Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

МАТЕМАТИКА.
Г Е О М Е Т Р И Я

Курс лекций

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2018

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М34

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 19.10.2017 г.

Составители: доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук **В.В. Устименко;** старший преподаватель кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова **Т.В. Титова**

Рецензент:
доцент кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук
С.А. Шлапаков

М34 **Математика. Геометрия :** курс лекций : сост.: В.В. Устименко, Т.В. Титова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. – 44 с.

Учебное издание подготовлено в соответствии с действующей программой по математике и предназначено для студентов дневной и заочной форм получения образования педагогического факультета. В данном курсе лекций предложены теоретические сведения по геометрии, образцы решения задач и вопросы для самоконтроля.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ВВЕДЕНИЕ

Учебная дисциплина «Математика» – важнейшая часть системы подготовки к профессиональной деятельности студентов по специальности 1-01 02 01 «Начальное образование».

Знание основ математики обеспечивает формирование соответствующих компетенций, необходимый уровень подготовки к практической деятельности и служит базой для дальнейшего самообразования будущего учителя.

Универсальность математических знаний и умений заключается в том, что они обеспечивают успешность решения многих профессиональных проблем и задач.

Целью учебной дисциплины «Математика» является: формирование у студентов знаний и компетенций для описания и объяснения процессов, предметов и явлений окружающего мира, оценки их количественных и пространственных отношений.

Предложенный курс лекций по геометрии должен оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели. Курс состоит из двух разделов: «Планиметрия», «Стереометрия». Каждый раздел основан на теоретическом материале. Теоретический материал разбит на темы в соответствии с учебной программой, содержит образцы решения задач и контрольные вопросы к каждой теме.

При создании курса лекций по геометрии были использованы следующие источники:

1) Азаров, А.И. Математика для старшеклассников. Методы решения планиметрических задач. 8–11 классы: пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих общ. сред. образование / А.И. Азаров, В.В. Казаков, Ю.Д. Чурбанов. – Минск: Аверсэв, 2005. –336 с.

2) Крамор, В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии / В.С. Крамор. – М.: Просвещение, 1992. – 320 с.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Треугольники

Углом называется фигура, которая состоит из двух различных полупрямых с общей начальной точкой. Эта точка называется вершиной угла, полупрямыми – сторонами угла.

Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми одной прямой, то угол называется развернутым.

Углы с соответственно параллельными сторонами либо равны (рис. 1),либо в сумме составляют 180^o (рис. 2).

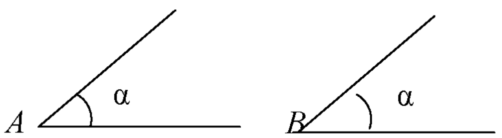


Рис. 1

Рис. 2

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны (рис. 3), либо в сумме составляют 180^o (рис. 4).

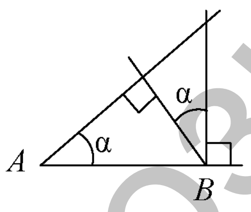


Рис. 3

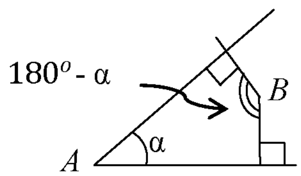


Рис. 4

Треугольникомназывается фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков. Точки называются вершинами треугольника, а отрезки - его сторонами.

Треугольники равны, если у них соответственные стороны и соответственные углы равны.

Признаки равенства треугольников.

Два треугольника равны, если выполняется одно из условий:

1. две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника;

2. сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника;
3. три стороны одного треугольника равны трём сторонам другого треугольника.

Задача. Отрезки AB и CB пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок AC равен 6 м?

Решение.

1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 5.
2. Треугольники AOC и BOD равны (по первому признаку): $\angle AOC = \angle BOD$ (вертикальные), AO=OB, CO=OD (по условию).
3. Из равенства названных треугольников следует равенство их сторон, т.е. AC = BD. Но так как по условию задачи AC = 6 м, то и BD = 6 м.

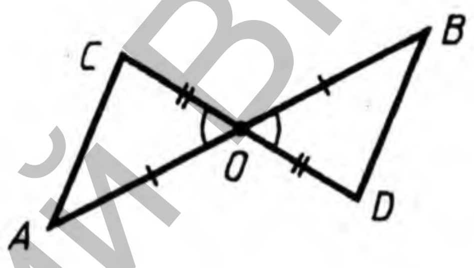


Рис.5

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольник

Свойства средней линии треугольника:

1. Средняя линия параллельна одной из сторон треугольника и равна половине этой стороны (рис. 6).
2. Средняя линия делит пополам любой отрезок с концами в вершине треугольника и на противоположной стороне.
3. Три средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника, подобных данному с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ (рис. 7).

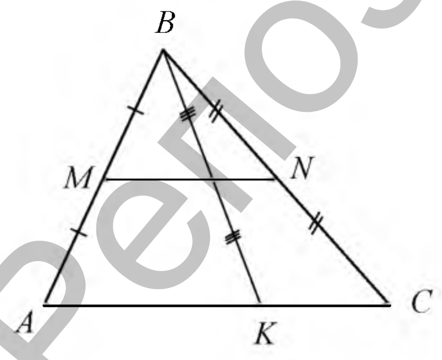


Рис. 6

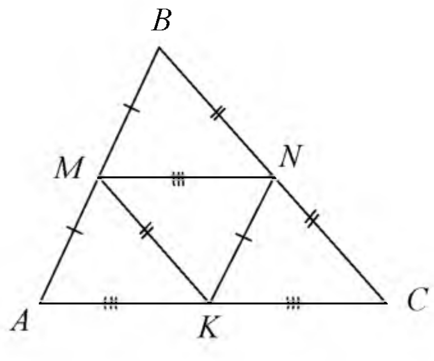


Рис. 7

Биссектриса внутреннего угла треугольника – это отрезок прямой, заключённый внутри треугольника и делящий данный угол пополам.

Свойства биссектрис:

1. Биссектриса – есть геометрическое место точек равноудалённых от сторон угла.
2. Во всяком треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, которая лежит внутри треугольника. Эта точка является центром окружности, вписанной в треугольник (т.е. касающейся всех его сторон).
3. Биссектриса делит противолежащую сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
4. Длина биссектрисы треугольника может быть вычислена по формулам:

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{a}{2}}{b+c},\ l_n^2 = bc - b_1c_1,$$

где b_1 иc_1 – отрезки, прилежащие соответственно к сторонам b и с ,на которые биссектриса разделила сторону a.

5. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны.

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой его противоположной стороны.

Свойства медиан:

1. Медиана – есть геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков прямых, заключённых внутри треугольника и параллельных той его стороне, к которой проведена медиана.
2. Три медианы пересекаются в одной точке, которая является центром тяжести треугольника. Эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.
3. Каждая медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника (одинаковой площади), а все медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.
4. Длина медианы может быть вычислена (через стороны треугольника) по формуле: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону или её продолжение.

Свойства высот:

1. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке. Эта точка называется ортоцентром. Если треугольник остроугольный, то эта точка лежит внутри треугольника; если прямоугольный, то совпадает с вершиной прямого угла; если тупоугольный, то вне треугольника.
2. Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам:

$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Взаимное расположение медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

Биссектриса лежит внутри угла, образованного высотой и медианой, проведёнными из той же вершины. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

Все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке O, являющейся центром окружности, описанной около треугольника (т.е. проходящей через все его вершины).

Если треугольник остроугольный, то центр вписанной окружности лежит внутри треугольника; если прямоугольный, то центр описанной окружности лежит в середине гипотенузы; если тупоугольный, то центр описанной окружности лежит вне треугольника.

Свойство серединного перпендикуляра и биссектрисы.

Продолжение биссектрисы $\angle B$ треугольника ABC пересекаются с серединным перпендикуляром к стороне AC в точке, описанной около треугольника.

Задача. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на две части длиной 15 и 6 м. Найдите стороны треугольника.

Решение.

1. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник, AB — медиана (рис. 8).
2. Так как AD — медиана к стороне BC, то B0 = DC. Обозначим BDчерез x, тогда AB содержит 2 x.
3. По условию задачи AB + BD = 15, или 2 x+ x = 15, откуда x = 5. Следовательно, AB равно 10 м, а BD равно 5 м.
4. По условию задачи AC + DC = 6, подставив найденное значение DC, имеем AC + 5 = 6, откуда AC = 1.
5. Стороны треугольника 10 м, 10 м, 1 м.

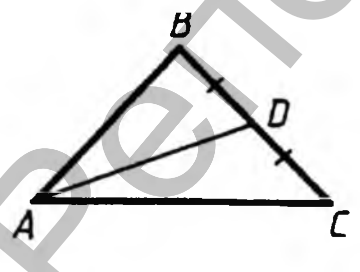


Рис.8

Контрольные вопросы

1. Дайте определение биссектрисы треугольника.
2. Что общего между биссектрисой угла и биссектрисой треугольника?
3. Какой отрезок называют медианой треугольника?
4. Дайте определение высоты треугольника.

5. В каком треугольнике высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины, совпадают?
6. Верно ли, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой?
7. Докажите, что в равностороннем треугольнике три медианы, высоты и биссектрисы равны.

Признаки подобия.

1. По двум углам. Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника равны дум углам другого треугольника.
2. По двум сторонам и углу. Два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны.
3. По трём сторонам. Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника.

Следствия.

1. В подобных треугольниках углы между любыми сходственными линейными элементами равны, а длины этих элементов относятся как коэффициент подобия *k*.
2. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Задача. Углы B и B_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Стороны AB и BC треугольника ABC в 2,5 раза больше сторон A_1B_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.

Решение.

1.Пусть условию задачи отвечает рисунок 9.

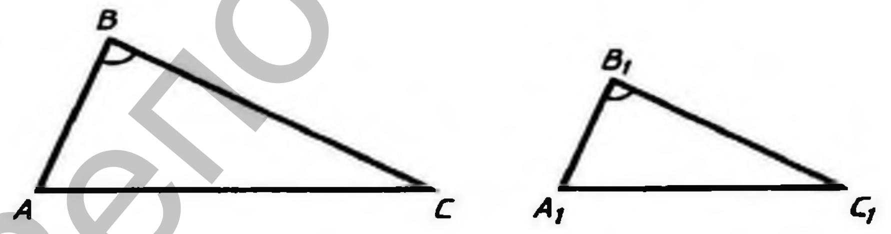


Рис.9

2. Из условия задачи 1) $\angle B = \angle B_1$;2) $\frac{AB}{A1B1} = \frac{BC}{B1C1} = 2{,}5$;3) AC+$A_1C_1$=4,2 м.

Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Из подобия этих треугольников следует $\frac{AB}{A1B1} = 2{,}5$, или $AC = 2{,}5 \cdot A_1C_1$.

3. Так как $AC = 2{,}5 \cdot A_1C_1$, то $AC + A_1C_1 = 2{,}5 \cdot A_1C_1 + A_1C_1 = 4{,}2$, откуда $A_1C_1 = 1{,}2$ м, AC=3 м.

Прямоугольный треугольник.
Признаки равенства прямоугольных треугольников.

1. Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол.
2. Острые углы прямоугольного треугольника дополняют друг друга до 90°.
3. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются *катетами*. (рис.)
4. Прямой угол обозначается так, как показано на рисунке 10.

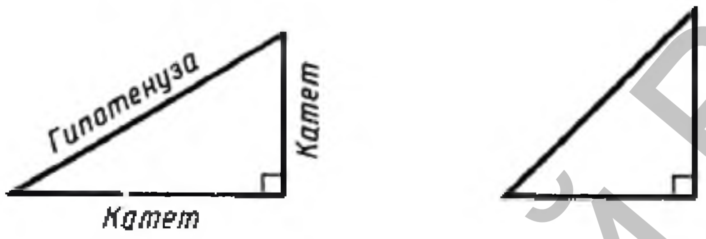


Рис.10

5. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, где $\angle C = \angle C_1 = 90°$, равны, если выполняются следующие условия (рис.11):

1) $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$ (по гипотенузе и острому углу);
2) $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$ (по катету и противолежащему углу);
3) $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$ (по гипотенузе и катету).

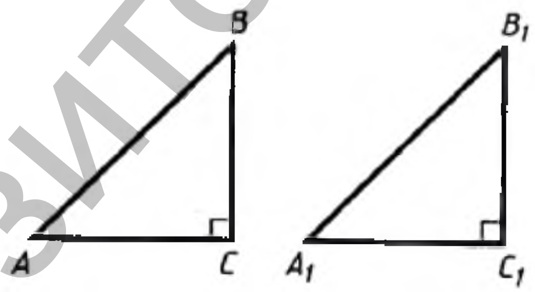


Рис.11

6. В прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу в 30°, равен половине гипотенузе.

Задача. Найдите углы прямоугольного треугольника, зная, то острые углы относятся как 1 : 2.

Решение.

1. В прямоугольном треугольнике угол A равен 90° , а сумма двух других углов составляет также 90°.
2. По условию $\angle C : \angle B = 1 : 2$.
3. Обозначим градусную меру угла C черезx, тогда угол B содержит $2x$.
4. Составим уравнение и решим его:
   $x + 2x = 90$, т.е. $3x = 90$, или $x = 30$.
5. Следовательно, $\angle C = 30°$, $\angle B = 60°$.

Контрольные вопросы.

1. Какой треугольник называется прямоугольным?
2. В каком треугольнике одна из его сторон является проекцией другой стороны?
3. Точно ли сформулирована теорема: “Все точки биссектрисы угла одинаково удалены от сторон этого угла” ?
4. Известны углы прямоугольного треугольника. Как найти углы, образуемые катетами с высотой, опущенной на гипотенузой?
5. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.

Теорема Пифагора.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов.

Два треугольника называются подобным, если углы одного треугольника равны углам другого треугольника, а противолежащие равным углам стороны пропорциональны.

Задача. Найдите высоту треугольника, стороны которого 13, 14 и 15 м.

Решение.

1.Пусть данным задачи отвечает рисунок 12.

2. Из прямоугольных треугольников ABD и BDC составим равенства:

$x^2 = 13^2 - y^2$(из ΔABB)*;* (1)

$x^2 = 14^2 - (15 - y)^2$(из ΔBDC)*.* (2)

Левые части равенств (1) и (2) равны, значит, равны и правые, т.е.

$13^2 - y^2 = 14^2 - (15 - y)^2$. (3)

3. Равные (3) найдем y:

$169 - y^2 = 196 - 225 + 30y - y^2$;

откуда 30y=198, т. е. y=6,6.

4. Вернемся к равенству (1), найдем x:

$x^2 = 13^2 - 6{,}6^2 = 169 - 43{,}56 = 125{,}44$,

Откуда $x = \sqrt{125{,}44} = 11{,}2$ м.

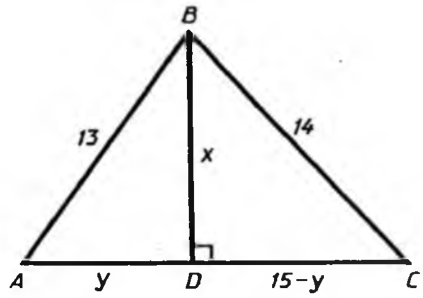


Рис.12

Контрольные вопросы

1. Может ли проекция отрезка быть равной самому отрезку? Может ли она быть больше отрезка?
2. При каком условии проекция отрезка вдвое меньше самого отрезка?
3. В каком треугольнике одна из его сторон является проекцией другой стороны?
4. В каком треугольнике имеет место равенство $AB^2 = AC^2 + BC^2$, если AB, AC и BC его стороны?

Теорема синусов.

Во всяком треугольнике ABC отношение любой стороны к синусу противоположного ей угла есть постоянная для данного треугольника величина, равная удвоенному радиусу окружности, описанной вокруг треугольника ABC,

т.е. $\frac{AB}{sin}\angle C = \frac{BC}{sin}\angle A = \frac{AC}{sin}\angle B = 2R$.

Задача. В треугольнике АВС угол А равен 30°, угол В равен 30°. Найдите отношение $a: c$.

Решение.

1.По теореме синусов $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin B}$.

2. Используя теорему о сумме внутренних углов треугольника, имеем $\angle C = 180° - (30° + 30°) = 120°$.

3. Так как $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,

или $a: c = 1: \sqrt{3}$.

Теорема косинусов.

Во всяком треугольнике ABC квадрат одной из сторон BC равен сумме квадратов двух других сторон AB и AC минус удвоенное произведение длин этих сторон на косинус угла между ними, т.е.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cos\angle A$.

Задача. Даны диагонали параллелограмма c и k и угол между ними. Найдите стороны параллелограмма.

Решение.

1. Из треугольника OCD (рис. 13) имеем:

$DC^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{k}{2} \cos \alpha$.

2. После упрощения получим $DC = 0{,}5\sqrt{c^2 + k^2 - 2ck \cdot \cos \alpha}$.

3. Аналогично из треугольника ФЦВ имеем:

$AD^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{k}{2} \cos(180° - \alpha)$,

$AD = 0{,}5\sqrt{c^2 + k^2 - 2ck \cdot \cos \alpha}$.

4. В параллелограмме противолежащие стороны равны, следовательно, DC=AB и AD=BC.

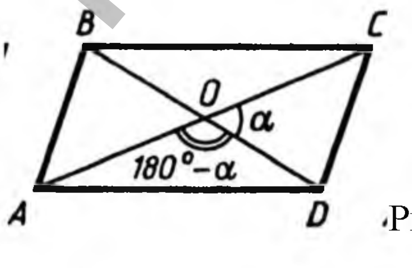


Рис.13

Контрольные вопросы

1. Какие основные элементы треугольника можно определить с помощью теоремы косинусов?
2. Сформулируйте теорему косинусов.
3. Дан треугольник со сторонами а, Ь, с, причем угол α, противолежащий стороне с: а) острый; б) прямой; в) тупой. В каком из этих трех случаев длина стороны с будет наибольшей? наименьшей?
4. Как с помощью теоремы косинусов, зная стороны треугольника, можно найти его углы? Покажите, как это делается, на конкретном примере.
5. Как по трем сторонам треугольника установить, будет он прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?
6. В треугольнике АВС известно, что а : Ь : с = 2 : 3 : 4. Как относятся синусы углов треугольника?
7. Синусы углов треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Как относятся стороны? Какой это треугольник?
8. Могут ли синусы углов треугольника относиться как: а) 3 : 4 : 5; б) 5 : 7 : 13?

Площадь треугольника.

1. По стороне и проведённой к ней высоте:
$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$
2. По двум сторонам и углу между ними:
$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot sin\alpha = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot sin\beta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sin\gamma.$
3. По трём сторонам (формула Герона):
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.
4. По полупериметру и радиусу вписанной окружности: $S = pr$.
5. По трём сторонам и радиусу описанной окружности: $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$.

Задача. Найдите площадь треугольника, если две его стороны соответственно равны 27 и 29 м, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 26 м.

Решение.

1. Треугольник АСВ достроим до параллелограмма АСЕВ, стороны которого 27 и 29 (рис. 14).

2. Площадь треугольника АВС составляет половину площади полученного параллелограмма, но и площадь треугольника АВЕ также составляет половину площади параллелограмма АВЕС.

3. Следовательно, площадь треугольника АВС равна площади треугольника АВЕ, стороны которого равны: АВ = 27, ВЕ = 29,АЕ = 52.

4. Площадь треугольника ABE можно вычислить по формуле Герона:

SΔABE=$\sqrt{54(54-27)(54-29)(54-52} = 270$

Следовательно,SΔABC=270 м^2.

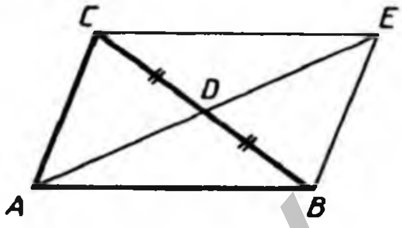


Рис.14

Четырехугольники

Произвольный четырехугольник.

Четырехугольник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от любой из прямой, содержащей сторону четырехугольника.

Если диагонали четырехугольника равны d_1 иd_2 и образуют угол α, то площадь четырехугольника: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \alpha$.

Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Стороны этого параллелограмма параллельны соответствующим диагоналям четырехугольника.

Средние линии (т.е. отрезки, соединяющие середины противоположных сторон) четырехугольника в точке своего пересечения делятся пополам.

Четырехугольник можно описать около окружности тогда и только тогда, когда сумма противоположных сторон равны. В этом случае его площадь равна: $S = p \cdot r$, где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, $r -$ радиус вписанной окружности.

Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов равна 180°. В этом случае справедлива теорема Птолемея: сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей $(ac + bd = d_1 d_2)$, и площадь: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Справедливы следующие свойства и признаки параллелограмма: противоположные стороны попарно равны; противоположные стороны равны и параллельны; сумма углов, прилежащих к любой стороне равна 180°; диагонали точкой пересечения делятся пополам. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон $(d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2)$.

Площадь параллелограмма вычисляется:

1. Через сторону и опущенную на нее высоту: $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.
2. По двум сторонам и углу между ними: $S = ab \cdot \sin \alpha$.
3. Через диагонали и угол между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \phi$.

Задача. Четырехугольник ABCD — параллелограмм с периметром 10 см. Найдите BD, зная, что периметр треугольника ABD равен 8 см.

Решение.

1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 15.
2. Обозначим AB через x, а BC через y.
3. По условию периметр параллелограмма равен 10 см, т. е. 2(x+y)=10, или x+y=5.
4. Периметр треугольника ABD равен 8, так как AB + AD =x +y = 5, то 8D=8-5=3. Таким образом, диагональBD=3 см.

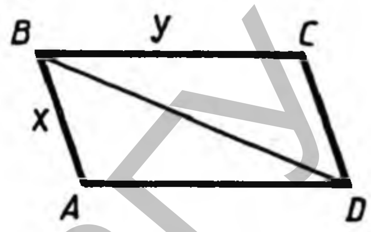


Рис.15

Задача. В параллелограмме угол между высотами α.Найдите высоты и площадь параллелограмма, если стороны его равны b и c (рис. 16).

Решение.

1. Сумма внутренних углов четырехугольника BKDE равна 360°. Следовательно, $360° = 90° + 90° + \alpha + \angle EDK$, откуда $\angle EDK = 180° -$ $-\alpha$, т. е. $\angle ADC = 180° - \alpha$.
2. Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°, т.е. $\angle BAD + \angle ADC = 180°$, откуда $\angle BAD = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Следовательно, и $\angle BCD = \alpha$.

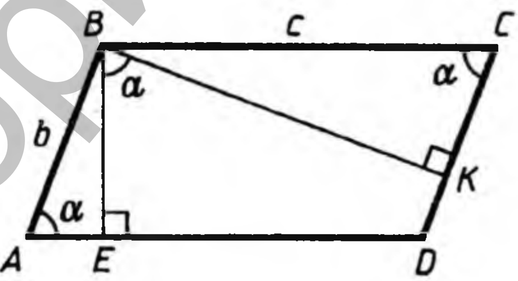


Рис.16

3. Из прямоугольного треугольника ABE находим BE:

$$\sin\alpha = \frac{BE}{b}, \text{или } BE = b\sin\alpha.$$

4. Из прямоугольного треугольника BKC находим BK:

$$\sin\alpha = \frac{BK}{c}, \text{или } BK = c\sin\alpha.$$

5. Площадь параллелограмма

$$S = AD \cdot BE = cb\sin\alpha.$$

Контрольные вопросы

1.Что такое параллелограмм?
2. Может ли один угол параллелограмма быть равным 40°, а другой —50°?
3. Сформулируйте свойства углов параллелограмма.
4. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трех данных точках?
5. Как дополнить треугольник до параллелограмма?
6. Как измерить расстояние между большими сторонами параллелограмма?

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Длины диагоналей прямоугольника равны между собой.

Квадратом называется прямоугольник, у которого длины всех сторон равны.

Ромбом называется параллелограмм, у которого длины всех сторон равны.

Диагонали ромба и квадрата взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов.

В ромб и квадрат можно вписать окружность, цент которой находится в точке пересечения диагоналей.

Задача. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 10.

Решение.

1. Условию задачи отвечает рисунок 17.
2. BE = EC по условию.
3. Треугольник ABE прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, AB = BE = 10. BC=2·BE=2·10=20.
4. Периметр прямоугольника ABCD состоит из суммы всех его сторон и равен 2 (AB + BC) = 2 (10 + 20) = 60

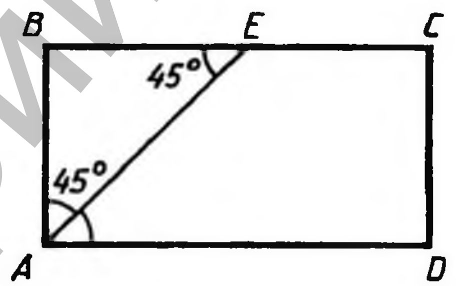


Рис.17

Трапеция.

1. Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. (рис.18)
2. Параллельные стороны в трапеции называются основаниями трапеции. Две другие стороны называются боковыми сторонами.
3. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется равнобокой (равнобедренной).
4. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называетсясредней линией.
5. Средняя линия трапеции параллельна основания и равна их полусумме: EK||BC||AD; EK=$\frac{BC+AD}{2}$(рис.19), где EK – средняя линия.

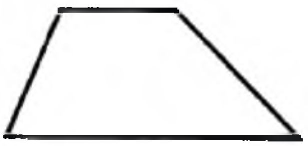


Рис.18

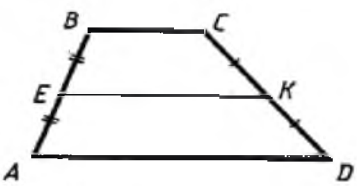


Рис.19

6. У равнобокой трапеции углы при основании равны.

7. На рисунке 20 изображены некоторые виды *выпуклых* четырехугольников:

а) четырехугольник общего вида – параллельных сторон нет;

б) трапеция – такой четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны;

в) прямоугольник – такой параллелограмм, у которого все углы прямые;

г) ромб – такой параллелограмм, у которого все стороны равны;

д) квадрат – такой прямоугольник, у которого все стороны равны, и такой ромб, у которого все углы прямые.

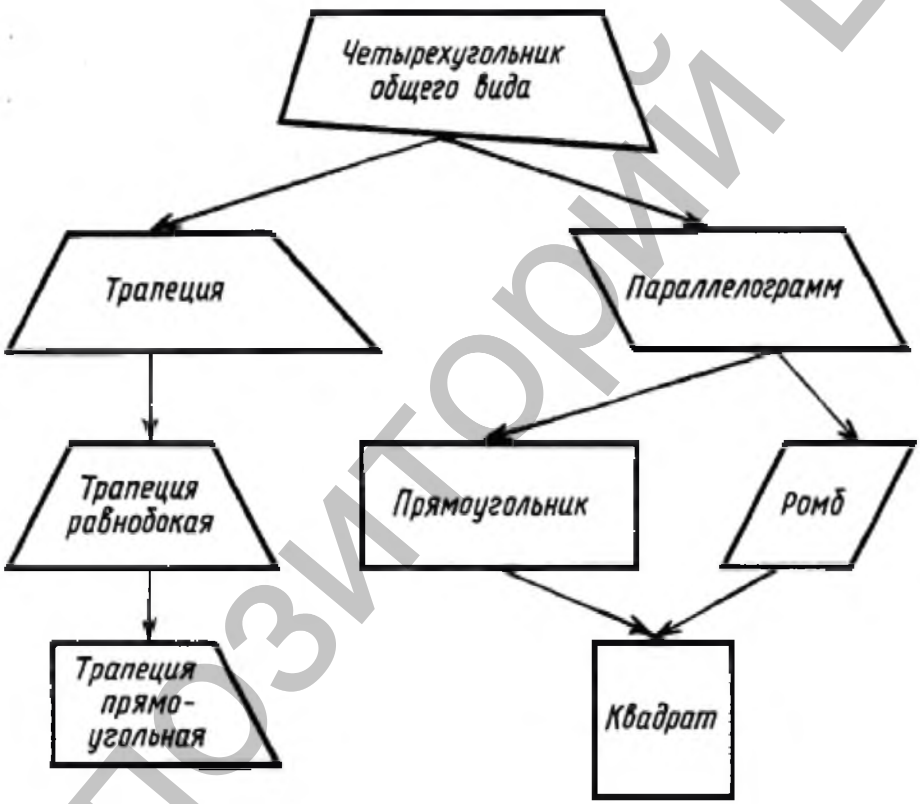


Рис.20

Задача. Диагонали трапеции делят углы, прилежащие к большему основанию, пополам. Периметр трапеции равен 36 м, а средняя линия 11,7 м. Найдите стороны трапеции.

Решение.

1.Пусть условию задачи отвечает рисунок 20.

2.По условию AC – биссектриса ∠BAD, следовательно, ∠CAD = ∠CAB. DB– биссектриса ∠CDA, поэтому ∠ADB = ∠BDC.

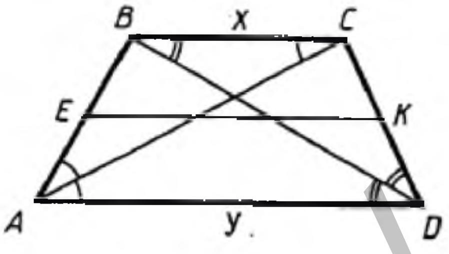


Рис.21

3.Треугольники ABC и BCD равнобедренные, значит, их боковые стороны равны: AB = BC, BC = CD. Из последних равенств следует, что AB = BC = CD.

4.Обозначим AB через *x*, а AD через *y*.

Используя данные условия задачи (EK = 11,7, а P = 36),составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 11{,}7 \\ x + x + x + y = 36, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x + y = 23{,}4 \\ 3x + y = 36, \end{cases}$$

Откуда *x*= 6,3, а *y*= 17,1.

AB = BC = CD= 6,3м, AD= 17,1 м.

Площадь трапеции вычисляется:

1. Через полусумму оснований и высоту: $S = \frac{a+b}{2}h$.
2. Через среднюю линию MN и высоту: $S = MN \cdot h$.
3. Через диагонали и угол между ними: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \cdot \sin\phi$.

Задача. В равнобокой трапеции большее основание равно 3,7, боковая сторона равна 1,5, а угол между ними равен 60°. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение.

1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 21.

2. Из точек B и C опущены перпендикуляры на AD. Получили два равных прямоугольных треугольника ABE и CKD, у которых углы ABE и KCD равны 30°.

3. AE=KD=$\frac{AB}{2}$, и, следовательно, EK=AD—2AE, т. е. EK=2,2.

4 Так как EK=DC, то средняя линия трапеции равна $\frac{2{,}2+3{,}7}{2} = 2{,}95$.

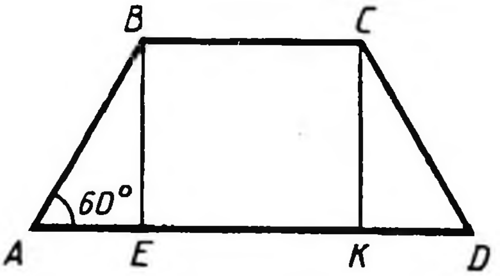


Рис.22

Контрольные вопросы

1.Дайте определение трапеции.

2. Как называют стороны трапеции?

3. Какая трапеция называется равнобокой?

4. Какая трапеция называется прямоугольной?

5. Дайте определение средней линии трапеции,

6. Какие свойства средней линии трапеции вы знаете?

Окружность

1. **Окружностью** называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся от данной точки. Данная точка называется центром окружности.
2. Расстояние от точки окружности до ее центра называется радиусом окружности.
3. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром.
4. Отрезок соединяющий две точки окружности, называется хордой.
5. Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром.
6. Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины (рис.23).
7. Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через середины этих сторон (рис.23).

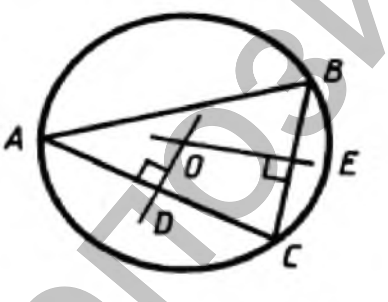


Рис.23

Рис.24

8. Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется касательной. При этом данная точка окружности называется точкой касания. (рис.24)
9. Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон. (рис.25)

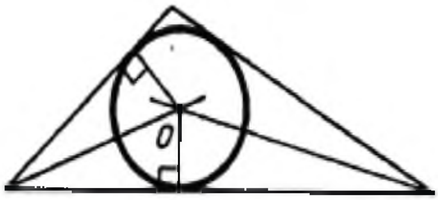


Рис.25

10. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис. (рис.25.)

11. Две окружности, имеющие общую точку, касаются в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную. (рис.26)

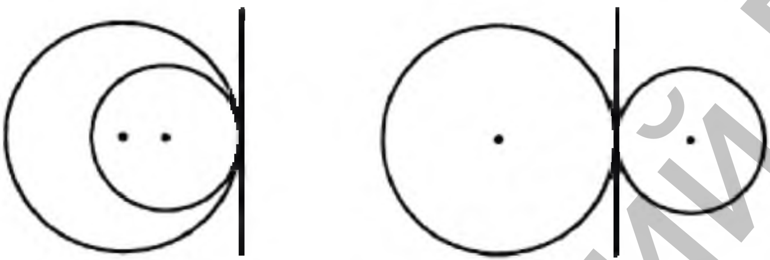


Рис.26

12. Касание окружностей называется внутренним, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной.

13. Касание окружностей называется внешним, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной.

14. Две окружности являются концентрическими, если они имеют общий центр.

15. Если из точки А проведены две касательные к окружности, то отрезки АВ и АС равны, а центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними (рис.27).

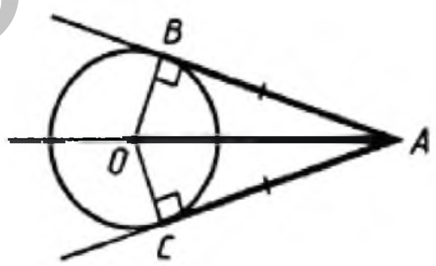


Рис.27

Круг – часть плоскости, ограниченная окружностью. **Длина окружности:** $L = 2\pi R$.

Площадь круга: $S = \pi R^2$.

Измерение углов, связанных с окружностью.

Угол в один радиан равен центральному углу, опирающемуся на дугу, длина которой равна радиусу окружности. Центральный угол равен угловой величине дуги,на которую он опирается (рис.28).

Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается (рис. 28). Вписанный угол равен половине центрального угла (рис.28), опирающегося на ту же дугу, $\beta = \frac{1}{2}\alpha$. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

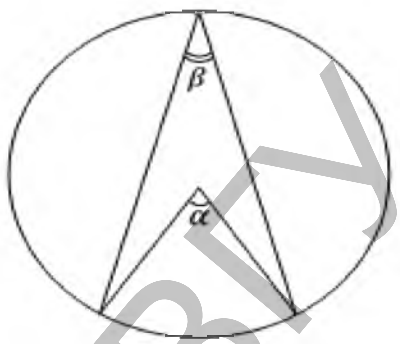


Рис.28

Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по одну сторону от этой хорды, равны (рис.29).

Любая пара углов, опирающихся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по разные стороны хорды, составляет 180° (рис.30),

$\alpha + \beta = 180°$

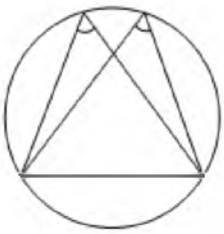


Рис.29

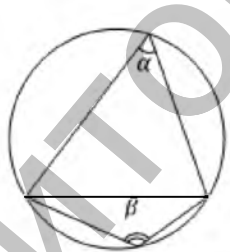


Рис.30

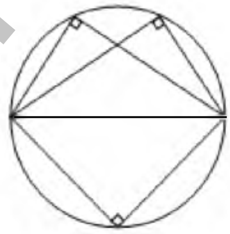


Рис. 31

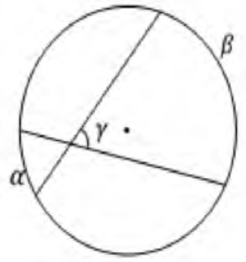
Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые (рис.31).

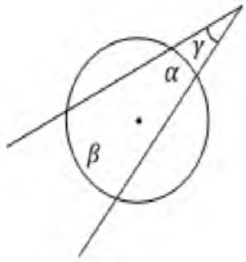
Угол между пересекающимися хордами окружности (рис. 32) измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается: $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

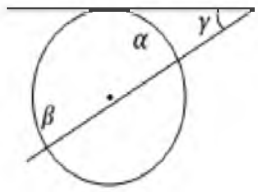
Угол между секущими, пересекающимися вне окружности (рис.33), измеряется полуразностью дуг, заключенных между секущими:$\gamma = \frac{\beta-\alpha}{2}$

Угол между касательной и секущей (рис.34) измеряется полуразностью дуг, заключенных между касательной и секущей: $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{2}$.

Угол между касательной и хордой (рис.35) измеряется половинной дуги, заключенной между касательной и хордой: $\gamma = \frac{\alpha}{2}$.







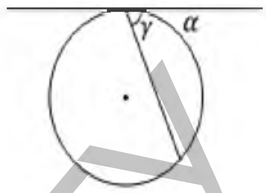


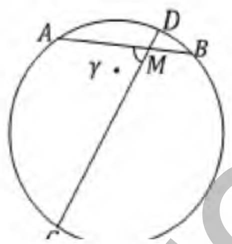
Рис.32 Рис.33 Рис.34 Рис.35

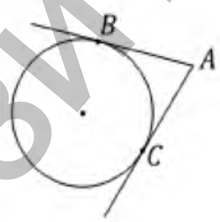
Соотношение между длинами хорд, отрезков касательных и секущих. Если хорды AB и CD (рис. 36) пересекаются в точке M, то отрезки пересекающихся хорд связаны соотношением:

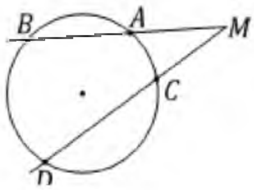
$$AM \cdot BM = CM \cdot DM.$$

Если из точки A к окружности проведены две касательные AB и AC (рис.37), то отрезки касательных равны $AB = AC$.

Если из точки M к окружности проведены две секущие (рис.38), пересекающие окружность соответственно в точках A, B и C, D, то произведения отрезков секущих равны: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Если из точки M к окружности проведены касательная MA и секущая, пересекающая окружность в точках B и C (рис.39), то квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей: $AM^2 = MB \cdot MC$.







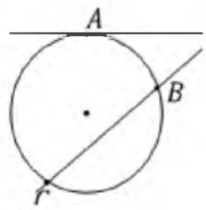


Рис.36 Рис.37 Рис.38 Рис.39

Длина дуги: $l = \alpha \cdot r$ (угол в радианах).

Площади:

1. Площадь сектора: $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$ (угол α в радианах).
2. Площадь сегмента: $S = \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha)r^2$ (угол α в радианах).

Задача. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды, каждая из них делится другой на два отрезка 3 и 7. Найдите расстояние от центра до каждой хорды.

Решение.

1.Пусть условию задачи отвечает рисунок 40.

2.Отрезки OK и OM и есть расстояние от центра круга до хорд CD и AB.

3.Треугольник COD равнобедренный, основание которого CD равно 10. Отрезок OK – высота треугольника COD, он же будет и медианой, поэтому CK = KD = 5.

4.По условию CE = 3, следовательно, EK = KC – EC = 2.

OMEK -прямоугольник (три угла по 90°), поэтому EK = OM = 2.

Аналогично находим отрезок OK, который тоже будет равен 2.

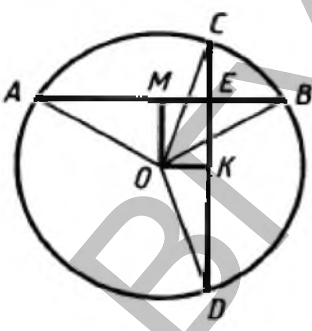


Рис.40

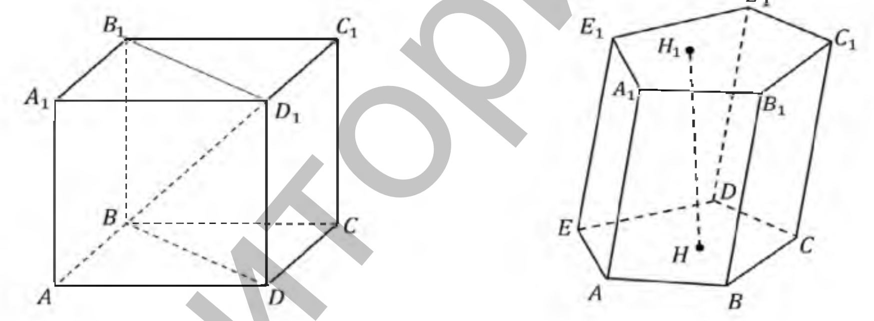
Контрольные вопросы.

1. Что называется окружностью?
2. Что называется радиусом?
3. Что называется хордой?
4. Что называется диаметром?
5. Что называется касательной?
6. Какая окружность называется вписанной в треугольник?
7. Какое касание окружностей называется внешним, какое – внутренним?

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Призма

1. Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащий в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющий соответствующие точки этих многоугольников (рис.1а). Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ называются основаниями призмы. Многоугольники $AA_1B_1B, BB_1C_1C,$ … (параллелограммы) называются боковыми гранями призмы. Отрезки $AA_1, BB_1, CC_1,$ … называются боковыми ребрами. Перпендикуляр $HH_1,$ опущенныйиз какой-нибудь точки верхнего основания призмы на плоскость нижнего основания, называется высотой призмы (рис.1б).
2. Призма называется треугольной, четырехугольной и т. д, когда ее основание – треугольник, четырехугольник и т. д



а) б)

Рис.1

3. Призма называется наклонной, если ее боковые ребра не перпендикулярны основаниям (рис.1б).
4. Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям (рис.1а).
5. Призма называется правильной, если она прямая и ее основания – правильные многоугольники.
6. Площадь поверхности призмы – это сумма площадей всех ее граней.
7. Площадь боковой поверхности призмы – это сумма площадей вех боковых граней.
8. Плоскость, перпендикулярная к боковому ребру призмы, пересекает ее грани. Полученный в сечении многоугольник называют перпендикулярным сечением призмы.

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы (на длину бокового ребра), т.е. $S = PH$.

Задача. В кубе с ребром *a*проведено сечение через середину ребер AD и B_1C_1 и вершины A_1 и C. Найдите площадь сечения (рис. 2)

Решение.

1.Изпрямоугольного треугольника MCD, в котором CD = *a*, $MD = \frac{a}{2}$,найдем $CM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

2. Но, $A_1E_1 = EC = CM = MA_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

3.Так как $A_1E_1 \| MC$, значит A_1EMC – ромб. Его диагональ $ME = DC_1$, и поэтому $ME = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

4.Отрезок A_1C_1 – диагональ куба, и, следовательно, $A_1C_1 = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

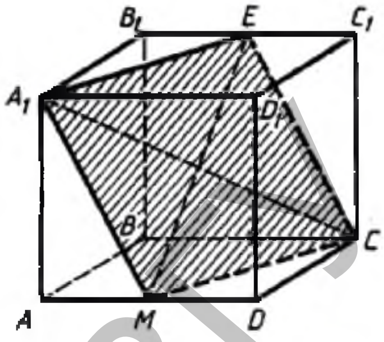


Рис.2

5.Теперь находим, что$S_{A_1ECM} = \frac{1}{2} ME \cdot A_1C_1 = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$

Контрольные вопросы

1. Сколько диагональных сечений можно провести в кубе?
2. Имеем модель наклонной призмы. Какие размеры необходимо определить, чтобы вычислить площадь боковой поверхности призмы?
3. Что такое высота призмы?
4. Что такое диагональ призмы?
5. Что такое диагональное сечение призмы?
6. Какая прямая называется прямой, наклонной?
7. Какая призма называется правильной?

Параллелепипед

1. Параллелепипедом называется призма, у которой основаниями служат параллелограммы. Параллелепипеды, как и всякие призмы, могут быть прямые и наклонные.

2. Из определений следует:

– у параллелепипеда все шесть граней – параллелограммы;

– у прямого параллелепипеда четыре боковые грани – прямоугольники, а два основания – параллелограммы;

– у прямоугольного параллелепипеда все шесть граней – прямоугольники.

3. В любом параллелепипеде:

– противоположные грани равны и параллельны

– диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

4. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

5. Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Задача. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 и 6 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60°.

Решение.

1. Условию задачи отвечает рисунок 3…

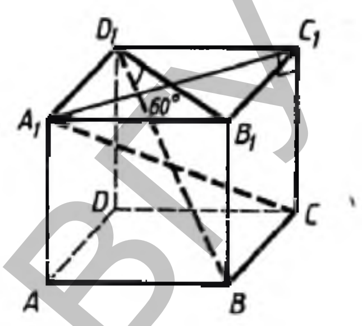


Рис.3

2. Так как основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, а у параллелограмма сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон, то неизвестная диагональ равна:

$A_1C_1 = \sqrt{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 6^4 - 4^2} = \sqrt{74} > 4.$

3. Из прямоугольного треугольника D_1B_1Bнайдем ребро:

$B_1B = 4 \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3}$

4. Большая диагональ параллелепипеда A_1C является гипотенузой прямоугольного треугольника A_1C_1C тогда

$A_1C_1 = \sqrt{{A_1C_1}^2 + C_1C^2} = \sqrt{74 + 16 \cdot 3} = \sqrt{122}$см.

Контрольные вопросы.

1. Что называется параллелепипедом?
2. Какое свойство у диагоналей параллелепипеда?
3. Какой параллелепипед называется прямым, прямоугольным?
4. Чему равны диагонали прямоугольного параллелепипеда, если известны его измерения?
5. Как изменится площадь полной поверхности куба, если увеличить его ребро в два раза?

Пирамида

1. Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания, – вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания. На рисунке 4 изображена пирамида $SABCD$, где $ABCD$ – основание, точка S – вершина. Треугольники SAB, SBC, SCD, SDA называются боковыми ребрами пирамиды. Перпендикуляр SO, опущенный из вершины на основание, называется высотой пирамиды и обозначается H.

2. Сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания, называется диагональным сечением пирамиды. Например, треугольник ASC – диагональное сечение пирамиды.

3. Пирамида называется треугольной, четырехугольной и т. д., если ее основание – треугольник, четырехугольник и т. д.

4. Пирамида называется правильное, если ее основание – правильный многоугольник, а высота ее проходит через центр основания.

5. Боковые грани правильной пирамиды – равнобедренные треугольники, равные между собой.

6. Высота боковой грани правильной пирамиды называется апофемой пирамиды.

7. Треугольная пирамида называется также тетраэдром. Если все четыре грани тетраэдра – правильные треугольники, то и тетраэдр называется правильным.

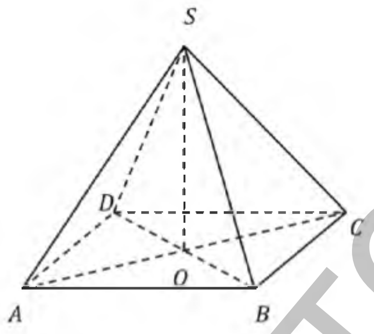


Рис.4

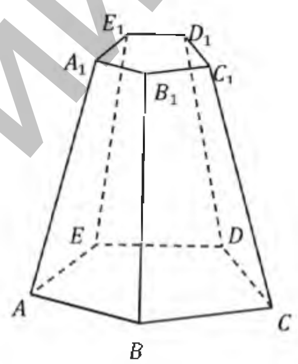


Рис.5

8. Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то получится новый многогранник, который называется усеченной пирамидой (рис.5). Многоугольник $ABCDE$ – нижнее основание, многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ – верхнее основание.

9. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на высоту.

10. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусумму периметров ее оснований на апофему.

11. Если в пирамиде все боковые ребра равны, то вершина ее проектируется в центр описанной около основания окружности.

12. Если в пирамиде все двугранные углы при основании, то вершина проектируется в центр вписанной в основание окружности.

Задача. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4 см. Каждое ребро пирамиды равно 13 м. Найдите высоту пирамиды и площадь боковой поверхности.

Решение.

1.Условию задачи удовлетворяет рисунок 6.

2.Так как по условию все боковые ребра равны, то вершина проектируется центр описанной около основания окружности, т.е в точку Опересечения диагоналей.

3.Следовательно, высота пирамиды равна катету прямоугольного треугольника OSD, у которого другой катет равен половине диагонали прямоугольника, а гипотенузой является боковое ребро.

4. Найдем диагональ прямоугольника BD = $\sqrt{3^2+4^2}=5$.

5. Высота пирамиды SO $=\sqrt{13^2-2{,}5^2}=\sqrt{162{,}75}$.

6. Для нахождения площади боковой поверхности нужно знать длины апофем SKи SM:

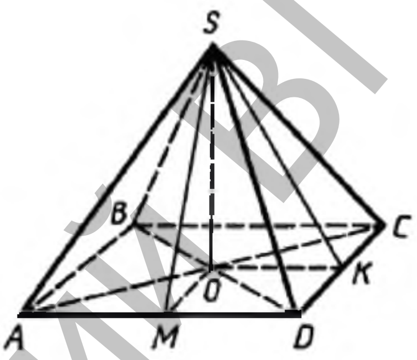


Рис.6

Из прямоугольного треугольника SKDнайдем

$$SK= \sqrt{13^2-1{,}5^2}=\sqrt{166{,}75};$$

Из прямоугольного треугольника SMDнайдем

$$SM = \sqrt{169-4}=\sqrt{165}.$$

Найдем площадь боковой поверхности

$$S_{\text{бок}} = 2S_{\Delta \mathrm{ASD}} + S_{\Delta \mathrm{DSC}} = 2\cdot\frac{4\sqrt{165}}{2} + 2\cdot\frac{3\sqrt{166{,}75}}{2},$$

$$S_{\text{бок}} = 4\sqrt{165} + 3\sqrt{166{,}75}\text{м}^2$$

Контрольные вопросы

1. Какой многогранник называется пирамидой?
2. Какая пирамида называется треугольной?
3. Какая пирамида называется правильной?
4. Что такое апофема правильной пирамиды?
5. Какая пирамида называется тетраэдром?
6. Какая пирамида называется усеченной?

7. Как относятся площади сечения пирамиды и основания, если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию?
8. Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды?
9. Чему равна площадь боковой поверхности усеченной пирамиды?
10. Что такое высота пирамиды?

Цилиндр

1. Цилиндром (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называются основаниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точно окружностей кругов, – образующими цилиндра.
2. Поверхность цилиндра состоит из оснований цилиндра – двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях, и боковой поверхности.
3. Цилиндр называется прямым, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. (В настоящем пособии будем рассматривать только прямой цилиндр, называет его для краткости просто цилиндром).
4. Прямой цилиндр можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг его стороны как оси (рис. 7).

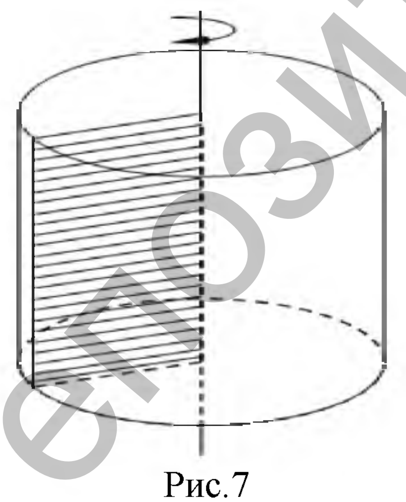


Рис.7

5. Радиусом цилиндра называется радиус его основания.
6. Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.
7. Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.
8. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется осевым сечением.

9. Цилиндр, осевое сечение которого квадрат, называется равносторонним.

10. Плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

11. Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому, проведенному через эту образующую, называется касательной плоскостью цилиндра.

Задача. Высота цилиндра 8м, радиус основания 5м. Цилиндр пересечен плоскостью так, чтов сечении получился квадрат. Найдитерасстояние от этого сечения до оси.

Решение.

1.ABB'A' – квадрат (рис. 8)

2. Фигура OABO'A'B' – прямая треугольная призма, в которой боковые ребра равны по 8 м, стороны основания OA = OB = R = 5 м, боковая грань AA'B'B – квадрат.

3. На рисунке 8 призма OABO'A'B' вынесена из цилиндра.

OK⊥AB.Найдем длину (h) перпендикуляра OK.

4. По условию AB = A'B' = AA' = 8. В прямоугольном треугольнике AOK катет AK = 4. Тогда по теореме Пифагора:

h= OK = $\sqrt{AO^2 - AK^2}$= $\sqrt{25 - 16}$ = 3м.

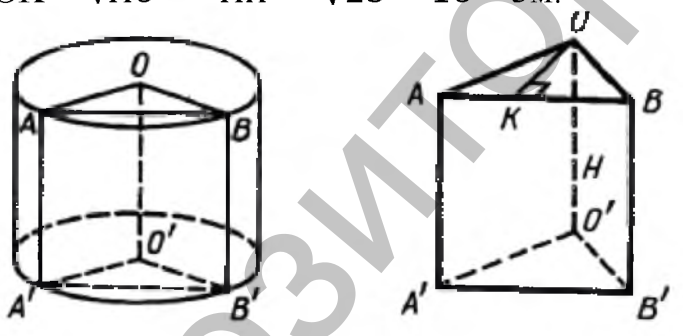


Рис.8

Контрольные вопросы

1. Объясните, что такое круговой цилиндр (образующая цилиндра, основания и боковая поверхность цилиндра).
2. Какой цилиндр называется прямым?
3. Что такое радиус цилиндра, высота цилиндра, ось цилиндра, осевое сечение цилиндра, касательная плоскость цилиндра?
4. Какая фигура является осевым сечением цилиндра?
5. Какой цилиндр называется равносторонним?

Конус

1. Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга – основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга – вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими конуса.

2. Полная поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

3. Конус называется прямым, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. (В данном пособии будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом).

4. Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания.

5. Осью прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту.

6. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется осевым сечением.

7. Прямой конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси. На рисунке 9 изображен прямой конус с его элементами, где: а) B – вершина конуса; б) $AB = BC = l$ – образующая конуса; в) $OB = H$ – высота, ось конуса; г) K – основание конуса, круг; д) $AO = OC = R$ – радиус основания; е) AC – диаметр основания; ж) треугольник ABC – осевое сечение конуса; з) $\angle AOB = 90^{\circ}$.

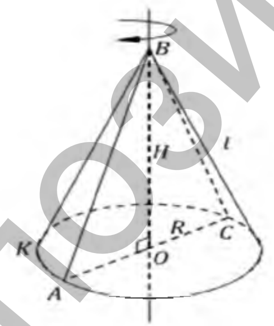


Рис.9

Рис.10

8. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.

9. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, осекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется усеченным конусом (рис. 10).

10. Пирамидой, вписанной в конус, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса. Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса.

11.Пирамида называется описанной около конуса, если ее основанием является многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.

Задача. Высота прямого кругового конуса равна радиусу основания R. Через его вершину проведена плоскость сечения, отсекающая дугу 60°. Найдите площадь сечения.

Решение.

1. Секущая плоскость пересекается с поверхностью конуса по образующим ЕА и ЕВ и хорде АВ (рис.11).
2. Искомая площадь есть площадь треугольника АЕВ.
3. Основание АВ треугольника АОВ стягивает дугу 60°, следовательно, АВ = R(сторона правильного вписанного шестиугольника).

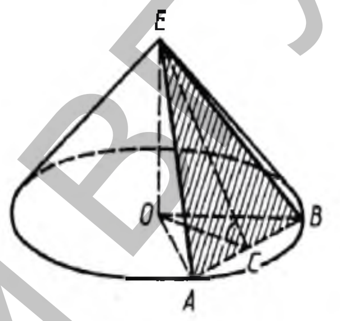


Рис.11

4. Высота сечения ЕС является гипотенузой треугольника ЕОС, в котором ЕО = R, а ОС = $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. ПоэтомуEC = $\sqrt{EO^2 + CO^2} = \frac{R\sqrt{7}}{2}$, площадь треугольника ABE = $\frac{1}{2}$AB$\cdot$ EC =$\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$

Контрольные вопросы

1. Что такое круговой конус, вершина конуса, образующая конуса, боковая поверхность конуса?
2. Какой конус называется прямым?
3. Что такое высота конуса, ось конуса, осевое сечение конуса?

Шар

1. Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного от данной точки. Эта точка называется центром шара, а данное расстояние – радиусом шара.
2. Граница шара называется шаровой поверхностью или сферой.
3. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется диаметром.
4. Шар, так же как и цилиндр, конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси.
5. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.
6. Плоскость, проходящая через центр шара, называется диаметральной плоскостью.

7. Сечение шара диаметральной плоскостью называется большим кругом, а сечение сферы – большой окружностью.

8. Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания.

9. Многогранник называется вписанным в сферу (а сфера – описанной около многогранника), если все вершины многогранника лежат на сфере.

10. Для того, чтобы около пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около основания пирамиды можно было описать окружность.

11. Для того, чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и чтобы около ее основания можно было описать окружность.

12. Центр сферы, описанной около пирамиды, лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр окружность, описанной около основания.

13. Центр сферы, описанной около призмы, является серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанный около оснований призмы.

14. Из указанных выше утверждений следует, что около любой правильной пирамиды и около любой правильной призмы можно описать сферу.

15. Сфера называется вписанной в многогранник (многогранник – описанным около сферы), если ока касается всех его граней.

16. Центр вписанной сферы является общей точной биссекторов всех внутренних двугранных углов многогранников. Отсюда следует, что если вписанная сфера существует, то только одна.

Задача. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большего круга?

Решение.

1. Пусть радиус шара R, радиус круга в сечении AO_1 (рис.12)

2. Треугольник OO_1A прямоугольный, $\angle OO_1A = 90°$. Найдем радиус сечения:

$$AO_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

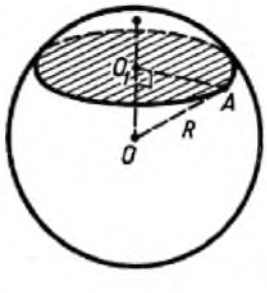


Рис.12

3. Отношение площади этого круга к площади большего круга равно:

$$\frac{\pi\left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое шар (шаровая поверхность или сфера)?
2. Что такое радиус шара, диаметр шара?
3. Какие точки шара называются диаметрально противоположными?

4. Какая плоскость называется диаметральной плоскостью шара?
5. Какая плоскость называется касательной к шару?
6. В каком случае многогранник называется вписанным в сферу?
7. Любой ли многогранник можно вписать в сферу?
8. В каком случае сфера называется вписанной в многогранник?
9. Чему равен радиус шара, вписанного в куб, ребро которого 3 дм; описанного около этого куба?
10. Можно ли утверждать, что через две точки шаровой поверхности проходит один большой круг?
11. Сколько общих точек может иметь шаровая поверхность и прямая?
12. Сколько общих точек могут иметь две шаровые поверхности?
13. Можно ли к любым двум шарам провести общую касательную прямую?

Объём прямоугольного параллелепипеда

1. Объём прямоугольного параллелепипеда будем называть число, равное произведению трёх его измерений, взятых в одних и тех же единицах. Если измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c, то $V = abc$.
2. Если $a = b = c$, то прямоугольный параллелепипед будет кубом, тогда его объём будет: $V_{\text{куб}} = a^3$.
3. Объёмы геометрических тел выражаются в кубических единицах.
4. Объём любого прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту: $V = S \cdot H$.
5. Два многогранника, имеющие равные объёмы, называются равновеликими.

Задача. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с основанием угол α, а с боковой гранью угол β. Найдите объём параллелепипеда.

Решение.

1. Имеем $B_1B \perp ABCD$, поэтому BD – проекция B_1D, значит $\angle B_1DB = \alpha$ (рис.13).

2. Любую грань прямоугольного параллелепипеда можно принять за основание, поэтому DC_1 – проекция B_1D и $\angle B_1DC_1 = \beta$.

3. Итак, $B_1D = d$, $\angle B_1DB = \alpha$, $\angle B_1DC_1 = \beta$.

4. Измерения a, b и c нам неизвестны. Найдем их.

а) Из прямоугольного треугольника B_1BD имеем $c = B_1B = B_1D\sin\alpha = d\sin\alpha$.

б) Из прямоугольного треугольника B_1DC_1 имеем $b = B_1C_1 = B_1D\sin\beta = d\sin\beta$.

Рис.13

в) Из прямоугольного треугольника ABD имеем $a = AB = \sqrt{BD^2 - AD^2}$.

г) Из треугольника B_1BD найдем $BD = B_1D\cos\alpha$, а $AD = d\sin\beta$, поэтому $a = \sqrt{d^2cos^2\alpha - d^2sin^2\beta} = d\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2}} = d\sqrt{\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}} = d\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

$$V = abc = d\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}\, d\sin\beta\, d\sin\alpha = d^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

Контрольные вопросы

1. Чему равен объём параллелепипеда?
2. Какие два тела называются равновеликими?
3. Что служит единицей измерения объёмов?
4. Во сколько раз увеличится объём куба, если его ребро увеличить в 2 раза?

Объём призмы

Объём призмы равен произведению площади ее основания на высоту: $V = SH$.

Задача. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4м^2, а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями 2 м. Найдите объем призмы.

Решение.

1. Рассмотрим лежащий в основании данной призмы шестиугольник ABCDEK. (рис.14)
2. Меньшая диагональ AC перпендикулярна ребрам CD и KA, а значит, она перпендикулярна боковым граням, которым принадлежат ребра AKи CD. Следовательно, ее длина и есть данное в условии расстояние между противолежащими боковыми гранями, значит, AC = 2 м.
3. Так как ABCDEK - правильный шестиугольник AO = OC = CB = AB = R, а следовательно, четырехугольник ABCO (точка O – центр основания) является ромбом. По свойству диагоналей ромба AM = 0,5AC = 1м и ∠ABO = 120 : 2 = 60°. Из треугольника AMB найдем сторону основания a = AB= $\frac{AM}{\sin 60°} = \frac{2\cdot 1}{\sqrt{3}}$.
4. Большее диагональное сечение призмы содержит большую диагональ основания, например AD.

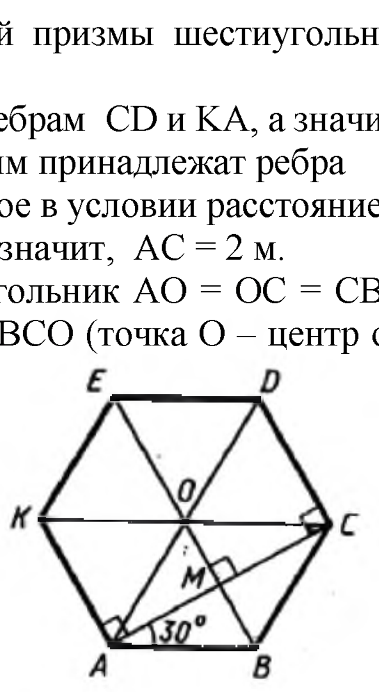


Рис.14

5. Так как AD = $2a$, а если H – высота призмы, то из условия задачи имеем: $S_{сеч}$ = $2a$H = 4, откуда H= $\frac{S_{сеч}}{2a} = \frac{4}{2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$.

Найдем площадь основания призмы: $S_{осн} = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$.

Искомый объем призмы:
V = $S_{осн}$ ·H = $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$, т.е. V = 6м^3.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема прямой призмы и объясните смысл входящих в нее букв.
2. В призме проводятся сечения, параллельные ее основаниям. В каком отношении находятся объёмы данной призмы и вновь полученных призм?

Объем пирамиды

1. Объем любой пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту:$V = \frac{1}{3}SH$.
2. Две пирамиды равновелики, если их равновелики их основания и равны их высоты.
3. Формула для вычисления объема усеченной пирамиды:
$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$,
Где $H -$ высота пирамиды, S_1 и$S_2 -$ площади оснований.
4. Объемы подобных многогранников относятся как кубы сходственных ребер.

Задача. Одно ребро тетраэдра равно 4, каждое из остальных равно 3. Найдите объем тетраэдра.

Решение.

1. Пусть BC = 4,AB = AC = EA = EB = EC = 3 (рис.).
2. V = $\frac{1}{3}$SH, гдеH = EO.
3. S = $\frac{1}{2}$ BC· AD, где BC⊥AD и BC = 4 . Из прямоугольного треугольника ADC найдем AD = $\sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Таким образом, S = $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
4. AE = EB = EC, следовательно, точка O – центр описанной окружности около основания ABC и AO = R.

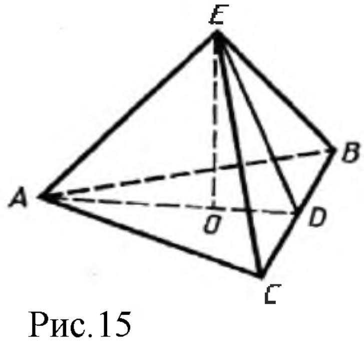


Рис.15

5. Из прямоугольного треугольника AEO находим H = EO= $\sqrt{AE^2 - AO^2}$, где $AE = 3$. Так как $AO = R$, то $AO = \frac{abc}{4S} = \frac{4\cdot3\cdot3}{4\cdot2\sqrt{5}} = \frac{9}{2\sqrt{5}}$, тогда

H=E=$\sqrt{3^2 - (\frac{9}{2\sqrt{5}})^2}$=$\sqrt{\frac{99}{20}}$.

V=$\frac{1}{3}\cdot\ 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{99}{20}}$=$\sqrt{11}$.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема пирамиды и объясните смысл входящих в формулу букв.
2. Напишите формулу объема усеченной пирамиды и объясните смысл входящих в формулу букв.

Объем цилиндра и конуса

1. Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту, т.е. $V = \pi R^2 H$.

2. Объем конуса равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту, т.е. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

3. Объем усеченного конуса равен: $V = \frac{1}{3}\pi H \cdot (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$,

где R_1 и R_2 – радиусы оснований, H– высота конуса.

Задача. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которого каждое ребро равно *a* .

Решение.

1. Высота цилиндра равно боковому ребру призмы, т.е H = *a*.

2. Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной *a*, т.е. r= $\frac{a}{2\ \mathrm{tg}\ 30°}$ =$\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3. Объем цилиндра

$V = \pi R^2 H = \pi\frac{a^2\cdot3}{4}\cdot a = \frac{3}{4}\pi a^3$.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема цилиндра и объясните смысл входящих в нее букв.

2. Как изменится объем цилиндра, если его высоту и диаметр его основания увеличить в 2 раза?

Объем шара и его частей

1. Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаема от него плоскостью (рис. 17 а, в).

2. Шаровым слоем называется часть шара, между двумя параллельными плоскостями, пересекающимишар (рис. 17, б).

3. Шаровым сектором шара называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса (рис. 18а,б).

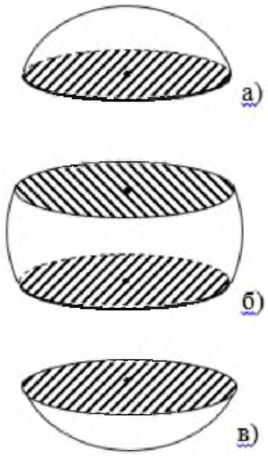


Рис.17

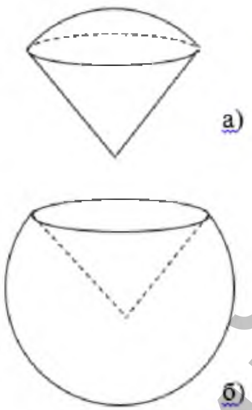


Рис.18

4. Объем шара определяется формулой $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

5. Объем шарового сегмента определяется формулой

$V = \pi H^2 (R - \frac{H}{3})$,

где $H -$ высота шарового сегмента.

6. Объем шарового сектора определяется формулой

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$,

где $H -$ высота соответствующего шарового сегмента.

7. Объемы шаров относятся как кубы радиусов.

Задача. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см?

Решение.

1. Под основание сектора в задаче понимается основание соответствующего сектору сегмента. Пусть R – радиус шара, r – радиус основания сегмента.

2. Наша задача сводится к отысканию высоты этого сегмента: H = PO_1(рис.19). OP – радиус шара, перпендикулярный основанию сегмента.

3. Из прямоугольного треугольника OO_1M ($\angle MO_1O = 90°$) найдем:

$O_1O = \sqrt{OM^2 - O_1M^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45$,

ПоэтомуH = $PO_1 = OP - OO_1 = R - OO_1 = 75 - 45 = 30$.

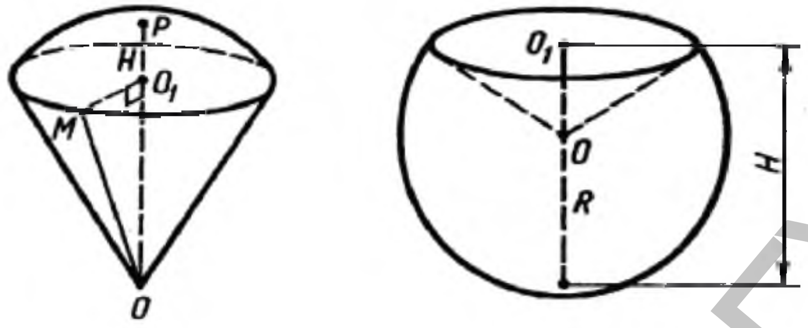


Рис.19

4. Объем шарового сектора

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi 75^2 \cdot 30 = 112\ 500\pi см^3$.

5. Примечание. Поставленнаязадачаимеетдва решения:

1) Шаровой сектор, который мы рассматривали, называется выпуклым, и его высота равна $R - OO_1$.
2) Шаровой сектор, высота которого равна $R + OO_1$, называется невыпуклым (рис.). Найдем его объем.

6.Рассмотрим *второй случай,* где высота сектора $H = R + OO_1 = 120$, так что полученный объем будет в 4 раза больше, чем вычисленный:

$$V = \pi 45\cdot 10^4 см^3.$$

Таким образом, искомый объем равен либо $112\ 500\pi см^3$,
либо $450\ 000\pi см^3$.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема шара.
2. Как относятся объемы шаров.
3. Как изменится объем шара, если радиус увеличить в 2 раза?
4. Напишите формулу объема шарового сегмента.
5. Как найти объем шарового слоя?
6. Напишите формулу объема шарового сектора.

Поверхность цилиндра

1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна длине окружности основания, умножения на высоту, т.е.

$S = 2\pi RH$,

где $R -$ радиус цилиндра, $H -$ высота.

2. Чтобы найти площадь полной поверхности цилиндра, достаточно прибавить к площади боковой поверхности сумму площадей двух оснований, поэтому площадь полной поверхности цилиндра будет равна:

$S_п = 2\pi R(R + H)$.

3. Цилиндр называют вписанным в шар, если окружности оснований лежат на поверхности шара (рис. 20). Если цилиндр вписан в шар, то центр шара лежит на оси цилиндра.

4. Шар называют вписанным в цилиндр, если его поверхность касается боковой поверхности и оснований цилиндра (рис. 21). Центр шара, вписанного в цилиндр, лежит на оси цилиндра.

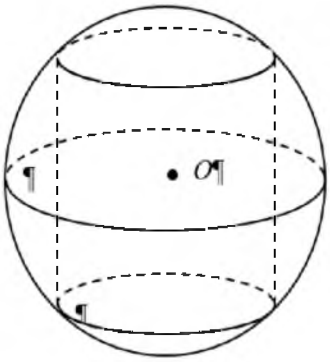


Рис. 20¶

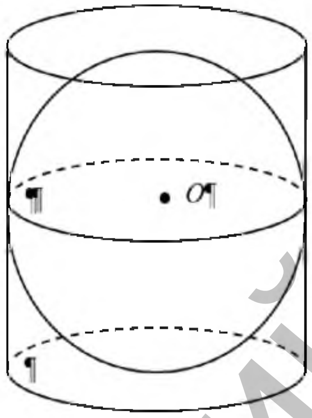


Рис. 21¶

Задача. В цилиндре площадь основания равна А, а площадь осевого сечения М (рис.22). Чему равна площадь полной поверхности цилиндра?

Решение.

1. Искомую площадь полной поверхности цилиндра можно вычислить по формуле:

$$S_{цил}= 2S_{осн}+ S_{бок} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

2.Таким образом, задача будет решена, если найдём R и H.

3. $S_{осн}= \pi R^2$ = A, $S_{сеч}$ = BE·ED = 2RH = M, тогда$S_{цил} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2A + \pi M$ – искомая площадь поверхности

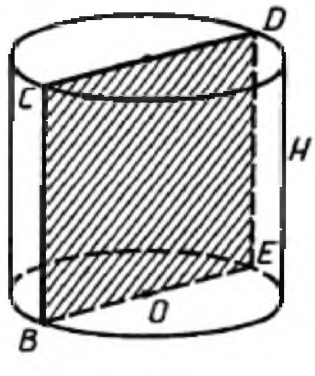


Рис.22

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет разверстка боковой поверхности цилиндра?
2. Центр шара лежит на оси цилиндра. Какую фигуру образуют общие точки шаровой и цилиндрической поверхностей?
3. Можно ли описать шар вокруг цилиндра?
4. Во всякий ли цилиндр можно вписать шар? Какими свойствами должен обладать цилиндр, в который можно вписать шар?

Поверхность шара (сферы) и его частей

1. Площадь поверхности шара (сферы) находится по формуле

$S = 4\pi R^2$,

где R − радиус шара.

2. Конус называется вписанным в шар, если окружности его оснований лежат на поверхности шара (рис. 23).

3. Конус называется вписанным в шар, если его вершина и окружность основания лежат на поверхности шара (рис.24).

4. Если конус или усеченный конус вписан в шар, то центр шара лежит на оси конуса или усеченного конуса.

5. Шар называется вписанным в конус (или усеченный конус), если его поверхность касается боковой поверхности и оснований названных тел (рис.25, 26).

6. Центр шара, вписанного в конус или усеченный конус, лежит на оси этого тела.

7. Площадь поверхности сферического сегмента равна:

$S = 2\pi RH$,

где R − радиус сферы, H − высота сегмента.

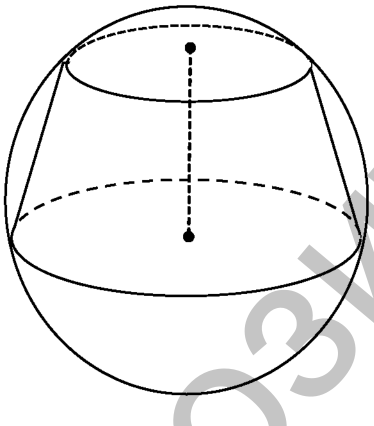


Рис.23

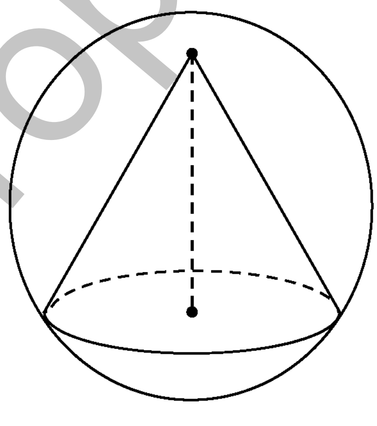


Рис. 24

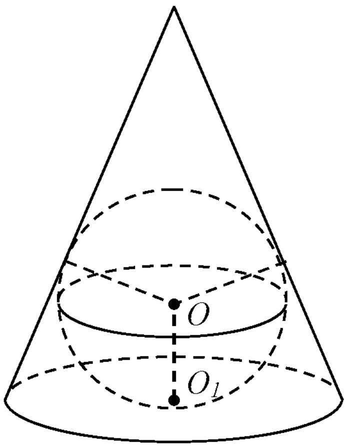


Рис. 25

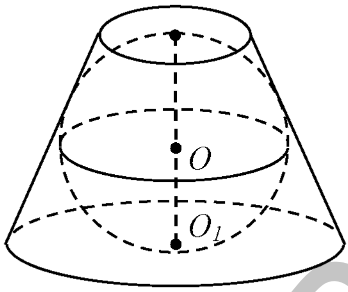


Рис. 26

8. Площадь сфер относятся как квадраты их радиусов.

9. Площадь сферического пояса равна произведению длины окружности большего круга на высоту пояса:

$S = 2\pi RH$,

где R − радиус шара, а H − высота пояса.

10. Если шар описан около параллелепипеда, то все его грани должны быть прямоугольными, т.е. параллелепипед должен быть прямоугольным, а центр этого шара должен лежать в точке пересечения его диагоналей.

11. Если шар описан около призмы, то эта призма прямая, а ее основаниями служат такие многоугольники, около которых можно описать окружность.

12. Если шар описан около правильной пирамиды, то его центр лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр окружности, описанной около основания.

13. Шар называется вписанным в многогранник, если его поверхность касается всех граней многогранника.

14. Радиусы шара, проведенные в точки касания, перпендикулярны соответствующим граням многогранника.

15. Центр шара, вписанного в многогранник, равноудален от всех его граней.

16. Если шар вписан в правильную четырехугольную призму, то эта призма есть куб.

17. Центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на высоте в точке пересечения высоты с биссектрисой угла, образованного апофемой пирамиды и ее проекцией на плоскость основания.

Задача. Высота сферического пояса равна 7 см, а радиусы оснований 16 и 33 см. Найдите площадь поверхности этого пояса.

Решение.

1. По условию задачи
$HA = 33$ см, $H_1A_1 = 16$ см, $H_1H = 7$см
(рис.27).
2. Площадь шарового пояса находится по формуле $S = 2\pi RH$, значит, необходимо найти R.
3. Пусть радиус сферы $OA = R$.
4. Из прямоугольного треугольника OAH находим OH= $\sqrt{R^2 - 33^2}$.
5. Из прямоугольного треугольника A_1H_1O находим H_1O= $\sqrt{R^2 - 16^2}$.

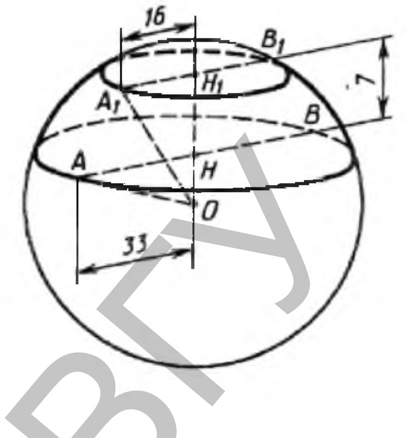


Рис. 27

6. Так как H_1H= H_1O–OH = 7, то можно составить уравнение:
$\sqrt{R^2 - 33^2}$ - $\sqrt{R^2 - 16^2}$ = 7.
Решив данное иррациональное уравнение, получим что R = 65 см.
Площадь шарового пояса

$$S = 2\pi RH = 2\pi \cdot 65 \cdot 7 = 910\pi \text{ см}^2$$

Контрольные вопросы

1. Как относятся между собой поверхности двух шаров?
2. Напишите формулы площади сферы (поверхности шара), площади сферического сегмента, площади сферического пояса.
3. Во всякий ли конус можно вписать шар? Как определить положение центра шара, вписанного в конус?
4. Какими свойствами должен обладать усеченный конус, чтобы в него можно было вписать шар?

Поверхность конуса

1. Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания конуса на его образующую, т.е.
$S = \pi Rl$,
где $R -$ радиус основания конуса, $l -$ образующая конуса.
2. Чтобы найти площадь полной поверхности конуса, достаточно к площади его боковой поверхности прибавить площадь основания, т.е.
$S = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(R + l)$.
3. Площадь боковой поверхности усеченного равна:
$S = \pi l(R_1 + R_2)$,
где $l -$ образующая, R_1 и $R_2 -$ радиусы оснований.

Задача. В конусе сумма высоты и образующей равна k, наибольший угол между образующими равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Решение.

1. По условию задачи BD + OD = k, $\angle ADB = \alpha$, (рис. 28).
2. $S = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(R + l)$. (1)
3. $\angle ADO = \frac{\alpha}{2}$,так как высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, есть биссектриса угла при вершине.
4. Пусть BD = l, OD = H, тогда из прямоугольного треугольника ODB находим H = DB$\cos\frac{\alpha}{2}$, или H =$l\cos\frac{\alpha}{2}$.
5. Так как H + l = k, то$l\cos\frac{\alpha}{2} + l$ = k, или $l(1 + \cos\frac{\alpha}{2})$ = k, т.е $l = \frac{k}{1+\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{k}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}$.

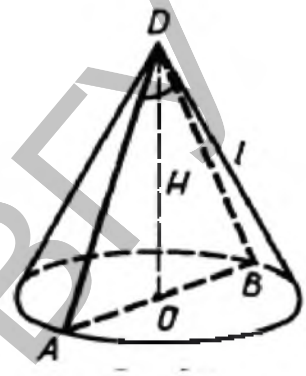


Рис. 28

6. Из этого же треугольника ODB найдём R: R = OB = DB$\sin\frac{\alpha}{2}$, т. е. R =$l\sin\frac{\alpha}{2}$ = k $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}$.

1. Вернемся к равенству (1):

$$S = \pi R(R + l) = \pi k\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}\left(k\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4} + \frac{k}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}\right) = \pi k^2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}} + \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}\right) =$$

$$\pi k^2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{\pi k^2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}\cos^2(45° - \frac{\alpha}{4})}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}$$

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу площади боковой поверхности конуса. Объясните смысл входящих в формулу букв.
2. Напишите формулу площади боковой поверхности усеченного конуса. Объясните смысл входящих в формулу букв.
3. Какой вид имеет развертка боковой поверхности конуса?

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАТЕМАТИКА. ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций

Составители:
УСТИМЕНКО Владимир Викторович
ТИТОВА Татьяна Васильевна

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *И.В. Волкова*

Подписано в печать 29.01.2018. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,62. Уч.-изд. л. 1,54. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.

МАТЕМАТИКА.
Г Е О М Е Т Р И Я

Витебск 2018