin{cases} \ddot{c}_1 = 0 \\ \ddot{c}_2 = 0 \\ \ddot{c}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{c}_1 = a_1 = \text{const} \\ \dot{c}_2 = a_2 = \text{const} \\ \dot{c}_3 = a_3 = \text{const} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = a_1 s + b_1, \\ c_2 = a_2 s + b_2, \\ c_3 = a_3 s + b_3. \end{cases}$$

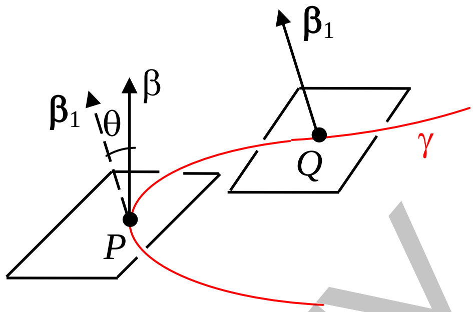
где b_1, b_2, b_3 – постоянные величины. Получили параметрические уравнения прямой.

Определение. Пусть γ некоторая кривая, P – точка на ней, Q, R – близкие к ней точки; если при Q и R, стремящихся к P, окружность ω стремится занять определенное положение ω_o, то окружность ω_o называется <u>*соприкасающейся окружностью к кривой*</u> γ в точке P, а ее центр O и радиус R называются <u>*центром*</u> и <u>*радиусом кривизны*</u> кривой γ в точке P.



Примем без доказательства, что γ и ω_o имеют в точке P одинаковую кривизну, а поскольку кривизна окружности радиуса R равна $1/R$, то $R = 1/k$. Центр кривизны кривой в точке P лежит на главной нормали к кривой в точке P.

Определение. Пусть γ – некоторая кривая, P – точка на ней, $Q\in\gamma$ – близкая к P точка, а θ – угол между соприкасающимися плоскостями в точках P и Q, Δs – длина дуги PQ. Если существует предел $\lim\limits_{Q\to P}\dfrac{\theta}{\Delta s}$, то он называется <u>*абсолютным кручением*</u> кривой γ в точке P и обозначается $|\kappa|$ (греческая буква “каппа”). То есть абсолютное кручение – это скорость поворота соприкасающейся плоскости.



При этом очевидно, что угол между соприкасающимися плоскостями будет равен углу между бинормалями в точках P и Q.

***Теорема* 6.** *Регулярная кривая γ класса C^3 имеет кручение в каждой точке, где кривизна отлична от нуля. Если $c(s)$ – естественная параметризация кривой γ, то*

$$|\kappa| = \frac{|\,\dot{\boldsymbol{c}}\cdot\ddot{\boldsymbol{c}}\cdot\dddot{\boldsymbol{c}}\,|}{k^2}.$$

(13)

Доказательство. Поскольку кривая регулярная, мы можем задать ее с помощью естественной параметризации $\boldsymbol{c}(s)$. Тогда $\dot{\boldsymbol{c}}\neq\vec{\mathbf{o}}$. В тех точках, где $k\neq 0$ выполнено $\ddot{\boldsymbol{c}}\neq\vec{\mathbf{o}}$, а при естественной параметризации $\ddot{\boldsymbol{c}}\perp\dot{\boldsymbol{c}}$, значит в этих точках однозначно определена соприкасающаяся плоскость как параллельная этим векторам.

Пусть $P=c(s)$, $Q=c(s+\Delta s)$ – две точки на кривой γ, $\beta(s)$ и $\beta(s+\Delta s)$ – единичные векторы бинормали в этих точках, а θ – угол между ними. Также как и в доказательстве теоремы 4,

$$|\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\beta}(s)| = 2\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\beta}(s)|}{\Delta s} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\theta}{\Delta s},$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta s\to 0$

$$|\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\theta}{\Delta s} = 1\cdot|\kappa|,$$

т.к. при $\Delta s\to 0$ также и $\theta\to 0$. Итак, $|\kappa| = |\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)|$.

Т.к. $|\boldsymbol{\beta}(s)| = 1$, то $\boldsymbol{\beta}(s)\cdot\boldsymbol{\beta}(s) = 1$. Продифференцировав это тождество, получим

$$2\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dot{\boldsymbol{\beta}}\perp\boldsymbol{\beta}.$$

Потом $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}$. Продифференцируем это равенство:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\boldsymbol{\tau}}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\tau}\times\dot{\boldsymbol{\nu}}.$$

Но $\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{c}} \;\Rightarrow\; \dot{\boldsymbol{\tau}} = \ddot{\boldsymbol{c}} \parallel \boldsymbol{\nu} \;\Rightarrow\; \dot{\boldsymbol{\tau}} \times \boldsymbol{\nu} = \vec{\mathbf{o}}$. Значит, $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\tau} \times \dot{\boldsymbol{\nu}} \;\Rightarrow\; \dot{\boldsymbol{\beta}} \perp \boldsymbol{\tau}$. Но мы выяснили уже, что $\dot{\boldsymbol{\beta}} \perp \boldsymbol{\beta}$. Значит, $\dot{\boldsymbol{\beta}} \parallel \boldsymbol{\nu}$ и косинус угла между ними равен ± 1, а также $|\boldsymbol{\nu}| = 1$. Поэтому

$$|\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\nu}| = |\dot{\boldsymbol{\beta}}||\boldsymbol{\nu}||\cos \angle(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\nu})| = |\dot{\boldsymbol{\beta}}| = |\kappa|.$$

Итак, $|\kappa| = |\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\nu}|$ $(*)$.

Мы знаем, что

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\ddot{\boldsymbol{c}}}{|\ddot{\boldsymbol{c}}|} = \frac{\ddot{\boldsymbol{c}}}{k}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\boldsymbol{c}} \times \ddot{\boldsymbol{c}}}{|\ddot{\boldsymbol{c}}|} = \frac{\dot{\boldsymbol{c}} \times \ddot{\boldsymbol{c}}}{k}.$$

Находим, что

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \left(\frac{1}{k}\right)'_s \dot{\boldsymbol{c}} \times \ddot{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{k}(\dot{\boldsymbol{c}} \times \dddot{\boldsymbol{c}} + \ddot{\boldsymbol{c}} \times \ddot{\boldsymbol{c}}) = \left(\frac{1}{k}\right)'_s \dot{\boldsymbol{c}} \times \ddot{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{k}(\dot{\boldsymbol{c}} \times \dddot{\boldsymbol{c}}),$$

т.к. $\ddot{\boldsymbol{c}} \times \ddot{\boldsymbol{c}} = \vec{\mathbf{o}}$. Подставим это в $(*)$:

$$|\kappa| = \left|\left(\left(\frac{1}{k}\right)'_s \dot{\boldsymbol{c}} \times \ddot{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{k}(\dot{\boldsymbol{c}} \times \dddot{\boldsymbol{c}})\right) \cdot \frac{\ddot{\boldsymbol{c}}}{k}\right| = \left|\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\right)'_s \dot{\boldsymbol{c}}\,\ddot{\boldsymbol{c}}\,\ddot{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{k^2}\dot{\boldsymbol{c}}\,\dddot{\boldsymbol{c}}\,\ddot{\boldsymbol{c}}\right| = \frac{|\dot{\boldsymbol{c}}\,\ddot{\boldsymbol{c}}\,\dddot{\boldsymbol{c}}|}{k^2},$$

т.к $\dot{\boldsymbol{c}}\,\ddot{\boldsymbol{c}}\,\ddot{\boldsymbol{c}} = 0$, и при перестановке сомножителей модуль смешанного произведения не изменяется. ■

Придадим теперь кручению знак, чтобы выполнялось

$$\kappa = \frac{\dot{\boldsymbol{c}}\,\ddot{\boldsymbol{c}}\,\dddot{\boldsymbol{c}}}{k^2}. \tag{14}$$

Это и есть <u>*формула для вычисления кручения*</u>, если кривая задана уравнением с естественным параметром.

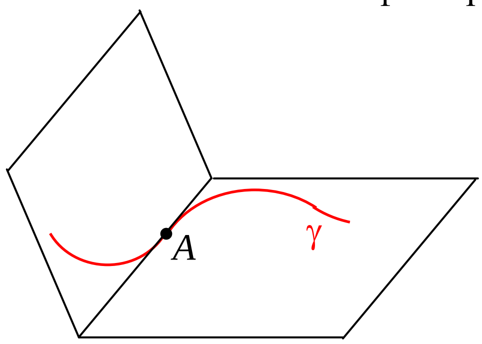
Пусть кривая задана уравнением с произвольным параметром. Тогда кручение вычисляется по формуле

$$\kappa = \frac{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{c}''\boldsymbol{c}'''}{|\boldsymbol{c}' \times \boldsymbol{c}''|^2} \tag{15}$$

(без доказательства).

Теорема 7. *Если кручение кривой тождественно равно нулю всюду, то эта кривая – плоская линия* (без доказательства).

При этом плоскость, в которой она лежит, очевидно, является ее соприкасающейся плоскостью. Для того, чтобы составить ее уравнение, достаточно составить уравнение соприкасающейся плоскости в любой фиксированной точке на кривой, где эта кривая регулярна и $k \neq 0$. При этом равенство кручения нулю предполагает его существование, а значит предполагает, что $k \neq 0$. Если в точке A выполнено $k = 0$, то в



этой точке кривая может переходить
из одной плоскости в другую.

В процессе доказательства теоремы 6 мы выяснили, что

$$\dot{\boldsymbol\tau} = \ddot{\boldsymbol c} \uparrow\uparrow \boldsymbol\nu\,,\ |\ddot{\boldsymbol c}| = k \quad \Rightarrow \dot{\boldsymbol\tau} = k\boldsymbol\nu\,.$$

Также $\dot{\boldsymbol\beta} \parallel \boldsymbol\nu$, $|\kappa| = |\dot{\boldsymbol\beta}(s)|$, и мы убрали модуль в формуле (1) так, что

$$\kappa = -\dot{\boldsymbol\beta}\cdot\boldsymbol\nu \ \Rightarrow\ \dot{\boldsymbol\beta} = -\kappa\boldsymbol\nu\,.$$

Итак, мы уже знаем производные $\dot{\boldsymbol\tau}$ и $\dot{\boldsymbol\beta}$. Найдем $\dot{\boldsymbol\nu}$:

$$\boldsymbol\nu = \boldsymbol\beta\times\boldsymbol\tau \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol\nu} = \dot{\boldsymbol\beta}\times\boldsymbol\tau + \boldsymbol\beta\times\dot{\boldsymbol\tau} = -\kappa\boldsymbol\nu\times\boldsymbol\tau + \boldsymbol\beta\times k\boldsymbol\nu = -\kappa(-\boldsymbol\beta) + k(-\boldsymbol\tau)\,.$$

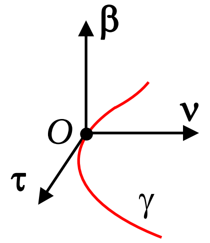
Запишем все формулы вместе:

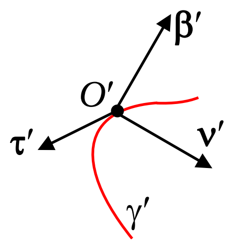
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol\tau} = & k\boldsymbol\nu, \\ \dot{\boldsymbol\nu} = -k\boldsymbol\tau + \kappa\boldsymbol\beta, \\ \dot{\boldsymbol\beta} = & -\kappa\boldsymbol\nu\,. \end{cases} \tag{16}$$

Они называются <u>*формулами Френе*</u>.

Из этих формул и теорем о существовании и единственности решений систем дифференциальных уравнений вытекает <u>*основная теорема теории кривых*</u>.

***Теорема* 8.** *Если на некотором интервале* $I\subset \boldsymbol R$ *заданы непрерывная функция* $\kappa(s)$ *и гладкая функция* $k(s)>0$, то *существует кривая* γ *класса* C^2, *для которой* s *будет естественным параметром,* k *– кривизной, а* κ *– кручением. Такая кривая определяется однозначно с точностью до положения в пространстве, т.е. любые две такие кривые совмещаются движением.*





Таким образом, кривизна и кручение полностью определяют форму кривой, но только при условии, что $k(s)\neq 0$ на всей кривой. Для того, чтобы определить положение кривой в пространстве, надо задать к системе (12) начальные данные, а именно, начальные векторы $\boldsymbol\tau(0)$, $\boldsymbol\nu(0)$, $\boldsymbol\beta(0)$ и начальную точку кривой $O = c(0)$, т.е. надо задать ортонормированный репер. Если кривая задается с помощью другого ортонормированного репера $\{O', \boldsymbol\tau', \boldsymbol\nu', \boldsymbol\beta'\}$, то его можно совместить с первым репером с помощью движения, и тогда совместятся и задаваемые этими реперами кривые.

§ 7. *Вид кривой в подвижном репере*

Пусть γ – кривая класса C^3, $P \in \gamma$ – точка, в которой $k \neq 0$, $\kappa \neq 0$, и $\{P, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}\}$ – подвижной репер. Этот репер определяет декартову систему координат с началом P. Обозначим координаты x, y, z.

Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(s)$ – уравнение кривой с естественным параметром и $P = \boldsymbol{c}(0)$. Разложим $c(s)$ в ряд Тейлора в окрестности $s = 0$:

$$\boldsymbol{c}(s) = \boldsymbol{c}(0) + s\,\dot{\boldsymbol{c}}(0) + \frac{s^2}{2}\ddot{\boldsymbol{c}}(s) + \frac{s^3}{6}\dddot{\boldsymbol{c}}(s) + s^3\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}(s),$$

где $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)$ – бесконечно малый вектор при $s \to 0$. Поскольку $\boldsymbol{c}(0)$ – начало координат, то $\boldsymbol{c}(0) = \vec{\mathbf{0}}$. Мы также знаем, что $\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{\tau}$, $\ddot{\boldsymbol{c}} = k\boldsymbol{\nu}$. Тогда с помощью формул Френе находим

$$\dddot{\boldsymbol{c}} = \dot{k}\boldsymbol{\nu} + k\dot{\boldsymbol{\nu}} = \dot{k}\boldsymbol{\nu} + k(-k\boldsymbol{\tau} + \kappa\boldsymbol{\beta})\,\frac{s^3}{6} = \dot{k}\boldsymbol{\nu} - k^2\boldsymbol{\tau} + k\kappa\boldsymbol{\beta}.$$

$$\boldsymbol{c}(s) = s\cdot\boldsymbol{\tau} + \frac{ks^2}{2}\boldsymbol{\nu} + (\dot{k}\boldsymbol{\nu} - k^2\boldsymbol{\tau} + k\kappa\boldsymbol{\beta})\,\frac{s^3}{6} + s^3\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}(s).$$

Значит, если отбросить бесконечно малые величины порядка более 3, то

$$\boldsymbol{c}(s) = \left(s - \frac{k^2 s^3}{6}\right)\boldsymbol{\tau} + \left(\frac{ks^2}{2} + \frac{\dot{k}s^3}{6}\right)\boldsymbol{\nu} + \frac{k\kappa s^3}{6}\boldsymbol{\beta},$$

Поэтому параметрические уравнения кривой в окрестности точки P в наших координатах будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = s \\ y = ks^2/2 \\ z = k\kappa s^3/6, \end{cases}$$

если для каждой координаты оставить только величину, имеющую наибольшее значение при малых s.

Соприкасающаяся плоскость параллельна $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$, т.е. в нашей системе координат это будет плоскость Oxy. Поэтому проекция кривой на эту плоскость будет иметь уравнение

$$\begin{cases} x = s \\ y = \dfrac{k}{2}s^2, \end{cases}$$

Вид этой проекции в ближайшей окрестности точки P изображен на рис. 1 (парабола).

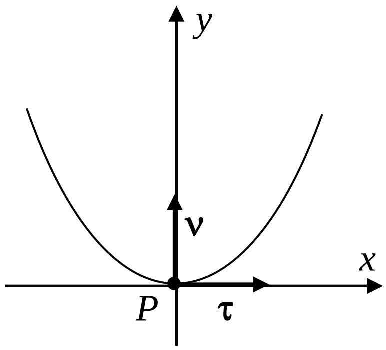


Рис. 1.

Спрямляющая плоскость параллельна $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\beta}$, т.е. в нашей системе координат это будет плоскость Oxz. Поэтому проекция кривой на эту плоскость будет иметь уравнение:

$$\begin{cases} x = s \\ z = \dfrac{k\kappa}{6} s^3. \end{cases}$$

Вид этой проекции в ближайшей окрестности точки P при $\kappa > 0$ изображен на рисунке 2 (кубическая парабола).

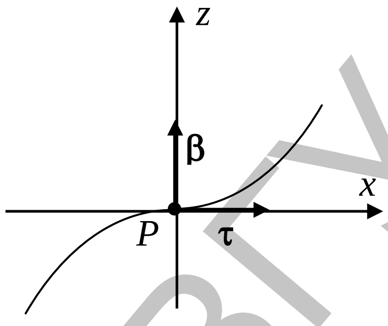


Рис. 2.

Нормальная плоскость параллельна $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$, т.е. в нашей системе координат это будет плоскость Oyz. Поэтому проекция кривой на эту плоскость будет иметь уравнение:

$$\begin{cases} y = \dfrac{k}{2} s^2 \\ z = \dfrac{k\kappa}{6} s^3. \end{cases}$$

Вид этой проекции в ближайшей окрестности точки P изображен на рис. 3 (полукубическая парабола).

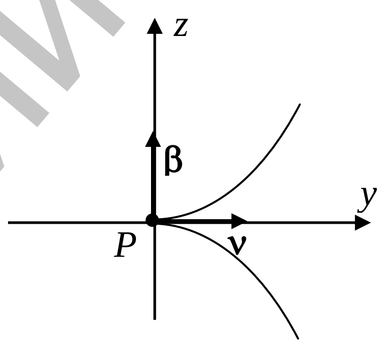
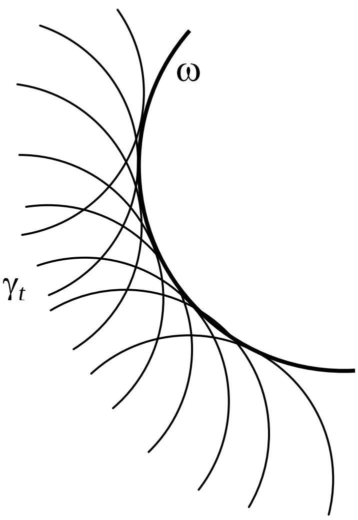


Рис. 3.

§ 8. *Огибающая семейства плоских кривых. Эволюта и эвольвента кривой*

Определение. Пусть на плоскости задано семейство кривых $\{\gamma_t\}$. Пусть кривая ω в каждой своей точке касается одной из кривых семейства (т.е. имеет с ней общую касательную). Тогда ω называется *<u>огибающей семейства кривых</u>* γ_t.



Пусть семейство кривых $\{\gamma_t\}$ задано с помощью уравнения в неявном виде:

$$F(x, y, t) = 0, \qquad (17)$$

где t – параметр семейства, а кривая

ω – параметрическим уравнением $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t)$ так, чтобы в точке $\boldsymbol{c}(t)$ она касалась кривой γ_t (т.е. в качестве параметра у кривой ω выступает «номер» линии, с которой она касается в данной точке). При таком определении параметра точка $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(t))$ принадлежит кривой γ_t, а значит, выполняется тождество

$$F(x(t), y(t), t) \equiv 0. \qquad (*)$$

Продифференцируем это тождество по t:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \qquad (**)$$

В уравнении (17) для каждой отдельной кривой γ_t параметр t выступает в качестве постоянной. Поэтому вектор **grad** F будет вектором нормали для кривой γ_t. Но кривая ω имеет вместе с γ_t общую касательную, поэтому **grad** F будет вектором нормали и для кривой ω. Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) = 0.$$

Поэтому $(**)$ принимает вид: $\partial F/\partial t = 0$. Объединяя $(*)$ и $(**)$ получаем, что функции $(x(t), y(t))$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0, \\ F_t(x, y, t) = 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Множество точек, которые удовлетворяют этой системе, называется <u>*дискриминантной линией*</u>. Оно не всегда является кривой.

Примеры **1.** Для семейства прямых $y - tx = 0$ система (18) имеет вид

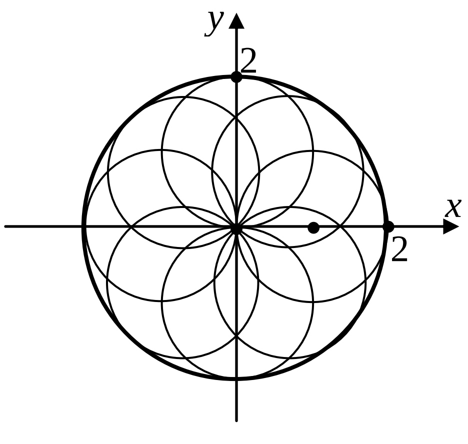
$$\begin{cases} y = tx \\ x = 0. \end{cases}$$

Дискриминантная линия состоит только из одной точки $(0, 0)$.

2. Для семейства окружностей, изображенного на рис. (центры окружностей находятся на единичной окружности с центором O, а радиусы равны 1) система (12) имеет вид

$$\begin{cases} (x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2 = 1, \\ (x - \cos t)\cdot \sin t - (y - \sin t)\cdot \cos t = 0. \end{cases}$$

Она имеет два решения (проверьте подстановкой)

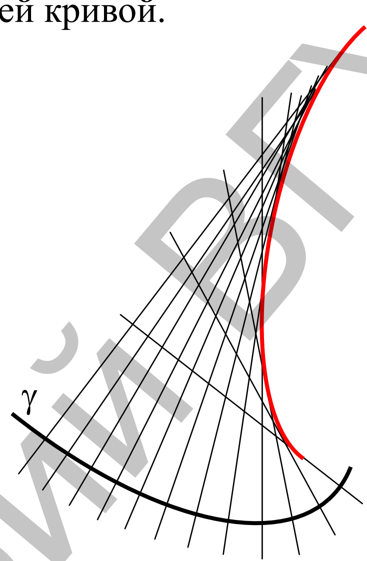


$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Только первое решение задает кривую.

Примем без доказательства, что если в каждой точке дискриминантной линии $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ одновременно в ноль не обращаются, то дискриминантная линия является огибающей кривой.

Определение. Проведем в каждой точке плоской кривой γ нормаль к этой кривой. Получим семейство прямых n_t. Огибающая семейства этих прямых называется *эволютой кривой* γ.



Оказывается, геометрическое место всех центров кривизны кривой γ совпадает с ее эволютой (без доказательства). Именно это свойство позволяет легко составить уравнение эволюты. Для того, чтобы получить точку на эволюте, следует от точки на кривой отложить отрезок равный R (радиусу кривизны) в направлении вектора нормали $\boldsymbol{\nu}$. Отсюда получаем уравнение эволюты в векторном виде:

$$\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t) + R\boldsymbol{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t) + \frac{1}{k}\boldsymbol{\nu},$$

где $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t)$ – уравнение кривой γ. Для плоской кривой вектор $(-y', x')$ перпендикулярен направляющему вектору касательной $\boldsymbol{c}' = (x', y')$, а значит, он направлен по нормали. Тогда

$$\boldsymbol{\nu} = \left(\frac{-y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right).$$

Согласно формуле (11′)

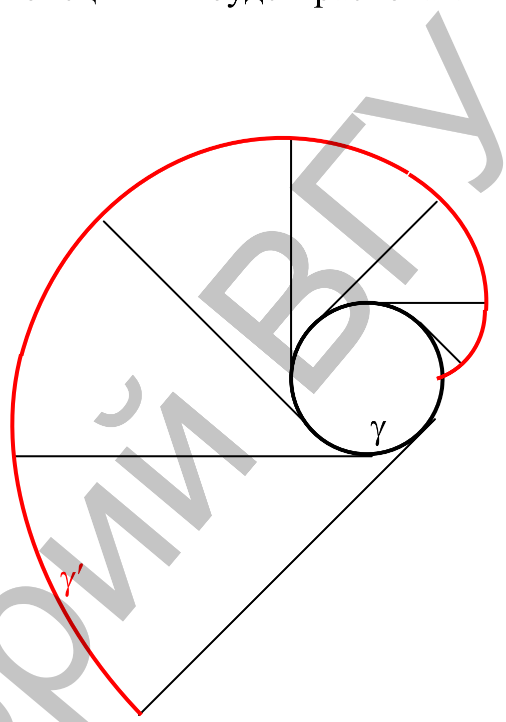
$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}.$$

Тогда уравнения эволюты кривой γ:

$$x = x(t) - \frac{(x'^2 + y'^2)y'}{x'y'' - y'x''}, \qquad y = y\,(t) + \frac{(x'^2 + y'^2)x'}{x'y'' - y'x''}. \tag{19}$$

Определение. Пусть кривая γ задана уравнением с естественным параметром $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(s)$. Из каждой точки $\boldsymbol{c}(s)$ кривой отложим вектор $-s\boldsymbol{\tau}$. Геометрическое место концов этих векторов называется *эвольвентой кривой* γ.

Представим, что на часть кривой, соответствующей значениям $s>0$, намотана нить, конец которой находится в точке $\boldsymbol{c}(0)$. Будем разматывать эту нить, сохраняя ее в постоянном натяжении. Тогда размотанная часть нити будет находиться на касательной к кривой, и длина этой части будет равна s. Таким образом, конец нити будет располагаться на касательной на расстоянии s от точки касания в направлении противоположном к направлению возрастания параметра. Значит, конец нити будет находиться на эвольвенте к данной кривой. Поэтому эвольвенту еще называют *разверткой кривой*.



На данном рис. изображена развертка окружности. Она широко применяется в технике: форму развертки окружности имеют зубья цилиндрических шестерен.

Если кривая задана уравнением с естественным параметром $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(s)$, то уравнение ее развертки кривой в векторном виде:

$$\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(s) - s\boldsymbol{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(s) - s\dot{\boldsymbol{c}}(s).$$

Если кривая задана уравнением с произвольным параметром, то уравнение развертки этой кривой:

$$\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t) - s\,\frac{\boldsymbol{c}'(t)}{|\boldsymbol{c}'(t)|}.$$

Если γ' – эвольвента кривой γ, то γ является эволютой для γ'. Точно так же кривая γ является эвольвентой для своей эволюты.

Пример. Для окружности, заданной уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t,$$

$\boldsymbol{c}'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$, $|\boldsymbol{c}'(t)| = a$, а естественный параметр $s = at$ (убедитесь самостоятельно). Отсюда получаем уравнения развертки:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$$

§ 9. *Примеры решения задач*

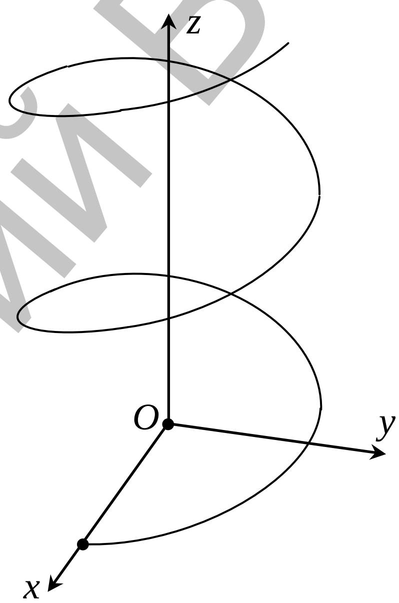
***Задача* 1.** *Точка вращается вокруг оси* Oz *с угловой скоростью* ω*, находясь от нее на постоянном расстоянии* $a > 0$ *и одновременно поднимается вверх вдоль* Oz *с постоянной скоростью* $b > 0$. *Составьте уравнение траектории данной точки, если в момент времени* $t = 0$ *она находилась на оси* Ox (*винтовая линия*). *Проверить регулярность получившегося пути.*

Решение. Из условия задачи вытекает, что проекция данной точки на плоскость Oxy описывает окружность радиуса a в этой плоскости. При этом угол, который определяет положение проекции точки на окружности (отсчитываемый от оси Ox), изменяется по закону $\varphi = \omega t$. Поэтому координаты x и y изменяются по закону

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = a\sin\omega t.$$

Координата z задает «высоту» точки над «горизонтальной» плоскостью Oxy. Она изменяется с постоянной скоростью b: $z = bt$. Отсюда окончательно получаем уравнение траектории:

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \\ z = bt. \end{cases} \qquad (20)$$



Находим координаты вектора $\boldsymbol{c}'$, а затем квадрат его длины:

$$\boldsymbol{c}'(-\,a\omega\sin\omega t,\ a\omega\cos\omega t,\ b),$$

$$|\boldsymbol{c}'|^2 = (a\omega)^2\sin^2\omega t + (a\omega)^2\cos^2\omega t + b^2 = (a\omega)^2 + b^2 > 0.$$

Следовательно, путь является регулярным при любом значении параметра.

***Задача* 2.** *Окружность радиуса* a *на плоскости катится без скольжения по оси* Ox. *На окружности отмечена точка* M.

1. *Составить уравнение траектории данной точки (циклоида).*

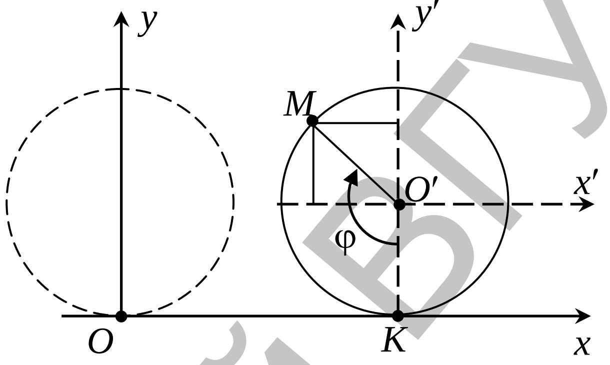
2. *Проверить регулярность получившегося пути.*

3. *Найти длину одной арки циклоиды.*

4. *Найти естественный параметр и записать уравнение циклоиды в естественной параметризации на каком-либо одном ее участке.*

5. *Вычислить кривизну циклоиды и определить, в каких точках кривизна достигает экстремальных значений.*

Решение. **1.** Предположим, что окружность повернулась на угол φ и касается оси Ox в точке K. Пусть O' – ее центр. Введем вспомогательную декартову СК $O'x'y'$, которая получается из Oxy переносом начала координат в точку O'. Окружность катится по оси Ox без скольжения. Поэтому длина отрезка OK равна длине дуги KM, т.е. равна $a\varphi$, если угол исчисляется в радианах. Отсюда $O'(a\varphi, a)$ и формулы замены координат:



$$\begin{cases} x = x' + a\varphi, \\ y = y' + a. \end{cases}$$

В новой СК по чертежу легко найти координаты точки M:

$$x' = -a\cdot\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -a\cdot\sin\varphi, \quad y' = a\cdot\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -a\cdot\cos\varphi.$$

Отсюда получаем уравнение циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1 - \cos\varphi). \end{cases} \tag{21}$$

Заметим, что вид уравнения (знаки и расположение синуса и косинуса) зависит от того, какой именно угол выбран в качестве параметра.

2. Находим координаты вектора $\boldsymbol{c}'$, а затем квадрат его длины:

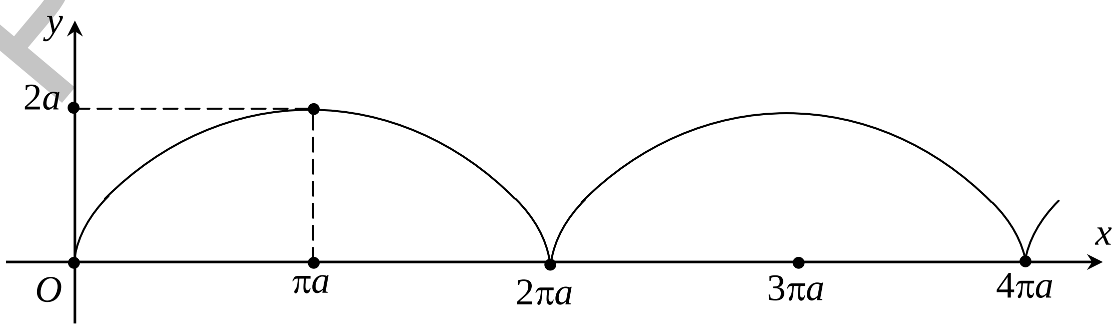
$$\boldsymbol{c}'(a(1-\cos\varphi),\ a\sin\varphi),$$

$$|\boldsymbol{c}'|^2 = a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2a^2(1-\cos\varphi).$$

Решаем уравнение

$$|\boldsymbol{c}'|^2 = 0 \iff \cos\varphi = 1 \iff \varphi = 2\pi k.$$

Следовательно, путь является регулярным при любых значениях параметра, кроме $\varphi = 2\pi k$. Очевидно, этим значениям соответствуют точки на оси Ox; отмеченная точка принимает их положение, когда окружность завершает полный оборот.



3. Длина кривой вычисляется по формуле (9) §5. Одна арка циклоиды соответствует изменению параметра $0 \le \varphi \le 2\pi$. Поэтому ее длина

$$L = \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{c}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos\varphi)}dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} |\sin\frac{\varphi}{2}| dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2} dt = 2a(-2\cos\frac{\varphi}{2})\Big|_0^{2\pi} = 4a(-\cos\pi + \cos 0) = 8a.$$

При вычислениях мы учитывали, что на промежутке $[0, 2\pi]$ выполнено $\sin\frac{\varphi}{2} \ge 0.$

4. Естественный параметр находится по формуле (10) §5, где знак «+» или «–», а также t_o (в нашем случае φ_o) мы можем выбрать по желанию. Выберем $\varphi_o = 0$ и знак «+». Тогда

$$s = 2a\int_0^{\varphi} \sin\frac{\varphi}{2} dt = -4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\varphi} = 4a\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right), \text{ если } \varphi \in [0, 2\pi];$$

$$s = 4a(-\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} + \cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{2\pi}^{\varphi}) = 4a\left(3-\cos\frac{\varphi}{2}\right), \text{ если } \varphi \in [2\pi, 4\pi].$$

Аналогично и на всех последующих промежутках $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$ получается своя отдельная формула. Поэтому запишем уравнение с естественным параметром только для участка кривой, соответствующего $\varphi \in [0, 2\pi]$. Имеем $s = 4a\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$. Выражаем из этого уравнения φ и подставляем в уравнение циклоиды.

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 1-\frac{s}{4a} \Rightarrow \varphi = 2\arccos\left(1-\frac{s}{4a}\right), \quad s \in [0, 8a];$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1-\left(1-\frac{s}{4a}\right)^2} = \frac{1}{4a}\sqrt{8as-s^2},$$

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2a}\left(1-\frac{s}{4a}\right)\sqrt{8as-s^2},$$

$$1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{8a^2}(8as-s^2) = \frac{1}{a}\left(s-\frac{s^2}{8a}\right).$$

$$\begin{cases} x = 2a\arccos\left(1-\dfrac{s}{4a}\right) - \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{s}{4a}\right)\sqrt{8as-s^2}, \\ y = s-\dfrac{s^2}{8a}. \end{cases}$$

5. Кривизна плоской кривой вычисляется по формуле $(11')$ §6. Находим координаты вектора $\boldsymbol{c}''$, а затем вычисляем отдельно числитель и знаменатель из формулы $(11')$:

$$\boldsymbol{c}''(a\sin\varphi,\ a\cos\varphi),$$

$$\begin{vmatrix} a\sin\varphi & a\cos\varphi \\ a(1-\cos\varphi) & a\sin\varphi \end{vmatrix} = a^2(\sin^2\varphi - \cos\varphi(1-\cos\varphi)) =$$

$$= a^2(1-\cos\varphi) = 2a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$|\boldsymbol{c}'|^3 = (2a^2(1-\cos\varphi))^{3/2} = (4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2})^{3/2} = 8a^3|\sin^3\frac{\varphi}{2}|.$$

Подставляем найденное в формулу $(11')$ и получаем

$$k = \frac{1}{4a|\sin\frac{\varphi}{2}|}.$$

Можно сделать вывод, что кривизна стремится к $+\infty$ при приближении точки к оси Ox ($\varphi \to 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$) и достигает минимального значения при $\sin\frac{\varphi}{2} = \pm 1$, т.е. в самых верхних точках арок циклоиды ($\varphi = \pi m,\ m\in\mathbf{Z}$).

***Задача* 3.** *Для винтовой линии*

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt\ : \end{cases}$$

1. *Найти длину одного витка* ($t\in[0, 2\pi]$), *найти естественный параметр и записать уравнение в естественной параметризации.*

2. *Вычислить кривизну и кручение.*

3. *Записать натуральные уравнения.*

***Решение.* 1.** $\boldsymbol{c}'(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$,

$$|\boldsymbol{c}'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad (*)$$

$$L = \int_0^{2\pi}|\boldsymbol{c}'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$s = \int_0^t|\boldsymbol{c}'(t)|\,dt = \int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,dt = t\sqrt{a^2+b^2} \quad\Rightarrow\quad t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Подставляем это значение в уравнение кривой и получаем уравнение в естественной параметризации:

$$\begin{cases} x = a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ y = a\sin\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ z = \dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

2. Кривизна и кручение вычисляются по формулам (11) и (15) из §6 соответственно. Нам понадобятся вторые и третьи производные:

$$\boldsymbol{c}''(-a\cos t, -a\sin t, 0), \qquad \boldsymbol{c}'''(a\sin t, -a\cos t, 0).$$

Находим вектор $\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}''$, а затем его квадрат:

$$\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}'' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t)\boldsymbol{i} - (ab\cos t)\boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k}.$$

$$|\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}''|^2 = (ab\sin t)^2 + (ab\cos t)^2 + a^4 = a^2(a^2+b^2).$$

При подстановке в формулу для кривизны не забываем извлечь корень:

$$k = \frac{|\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}''|}{|\boldsymbol{c}'|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Обращаем внимание, что $|\boldsymbol{c}'|$ уже вычислен выше (см. (*)).

В числителе формулы (15) стоит смешанное произведение. Его можно вычислить непосредственно:

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{c}''\boldsymbol{c}''' = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = ba^2,$$

а можно воспользоваться определением: $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{c}''\boldsymbol{c}''' = (\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}'')\cdot\boldsymbol{c}'''$. В различных задачах наиболее удобным может оказаться тот или иной способ. Знаменатель для кручения уже найден. Итак,

$$\varkappa = \frac{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{c}''\boldsymbol{c}'''}{|\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{c}''|^2} = \frac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{(a^2+b^2)}.$$

3. Для того, чтобы записать натуральные уравнения $k = k(s)$, $\varkappa = \varkappa(s)$ кривой, необходимо в формулах для кривизны и кручения сделать замену параметра t на параметр s. В нашем случае кривизна и кручение постоянны, поэтому нет необходимости заменять. Натуральные уравнения нашей винтовой линии имеют вид:

$$k = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \varkappa = \frac{b}{(a^2+b^2)}.$$

***Задача* 4.** *Кривая на плоскости задана уравнением в неявном виде*:

$$\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{2}x^2y=0.$$

Составить уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке $A(1,\,0)$.

Решение. Сначала подставим координаты точки A в уравнение и убедимся, что она действительно принадлежит кривой. Обозначим левую часть уравнения $\varphi(x,\,y)$. Находим вектор градиента для функции $\varphi(x,y)$ и значение градиента в точке A:

$$\operatorname{grad}\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}-xy,\,\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{x^2}{2}\right);$$

$$\operatorname{grad}_A\varphi=(2,\,-0{,}5).$$

Тогда уравнение касательной и нормали в точке A (см. формулы (3), (6) из §3):

$$2(x-1)-0{,}5(y-0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x-y-4=0 \quad \text{(касательная)};$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{-0{,}5} \qquad\Leftrightarrow\quad x-4y-1=0 \quad \text{(нормаль)}.$$

***Задача* 5.** *В какой точке касательная к кривой*

$$\gamma\colon\begin{cases}x=e^t,\\ y=-e^{-t},\\ z=t\end{cases}$$

параллельна плоскости π: $x+y-2z-5=0$? *В этой точке составить уравнение касательной прямой, нормальной плоскости, соприкасающейся плоскости, бинормали. Найти векторы, составляющие репер Френе в найденной выше точке.*

Решение. Направляющим вектором касательной служит вектор $\boldsymbol{c}'(t)=(e^t,e^{-t},1)$. Вектор $\vec{\mathbf{n}}(1,1,-2)$ – это вектор нормали к плоскости. Касательная будет параллельна плоскости π (или будет лежать в ней), если $\boldsymbol{c}'(t)\perp\vec{\mathbf{n}} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{c}'(t)\cdot\vec{\mathbf{n}}=0$. Последнее уравнение в координатах имеет вид

$$e^t+e^{-t}-2=0.$$

Решая это уравнение, находим, что $t=0$. Подставим найденное значение параметра в уравнение кривой и находим точку $A(1,-1,0)$. Именно в этой точке требуется составить все указанные в условии задачи уравнения. Поэтому находим $\boldsymbol{c}'(0)=(1,1,1)$. Касательная прямая и нормальная плоскость (см. (1) и (5) из §3):

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-0}{1} \qquad \Leftrightarrow \qquad x-1=y+1=z.$$

$$1(x-1)+1(y+1)+1(z-0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+y+z=0.$$

Поскольку точка A не лежит в плоскости π, то и найденная касательная к кривой γ в этой плоскости не лежит.

Находим вектор второй производной в точке A:

$$\boldsymbol{c}''(t)=(e^t,-e^{-t},0), \quad \boldsymbol{c}''(0)=(1,-1,0)$$

и составляем уравнение соприкасающейся плоскости (см. (7) §4):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+y-2z=0.$$

Попутно мы нашли координаты вектора $\boldsymbol{c}'(0)\times\boldsymbol{c}''(0)=(1,1,-2)$, который является направляющим для бинормали. Отсюда уравнение бинормали:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}.$$

Далее находим $(\boldsymbol{c}'(0)\times\boldsymbol{c}''(0))\times\boldsymbol{c}'(0)=(3,-3,0)$ (тот факт, что он оказался коллинеарным $\boldsymbol{c}''(0)$ – это случайное совпадение, связанное с тем, что у нас получилось $\boldsymbol{c}''(0)\perp\boldsymbol{c}'(0)$). Находим длины

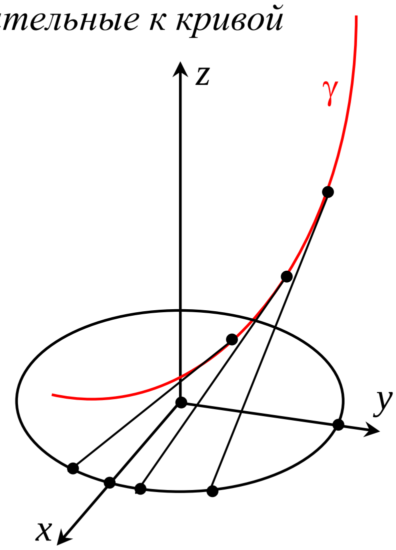
$$|\boldsymbol{c}'(0)|=\sqrt{3}, \quad |\boldsymbol{c}'(0)\times\boldsymbol{c}''(0)|=\sqrt{6} \quad |\boldsymbol{c}'(0)|\,|\boldsymbol{c}'(0)\times\boldsymbol{c}''(0)|=3\sqrt{2} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \boldsymbol{\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), \quad \boldsymbol{\beta}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

***Задача* 6.** *Найти линию, по которой касательные к кривой*

$$\gamma:\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=e^t, \end{cases}$$

пересекают плоскость Oxy.



Решение. Нам необходимо составить уравнение касательной к кривой в произвольной точке, т.е. при произвольном значении параметра $t=t_0$. Находим направляющий вектор касательной при $t=t_0$:

$$\boldsymbol{c}'(t_0)=(-\sin t_0,\cos t_0,e^{t_0}).$$

Координаты точки, которая используется в уравнении касательной, получатся, если в уравнение кривой γ подставить $t=t_0$. Отсюда получаем уравнение касательной:

$$\frac{x-\cos t_0}{-\sin t_0}=\frac{y-\sin t_0}{\cos t_0}=\frac{z-e^{t_0}}{e^{t_0}}\,. \qquad (*)$$

Плоскость Oxy задается уравнением $z=0$. Подставляем это равенство в $(*)$ и получаем:

$$\frac{x-\cos t_0}{-\sin t_0}=\frac{y-\sin t_0}{\cos t_0}=-1.$$

Выражаем отсюда x и y и заменяем t_0 на t (т.к. значение t_0 является произвольным). Окончательно получаем уравнение искомой кривой:

$$\begin{cases} x=\cos t+\sin t, \\ y=\sin t-\cos t. \end{cases}$$

На самом деле эта кривая является окружностью. Используя тригонометрические формулы, мы можем преобразовать уравнение:

$$x=\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4}),\quad y=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-t).$$

Сделаем здесь замену параметра: $u=\pi/4-t$. Она является допустимой, т.к. $du/dt=-1\neq 0$. Получим уравнение окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos u, \\ y=\sqrt{2}\sin u. \end{cases}$$

Можно иначе проверить, что наша кривая – это окружность:

$$x^2+y^2=(\cos t+\sin t)^2+(\sin t-\cos t)^2=2\cos^2 t+2\sin^2 t=2.$$

Задача 7. *Докажите, что следующая кривая является плоской, и составьте уравнение плоскости, в которой она лежит.*

$$x=\frac{1}{3}(t-1)^3,\ y=\frac{1}{3}(t+1)^3,\ z=t^2.$$

Решение. Согласно теореме 7 из §6 нам требуется доказать, что кручение данной кривой тождественно равно нулю. При этом достаточно доказать, что числитель в формуле для кручения равен нулю: $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{c}''\boldsymbol{c}'''=0$. Находим:

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{c}''\boldsymbol{c}'''=\begin{vmatrix} (t-1)^2 & (t+1)^2 & 2t \\ 2(t-1) & 2(t+1) & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} (t-1)^2 & (t+1)^2 & 2t \\ (t-1) & (t+1) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=4\big((t+1)^2-2t(t+1)+2t(t-1)-(t-1)^2\big)\equiv 0.$$

Плоскость, в которой лежит кривая, – это ее соприкасающаяся плоскость. Мы уже доказали, что кривая плоская. Поэтому мы можем составить уравнение соприкасающейся плоскости в любой ее фиксированной точке, например, при $t_0=0$. Находим точку на кривой, соответствующую данному значению параметра и векторы производных в этой точке:

$$M_0\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right),\ \boldsymbol{c}'(0) = (1, 1, 0),\ \boldsymbol{c}''(0) = (-2, 2, 2).$$

Составляем уравнение соприкасающейся плоскости, заменяя при этом вектор $\boldsymbol{c}''(0)$ на коллинеарный ему вектор $(-1, 1, 1)$:

$$\begin{vmatrix} x+\frac{1}{3} & y-\frac{1}{3} & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2z + \frac{2}{3} = 0.$$

Задача вроде бы решена. Но мы не учли один «тонкий» момент: во всех ли точках существует у данной кривой кручение? При $t = 1$ мы получаем $\boldsymbol{c}'(1) = (0, 4, 2)$, $\boldsymbol{c}''(1) = (0, 4, 2)$. Значит, в этой точке $\boldsymbol{c}' \times \boldsymbol{c}'' = \vec{\mathbf{o}}$ и кривизна кривой тоже равна нулю. В такой точке кривая может переходить из одной плоскости в другую. Поэтому следует сделать проверку: подставить x, y, z из уравнения кривой в уравнение плоскости. Должно получиться тождество.

***Задача* 8.** *Вычислить угол между кривыми:*

а) γ_1: $y = \sin x$ и γ_2: $y = \cos x$;

б) γ_3: $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, t \in \boldsymbol{R} \end{cases}$ и γ_4: $\begin{cases} x = e^{\tau}, \\ y = e^{-5\tau}, t \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$

в точке их пересечения.

Решение. а) Находим ординату точки пересечения кривых:

$$\sin x = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Возьмем в начале одно значение $x = \frac{\pi}{4}$ и найдем производные y_1' (для γ_1) и y_2' (для γ_2) при данном значении x:

$$y_1'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_2'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Эти значения задают угловые коэффициенты k_1 и k_2 касательных к кривым в точке их пересечения. Угол между касательными в точке пересечения кривых и есть угол между кривыми (по определению). Угол между прямыми находится по формуле:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|k_1 - k_2|}{|1 + k_1 k_2|} = \frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{\left|1 - \frac{1}{2}\right|} = 2\sqrt{2}.$$

Нетрудно проверить, что и в других точках пересечения тоже получается $\operatorname{tg}\theta = 2\sqrt{2}$.

***Ответ*:** $\theta = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

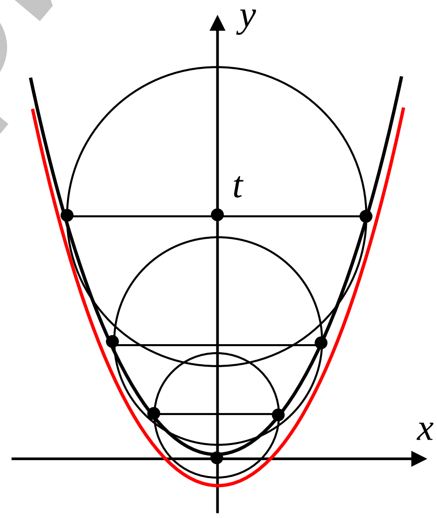
б) Находим значения параметров в точке пересечения:

$$\begin{cases} t^2 = e^{\tau}, \\ t^3 = e^{-5\tau}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = e^{0{,}5\tau}, \\ e^{1{,}5\tau} = e^{-5\tau}. \end{cases}$$

Умножаем последнее уравнение на $e^{5\tau}$ и получаем $e^{6{,}5\tau} = 1 \Rightarrow \tau = 0,\ t = 1$. Обозначим $\boldsymbol{c}(t) = (t^2, t^3)$, $\boldsymbol{d}(\tau) = (e^{\tau}, e^{-5\tau})$. Тогда касательные векторы к данным кривым – это $\boldsymbol{c}'(t) = (2t, 3t^2)$, $\boldsymbol{d}'(\tau) = (e^{\tau}, -5e^{-5\tau})$. Касательные векторы в точке пересечения – $\boldsymbol{c}'(1) = (2, 3)$, $\boldsymbol{d}'(0) = (1, -5)$. Эти векторы являются направляющими векторами для касательных прямых в точке пересечения кривых γ_3 и γ_4. Косинус угла между прямыми равен модулю косинуса угла между их направляющими векторами:

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{c}'(1)\cdot \boldsymbol{d}'(0)|}{|\boldsymbol{c}'(1)||\boldsymbol{d}'(0)|} = \frac{|2\cdot 1 + 3\cdot(-5)|}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+(-5)^2}|} = \frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

***Ответ*:** $\alpha = 45^{\circ}$.



***Задача* 9.** *На хордах параболы $y = x^2$, параллельных Ox, как на диаметрах, построены окружности. Докажите, что огибающая семейства этих окружностей представляет собой параболу. Составьте уравнение этой параболы.*

Решение. а) Пусть t – ордината середины хорды. Тогда радиус окружности, построенной на этой хорде, равен $\sqrt{t}$. Поэтому уравнение окружности имеет вид:

$$x^2 + (y-t)^2 - t = 0.$$

Находим частную производную по t:

$$-2(y-t) - 1 = 0.$$

Объединяя эти уравнения, получим систему для нахождения дискриминантной линии:

$$\begin{cases} x^2 + (y-t)^2 - t = 0, \\ 2(y-t) + 1 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $t = y + 1/2$; подставляем это значение в первое уравнение:

$$x^2 + (y - y - 1/2)^2 - y - 1/2 = 0,$$

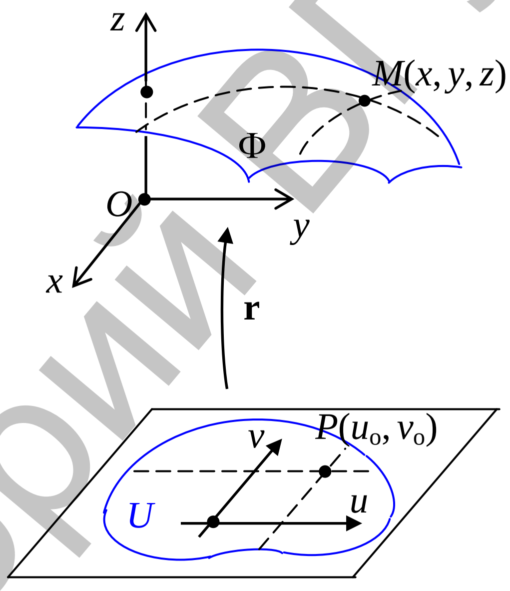
$$x^2 = y + 1/4 \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2 - 1/4.$$

Таким образом, огибающая представляет собой параболу, равную данной параболе, только смещенную вниз по оси Oy на $1/4$.

ГЛАВА 3. ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. *Понятие поверхности*

Определение. *Элементарной поверхностью* называется множество $\Phi \subset E^3$, гомеоморфное некоторой области U на плоскости. Гомеоморфизм $\mathbf{r}: U \to \Phi$ называется *параметризованной поверхностью*, или *параметризацией элементарной поверхности* Φ.



Наглядно это можно представить так. Мы плоскую область помещаем в пространство с помощью гомеоморфизма $\mathbf{r}$; при этом она непрерывно деформируется без склеиваний.

Подчеркнем, что элементарная поверхность – это множество, а параметризованная – это отображение.

В пространстве можно ввести координаты (x, y, z), а в области U – координаты (u, v) (не обязательно декартовы). Тогда отображение $\mathbf{r}$ можно записать в виде:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \qquad (1)$$

или

$$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

Таким образом, $\vec{\mathbf{r}}(u, v)$ представляет собой вектор-функцию двух аргументов. Согласно нашей договоренности об отождествлении, можем считать, что она задает как произвольную точку $M(x, y, z)$ на поверхности, так и ее радиус-вектор $\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM}$. Координаты в пространстве могут быть сферическими или цилиндрическими, но мы ограничимся рассмотрением только декартовых координат. Уравнения (1) называются *параметрическими уравнениями поверхности* Φ. Систему (1) можно переписать в виде одного векторного равенства: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(u, v)$.

У вектор-функции двух аргументов, как и у обычной функции двух аргументов, можно вычислять частные производные. Их принято обозначать без штрихов: $\vec{\mathbf{r}}_u = \partial\vec{\mathbf{r}}/\partial u$, $\vec{\mathbf{r}}_v = \partial\vec{\mathbf{r}}/\partial v$. Примем без доказательства, что эти производные можно вычислять покоординатно:

$$\vec{\mathbf{r}}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{\mathbf{r}}_v = (x_v, y_v, z_v).$$

Точно так же мы можем вычислять частные производные второго порядка и смешанные производные:

$$\vec{\mathbf{r}}_{uu}=(x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}),\ \ \vec{\mathbf{r}}_{uv}=(x_{uv}, y_{uv}, z_{uv})),\ \ \vec{\mathbf{r}}_{vv}=(x_{vv}, y_{vv}, z_{vv}).$$

Определение. Говорим, что вектор-функция $\vec{\mathbf{r}}\ (u, v)$ двух аргументов *принадлежит классу* $C^n(U)$, если она определена в области U, и у нее на этой области существуют все частные и смешанные производные, вплоть до порядка n включительно, и они непрерывны.

В дальнейшем стрелку над обозначением параметризованной поверхности ставить не будем.

Пусть Φ – элементарная поверхность, а $\mathbf{r}: U \to \Phi$ – ее параметризация. Каждая точка $M \in \Phi$ имеет координаты в пространстве: $M(x, y, z)$. Такие координаты точки называются *внешними*. Кроме того, мы можем ввести на поверхности *внутренние координаты*. Если $P(u_o, v_o) \in U$ и $M = \mathbf{r}(P)$, то точке M приписываются тоже координаты (u_o, v_o).

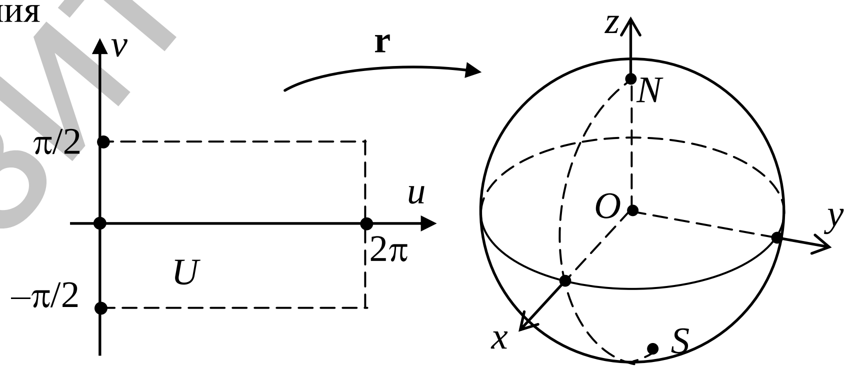
Определение. Линии на области U, которые определяются уравнениями вида

$$u = u_o = \text{const},\ \text{или}\ \ v = v_o = \text{const}, \tag{2}$$

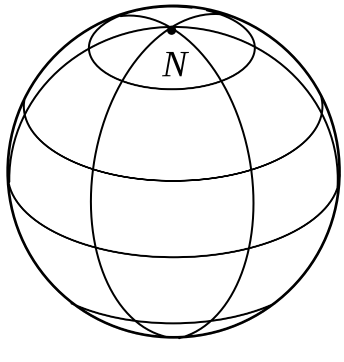
называются *координатными линиями*. Они образуют *координатную сеть*. Отображение $\mathbf{r}$ переводит их в *линии на поверхности* Φ, которые тоже называются *координатными*. Относительно внутренних координат на поверхности они определяются теми же самыми уравнениями (2). Эти линии образуют на *координатную сеть на поверхности* Φ.

***Пример* 1.** Уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos u\cos v, \\ y = a\sin u\cos v, \\ z = a\sin v, \end{cases}$$



$u\in(0,2\pi), v\in(-\pi/2, \pi/2)$, задают сферу, но не всю, а с разрезом по меридиану. Внутренние координаты точки на сфере – это ее долгота и широта.



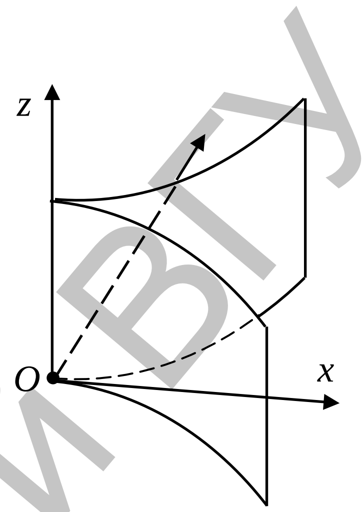
Координатные линии на сфере – это параллели и меридианы. Они образуют координатную сеть.

Определение. Параметризованная поверхность $\mathbf{r}: U \to \Phi$ называется *регулярной*, если $\mathbf{r}\in C^1(U)$ и $\mathbf{r}_u \nparallel \mathbf{r}_v$

($\Leftrightarrow$ $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \vec{\mathbf{o}} \Leftrightarrow$ $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \neq 0$) на всей области U. Точки, в которых регулярность нарушается, называются <u>*особыми*</u> точками поверхности.

Определение. Элементарная поверхность Φ называется <u>*гладкой класса*</u> C^n, если у нее существует регулярная параметризация класса C^n.

Пример **2.** Параметризованная поверхность $\mathbf{r}(u, v) = (u^2, u^3, v)$, $u \in R$, $v \in R$ задает элементарную поверхность, которая называется «<u>*цилиндр на полукубической параболе*</u>». Вектор-функция $\mathbf{r}(u, v)$ является дифференцируемой класса C^∞. Тем не менее элементарная поверхность имеет излом. Точкам, которые лежат на ребре, соответствует значение параметра $u = 0$. Имеем $\mathbf{r}_u(2u, 3u^2, 0)$, $\mathbf{r}_u(0, v) = \vec{\mathbf{o}}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{r}_u \,||\, \mathbf{r}_v$ при $u = 0$.



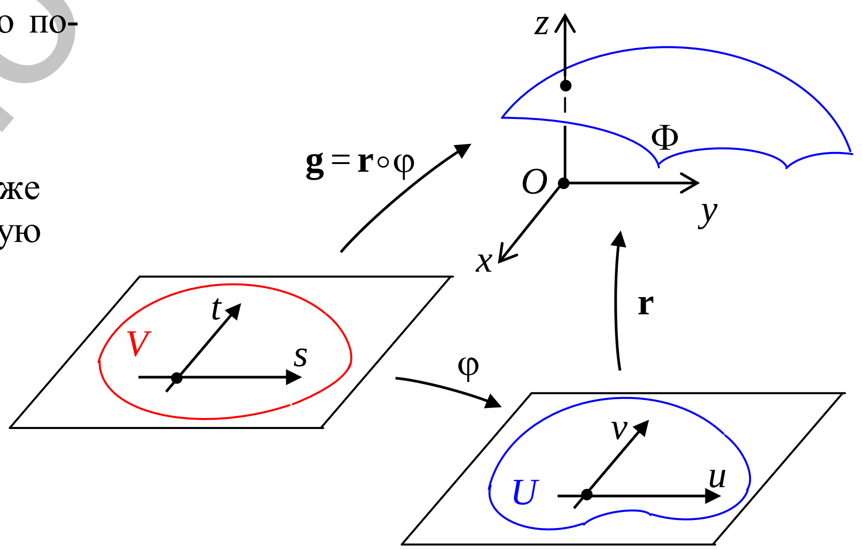
Из теоремы 2 §2 следует, что гладкая регулярная параметризованная поверхность задает элементарную поверхность без изломов.

Заметим, что параметризованные поверхности $\mathbf{r}(u, v) = (u^2, u^3, v)$, $u \in (0, +\infty)$, $v \in R$ и $\mathbf{g}(s, t) = (e^{2s}, e^{3s}, 2t + 5)$, $s \in R$, $t \in R$ задают в пространстве одну и ту же элементарную поверхность: половину полукубической параболы. Очевидно, что вторая поверхность получается из первой в результате подстановки $u = e^s$, $v = 2t + 5$. Это приводит нас к понятию <u>*замены параметров*</u>.

Пусть Φ – элементарная поверхность, $\mathbf{r} : U \to \Phi$ – ее параметризация, V – еще одна область на плоскости, а $\varphi : V \to U$ – биекция. Тогда мы можем рассмотреть параметризованную поверхность:

$$\mathbf{g} = \mathbf{r} \circ \varphi : V \to \Phi.$$

Она задает ту же самую элементарную поверхность Φ.



Пусть на U и V заданы соответственно координаты (u, v) и (s, t). Тогда отображение φ можно записать в координатах:

$$\begin{cases} u = u(s, t)\ , \\ v = v(s, t)\ . \end{cases} \tag{4}$$

Получим, что $\mathbf{g}(s, t) = \mathbf{r}(u(s, t), v(s, t))$. Обозначим

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} u'_s & u'_t \\ v'_s & v'_t \end{pmatrix} -$$

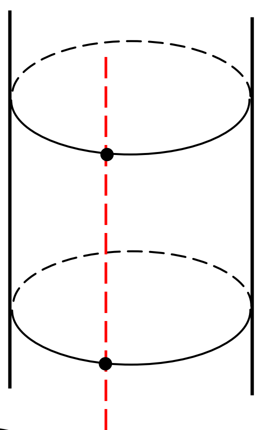
матрица Якоби отображения φ. Ее определитель $\det \mathbf{J}$ называется *Якобианом* отображения φ. Говорим, что φ является *допустимой заменой*, или *допустимым изменением параметров*, если $\det \mathbf{J} \neq 0$ на всей области V. Примем без доказательства, что $|\mathbf{g}_s \times \mathbf{g}_t| = |\det \mathbf{J}| \cdot |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$. Это означает, что допустимая замена параметров сохраняет регулярность поверхности, т.е. параметризованная поверхность $\mathbf{g}$ будет регулярной тогда и только тогда, когда поверхность $\mathbf{r}$ регулярная и замена φ допустимая.

Рекомендуется также рассмотреть пример замены параметра в §9. В дальнейшем, если не оговорено противное, все рассматриваемые пути и параметризованные поверхности предполагаются регулярными.

Не любую из известных поверхностей можно получить в результате топологического отображения плоской области. Например, сфера не является элементарной поверхностью. Поэтому необходимо следующее определение.

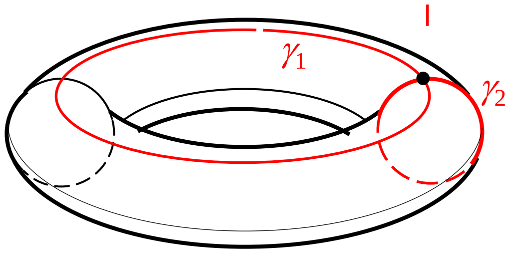
Определение. *Простой поверхностью* называется множество $\Phi \subset E^3$, обладающее следующим свойством: у каждой точки $M \in \Phi$ существует окрестность $V \subset \Phi$, являющаяся элементарной поверхностью.

Примеры. **3.** В §4 главы 1 мы показали, что достаточно удалить из сферы одну точку и оставшаяся часть будет гомеоморфна плоскости. Значит, сфера является простой поверхностью.



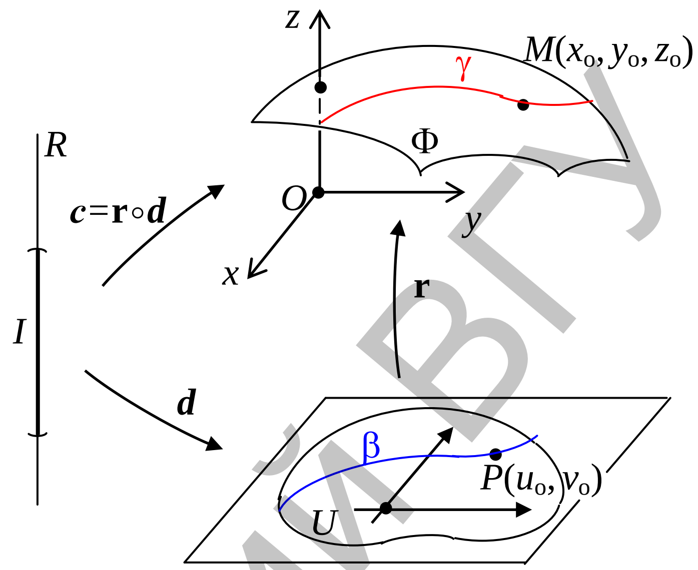
4. Аналогично, бесконечный круговой цилиндр является простой поверхностью: если удалить из цилиндра одну образующую, то оставшуюся часть можно «развернуть» на плоскость.

5. *Тор* является простой поверхностью. Если удалить окружности γ_1 и γ_2, то оставшаяся часть будет гомеоморфна прямоугольнику без границы.



§ 2. *Кривые на поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности*

Пусть Φ – элементарная поверхность, а $\mathbf{r}: U \to \Phi$ – ее параметризация. Пусть $\boldsymbol{d}: I \to U$ – путь на области U, β – кривая, которую он задает. Тогда $\boldsymbol{c} = \mathbf{r} \circ \boldsymbol{d}: I \to \Phi$ есть путь на поверхности Φ, который задает кривую $\gamma = \mathbf{r}(\beta) \subset \Phi$.



Пусть кривая β задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} \qquad (3)$$

а поверхность Φ – уравнениями (1). Тогда кривая γ в пространстве имеет уравнения:

$$\begin{cases} x = x(u(t), v(t)), \\ y = y(u(t), v(t)), \\ z = z(u(t), v(t)). \end{cases} \qquad (4)$$

Относительно внутренних координат на поверхности Φ кривая γ задается теми же самыми уравнениями, что и β на области U, т.е. (3). Поэтому именно (3) называются <u>*уравнениями кривой*</u> γ <u>*на поверхности*</u> Φ.

Пусть $M(x_o, y_o, z_o)$ – произвольная точка на кривой γ, $M = \boldsymbol{c}(t_o)$, $P(u_o, v_o) = \boldsymbol{d}(t_o) \in \beta$. Тогда $M = \mathbf{r}(P)$. Найдем касательный вектор к γ в точке M:

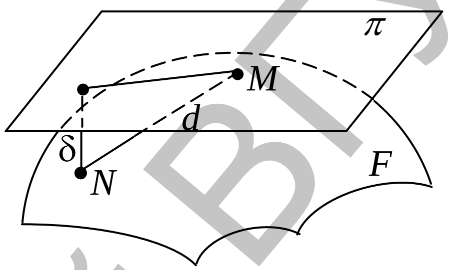
$$\boldsymbol{c}'(t_o) = \mathbf{r}'(u(t_o), v(t_o)) = u'(t_o) \cdot \mathbf{r}_u(u_o, v_o) + v'(t_o) \cdot \mathbf{r}_v(u_o, v_o). \qquad (5)$$

Поскольку поверхность $\mathbf{r}$ предполагается регулярной, то векторы $\mathbf{r}_u(u_o, v_o)$ и $\mathbf{r}_v(u_o, v_o)$ не коллинеарны. Они однозначно определяют плоскость π, проходящую через точку M. Тогда (5) означает, что касательный вектор к кривой γ в точке M раскладывается через векторы $\mathbf{r}_u(u_o, v_o)$ и $\mathbf{r}_v(u_o, v_o)$, т.е. он параллелен π. Кривая γ была произвольной. Поэтому мы можем сделать следующий вывод.

***Теорема* 1.** *Пусть* Φ *– элементарная поверхность, а* $\mathbf{r}: U \to \Phi$ *– ее регулярная параметризация. Пусть* $M \in \Phi$, *и* (u_o, v_o) *– внутренние координаты точки* M. *Тогда касательные векторы ко всем кривым на* *поверхности* Φ*, проходящим через точку* M*, лежат в одной плоскости, параллельной векторам* $\mathbf{r}_u(u_o, v_o)$ *и* $\mathbf{r}_v(u_o, v_o)$*. Эта плоскость называется* *<u>касательной плоскостью к поверхности</u>* Φ *<u>в точке</u>* M.

Возможен другой подход к определению касательной плоскости.

Определение. Пусть Φ – элементарная поверхность, M – точка на ней, а π – плоскость, проходящая через M. Выберем близкую к M точку N на F и обозначим $d = |MN|$, а δ – расстояние от N до π. Если



$$\lim_{N \to M} \frac{\delta}{d} = 0\,,$$

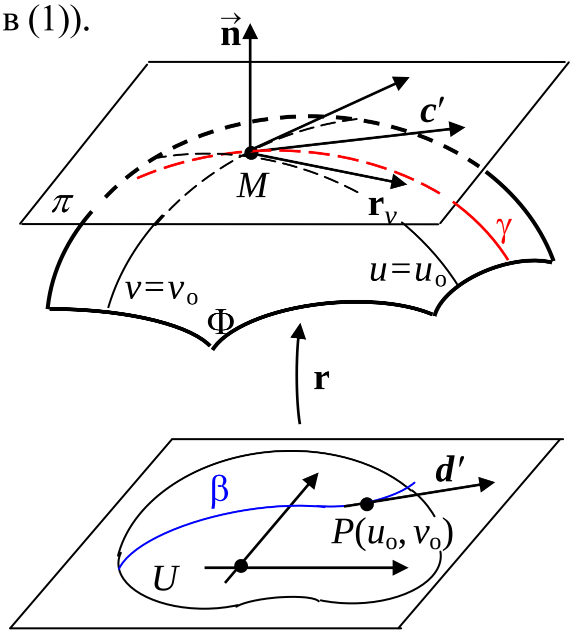
то плоскость π называется *<u>касательной плоскостью к поверхности</u>* Φ *<u>в точке</u>* M.

Предполагается, что данный предел существует и равен нулю независимо от того, по какому пути точка N приближается к M. Более строго это означает следующее: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ окрестность V точки M в Φ, такая что $\delta/d < \varepsilon$ $\forall N \in V$.

Исходя из этого определения, можно доказать следующую теорему.

***Теорема* 2.** *Гладкая регулярная элементарная поверхность* Φ *имеет в каждой своей точке касательную плоскость, и притом единственную. Если* $\mathbf{r}: U \to \Phi$ *– регулярная параметризация поверхности* Φ *и* $M = \mathbf{r}(u_o, v_o)$*, то касательная плоскость к* Φ *в точке* M *параллельна векторам* $\mathbf{r}_u(u_o, v_o)$ *и* $\mathbf{r}_v(u_o, v_o)$.

(Доказательство см., например, в (1)).



Поскольку для регулярной поверхности $\mathbf{r}_u \not\parallel \mathbf{r}_v$ для любых u и v из области определения, то векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ образуют базис в касательной плоскости к поверхности Φ в каждой точке этой поверхности. Пусть кривая γ задается относительно внутренних координат уравнениями (3). Тогда (5) показывает, что касательный вектор к γ в каждой точке этой кривой имеет в базисе $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ координаты (u', v').

Таким образом координаты вектора $\boldsymbol{c}'(t)$ совпадают с координатами вектора $\boldsymbol{d}'(t)$, касательного к кривой $\beta = \mathbf{r}^{-1}(\gamma)$ для каждого $t \in I$.

Координатные линии можно задать уравнениями

$$\begin{cases} u = t, \\ v = v_o, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} u = u_o, \\ v = t. \end{cases}$$

Значит, касательные векторы к ним имеют координаты (1, 0) и (0, 1), т.е. это векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Итак, мы установили, что касательная плоскость к поверхности параллельна векторам $\mathbf{r}_u(x_u, y_u, z_u)$, $\mathbf{r}_v(x_v, y_v, z_v)$. Поэтому ее уравнение точке $M(x_o, y_o, z_o) = \mathbf{r}(u_o, v_o)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

При этом все производные вычисляются в точке (u_o, v_o).

Пусть поверхность Ф задана уравнением в явном виде: $z = f(x, y)$. Перепишем его в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

Пусть $M(x_o, y_o, z_o) \in Ф$. Применим формулу (6), учитывая, что $f_u = f_x$, $f_v = f_y$:

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение касательной плоскости к Ф в точке M:

$$z - z_o = f_x(x_o, y_o) \cdot (x - x_o) + f_y(x_o, y_o) \cdot (y - y_o). \qquad (7)$$

Определение. Прямая, проходящая через точку $M \in Ф$ перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в данной точке, называется *<u>нормалью к поверхности</u>* F *<u>в точке</u>* M.

По определению нормаль перпендикулярна векторам $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, а значит, она параллельна вектору $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. Поэтому ее уравнение:

$$\frac{x - x_o}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_o}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_o}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}},$$

Единичный направляющий вектор нормали к поверхности принято обозначать $\vec{\mathbf{n}}$. Тогда, очевидно, $\vec{\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$.

Пусть теперь поверхность Φ задана уравнением в неявном виде: $F(x, y, z) = 0$. Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(u, v)$ – это ее же параметрическое уравнение, $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Тогда для всех (u, v) из области определения параметризации должно выполняться $F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \equiv 0$. Дифференцируя это тождество по u и по v, получаем:

$$\begin{cases} F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u = 0, \\ F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Если ввести обозначение $\mathbf{grad}\, F = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right)$, то эти тождества можно переписать в векторном виде:

$$\begin{cases} (\mathbf{grad}\, F) \cdot \mathbf{r}_u \equiv 0, \\ (\mathbf{grad}\, F) \cdot \mathbf{r}_v \equiv 0. \end{cases} \tag{8$'$}$$

Они означают, что в каждой точке на поверхности вектор градиента является направляющим вектором нормали. Поэтому уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности имеют соответственно вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z},$$

а единичный вектор нормали: $\vec{\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{grad}\, F}{|\mathbf{grad}\, F|}$.

Замечание. Если в пространстве вместо СК $Oxyz$ ввести новую декартову СК $O'x'y'z'$, то та же самая элементарная поверхность Φ будет задаваться той же самой параметризацией $\mathbf{r}: U \to \Phi$; изменится только координатная запись этой вектор-функции. Векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ будут иметь другие координаты, но, тем не менее, это будут те же векторы. Значит, и *величина* $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ *не зависит от выбора* декартовой СК в пространстве.

В дальнейшем векторы, лежащие в касательной плоскости к поверхности, будем обозначать греческими буквами.

§ 3. *Первая квадратичная форма поверхности. Длина кривой на поверхности, угол между кривыми, площадь поверхности*

Пусть Φ – элементарная поверхность, $\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(u, v)$ – ее параметрическое уравнение, где вектор-функция $\mathbf{r}: U \to \Phi$ гладкая и регулярная. Пусть $M = \mathbf{r}(u_o, v_o)$ – произвольная точка на Φ, а $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ и $\vec{\boldsymbol{\eta}}$ – два вектора из касательной плоскости к поверхности Φ в точке M. Тогда мы можем разложить эти векторы по базису $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ $(\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(u_o, v_o), \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(u_o, v_o))$:

$$\vec{\boldsymbol{\xi}} = \xi_1\mathbf{r}_u + \xi_2\mathbf{r}_v, \quad \vec{\boldsymbol{\eta}} = \eta_1\mathbf{r}_u + \eta_2\mathbf{r}_v.$$

Вычислим скалярное произведение этих векторов:

$$\vec{\boldsymbol{\xi}}\cdot\vec{\boldsymbol{\eta}} = (\xi_1\mathbf{r}_u + \xi_2\mathbf{r}_v)\cdot(\eta_1\mathbf{r}_u + \eta_2\mathbf{r}_v) =$$
$$= \xi_1\eta_1(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u) + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v) + \xi_2\eta_2(\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v).$$

Обозначим $E = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u$, $F = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v$, $G = \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v$. В точке M это числа, а в целом на поверхности – это функции от u и v. Тогда

$$\vec{\boldsymbol{\xi}}\cdot\vec{\boldsymbol{\eta}} = E\,\xi_1\eta_1 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\,\xi_2\eta_2 \;\Rightarrow \tag{9}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\xi}}\cdot\vec{\boldsymbol{\xi}} = E\,\xi_1^2 + 2F\,\xi_1\xi_2 + G\,\xi_2^2. \tag{10}$$

Выражение в правой части (10) называется <u>*первой квадратичной формой поверхности*</u> и обозначается $\mathrm{I}(\vec{\boldsymbol{\xi}}, \vec{\boldsymbol{\xi}})$. Выражение в правой части (9) называется <u>*первой фундаментальной формой поверхности*</u> и обозначается $\mathrm{I}(\vec{\boldsymbol{\xi}}, \vec{\boldsymbol{\eta}})$.

Векторы, параллельные касательной плоскости к Φ в точке M, образуют двумерное векторное пространство. Первая фундаментальная форма с коэффициентами, вычисленными при $(u, v) = (u_o, v_o)$, представляет собой билинейную функцию, определенную на этом векторном пространстве, полярную квадратичной форме $\mathrm{I}(\vec{\boldsymbol{\xi}}, \vec{\boldsymbol{\xi}})$, определенной там же (см. приложение). Коэффициенты билинейной функции зависят от выбора базиса в векторном пространстве. Поэтому если мы вместо $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ выберем другой базис в касательной плоскости к Φ в точке M, то числа E, F, G изменятся. Поэтому E, F, G зависят от выбора конкретной параметризации элементарной поверхности Φ. Но значение $\mathrm{I}(\vec{\boldsymbol{\xi}}, \vec{\boldsymbol{\eta}})$ для тех же самых векторов $\vec{\boldsymbol{\xi}}, \vec{\boldsymbol{\eta}}$ не изменится.

По определению $\mathrm{I}(\vec{\boldsymbol{\xi}}, \vec{\boldsymbol{\eta}}) = \vec{\boldsymbol{\xi}}\cdot\vec{\boldsymbol{\eta}}$, т.е. можно сказать, что $\mathrm{I}(\vec{\boldsymbol{\xi}}, \vec{\boldsymbol{\eta}})$ представляет собой просто формулу для вычисления скалярного произведения векторов, если известны их координаты в базисе $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$, а матрица этой билинейной функции

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

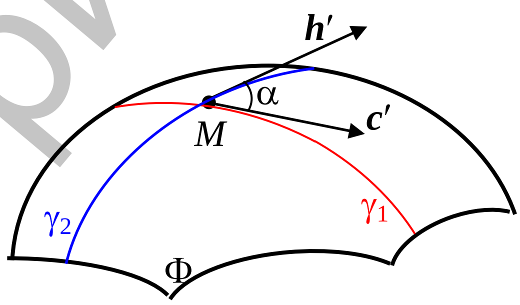
представляет матрицу Грама базиса $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$. Поэтому ее определитель $EG - F^2 > 0$. Зная формулу (9), мы можем найти также длину вектора и угол $\alpha = \angle(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ между векторами:

$$|\vec{\xi}| = \sqrt{\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\xi})} = \sqrt{E\,\xi_1^2 + 2F\,\xi_1\xi_2 + G\,\xi_2^2}\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\eta})}{\sqrt{\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\xi})}\sqrt{\mathrm{I}(\vec{\eta}, \vec{\eta})}} = \frac{E\,\xi_1\eta_1 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\,\xi_2\eta_2}{\sqrt{E\,\xi_1^2 + 2F\,\xi_1\xi_2 + G\,\xi_2^2}\sqrt{E\eta_1^2 + 2F\eta_1\eta_2 + G\eta_2^2}}.$$

Пусть γ_1 и γ_2 – две кривые на поверхности Φ, которые пересекаются в точке $M = \mathbf{r}(u_o, v_o)$. Тогда *углом между* этими *кривыми* в точке M называется угол между касательными прямыми к ним в этой точке. Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t)$ и $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{h}(\tau)$ – параметрические уравнения данных кривых в пространстве и $M = \boldsymbol{c}(t_o) = \boldsymbol{h}(\tau_o)$. Тогда угол между γ_1 и γ_2 можно найти так:

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{c}'(t_o)\cdot\boldsymbol{h}'(\tau_o)|}{|\boldsymbol{c}'(t_o)|\,|\boldsymbol{h}'(\tau_o)|}\,,$$



используя координаты векторов $\boldsymbol{c}'(t_o)$ и $\boldsymbol{h}'(\tau_o)$ в пространстве. Но, как правило, по условию задачи нам бывают известны внутренние уравнения кривых:

$$\gamma_1:\ \begin{cases} u = u_1(t), \\ v = v_1(t), \end{cases} \qquad \gamma_2:\ \begin{cases} u = u_2(\tau), \\ v = v_2(\tau), \end{cases}$$

Следовательно, нам известны координаты векторов $\boldsymbol{c}'(t_o)$ и $\boldsymbol{h}'(\tau_o)$ только в базисе $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$:

$$\boldsymbol{c}'(t_o) = (u_1'(t_o), v_1'(t_o)), \quad \boldsymbol{h}'(t_o) = (u_2'(\tau_o), v_2'(\tau_o)).$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{I}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{h}')}{\sqrt{\mathrm{I}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{c}')}\sqrt{\mathrm{I}(\boldsymbol{h}', \boldsymbol{h}')}} =$$

$$= \frac{|E\,u_1'v_1' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + G\,u_2'v_2'|}{\sqrt{E(u_1')^2 + 2F\,u_1'v_1' + G(v_1')^2}\sqrt{E(u_2')^2 + 2F\,u_2'v_2' + G(v_2')^2}}\,.$$

Пусть кривая γ на поверхности Φ задана уравнениями:

$$\begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases}$$

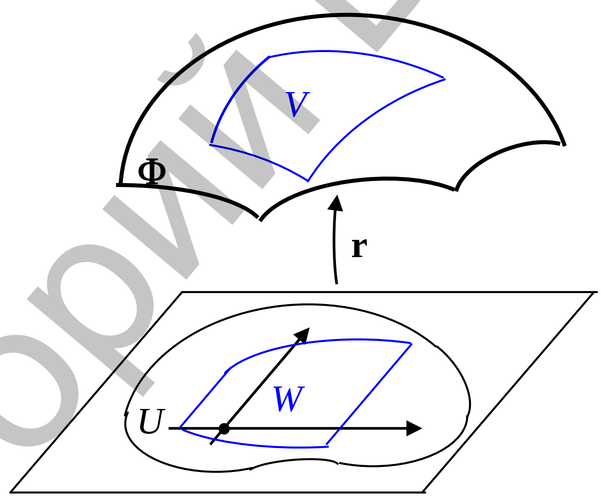
$A(u_o, v_o)\in\gamma$, $B(u_1, v_1)\in\gamma$ – две точки на кривой, $u_o = u(a)$, $v_o = v(a)$, $u_1 = u(b)$, $v_1 = v(b)$. Пусть $\boldsymbol{c}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$. Тогда, как мы уже знаем, длина дуги $\overset{\smile}{AB}$ вычисляется по формуле:

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = \int_a^b |\,\boldsymbol{c}'(t)|\,dt.$$

Нам известны координаты вектора $\boldsymbol{c}'(t)$ в базисе $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$: $\boldsymbol{c}'(t) = (u'(t), v'(t))$, поэтому его длину мы можем найти с помощью первой квадратичной формы. Тогда

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = \int_a^b \sqrt{\mathrm{I}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{c}')}\,dt = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2F\,u'v' + G(v')^2}\,dt. \qquad (11)$$

Пусть Φ – элементарная поверхность, $\mathbf{r}: U \to \Phi$ – ее регулярная параметризация. Пусть V – область на поверхности Φ, а $W = \mathbf{r}^{-1}(V)$ – область на U. Тогда V можно рассматривать саму по себе как элементарную поверхность, а $\mathbf{r}: W \to V$ – ее параметризация. Поэтому вместо того, чтобы говорить о площади области на поверхности, мы будем говорить о площади поверхности.



Определение. Разобьем поверхность V на маленькие кусочки V_i, каждый из которых однозначно проецируется в касательную плоскость к V в некоторой точке $M_i \in V_i$. Обозначим σ_i – площадь проекции V_i, а δ_i – диаметр V_i. Пусть $\delta = \max\limits_i \delta_i$. Тогда <u>*площадью поверхности*</u> V называется величина

$$S = \lim_{\delta\to 0} \left(\sum_i \sigma_i\right).$$

Поясним это определение. Мы знаем, что такое площадь плоской области. Пусть V' – область на поверхности. Выберем точку $M' \in V'$ и спроецируем область V' в касательную плоскость к поверхности в точке M'. Если V' достаточно мала, то проекция будет биекцией и V' мало отличается от своей проекции. Тогда мы можем считать, что площадь V' приближенно равна площади проекции. Чем мельче область, тем точнее будет приближение. Чтобы приближенно вычислить площадь поверхности, надо ее разбить на очень маленькие области и просуммировать площади их проекций. Чем мельче будет разбиение, тем точнее будет приближение. Предел этих сумм при измельчении разбиения и дает площадь поверхности.

Примем без доказательства, что

$$S(V)=\iint\limits_U |\mathbf{r}_u\times \mathbf{r}_v|\,dudv. \tag{12}$$

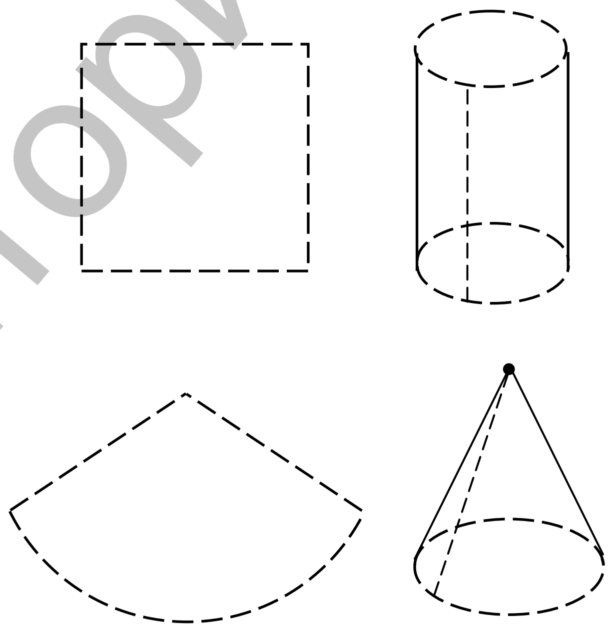
Для любых векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ выполнено: $|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|^2=\vec{\mathbf{a}}^2\vec{\mathbf{b}}^2-(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})^2$. Отсюда $|\mathbf{r}_u\times \mathbf{r}_v|^2=EG-F^2$ и

$$S(V)=\iint\limits_U \sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{12$'$}$$

Определение. *Объектами внутренней геометрии поверхности* называются все величины, которые можно вычислить с помощью одной только первой квадратичной формы поверхности.

Определение. Говорим, что *простая поверхность* Φ_1 *получена изгибанием простой поверхности* Φ, если существует гомеоморфизм $h\colon \Phi\to\Phi_1$, который сохраняет длины кривых на поверхности.

Например, при изгибании плоской бумажной полосы мы можем получить круговой цилиндр (с разрезом по образующей). При изгибании плоского сектора мы можем получить коническую поверхность. Оказывается, существуют и более сложные поверхности, которые допускают изгибания. Например, любая область на сфере допускает изгибание, если она полностью помещается на полусфере.



Примем без доказательства, что при изгибаниях поверхности сохраняется ее I квадратичная форма, а следовательно, и все объекты внутренней геометрии поверхности.

Мы выяснили, что к ним относятся *длина кривой на поверхности, угол между кривыми, площадь области на поверхности*. Примем без доказательства, что *гауссова кривизна поверхности* (см. §4) тоже может быть вычислена с помощью одной только первой квадратичной формы. Все эти величины не изменяются при изгибаниях поверхности.

Замечание. Иногда используется дифференциальная форма записи первой квадратичной формы: $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$. В этом случае ds означает дифференциал длины дуги кривой. Данная запись оказывается полезной, когда требуется составить дифференциальное уравнение кривой на поверхности, обладающей некоторым заданным свойством.

§ 4. *Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна поверхности. Теорема Менье*

В этом и всех последующих параграфах все кривые и поверхности предполагаются гладкими класса C^2 и регулярными.

Определение. Пусть Φ – элементарная поверхность, а $\mathbf{r}: U \to \Phi$ – ее параметризация, $M(x_o, y_o, z_o) = \mathbf{r}(u_o, v_o)$. Рассмотрим числа:

$$L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_{uu} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_{uv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_{vv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

где все производные вычисляются в точке (u_o, v_o). Пусть $\vec{\xi} = \xi_1\mathbf{r}_u + \xi_2\mathbf{r}_v$ – произвольный вектор из касательной плоскости к поверхности в точке M. Тогда выражение

$$\mathrm{II}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = L\,\xi_1^2 + 2M\xi_1\xi_2 + N\,\xi_2^2 \tag{13}$$

называется <u>*второй квадратичной формой поверхности в точке*</u> M.

В целом на поверхности L, M, N – это функции от u и v. Тогда выражение (13) называется <u>*второй квадратичной формой поверхности*</u>. Как и в случае с первой квадратичной формой, конкретный вид функций L, M, N зависит от выбора параметризации элементарной поверхности Φ. Зависят от этого и координаты вектора $\vec{\xi}$ в базисе $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ (т.к. при изменении параметризации изменится и базис). Примем пока без доказательства, что значение $\mathrm{II}(\vec{\xi}, \vec{\xi})$ не изменится при допустимой замене параметра.

Пусть поверхность задана уравнением в явном виде $z = f(x, y)$. Перепишем его в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{r}_u(1, 0, f_u),\ \ \mathbf{r}_v(0, 1, f_v),\ \ \mathbf{r}_{uu}(0, 0, f_{uu}),\ \ \mathbf{r}_{uv}(0, 0, f_{uv}),\ \ \mathbf{r}_{vv}(0, 0, f_{vv});$$

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = 1 + (f_u)^2,\ \ F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = f_u f_v,\ G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = 1 + (f_v)^2,$$

$$EG - F^2 = 1 + (f_u)^2 + (f_v)^2;$$

$$L = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & f_{uu} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}},$$

учитывая, что $u = x$, а $v = y$. Аналогично находим, что

$$M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}}, \qquad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}}. \qquad (14)$$

Упражнение. Вычислите коэффициенты второй квадратичной формы эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2$.

Пусть γ – кривая на элементарной поверхности Φ, заданной параметрическим уравнением $\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(u, v)$. Зададим ее уравнением с естественным параметром: $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(s)$, $\boldsymbol{c}(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$. Пусть $P \in \gamma$, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор главной нормали к γ в точке P, а $\vec{\mathbf{n}}$ – единичный вектор нормали к поверхности. Пусть $\theta = \angle(\boldsymbol{\nu}, \vec{\mathbf{n}})$, а k – кривизна кривой γ в точке P. Обозначим $k_{\text{o}} = k|\cos\theta|$.

Мы знаем, что $\ddot{\boldsymbol{c}} = k\boldsymbol{\nu}$. Умножим это равенство скалярно на $\vec{\mathbf{n}}$:

$$\ddot{\boldsymbol{c}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = k\boldsymbol{\nu} \cdot \vec{\mathbf{n}} = k|\boldsymbol{\nu}||\vec{\mathbf{n}}|\cos\theta = k\cos\theta.$$

С другой стороны, $\dot{\boldsymbol{c}} = \dot{u}\,\mathbf{r}_u + \dot{v}\,\mathbf{r}_v$, $\ddot{\boldsymbol{c}} = \ddot{u}\,\mathbf{f}_u + \ddot{v}\,\mathbf{r}_v + (\dot{u})^2\mathbf{r}_{uu} + 2\dot{u}\dot{v}\,\mathbf{r}_{uv} + (\dot{v})^2\mathbf{r}_{vv}$
,

$$\ddot{\boldsymbol{c}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \ddot{u}\,\mathbf{r}_u \cdot \vec{\mathbf{n}} + \ddot{v}\,\mathbf{r}_v \cdot \vec{\mathbf{n}} + (\dot{u})^2\mathbf{r}_{uu} \cdot \vec{\mathbf{n}} + 2\dot{u}\dot{v}\,\mathbf{r}_{uv} \cdot \vec{\mathbf{n}} + (\dot{v})^2\mathbf{r}_{vv} \cdot \vec{\mathbf{n}}.$$

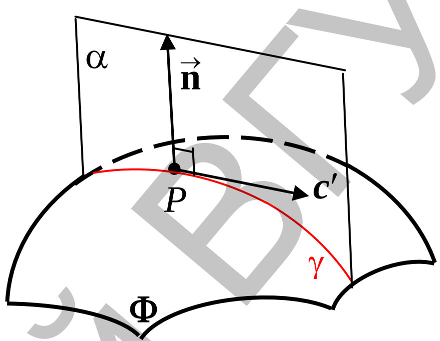
Учитывая, что $\mathbf{r}_u \perp \vec{\mathbf{n}}$, $\mathbf{r}_v \perp \vec{\mathbf{n}}$, получаем:

$$\ddot{\boldsymbol{c}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = L(\dot{u})^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N(\dot{v})^2 = \mathrm{II}(\dot{\boldsymbol{c}}, \dot{\boldsymbol{c}}) \quad \Rightarrow \quad k_{\text{o}} = |\mathrm{II}(\dot{\boldsymbol{c}}, \dot{\boldsymbol{c}})|.$$

Если параметризация кривой не является естественной, то вектор $\boldsymbol{c}'$ не является единичным. Тогда $\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}'/|\boldsymbol{c}'|$, и поэтому

$$k_{\text{о}} = \left|\mathrm{II}\left(\frac{\boldsymbol{c}'}{|\boldsymbol{c}'|}, \frac{\boldsymbol{c}'}{|\boldsymbol{c}'|}\right)\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{c}'|^2}|\mathrm{II}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{c}')| = \frac{|\mathrm{II}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{c}')|}{\mathrm{I}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{c}')}.$$

Возьмем теперь в качестве γ кривую, которая получается в сечении поверхности плоскостью α, проходящей через P параллельно вектору $\vec{\mathbf{n}}$. Тогда вектор главной нормали $\boldsymbol{\nu}$ к кривой γ в точке P будет



лежать в этой плоскости и будет перпендикулярен касательной. Значит $\boldsymbol{\nu} || \vec{\mathbf{n}}$ и $|\cos\theta| = 1 \Rightarrow$ $k_{\text{о}} = \pm k$. Поэтому величина $k_{\text{о}}$ называется *кривизной нормального сечения поверхности в точке* P *в направлении кривой* γ или *нормальной кривизной*. Придадим этой величине знак так, чтобы была верна формула:

$$k_{\text{о}} = \frac{\mathrm{II}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{c}')}{\mathrm{I}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{c}')}. \tag{15}$$

Именно в этой формуле заключается ***Теорема Менье***.

Мы видим, что величина $k_{\text{о}}$ не зависит от выбора конкретной параметризации кривой γ, а зависит только от направления касательного вектора $\boldsymbol{c}'$ в точке P. Поэтому можем определить нормальную кривизну поверхности в направлении вектора $\vec{\xi}$, лежащего в касательной плоскости:

$$k_{\text{о}} = \frac{\mathrm{II}(\vec{\xi}, \vec{\xi})}{\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\xi})}.$$

§ 5. *Главные направления, главные кривизны, гауссова и средняя кривизна*

С помощью выбора ортонормированного базиса любую квадратичную форму в евклидовом пространстве можно привести к диагональному виду. Значит, с помощью выбора ОНБ $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\}$ в касательной плоскости π к поверхности Φ в данной точке P мы можем привести II квадратичную форму к диагональному виду:

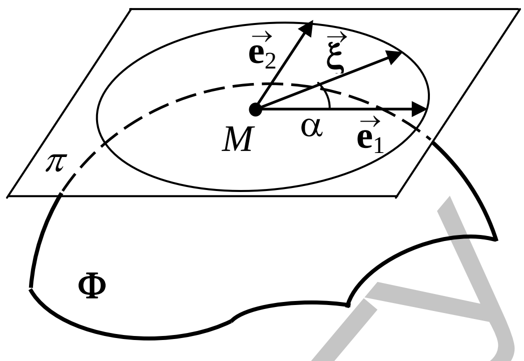
$$\mathrm{II}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2. \tag{*}$$

Поскольку базис является ортонормированным, то

$$\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Обозначим $S^1 = \{\vec{\xi} \mid |\vec{\xi}| = 1\}$ – множество всех единичных векторов из касательной плоскости (их концы образуют окружность). Тогда для $\vec{\xi} \in S^1$ выполнено:

$$\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = 1.$$



Пусть α – угол между векторами $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\xi}$, а $k(\alpha)$ – нормальная кривизна поверхности в направлении вектора $\vec{\xi}$. Тогда $\xi_1 = |\vec{\xi}|\cos\alpha$, $\xi_2 = |\vec{\xi}|\sin\alpha$. Подставляя это в $(*)$, получаем

$$k(\alpha) = \lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \sin^2\alpha. \qquad (16)$$

Эта формула называется <u>*формулой Эйлера*</u>. Из нее вытекает, что максимум и минимум функции $k(\alpha)$ – это λ_1 и λ_2, и достигаются они при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$, т.е. в направлении векторов $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$.

Определение. Числа λ_1 и λ_2 называются <u>*главными кривизнами*</u> поверхности Ф в точке P, а направления векторов $\vec{\mathbf{e}}_1$ и $\vec{\mathbf{e}}_2$ называются <u>*главными направлениями*</u> поверхности в точке P. Величина $K = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ называется <u>*гауссовой кривизной*</u>, а $H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ – <u>*средней кривизной*</u>.

Согласно теореме Виета λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0. \qquad (17)$$

Таким образом, зная K и H, мы можем найти λ_1 и λ_2.

Определение. Точки на поверхности, в которых

$K > 0$ ($\Leftrightarrow$ λ_1 и λ_2 одного знака) называются <u>*эллиптическими*</u>;

$K < 0$ ($\Leftrightarrow$ λ_1 и λ_2 разных знаков) – <u>*гиперболическими*</u>;

$K = 0$, $H \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$) – <u>*параболическими*</u>;

$K = H = 0$ ($\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) – <u>*точками уплощения*</u>;

$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ – <u>*омбилическими точками*</u> (частный случай эллиптических точек).

Определение. Кривая в касательной плоскости, которая определяется уравнением $\mathrm{II}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \pm 1$, называется <u>*индикатрисой кривизны*</u>, или <u>*индикатрисой Дюпена*</u> (знак «+» или «–» в случае эллипса выбирается так, чтобы кривая не была мнимой).

Если единичные базисные векторы $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ в касательной плоскости имеют главные направления, то уравнение индикатрисы Дюпена:

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 = \pm 1.$$

В эллиптической точке это будет, очевидно, эллипс; в гиперболической – пара сопряженных гипербол; в омбилической – окружность; в точке уплощения – пустое множество. В параболической точке уравнение индикатрисы Дюпена имеет вид $\lambda_2 \xi_2^2 = \pm 1$ или $\lambda_1 \xi_1^2 = \pm 1$, т.е. это будет пара параллельных прямых.

Определение. Направления на поверхности, в которых нормальная кривизна равна нулю, называются *асимптотическими*.

Асимптотические направления, очевидно, находятся из уравнения $\mathrm{II}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 0$. Если базисные векторы в касательной плоскости имеют главные направления, то эти направления определяются уравнением:

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 = 0.$$

В эллиптической точке асимптотических направлений, очевидно, нет; в гиперболической точке их два, и они совпадают с асимптотами гиперболы, являющейся индикатрисой кривизны. В параболической точке асимптотическое направление одно, и оно параллельно прямым, составляющим индикатрису кривизны. В точке уплощения любое направление является асимптотическим. В асимптотических направлениях поверхность «очень мало» отклоняется от касательной плоскости.

Определение. Линия на поверхности называется *линией кривизны*, если ее касательный вектор в каждой точке коллинеарен главному направлению.

Осталось выяснить, как же найти главные направления и главные кривизны. Имеем формулу:

$$k_{\text{о}} = \frac{\mathrm{II}(\vec{\xi}, \vec{\xi})}{\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\xi})}.$$

Продифференцируем ее по ξ_1 или по ξ_2 и приравняем производные к нулю (т.к. в гл. направлениях кривизна экстремальна):

$$\frac{\mathrm{II}' \cdot \mathrm{I} - \mathrm{I}' \cdot \mathrm{II}}{\mathrm{I}^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{II}' \cdot \mathrm{I} = \mathrm{I}' \cdot \mathrm{II}.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{II}'}{\mathrm{I}'} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = k_{\text{о}}.$$

В координатах это равенство дает два равенства:

$$\frac{L\xi_1 + M\xi_2}{E\xi_1 + F\xi_2} = k_о, \quad \frac{M\xi_1 + N\xi_2}{F\xi_1 + G\xi_2} = k_о. \tag{18}$$

Первое получается дифференцированием по ξ_1, второе – по ξ_2. Отсюда получаем уравнение для нахождения главных направлений:

$$\frac{L\xi_1 + M\xi_2}{E\xi_1 + F\xi_2} - \frac{M\xi_1 + N\xi_2}{F\xi_1 + G\xi_2} = 0.$$

В удобной для запоминания форме оно выглядит так:

$$\begin{vmatrix} \xi_2^2 & -\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

(можно проверить непосредственным вычислением, что две последние формулы совпадают). Это уравнение после раскрытия определителя примет вид:

$$a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 = 0.$$

Разделим его на ξ_2^2 и получим квадратное уравнение относительно неизвестного $\xi_1 : \xi_2$

$$a\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2 + b\frac{\xi_1}{\xi_2} + c = 0.$$

В омбилической точке и точке уплощения решений будет бесконечное количество (поскольку любое направление в этих точках является главным). В остальных точках решений будет 2. Тем самым мы находим два неколлинеарных вектора $\vec{\mathbf{x}}(\xi_1 : \xi_2)$, $\vec{\mathbf{y}}(\eta_1 : \eta_2)$, координаты которых определяются с точностью до пропорциональности. Подставляя их координаты в любое из равенств (18), находим главные кривизны λ_1 и λ_2: оба равенства должны давать одинаковый результат. В одном из равенств может получиться неопределенность 0/0, тогда второе обязательно даст результат.

Равенства (18) можно переписать еще и в таком виде:

$$\begin{cases} (L - k_оE)\xi_1 + (M - k_оF)\xi_2 = 0, \\ (M - k_оF)\xi_1 + (N - k_оG)\xi_2 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Эта система имеет ненулевое решение $\xi_1 : \xi_2$ $\Leftrightarrow$ ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} L - k_оE & M - k_оF \\ M - k_оF & N - k_оG \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (EG - F^2)k_о^2 - (LG - 2FM + NE)k_о + LN - M^2 = 0.$$

Корнями этого квадратного уравнения будут λ_1 и λ_2. Таким образом мы можем найти главные кривизны из этого уравнения, не находя сами направления, а потом уже из (18) найти главные направления. Применяя к последнему уравнению теорему Виета, получаем:

$$H=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)=\frac{LG-2FM+NE}{2(EG-F^2)}, \quad K=\lambda_1\cdot\lambda_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}. \tag{21}$$

Таким образом мы имеем еще один путь решения: можно вычислить сначала K и H по формулам (21), а потом найти λ_1 и λ_2 из уравнения (17). Подставляя эти величины вместо k_0 в (20), мы найдем главные направления.

Как мы уже отмечали, гауссову кривизну можно вычислить с помощью одной только первой квадратичной формы, и поэтому она не изменяется при изгибаниях поверхности. Например, для плоской области $\lambda_1=\lambda_2=0 \Rightarrow K=0$. Для цилиндра или конуса направление образующих является асимптотическим, т.е. нормальная кривизна поверхности в этом направлении равна нулю. Направление, перпендикулярное образующим, будет главным, и в этом направлении нормальная кривизна не будет равна нулю. Но все равно, произведение $\lambda_1\cdot\lambda_2$ равно нулю, как и для плоской области. При изгибании области на сфере невозможно получить поверхность, у которой есть хотя бы одна точка с окрестностью седлообразной формы, как на гиперболическом параболоиде, потому что седлообразные точки являются гиперболическими, а для сферы $K>0$.

Замечание. Иногда используется дифференциальная форма записи второй квадратичной формы: $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$. Она оказывается полезной, когда требуется составить дифференциальное уравнение кривой на поверхности, обладающей некоторым заданным свойством. Например, дифференциальное уравнение асимптотических линий имеет вид:

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0.$$

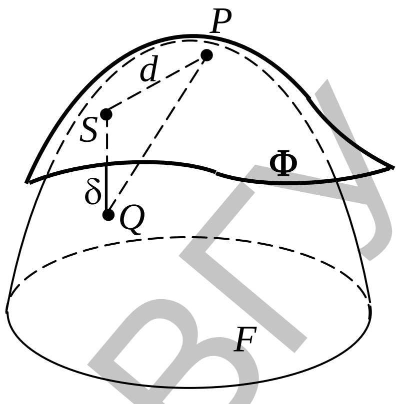
Уравнение (19) в дифференциальной форме

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0 \tag{19′}$$

представляет собой дифференциальное уравнение линий кривизны.

§ 6. *Соприкасающийся параболоид к поверхности*

Определение. Пусть две поверхности Φ и F имеют общую точку P и общую касательную плоскость π в этой точке. Пусть $S\in\Phi$ – близкая к P точка. Проведем через S прямую, перпендикулярную плоскости π. Она пересечет F в некоторой точке Q. Обозначим $d=|PS|$, $\delta=|QS|$. Говорят, что <u>*поверхности*</u> Φ и F <u>*соприкасаются в точке*</u> P, если $\lim\limits_{S\to P}\dfrac{\delta}{d^2}=0$.



Теорема 3. *Пусть Φ – регулярная поверхность класса C^2. Тогда в каждой ее точке существует, и притом единственный, соприкасающийся параболоид, который может вырождаться в параболический цилиндр или плоскость.*

Доказательство. Пусть $P\in\Phi$ – произвольная точка, а π – касательная плоскость к Φ в точке P. Введем в пространстве декартову СК $Oxyz$ так, чтобы $P=O$, а π совпадала с Oxy. Тогда поверхность Φ в окрестности точки P можно задать уравнением в явном виде:

$$z=f(x,y).$$

При этом $\varphi(0,0)=0$. В соответствии с (7) уравнение касательной плоскости в точке P имеет вид:

$$z=x\cdot f_x(0,0)+y\cdot f_y(0,0).$$

Но в нашей СК касательная плоскость имеет уравнение $z=0$. Значит,

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0. \qquad (*)$$

Поэтому разложение функции $f(x,y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0,0)$ имеет вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(f_{xx}x^2+2f_{xy}xy+f_{yy}y^2)+\varepsilon(x,y)(x^2+y^2),$$

где $\varepsilon(x,y)\to 0$ при $x,y\to 0$. Значит, уравнение поверхности Φ в окрестности точки P имеет вид:

$$z=\frac{1}{2}(f_{xx}x^2+2f_{xy}xy+f_{yy}y^2)+\varepsilon(x,y)(x^2+y^2).$$

(все производные вычисляются в точке $(0,0)$). Определим поверхность F уравнением:

$$z = \frac{1}{2}(f_{xx}x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}y^2). \qquad (**)$$

Пусть $S(x, y, z) \in \Phi$ – близкая к P точка. Тогда точка $Q \in F$ имеет те же координаты x, y, что и точка S, т.е. $Q(x, y, z') \Rightarrow$

$$\delta = z - z' = \varepsilon(x, y)(x^2 + y^2)\,,\; d = |OS| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\;;$$

$$\frac{\delta}{d^2} = \frac{\varepsilon(x, y)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + z^2} \to 0$$

при $x, y \to 0$, т.к. $0 \le \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \le 1$.

Выясним, какого типа поверхность F определяется уравнением (**). С учетом (*), формулы (13) дают $L = f_{xx}, M = f_{xy}, N = f_{yy}$. Значит, уравнение F имеет вид:

$$2z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2. \qquad (22)$$

Если мы к тому же направим координатные оси Ox и Oy по главным направлениям поверхности Φ в точке P, то уравнение F примет вид:

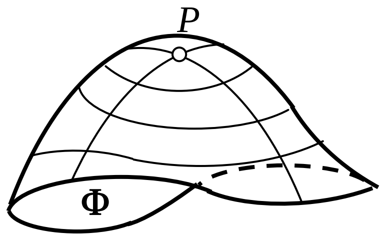
$$2z = \nu_1 x^2 + \nu_2 y^2.$$

Теперь очевидно, что для эллиптической точки P поверхность F будет эллиптическим параболоидом, для гиперболической – гиперболическим параболоидом; для параболической точки P уравнение F примет вид

$$2z = \nu_1 x^2 \quad \text{или} \quad 2z = \nu_2 y^2,$$

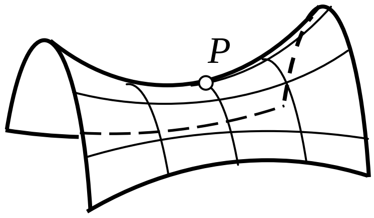
а значит F будет параболическим цилиндром. В точке уплощения имеем уравнение $2z = 0 \Rightarrow F$ будет плоскостью.

Единственность соприкасающегося параболоида примем без доказательства. ■

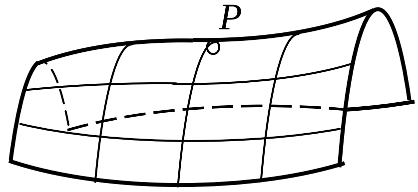


Мы выяснили, что

1) ближайшая окрестность эллиптической точки P похожа на окрестность вершины эллиптического параболоида;

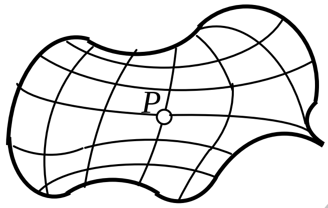


2) ближайшая окрестность гиперболической точки имеет седлообразную форму, как область на гиперболическом параболоиде;



3) ближайшая окрестность параболической точки похожа на область на параболическом цилиндре;

4) ближайшая окрестность точки уплощения мало отличается от плоской области, но более точное изучение может показать, что эта окрестность имеет очень сложную структуру.

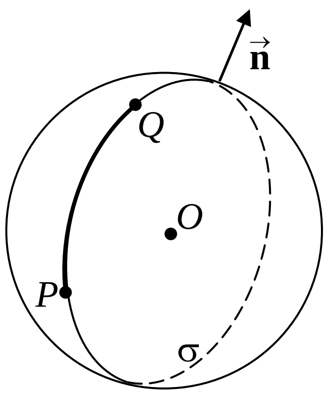


Пусть F – соприкасающийся параболоид к поверхности Φ в точке $P \in \Phi$. Пусть декартова СК в пространстве выбрана так же, как и в доказательстве теоремы и (22) – уравнение F. Рассмотрим сечение F плоскостью $z = \pm 1/2$. Получившуюся кривую спроецируем в касательную плоскость. Тогда уравнение проекции γ будет $\nu_1 x^2 + \nu_2 y^2 = \pm 1$. Значит γ является индикатрисой кривизны.

Заметим, что в точке P первая и вторая квадратичные формы для Φ и для F одинаковы. Отсюда следует, что нормальная кривизна поверхности и ее соприкасающегося параболоида в любом направлении одинакова.

§ 7. *Геодезические линии на поверхности*

Мы знаем, что кратчайшей кривой, соединяющей две точки P и Q на сфере, является дуга большой окружности σ. Ее можно получить в сечении сферы плоскостью α , проходящей через P, Q и центр сферы. Эта плоскость проходит через нормаль к сфере в каждой точке окружности σ. Поскольку σ лежит в плоскости α, то и ее главная нормаль в каждой точке лежит в этой плоскости, а значит она совпадает с нормалью к сфере.



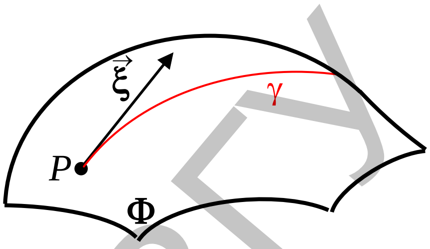
Оказывается, на любой поверхности роль кратчайших линий играют кривые, обладающие этим свойством.

Определение. Кривая γ на поверхности Φ называется *геодезической*, если ее главная нормаль в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, совпадает с нормалью к поверхности.

Составим уравнение геодезических. Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t)$ – параметрическое уравнение геодезической γ. В каждой точке кривой γ единичный вектор нормали $\vec{\mathbf{n}}$ к поверхности Φ параллелен главной нормали к γ, а значит он параллелен соприкасающейся плоскости. Следовательно, он компланарен векторам $\boldsymbol{c}'$ и $\boldsymbol{c}''$ $\Leftrightarrow$

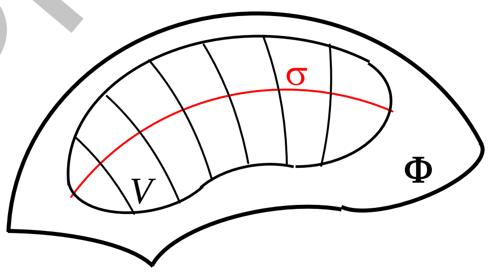
$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{c}' \cdot \boldsymbol{c}'' \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0. \qquad (23)$$

Это уравнение называется <u>*уравнением геодезической*</u>. Оно представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка в векторном виде относительно неизвестной вектор-функции $\boldsymbol{c}(t)$. Для того, чтобы это уравнение имело единственное решение, необходимо задать начальные данные $\boldsymbol{c}(0)$ и $\boldsymbol{c}'(0)$, т.е. необходимо задать начальную точку $P=\boldsymbol{c}(0)$ и начальный касательный вектор к кривой $\vec{\xi}=\boldsymbol{c}'(0)$. Геометрически это означает, что *из каждой точки на поверхности в направлении каждого касательного вектора выходит ровно одна геодезическая.*



Из каждой точки на сфере в направлении каждого касательного вектора выходит ровно одна дуга большой окружности. Следовательно, других геодезических на сфере нет. Прямые на плоскости не подпадают под определение геодезических, т.к. для них $k\equiv 0$. Тем не менее для них $\boldsymbol{c}''\equiv 0$, а значит, они также удовлетворяют уравнению геодезических. Также из каждой точки на плоскости в направлении каждого вектора выходит ровно одна прямая.

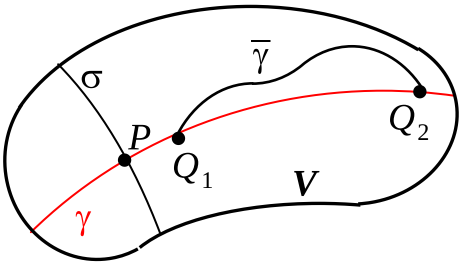
Примем без доказательства следующий факт. Если σ – произвольная гладкая кривая на поверхности, то в ее окрестности можно ввести <u>*полугеодезическую параметризацию поверхности*</u>, при которой σ имеет уравнение $u=0$, а семейство координатных линий $v=\mathrm{const}$ – это геодезические, перпендикулярные σ. При этом I квадратичная форма будет иметь вид:



$$\mathrm{I}(\vec{\xi},\vec{\xi}\,)=\xi_1^2+G\xi_2^2. \qquad (24)$$

***Теорема* 4. (*Экстремальное свойство геодезических* I).** *Пусть γ – произвольная геодезическая кривая на поверхности Φ, а $P\in\gamma$ – произвольная точка. Тогда найдется такая окрестность V точки P, что для любых точек Q_1, $Q_2\in\gamma\cap V$ отрезок геодезической γ, соединяющий Q_1 и Q_2, будет кратчайшей среди всех кривых, соединяющих эти точки в пределах окрестности V.*

Доказательство. Проведем через точку P геодезическую $\gamma\perp\sigma$. Введем в окрестности V точки P полугеодезическую параметризацию поверхности, при которой семейство линий $v=\mathrm{const}$ – это геодезические,



перпендикулярные σ. Тогда γ в пределах окрестности V задается уравнением $v = v_{o}$. Можно считать, что $v_{o} = 0$. Пусть $Q_1, Q_2 \in \gamma \cap V$, а $\overline{\gamma}$ – произвольная кривая в окрестности V, соединяющая Q_1 и Q_2. Пусть $\boldsymbol{h}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ – параметризация $\overline{\gamma}$, $Q_1 = \boldsymbol{h}(t_1)$, $Q_2 = \boldsymbol{h}(t_2)$. Тогда, с учетом (24), находим, что длина дуги кривой $\overline{\gamma}$ от Q_1 до Q_2 равна:

$$\overline{l} = \int_{t_2}^{t_1} \sqrt{(u')^2 + G(v')^2}\, dt \geq \int_{t_2}^{t_1} |u'|\, dt.$$

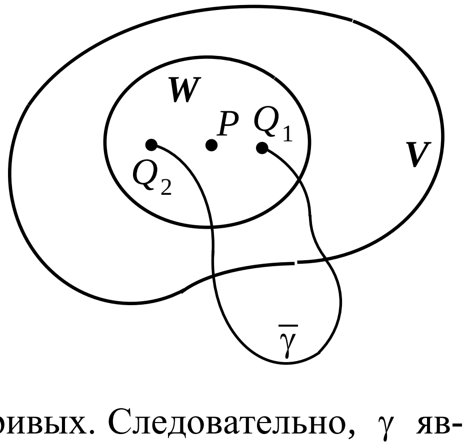
Параметризацию геодезической γ можем выбрать так: $\boldsymbol{c}(t) = \mathbf{f}(u(t), 0)$. Тогда длина дуги кривой γ от Q_1 до Q_2 равна:

$$l = \int_{t_2}^{t_1} |u'|\, dt.$$

Значит, $l \leq \overline{l}$. ■

***Теорема* 5. (*Экстремальное свойство геодезических* II).** *В условиях теоремы 4 можно так выбрать окрестность* W*, что для любых точек* $Q_1, Q_2 \in \gamma \cap W$*, отрезок геодезической* γ*, соединяющий* Q_1 *и* Q_2*, будет кратчайшей среди всех кривых, соединяющих эти точки на поверхности.*

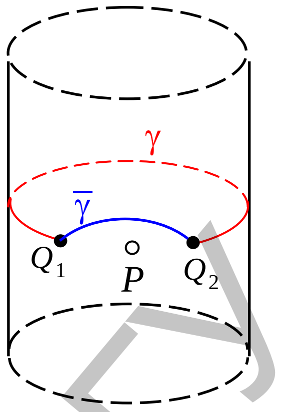
Доказательство. Пусть V – это область из доказательства теоремы 4, а d – это расстояние от точки P до границы области V. Пусть $W = B(P, d/2)$. Тогда любая кривая $\overline{\gamma}$, которая имеет начало и конец в W, но покидает V, будет иметь длину больше d. Но точки Q_1 и Q_2 можно соединить в пределах W кривой, длина которой меньше d и γ является кратчайшей среди всех таких кривых. Следовательно, γ является кратчайшей среди всех кривых на поверхности, соединяющих Q_1 и Q_2. ■



Данная теорема показывает, что расстоянием между двумя точками на поверхности можно назвать длину отрезка геодезической, соединяющей эти точки.

Подчеркнем, что геодезические являются кратчайшими лишь локально, в пределах некоторой окрестности. В целом на поверхности могут существовать кривые, соединяющие данные точки, которые будут короче отрезка геодезической.

***Пример* 1.** Пусть Φ – это цилиндр, Q_1 и Q_2 лежат на одной параллели, достаточно близко друг к другу. Удалим из цилиндра точку P, лежащую на этой параллели между ними. Тогда единственной геодезической, соединяющей будет дуга параллели γ (см. рисунок), но она не является кратчайшей. Кривая $\overline{\gamma}$ будет короче.

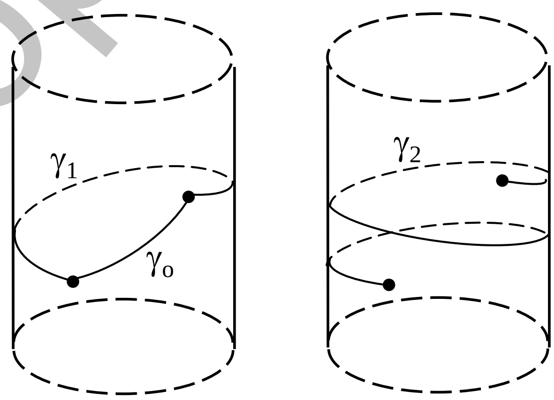


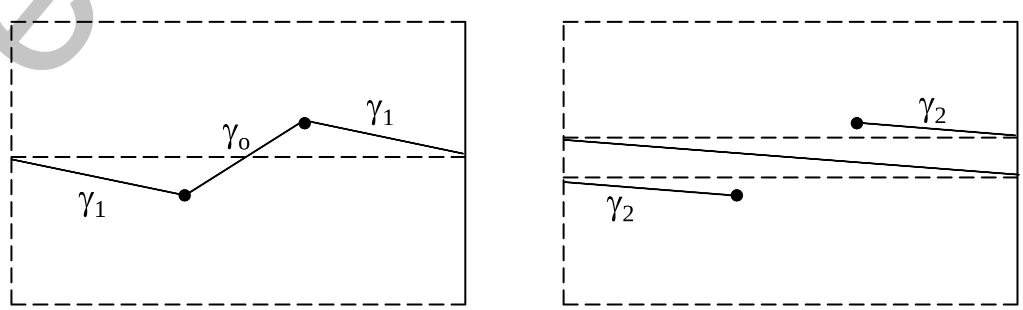
Примем без доказательства, что геодезические являются объектом внутренней геометрии поверхности. Это связано с тем, что длина кривой – это объект внутренней геометрии, а геодезические – это кратчайшие (локально). Поэтому геодезические можно найти с помощью методов вариационного исчисления.

Также примем без доказательства следующий факт.

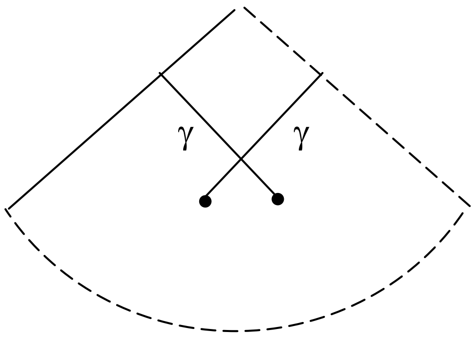
***Теорема* 6.** *У каждой точки P на поверхности Φ существует окрестность V, такая, что любые две точки Q_1, $Q_2 \in V$ можно соединить, и притом единственной, геодезической, лежащей в V.*

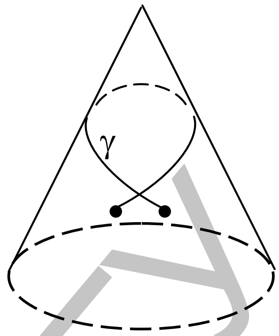
В целом на поверхности это неверно. Диаметрально противоположные точки на сфере можно соединить бесконечным числом геодезических. Так же и на цилиндре, любые две точки, не лежащие на одной параллели, можно соединить бесконечным числом геодезических. Это будут те линии, которые на развертке цилиндра изображаются отрезками прямой.





Три из них показаны на чертежах. Легко догадаться, как получаются остальные. Аналогично геодезическими на конусе служат кривые, которые на развертке конуса изображаются отрезками прямой.



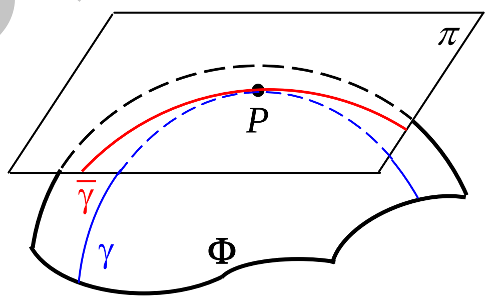


Пример конуса показывает, что геодезические могут иметь самопересечения. Для того, чтобы после склейки кривая не имела изломов, отрезки должны подходить к границе развертки под прямым углом.

Замечание. В случае полугеодезической параметризации гауссова кривизна поверхности вычисляется по формуле: $K = -\dfrac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$.

§ 8. *Теорема Гаусса–Бонне*

Пусть γ – произвольная кривая на поверхности Ф, точка $P \in \gamma$. Спроецируем γ в касательную плоскость к поверхности в точке P. Получим кривую $\bar{\gamma}$. Обозначим кривизну кривой $\bar{\gamma}$ в точке P через k_g. Тогда величина k_g называется геодезической кривизной кривой γ в точке P.

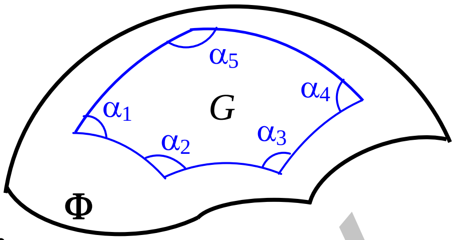


Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \boldsymbol{c}(t)$ – параметрическое уравнение кривой γ. Тогда (без доказательства) k_g вычисляется по формуле:

$$k_g = \frac{\boldsymbol{c}' \cdot \boldsymbol{c}'' \cdot \vec{\mathbf{n}}}{|\boldsymbol{c}'|^3}. \qquad (24)$$

При этом γ является геодезической тогда и только тогда, когда числитель в этой формуле равен нулю. Поэтому мы можем определить геодезическую как кривую, у которой геодезическая кривизна равна нулю. Геодезическая при проекции в касательную плоскость дает кривую, которая очень мало отличается от прямой в окрестности точки P.

Теорема Гаусса–Бонне. *Пусть* G *– область на поверхности, гомеоморфная кругу и ограниченная кусочно-гладкой регулярной кривой* γ. *Пусть* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *– внутренние углы в точках излома. Тогда*



$$\int_\gamma k_g ds + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \iint_G K d\sigma. \qquad (25)$$

В частности, если точек излома нет, то получаем формулу:

$$\int_\gamma k_g ds = 2\pi - \iint_G K d\sigma,$$

а если все участки кривой γ *– геодезические, то* G *называется геодезическим многоугольником, и* (23) *принимает вид*:

$$\sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \iint_G K d\sigma.$$

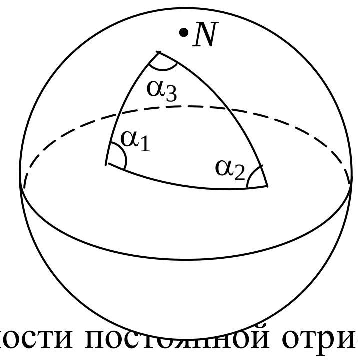
Для геодезического треугольника из последней формулы получаем

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) = 2\pi - \iint_G K d\sigma. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_G K d\sigma.$$

Значит, если гауссова кривизна поверхности положительна, то сумма углов геодезического треугольника больше 180°, а если отрицательна – то меньше 180°. На практических занятиях мы вычислим, что для сферы $K = 1/R^2$. Значит, под двойным интегралом находится постоянная величина. Отсюда для геодезического треугольника на сфере

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \frac{S(G)}{R^2} > \pi,$$

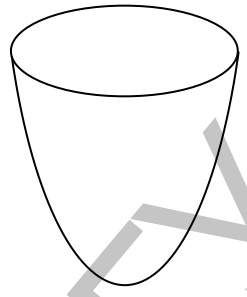


где $S(G)$ – площадь треугольника. Мы видим: чем больше площадь треугольника, тем больше сумма его углов. При этом, сумма углов не зависит от формы треугольника, а только от его площади.

В параграфе 10 мы изучим пример поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны $K = -1/a^2$ (псевдосфера). Для нее сумма углов геодезического треугольника $\pi - S(G)/a^2 < \pi$. На этой поверхности локально имеет место геометрия Лобачевского, о которой мы будем говорить подробно при изучении раздела «Основания геометрии». Как доказал Д.Гильберт (1901 г.), не существует поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, изометричной плоскости Лобачевского.

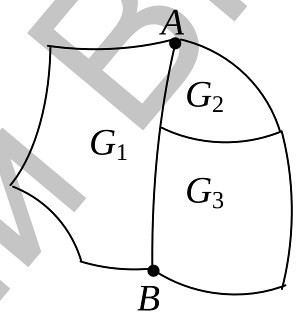
§ 9. *Эйлерова характеристика поверхности*

Определение. Поверхность называется *замкнутой*, если она ограничена и не имеет границы (края).



Примеры замкнутых поверхностей: куб, сфера, эллипсоид, тор. Если же мы попробуем взять ограниченную часть эллиптического параболоида или плоскости, то у них обязательно будет граница, поэтому эти поверхности не являются замкнутыми.

Пусть Φ – замкнутая поверхность. Разобьем ее на многоугольные области G_k, гомеоморфные кругу так, чтобы две соседние области пересекались либо в одной точке – *вершине*, либо по общей стороне – *ребру*. Это означает, что в случае, изображенном на рисунке, ребро AB многоугольника G_1 следует разбить на два ребра.



Обозначим Г – количество многоугольников – *граней* в разбиении, Р – количество ребер, В – количество вершин. Применим к каждому многоугольнику формулу (25):

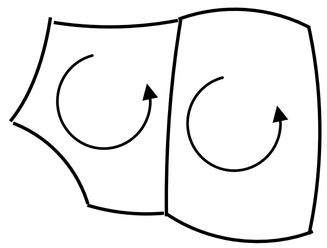
$$\int\limits_{\gamma_k} k_g ds + \sum_{i=1}^{n}(\pi - \alpha_i^k) = 2\pi - \iint\limits_{G_k} K d\sigma.$$

Сложим все эти равенства.

Справа двойные интегралы по каждому многоугольнику в сумме дадут интеграл по всей поверхности Φ, а число 2π повторится Г раз. Значит, справа получим:

$$2\pi\Gamma - \iint\limits_{\Phi} K d\sigma.$$

Слева. Для того, чтобы вычислить интеграл по границе многоугольника, мы должны выбрать направление обхода, и это направление должно быть единым для всех многоугольников. В этом случае направление прохождения общего ребра, при рассмотрении двух соседних многоугольников,



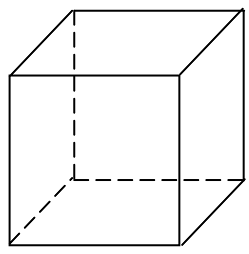
будет противоположным (см. замечание ниже). Поэтому интегралы по общему ребру при сложении сократятся. Но каждое ребро входит ровно в два многоугольника. Поэтому все интегралы $\int\limits_{\gamma_k} k_g ds$ сократятся. Число π слева при сложении повторится столько раз, сколько всего углов в разбиении. Но в каждом многоугольнике количество углов равно количеству сторон. Поскольку каждое ребро входит в два многоугольника, то оно будет посчитано дважды. Значит, число π повторится 2Р раз. Сумма α_i^k – это сумма всех углов в разбиении. Но вокруг каждой из вершин сумма углов = 2π. Значит, полная сумма углов = 2πВ. Итак, получим равенство:

$$2\pi\text{Р} - 2\pi\text{В} = 2\pi\Gamma - \iint\limits_{\Phi} K d\sigma. \quad \Leftrightarrow$$

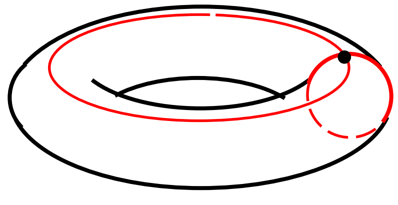
$$\Leftrightarrow \qquad \text{В} - \text{Р} + \Gamma = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Phi} K d\sigma.$$

Это равенство показывает, что число слева не зависит от разбиения поверхности Φ на многоугольные области. Оно называется Эйлеровой характеристикой поверхности и обозначается $\chi(\Phi)$.

Пусть две замкнутые поверхности Φ_1 и Φ_2 гомеоморфны, и $f: \Phi_1 \to \Phi_2$ – гомеоморфизм. Тогда f переводит разбиение одной поверхности в разбиение другой, имеющее то же самое количество вершин, ребер и граней. Значит, $\chi(\Phi_1) = \chi(\Phi_2)$. Примем без доказательства, что верно и обратное: *если эйлеровы характеристики двух замкнутых поверхностей совпадают, то эти поверхности гомеоморфны*. Хотя речь у нас шла только о гладких поверхностях, последние два утверждения верны и для произвольных замкнутых поверхностей. Требуется только другой метод доказательства. Он приводится в рамках спецкурса по топологии.

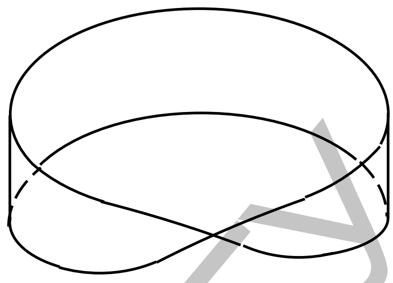


Любой выпуклый многогранник гомеоморфен сфере. Значит, для всех многогранников число В – Р + Г одинаково. Для куба, например, В = 8, Р = 12, Г = 6. Значит, для любого выпуклого многогранника В – Р + Г = 2. Также и $\chi(S^2) = 2$ (S^2 – общепринятое обозначение для двумерной сферы).



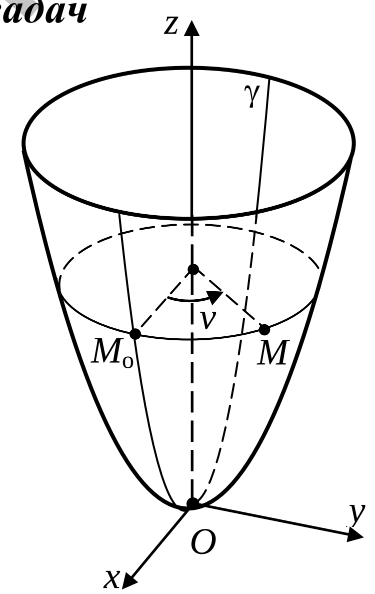
На данном рисунке изображено разбиение тора T^2, имеющее 1 грань, 2 ребра и 1 вершину. Значит, $\chi(T^2) = 0$. Это означает, что невозможно построить гомеоморфизм $f: S^2 \to T^2$.

Замечание. Не на всякой поверхности можно задать единое направление обхода многоугольников против часовой стрелки. Для этого должно быть определено, какая из сторон поверхности является внешней. Существуют односторонние поверхности типа <u>*листа Мебиуса*</u> (перекрученной замкнутой ленты). Но лист Мебиуса не является замкнутой поверхностью, т.к. имеет границу, а все замкнутые односторонние



поверхности «не помещаются» в трехмерное пространство. Заметим, что все замкнутые двусторонние поверхности имеют четную эйлерову характеристику, а все односторонние – нечетную эйлерову характеристику. Более подробно данная тема изучается в рамках спецкурса по топологии.

§ 9. *Примеры решения задач*



***Задача* 1.** *Эллиптический параболоид получен вращением параболы*

$$\gamma: \begin{cases} z = x^2, \\ y = 0 \end{cases}$$

вокруг оси Oz. *Составить параметрическое уравнение этой поверхности. Проверить регулярность получившейся параметризации.*

Решение. Уравнение параболы можно переписать в параметрическом виде так:

$$x = u,\ y = 0,\ z = u^2,\ u \in \boldsymbol{R}.$$

(т.е. в качестве параметра мы выбрали x). Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности. Тогда она получена поворотом точки $M_o(x_o, 0, z_o) \in \gamma$, такой что $x_o > 0$. Радиус поворота, очевидно, равен x_o, т.е. равен u, но уже с ограничением $u > 0$. Обозначим v – угол поворота. Тогда

$$x = u \cdot \cos v,\ y = u \cdot \sin v.$$

Кроме того, очевидно, что $z_o = z$. Окончательно получаем, что координаты точки M удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} x = u \cdot \cos v, \\ y = u \cdot \sin v, \\ z = u^2,\ u > 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Поскольку M – это произвольная точка поверхности, то $(*)$ является уравнением поверхности. Для того, чтобы данное уравнение задавало гомеоморфизм плоской области на поверхность, необходимо ограничить область изменения параметра v: $v \in (0, 2\pi)$. При этом мы исключаем из поверхности часть параболы γ, изображенную на чертеже сплошной линией. Заметим, что отсутствие последнего ограничения не помешало бы изучить большинство геометрических свойств поверхности.

Проверим регулярность. Находим частные производные и их векторное произведение:

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 2u), \qquad \mathbf{r}_v = (-u\cdot\sin v, u\cdot\cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\cdot\sin v & u\cdot\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-2u\cdot\cos v)\,\mathbf{i} + (2u\cdot\sin v)\,\mathbf{j} + u\cdot\mathbf{k}.$$

Затем находим квадрат модуля этого вектора:

$$|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|^2 = 4u^2\cos^2 v + 4u^2\cdot\sin^2 v + u^2 = 5u^2.$$

Очевидно, что $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|^2>0$, т.к. $u>0$. Поэтому поверхность регулярна во всех точках.

***Задача* 2.** *В каждой точке к винтовой линии*

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos u, \\ y = a\cdot\sin u, \\ z = bu, \quad u\in\boldsymbol{R},\ a = \mathrm{const} > 0,\ b = \mathrm{const} > 0. \end{cases}$$

проведена главная нормаль. Составить уравнение получившейся поверхности.

Решение. Направляющим вектором для главной нормали служит $(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\times\mathbf{r}'$. Вычислим этот вектор при произвольном значении параметра u; для этого сначала находим производные:

$$\mathbf{r}'(-a\cdot\sin u, a\cdot\cos u, b),\ \mathbf{r}''(-a\cdot\cos u, -a\cdot\sin u, 0);$$

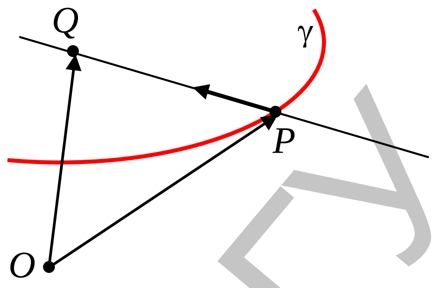
$$\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\cdot\sin u & a\cdot\cos u & b \\ -a\cdot\cos u & -a\cdot\sin u & 0 \end{vmatrix} = (ab\cdot\sin u)\mathbf{i} - (ab\cdot\cos u)\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}.$$

$$(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\times\mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ab\cdot\sin u & -ab\cdot\cos u & a^2 \\ -a\cdot\sin u & a\cdot\cos u & b \end{vmatrix} =$$

$$= (-(ab^2+a^3)\cos u)\mathbf{i} - ((ab^2+a^3)\sin u)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Очевидно, что найденный вектор сонаправлен вектору $(-\cos u, -\sin u, 0)$; причем последний вектор является единичным. Значит, это и есть вектор $\mathbf{v}$.

Пусть Q – произвольная точка поверхности. Пусть она лежит на главной нормали, проходящей через точку P на винтовой линии. Тогда



1. $\overrightarrow{PQ} \,||\, \mathbf{v} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PQ} = v\mathbf{v},\; v \in \boldsymbol{R}$;
2. $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$.

Отсюда находим, что радиус-вектор произвольной точки на поверхности это:

$$\overrightarrow{OQ}(a\cdot\cos u - v\cdot\cos u,\ a\cdot\sin u - v\cdot\sin u,\ bu).$$

Значит, параметрические уравнения нашей поверхности:

$$\begin{cases} x = (a - v)\cos u, \\ y = (a - v)\sin u, \\ z = bu, \quad u, v \in \boldsymbol{R},\ a = \text{const} > 0,\ b = \text{const} > 0. \end{cases}$$

***Задача* 3.** *Для гиперболического параболоида* $z = x^2 - y^2$:

1) *составить уравнение касательной плоскости и нормали в точке* $M(3, 2, 5)$;

2) *найти* I *и* II *квадратичные формы*;

3) *вычислить гауссову кривизну и определить тип точек на поверхности*; *определить в каких точках гауссова кривизна достигает наибольшего и наименьшего по модулю значений*;

4) *в вершине* $O(0, 0, 0)$ *найти главные направления и главные кривизны*;

5) *в вершине* $O(0, 0, 0)$ *найти асимптотические направления.*

Решение. **1.** Наша поверхность задана уравнением в явном виде, т.е. уравнением вида $z = f(x, y)$. Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0). \qquad (7)$$

Находим $f_x = 2x$, $f_y = -2y$, $f_x(3, 2) = 6$, $f_y(3, 2) = -4$. Подставляем это в (7):

$$z - 5 = 6(x - 3) - 4(y - 2) \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 4y - z - 5 = 0.$$

Мы получили уравнение касательной плоскости. Из него делаем вывод, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(6, -4, -1)$ является направляющим вектором нормали. Поэтому уравнение нормали в данной точке:

$$\frac{x - 3}{6} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 5}{-1}.$$

2. Согласно (14) §4

$$E = 1 + (f_x)^2 = 1 + 4x^2, \quad F = f_x f_y = -4xy, \quad G = 1 + (f_y)^2 = 1 + 4y^2,$$

$$EG - F^2 = 1 + (f_x)^2 + (f_y)^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2;$$

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} = 0,$$

$$N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Мы нашли коэффициенты I и II квадратичных форм. Теперь записываем сами квадратичные формы:

$$\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = (1 + 4x^2)\xi_1^2 - 8xy\xi_1\xi_2 + (1 + 4y^2)\xi_2^2$$

$$\mathrm{II}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}\xi_1^2 - \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}\xi_2^2.$$

3. Согласно формулам (20) §5

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{1 + 4x^2 + 4y^2} : (1 + 4x^2 + 4y^2) = \frac{-4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} < 0.$$

Следовательно, все точки на поверхности являются гиперболическими. Наибольшего значения $|K|$ достигает в той точке, где знаменатель $(1 + 4x^2 + 4y^2)^2$ достигает наименьшего значения, т.е. в вершине параболоида – $O(0, 0, 0)$. Имеем, $|K|_{\max} = 4$. Значит, наша поверхность наиболее искривлена в вершине. При стремлении x и y к бесконечности K стремится к нулю, т.е. наименьшее значение $|K|$ не достигается.

4. Найдем, как выглядят I и II квадратичные формы в вершине:

$$\mathrm{I}_O(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad \mathrm{II}_O(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 2\xi_1^2 - 2\xi_2^2.$$

Значит, уравнение для главных направлений в вершине имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \xi_2^2 & -\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель: $-4\xi_1\xi_2 = 0 \iff \xi_1\xi_2 = 0$. Отсюда $\xi_2 = 0$ или $\xi_1 = 0$. Соответственно получаем два вектора, задающие главные направления: $\vec{\xi}(1, 0)$ и $\vec{\eta}(0, 1)$. Напомним, что это координаты векторов относительно базиса $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$. Таким образом, в нашем случае $\vec{\xi} = \mathbf{r}_u$, $\vec{\eta} = \mathbf{r}_v$. Подставляем $\vec{\xi}$ в первую из формул (18) и получаем значение соответствующей главной кривизны λ_1:

$$\lambda_1 = \frac{1 \cdot L + 0 \cdot M}{1 \cdot E + 0 \cdot F} = \frac{2}{1} = 2.$$

Для того, чтобы найти значение ν_2, мы подставляем в ту же формулу вектор $\vec{\eta}$:

$$\lambda_2 = \frac{0\cdot L + 1\cdot M}{0\cdot E + 1\cdot F} = \frac{0}{0}.$$

Получили неопределенность. Поэтому поставляем вектор $\vec{\eta}$ во вторую часть формулы (18):

$$\lambda_2 = \frac{0\cdot M + 1\cdot N}{0\cdot F + 1\cdot G} = \frac{-2}{1} = -2.$$

5. Асимптотические направления находятся из уравнения $\mathrm{II}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 0$. Для нашей поверхности в вершине это уравнение имеет вид:

$$2\xi_1^2 - 2\xi_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\xi_1 - \xi_2)\cdot(\xi_1 + \xi_2) = 0.$$

Значит, $\xi_1 - \xi_2 = 0$ или $\xi_1 + \xi_2 = 0$. Отсюда получаем два вектора, задающие асимптотические направления: $\vec{\xi}(1, 1)$ и $\vec{\eta}(1, -1)$.

***Задача* 4.** *Прямой геликоид* (рисунок см. на с.265 из [3]) *задается параметрическими уравнениями:*

$$\begin{cases} x = u\cdot\cos v, \\ y = u\cdot\sin v, \\ z = av, \quad u > 0,\ v \in \boldsymbol{R},\ a = \mathrm{const} > 0. \end{cases}$$

1) *Проверить регулярность данной параметризации*;

2) *составить уравнение касательной плоскости и нормали в точке* $M(1, \pi/2)$;

3) *найти единичный вектор нормали в произвольной точке* $N(u_o, v_o)$;

4) *найти* I *и* II *квадратичные формы поверхности*;

5) *найти главные направления, главные кривизны, гауссову и среднюю кривизну*;

6) *вычислить длину участка кривой* γ_1, *заданной на поверхности уравнением* $u = \frac{av^2}{2}$, между точками $A(0, 0)$ и $B(\frac{a}{2}, 1)$;

7) *вычислить угол между кривой* γ_1 *и кривой* γ_2: $v = 1$;

8) *составить уравнения асимптотических линий и линий кривизны на поверхности*;

9) *вычислить площадь части поверхности, которая определяется неравенствами:* $0 < u < 1$, $0 < v < 2\pi$.

Решение. Пункты **1** и **3** удобнее выполнить после нахождения коэффициентов I квадратичной формы.

2. Найдем частные производные первого порядка от данной вектор-функции:

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{r}_v = (-u\cdot\sin v, u\cdot\cos v, a).$$

Найдем значения этих производных в точке M:

$$\mathbf{r}_u(1, \pi/2) = (0, 1, 0), \quad \mathbf{r}_v(1, \pi/2) = (-1, 0, a).$$

Если у точки на поверхности заданы две координаты, то предполагается, что это внутренние координаты (u_o, v_o). Для составления уравнения касательной плоскости нам необходимо найти еще внешние координаты (x_o, y_o, z_o). Для этого мы подставляем $(1, \pi/2)$ в уравнение поверхности: $M(0, 1, \frac{a\pi}{2})$. Уравнение касательной плоскости имеет вид (6) §2. Подставляем в него координаты точки M и координаты частных производных:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-\frac{a\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя получаем уравнение:

$$ax + z - \frac{a\pi}{2} = 0.$$

Из этого уравнения делаем вывод, что вектор $\vec{\mathbf{n}}_o(a, 0, 1)$ перпендикулярен касательной плоскости, и поэтому он является направляющим вектором нормали (не единичным!). Значит уравнение нормали в данной точке M имеет вид:

$$\frac{x}{a} = \frac{y-1}{0} = \frac{z - a\pi/2}{1}.$$

4. Находим коэффициенты I квадратичной формы:

$$E = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u = \cos^2 v + \sin^2 v + 0^2 = 1,$$
$$F = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v = -u\cdot\sin v\cdot\cos v + u\cdot\sin v\cdot\cos v + 0\cdot a = 0,$$
$$G = \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v + a^2 = u^2 + a^2.$$

Затем находим величину:

$$EG - F^2 = u^2 + a^2.$$

Вычисляем частные и смешанную производные второго порядка:

$$\mathbf{f}_{uu}(0, 0, 0), \quad \mathbf{f}_{uv}(-\sin v, \cos v, 0), \quad \mathbf{f}_{vv}(-u\cdot\cos v, -u\cdot\sin v, 0).$$

Вычисляем коэффициенты II квадратичной формы:

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\cdot\sin v & u\cdot\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+a^2}} = 0,$$

$$M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\cdot\sin v & u\cdot\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$N = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} -u\cdot\cos v & -u\cdot\sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\cdot\sin v & u\cdot\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0.$$

Записываем вид I и II квадратичных форм:

$$\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \xi_1^2 + (u^2 + a^2)\xi_2^2,$$

$$\mathrm{II}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = -\frac{2a}{\sqrt{u^2 + a^2}}\xi_1\xi_2.$$

1. Параметризованная поверхность называется регулярной, если $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \neq 0$. Но мы знаем, что

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2},$$

а эта величина, очевидно, строго больше нуля. Поверхность регулярна в каждой точке.

3. Единичный вектор нормали к поверхности находится по формуле:

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

Мы знаем, что $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{u^2 + a^2}$. Остается найти числитель.

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\cdot\sin v & u\cdot\cos v & a \end{vmatrix} = (a\sin v)\mathbf{i} - (a\cos v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}.$$

Тогда

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{a\sin v}{\sqrt{u^2 + a^2}}\mathbf{i} - \frac{a\cos v}{\sqrt{u^2 + a^2}}\mathbf{j} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}}\mathbf{k}.$$

Замечание. Можно вычислить коэффициенты второй квадратичной формы после нахождения вектора $\vec{\mathbf{n}}$ по формулам: $L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \vec{\mathbf{n}}$, $M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \vec{\mathbf{n}}$, $N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \vec{\mathbf{n}}$.

5. Подставляем найденные коэффициенты квадратичных форм в уравнение (19) для нахождения главных направлений:

$$\begin{vmatrix} \xi_2^{\ 2} & -\xi_1\xi_2 & \xi_1^{\ 2} \\ 1 & 0 & u^2+a^2 \\ 0 & \dfrac{-a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем этот определитель по последней строке:

$$\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}\left((u^2+a^2)\xi_2^{\ 2}-\xi_1^{\ 2}\right)=0.$$

Выражение перед скобкой в ноль не обращается в любой точке. Поэтому

$$(u^2+a^2)\xi_2^{\ 2}-\xi_1^{\ 2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{u^2+a^2}\,\xi_2-\xi_1)(\sqrt{u^2+a^2}\,\xi_2+\xi_1)=0.$$

Отсюда

$$\frac{\xi_1}{\xi_2}=\sqrt{u^2+a^2} \quad \text{или} \quad \frac{\xi_1}{\xi_2}=-\sqrt{u^2+a^2}.$$

Получаем два вектора, задающие главные направления:

$$\vec{\xi}(\sqrt{u^2+a^2},1)\,, \quad \vec{\eta}(-\sqrt{u^2+a^2},1).$$

Для того, чтобы найти первую главную кривизну λ_1, мы подставляем вектор $\vec{\xi}$ в любую часть формулы (18). Подставим в первую часть:

$$\lambda_1=\frac{0\cdot\sqrt{u^2+a^2}+\dfrac{-a}{\sqrt{u^2+a^2}}\cdot 1}{1\cdot\sqrt{u^2+a^2}+0\cdot 1}=\frac{-a}{u^2+a^2}\,,$$

Аналогично, подставляя вектор в ту же часть формулы (18) получаем

$$\lambda_2=\frac{a}{u^2+a^2}\,.$$

Далее находим, что

$$K=\lambda_1\cdot\lambda_2=\frac{-a^2}{(u^2+a^2)^2}<0,\;\; H=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\equiv 0.$$

Таким образом, все точки на прямом геликоиде являются гиперболическими. Кроме того, мы видим, что средняя кривизна прямого геликоида тождественно равна нулю.

Замечание. Поверхности, обладающие таким свойством ($H\equiv 0$), называются <u>*минимальными*</u>. Они имеют наименьшую площадь среди всех поверхностей, натянутых на данный контур. Так, если обмакнуть контур в мыльный раствор, то образовавшаяся пленка в условиях невесомости и отсутствия ветра примет форму минимальной поверхности.

6. Перепишем уравнение кривой γ_1 в параметрическом виде:

$$\begin{cases} u = at^2/2, \\ v = t. \end{cases}$$

Находим, что точке A соответствует значение параметра $a = 0$, а точке B соответствует значение параметра $b = 1$. Находим производные и подставляем их в формулу (11) §3:

$$u' = at, \quad v' = 1,$$

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1\cdot(at)^2 + 0 + (u^2 + a^2)\cdot 1^2}\, dt.$$

Здесь мы должны еще заменить u на его выражение через t:

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = \int_0^1 \sqrt{a^2t^2 + a^2t^4/4 + a^2}\, dt = \int_0^1 a\left(\frac{t^2}{2} + 1\right) dt = a\left(\frac{t^3}{6} + t\right)\Big|_0^1 = \frac{7a}{6}.$$

7. Решим совместно уравнения кривых γ_1 и γ_2 для того, чтобы найти координаты точки их пересечения:

$$\begin{cases} u = av^2/2, \\ v = 1. \end{cases}$$

Точка пересечения: $B(a/2,\ 1)$ и ей соответствует значение параметра $t = 1$ на кривой γ_1. Выше мы выяснили, что касательный вектор к кривой γ_1 имеет координаты $\boldsymbol{c}'(t) = (at, 1)$. В точке B это будет вектор $\boldsymbol{c}'(1) = \vec{\xi}(a, 1)$.

Перепишем уравнение кривой γ_2 в параметрическом виде:

$$\begin{cases} u = \tau, \\ v = 1. \end{cases}$$

Касательный вектор к ней: $\boldsymbol{h}'(1, 0)$. Его координаты не зависят от параметра τ. Обозначим этот вектор $\vec{\eta}$. Угол между кривыми – это угол между касательными векторами к ним в точке пересечения, т.е. нам следует найти угол между нашими векторами $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$. А этот угол вычисляется с помощью первой квадратичной формы.

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\eta})}{\sqrt{\mathrm{I}(\vec{\xi}, \vec{\xi})}\sqrt{\mathrm{I}(\vec{\eta}, \vec{\eta})}} = \frac{E\,\xi_1\eta_1 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\,\xi_2\eta_2}{\sqrt{E\,\xi_1^2 + 2F\,\xi_1\xi_2 + G\,\xi_2^2}\sqrt{E\eta_1^2 + 2F\eta_1\eta_2 + G\eta_2^2}} =$$

$$= \frac{1\cdot a\cdot 1 + 0 + (u^2 + a^2)\cdot 1\cdot 0}{\sqrt{1\cdot a^2 + 0 + (u^2 + a^2)\cdot 1^2}\sqrt{1\cdot 1^2 + 0 + (u^2 + a^2)\cdot 0^2}}.$$

Здесь еще присутствует параметр u. Мы должны подставить его значение в точке пересечения: $u = a/2$.

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2/4 + a^2}\ \sqrt{1}} = \frac{a}{\sqrt{9a^2/4}} = \frac{2}{3}, \quad \alpha = \arccos\frac{2}{3}.$$

8. Дифференциальное уравнение асимптотических линий на поверхности имеет вид:

$$Ldu^2 + Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

Подставляем сюда выражения для L, M, N:

$$\frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}}dudv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dudv = 0.$$

Поэтому имеем два семейства асимптотических линий:

$$du = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = v_0 = \text{const},$$
$$dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = u_0 = \text{const}.$$

Дифференциальное уравнение линий кривизны на поверхности имеет вид (19′) §6. Подставляем в него выражения для L, M, N:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2 + a^2 \\ 0 & \dfrac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по последней строке и разделим его на множитель M не равный нулю:

$$(u^2 + a^2)dv^2 - du^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{u^2 + a^2}\,dv - du)(\sqrt{u^2 + a^2}\,dv + du) = 0.$$

Отсюда получаем уравнения двух семейств линий кривизны:

$$\frac{du}{dv} = \sqrt{u^2 + a^2} \quad \Leftrightarrow \quad dv = \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

$$\frac{du}{dv} = -\sqrt{u^2 + a^2} \quad \Leftrightarrow \quad dv = -\frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$v = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad \text{или} \quad v = -\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C.$$

9. Пусть V – это часть поверхности, площадь которой требуется вычислить, а U – область на плоскости, которая определяется данными неравенствами $0<u<1$, $0<v<2\pi$. Тогда, заменяя двойной интеграл повторным, получаем

$$S(V) = \iint_U \sqrt{EG - F^2}dudv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \sqrt{u^2 + a^2}\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \right] \Big|_0^1 \, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + a^2} + a^2\ln(1 + \sqrt{1 + a^2}) - \ln a\right) dv =$$

$$= \pi\left(\sqrt{1 + a^2} + a^2\ln(1 + \sqrt{1 + a^2}) - \ln a\right).$$

***Задача* 5.** *Кривая* γ *в пространстве задана системой уравнений*:

$$\gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases} \qquad (*)$$

1) *Составить уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к этой кривой в точке* $M(1, 1, \sqrt{3})$;

2) *составить уравнение соприкасающейся плоскости и бинормали*.

***Решение*. 1.** Данная кривая представляет собой пересечение двух поверхностей: сферы радиуса 2 с центром в начале координат и цилиндра, радиуса 1, ось которого параллельна Oz и проходит через точку $(1, 0, 0)$ (обозначим их соответственно Φ_1 и Φ_2). Она называется линией Вивиани (рисунок см. на с.265 из [3]). Касательная прямая к γ представляет пересечение касательных плоскостей к данным поверхностям в данной точке. Если $\vec{\mathbf{n}}_1$ и $\vec{\mathbf{n}}_2$ – векторы нормали к поверхностям Φ_1 и Φ_2 в точке M, то направляющий вектор касательной прямой перпендикулярен $\vec{\mathbf{n}}_1$ и $\vec{\mathbf{n}}_2$. Поэтому в качестве направляющего вектора касательной можем взять любой вектор коллинеарный $\vec{\mathbf{n}}_1 \times \vec{\mathbf{n}}_2$. Сами векторы $\vec{\mathbf{n}}_1$ и $\vec{\mathbf{n}}_2$ – это векторы градиента соответствующих функций, вычисленные в точке M:

$$\vec{\mathbf{n}}_1 = (2x, 2y, 2z)|_M = (2, 2, 2\sqrt{3}), \quad \vec{\mathbf{n}}_2 = (2(x-1), 2y, 0)|_M = (0, 2, 0),$$

$$\vec{\mathbf{n}}_1 \times \vec{\mathbf{n}}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\sqrt{3}\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{n}}_1 \times \vec{\mathbf{n}}_2) = \sqrt{3}\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Тогда уравнение касательной прямой:

$$\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\sqrt{3}}{1},$$

а уравнение нормальной плоскости к кривой γ:

$$\sqrt{3}(x-1) + (z - \sqrt{3}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}x + z - 2\sqrt{3} = 0.$$

Второй способ нахождения направляющего вектора касательной будет приведен в пункте 2.

2. Представим уравнение нашей кривой в параметрическом виде, выбрав в качестве параметра на кривой координату x, тем самым мы представим y и z как функции от переменной x. Таким образом, параметризация кривой выглядит так: $\mathbf{c}(x, y(x), z(x))$. Тогда

$$\mathbf{c}'(1, y'(x), z'(x)), \qquad \mathbf{c}''(0, y''(x), z''(x)).$$

Дифференцируя $(*)$ по x находим:

$$\begin{cases} 2x\cdot 1 + 2y\cdot y' + 2z\cdot z' = 0, \\ 2(x-1) + 2y\cdot y' = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим:

$$y' = \frac{1-x}{y};$$

затем из первого:

$$z' = -\frac{x + y\cdot y'}{z} = \frac{x + 1 - x}{z} = \frac{1}{z}.$$

Дифференцируем эти равенства еще раз по x:

$$y'' = \frac{(1-x)'\cdot y - (1-x)\cdot y'}{y^2} = \frac{-y - (1-x)^2/y}{y^2} = -\frac{y^2 + (1-x)^2}{y^3},$$

$$z'' = -\frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{z^3}.$$

Итак,

$$\mathbf{c}''\left(0, -\frac{y^2 + (1-x)^2}{y^3}, -\frac{1}{z^3}\right).$$

Подставляем сюда координаты точки M:

$$\mathbf{c}''\left(0, -1, -\frac{1}{3\sqrt{3}}\right).$$

Аналогично в произвольной точке

$$\mathbf{c}'\left(1, \frac{1-x}{y}, \frac{1}{z}\right),$$

а в точке M:

$$\mathbf{c}'\left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Заметим, что найденный вектор $\mathbf{c}'$, как и следовало ожидать, коллинеарен вектору $\vec{\mathbf{a}}$. Получаем уравнение соприкасающейся плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-\sqrt{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 0.$$

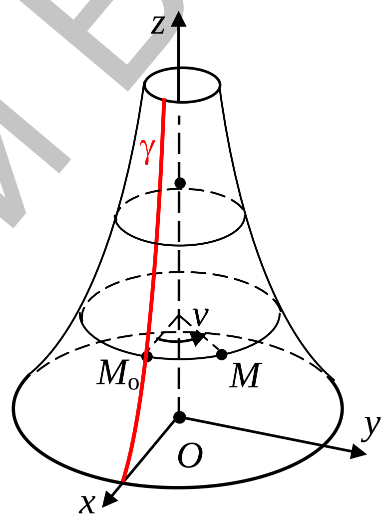
Раскрываем определитель

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(y-1) - (z-\sqrt{3}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{3}y - \sqrt{3}z + \frac{5}{3} = 0.$$

***Задача* 6.** *В плоскости Oxz кривая γ задана уравнением:*

$$\gamma: \begin{cases} x = a \cdot \sin u, \\ z = a(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u) \end{cases}$$

(*трактриса*). *Составить уравнение поверхности, которая получается вращением этой кривой вокруг оси Oz* (*псевдосфера Бельтрами*). *Вычислить ее гауссову кривизну.*



Решение. С помощью рассуждений, дословно повторяющих решение задачи 1, получаем уравнение поверхности вращения:

$$\begin{cases} x = a \cdot \sin u \cos v, \\ y = a \cdot \sin u \sin v, \\ z = a(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u). \end{cases}$$

Находим производные:

$$\mathbf{r}_u(a \cdot \cos u \cos v,\ a \cdot \cos u \sin v,\ a \cdot \operatorname{ctg} u \cdot \cos u),$$

$$\mathbf{r}_v(-a \cdot \sin u \sin v,\ a \cdot \sin u \cos v,\ 0),$$

$$\mathbf{r}_{uu}(-a \cdot \sin u \cos v,\ -a \cdot \sin u \sin v,\ -a(\cos u + \frac{\cos u}{\sin^2 u})),$$

$$\mathbf{r}_{uv}(-a \cdot \cos u \sin v,\ a \cdot \cos u \cos v,\ 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv}(-a \cdot \sin u \cos v,\ -a \cdot \sin u \sin v,\ 0).$$

Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы и величину $EG-F^2$:

$$E = a^2\cos^2 u \cos^2 v + a^2\cos^2 u \sin^2 v + a^2\cos^2 u = a^2\cos^2 u(1 + \operatorname{ctg}^2 u) = a^2\operatorname{ctg}^2 u,$$

$F = -a^2\cos u\,\cos v\,\sin u\,\sin v + a^2\cos u\,\sin v\sin u\,\cos v = 0,$

$G = a^2\sin^2 u\,\sin^2 v + a^2\sin^2 u\,\cos^2 v = a^2\sin^2 u; \qquad EG - F^2 = a^4\cos^2 u.$

Вычисляем коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L = \frac{1}{a^2\cos u}\begin{vmatrix} -a\cdot\sin u\cos v & -a\cdot\sin u\,\sin v, & -a(\cos u + \dfrac{\cos u}{\sin^2 u}) \\ a\cdot\cos u\cos v & a\cdot\cos u\sin v & a\cdot\mathrm{ctg}\,u\cdot\cos u \\ -a\cdot\sin u\sin v & a\cdot\sin u\,\cos v & 0 \end{vmatrix} = -a\cdot\mathrm{ctg}\,u$$

$M = 0$, т.к. $\mathbf{r}_{uv} || \mathbf{r}_v$ (легко заметить, что $\mathbf{r}_{uv} = \mathrm{ctg}\,u\,\mathbf{r}_v$);

$$L = \frac{1}{a^2\cos u}\begin{vmatrix} -a\cdot\sin u\cos v & -a\cdot\sin u\sin v & 0 \\ a\cdot\cos u\cos v & a\cdot\cos u\sin v & a\cdot\mathrm{ctg}\,u\cdot\cos u \\ -a\cdot\sin u\sin v & a\cdot\sin u\,\cos v & 0 \end{vmatrix} = a\cdot\sin u\cos u.$$

Вычисляем гауссову кривизну:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-a^2\mathrm{ctg}\,u\,\sin u\,\cos u}{a^4\cos^2 u} = -\frac{1}{a^2}.$$

Мы видим, что псевдосфера является поверхностью постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Именно этим обусловлено название этой поверхности. В частности, при $a = 1$ будет получаться $K = -1$.

ГЛАВА 4. ПОНЯТИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Мы определили понятие двумерной поверхности в трехмерном пространстве. Однако во многих разделах математики используются поверхности бóльшей размерности, расположенные в каком-либо пространстве, либо внутри другой поверхности. Кроме того, рассматриваются такие поверхности сами по себе, без объемлющего их пространства.

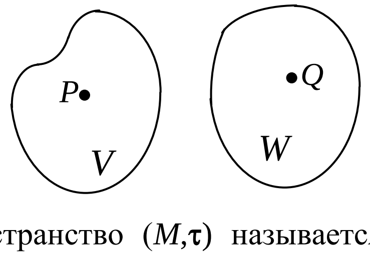
Простейший пример необходимости такого подхода. Уже доказано, что пространство, в котором мы находимся, является искривленным. Оно представляет из себя не евклидово пространство, а трехмерную поверхность. Ее можно рассматривать как вложенную в четырехмерное пространство-время (пространство Минковского). Но если речь не идет о теории относительности, а только о геометрической форме пространства, эту поверхность следует рассматривать «саму по себе».

Представьте себе, что некоторое двумерное существо живет в двумерном мире, где сумма углов любого треугольника равна двум прямым и имеет место теорема Пифагора, как и на плоскости. Это существо умеет измерять расстояния между точками. Но мир достаточно большой и измерить его целиком пока не представляется возможным (т.е. наше существо не выходит за рамки некоторой небольшой окрестности). Может ли это существо определить: является ли его мир плоскостью, цилиндром или конусом? Нет, не может. Маленькие кусочки цилиндра или конуса с точки зрения внутренней геометрии устроены точно так же, как и кусочек плоскости.

В похожей ситуации находится и человек. Мы не можем представить себе геометрию Вселенной «в целом». Мы можем только узнать, что ближайшая к нам часть Вселенной топологически устроена как евклидово пространство, но эта часть не является изометричной частью евклидова пространства (т.е. длины кривых не совпадают с длинами кривых в евклидовом пространстве).

Так как же определить понятие многомерной поверхности, которая не находится в объемлющем ее пространстве? Коротко мы попытаемся ответить на этот вопрос в данной главе.

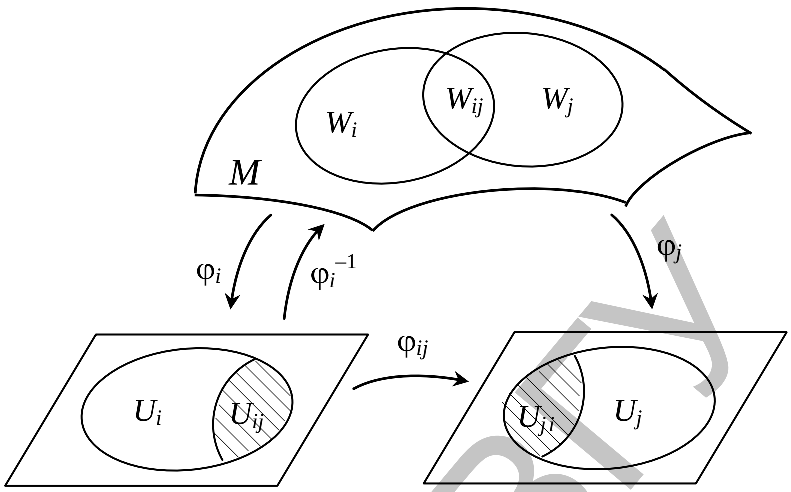
Определение. Говорим, что топологическое пространство (M,τ) *удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа* (называется *хаусдорфовым*), если у любых двух различных точек $P,Q\in M$ существуют непересекающиеся окрестности $V,W\subset M$.



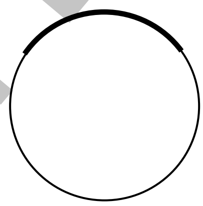
Определение. Хаусдорфово топологическое пространство (M,τ) называется *n-мерным топологическим многообразием*, если оно локально гомеоморфно открытому подмножеству евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$. Это означает, что для каждой точки $P\in M$ существует ее окрестность W_i в M и гомеоморфизм $\varphi_i : W_i \to U_i$, где U_i – область в евклидовом пространстве. Пара (W_i, φ_i) называется *картой*, а совокупность всех таких карт называется *атласом* многообразия M. При этом еще предполагается, что у многообразия должен существовать атлас, состоящий из конечного или счетного количества карт, накрывающий всё многообразие.

Пусть две карты (W_i, φ_i) и (W_j, φ_j) многообразия M пересекаются: $W_{ij}= W_i \cap W_j$. Тогда множество W_{ij} оказывается изображенным сразу на двух картах: $U_{ij}=\varphi_i(W_{ij})$, $U_{ji}=\varphi_j(W_{ij})$. Возникает отображение $\varphi_{ij} = \varphi_i^{-1}\varphi_j : U_{ij} \to U_{ji}$. Поскольку оба отображения φ_i и φ_j являются гомеоморфизмами, то φ_{ij} – тоже гомеоморфизм.

Определение. Гомеоморфизм $\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ называется *__функцией перехода от карты__* (W_i, φ_i) *__к карте__* (W_j, φ_j). Если эти функции для всех карт являются дифференцируемыми класса C^m, то многообразие M называется *__дифференцируемым многообразием класса__* C^m.

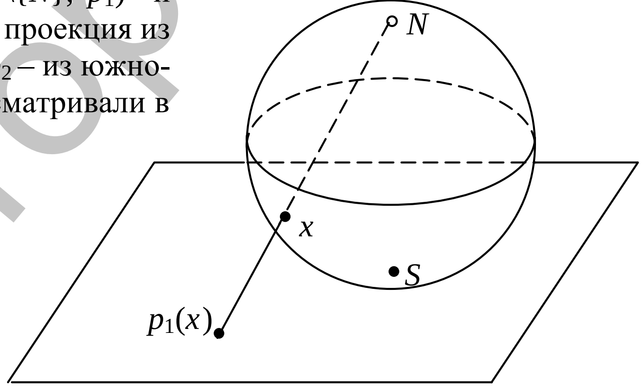


Примеры. **1.** Окружность – это одномерное многообразие. В целом она не гомеоморфна открытому интервалу числовой прямой, но окрестность любой ее точки является простой дугой, т.е. гомеоморфна интервалу.



2. Любая простая поверхность – это двумерное многообразие. Например, для сферы S^2 атлас может состоять из двух карт: $(S^2 \backslash \{N\}, p_1)$ и $(S^2 \backslash \{S\}, p_2)$, где p_1 – стереографическая проекция из северного полюса N на плоскость, а p_2 – из южного S. Первое отображение мы уже рассматривали в §4 главы 1.

Примем без доказательства, что отображение $p_2^{-1} p_1$ является дифференцируемым класса C^∞. Поэтому сфера есть дифференцируемое многообразие класса C^∞.



Для того, чтобы изучить геометрические свойства многообразия, необходимо определить понятие кривой на многообразии и более общее понятие подмногообразия (многообразия, которое содержится в данном многообразии), а также понятия касательного вектора и векторного поля на многообразии. Эти определения приводятся в рамках спецкурса «Топология и риманова геометрия».

Алфавитный указатель

ЛИТЕРАТУРА

1. Klingenberg W. A course of differential geometry / W. Klingenberg. – N.Y. – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag, 1976.
2. Погорелов А.В. Геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1984.
3. Александров А.Д. Геометрия / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – М.: Наука, 1990.
4. Феденко А.С. Дифференциальная геометрия / И.В. Белько, В.И. Ведерников, А.С. Феденко. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982.
5. Дубровин Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: Наука, 1979.
6. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. – М.: Наука, 1977.
7. Воднев В.Т. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии / В.Т. Воднев [и др.]. – Мн.: Вышэйшая школа, 1970.
8. Атанасян Л.С. Сборник задач по геометрии / Л.С. Атанасян [и др.]. – М.: Просвещение, 1975.
9. Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. – М.: Изд-во МГУ, 1980.
10. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия / М.М. Постников. – М.: Наука, 1987.

Учебное издание

ПОДОКСЕНОВ Михаил Николаевич
БАБИЧ Василий Васильевич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Краткий курс лекций с примерами решения задач

Технический редактор *А.И. Матеюн*
Корректор *С.А. Гаврилова*
Компьютерный дизайн *Г.В. Разбоева*

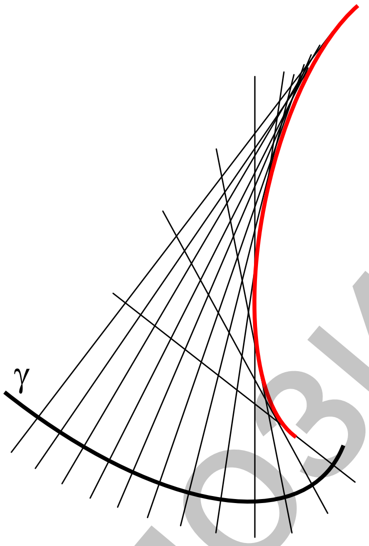
Подписано в печать 2010. Формат 60x84$^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 5,58. Уч.-изд. л. 4,45. Тираж экз. Заказ .

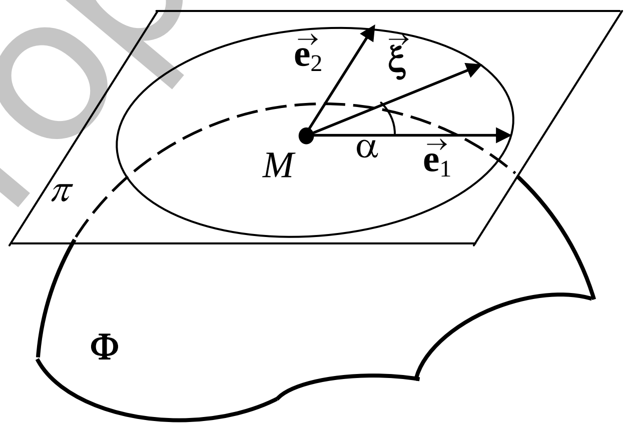
Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет им. П.М. Машерова».
ЛИ № 02330 / 0494385 от 16.03.2009.

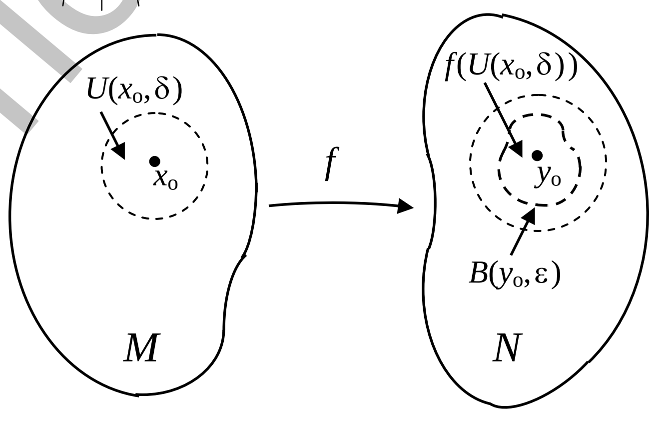
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет им. П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.

М.Н. Подоксенов
В.В. Бабич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ







Витебск 2010