Ив. МЕНДЕЛѢЕВЪ.

МЕТОДЪ МАТЕМАТИКИ.

Логика и гносеологія математическихъ знаній.

Съ предисловіемъ профессора А. В. Васильева.

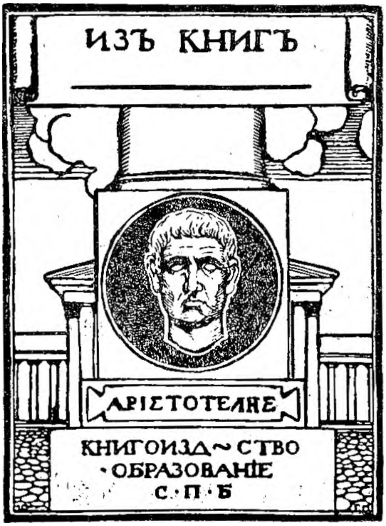
Изд-ство „Образованіе“ СПБ.
1913.

Ив. Менделѣевъ.

МЕТОДЪ МАТЕМАТИКИ.

Логика и гносеологія математическихъ знаній.

Книгоиздательство „ОБРАЗОВАНІЕ“, СПБ.
1913.



Типографія „Печатный Трудъ" Спб., Прачешный пер., 4.

Предисловіе проф. А. В. Васильева.

Трудность и важность вопроса о характерѣ математическаго метода заставляютъ привѣтствовать появленіе оригинальнаго и обдуманнаго изслѣдованія, посвященнаго этому вопросу. Такимъ, несомнѣнно, является изслѣдованіе И. Д. Менделѣева. Его исходная точка зрѣнія совпадаетъ со взглядомъ Пуанкаре на математическое разсужденіе, изложеннымъ знаменитымъ французскимъ ученымъ въ сочиненіи „Наука и Гипотеза". На простѣйшихъ положеніяхъ ариѳметики Пуанкаре выясняетъ необходимость процесса разсужденія по способу „повторенія" (résonnement par récurrence), разсужденія, которое концентрируетъ въ одной формулѣ безчисленное множество силлогизмовъ и позволяетъ переходить отъ конечнаго къ безконечному. И. Д. Менделѣевъ подробно останавливается на этомъ вопросѣ. „Конечной" математикѣ, вполнѣ достаточной для цѣлей естествознанія, онъ противополагаетъ общую математику, которая не можетъ обойтись безъ понятія о неопредѣленномъ возрастаніи числа, т. е. безъ понятія о безконечномъ. Переходъ отъ конечнаго къ безконечному и составляетъ сверхлогическій элементъ въ математическомъ методѣ. Согласно съ мнѣніемъ Пуанкаре и противно мнѣнію нѣкоторыхъ изслѣдователей, математическая индукція не можетъ быть сведена на законы логики.

Для автора обобщенный методъ математической индукціи является послѣднимъ основаніемъ математическаго знанія и въ идеально обоснованной математической теоріи единственнымъ сверхлогическимъ элементомъ является полная математическая индукція. Эти результаты изслѣдованія автора, конечно, привлекутъ на себя вниманіе лицъ, интересующихся методологическими вопросами.

Проф. *А. Васильевъ.*

Предисловіе автора.

Изученіе метода математики имѣетъ самое существенное значеніе съ различныхъ сторонъ. Прежде всего, конечно, въ немъ заинтересована сама математика, такъ какъ на извѣстной стаціи развитія математическихъ теорій человѣческому сознанію начинаетъ не хватать того естественнаго инстинкта, который велъ безошибочно впередъ по вѣрной дорогѣ піонеровъ математическихъ знаній. Въ сложныхъ современныхъ условіяхъ гармонія естественныхъ стремленій легко можетъ нарушиться и, не руководимыя разумнымъ сознаніемъ, эти стремленія могутъ привести математическое знаніе къ уродливымъ и неестественнымъ формамъ развитія. Чтобы удержаться на вѣрномъ пути, необходимо дать себѣ полный отчетъ, къ чему должно стремиться математическое знаніе, какими могутъ быть его средства и цѣли, словомъ, необходимо съ самой общей точки зрѣнія изучить методъ математики.

Но, кромѣ этого прямого значенія, изученіе метода математики имѣетъ еще и самое существенное значеніе для развитія гносеологіи. Математика являлась всегда образцомъ точнаго знанія. Поэтому, чтобы изучить методы познанія вообще, надо прежде всего обратиться къ изученію метода математики, какъ къ простѣйшему и типичнѣйшему познавательному методу.

Найденные результаты прольютъ намъ свѣтъ на цѣли и средства всего познанія. И наоборотъ—устанавливая цѣли и средства познанія вообще, мы должны приложить наши гносеологическія теоріи прежде всего къ методу математики, какъ къ простѣйшему случаю. Поэтому методъ математики является одновременно и исходнымъ пунктомъ гносеологическихъ изысканій, и пробнымъ камнемъ всякой гносеологической теоріи, благодаря чему вопросъ объ этомъ методѣ еще со временъ Декарта, Лейбница и Канта пріобрѣлъ рѣшающее значеніе для всей гносеологіи.

Наконецъ, изслѣдованіе метода математики само по себѣ имѣетъ важное философское значеніе, такъ какъ въ математикѣ мы поднимаемся въ самыя абстрактныя, общія и высокія сферы знанія, и потому съ философской точки зрѣнія намъ существенно важно знать, что можетъ дать намъ математика въ этихъ сферахъ, а этотъ вопросъ можетъ быть рѣшенъ лишь съ установленіемъ общаго характера математическаго метода.

Поэтому математическій методъ всегда занималъ вниманіе изслѣдователей, и на его пониманіи постоянно отражался общій прогрессъ какъ самой математики, такъ и теоріи познанія, логики и, вообще, философіи. Посильный вкладъ въ теорію метода математики стремится внести и настоящее изслѣдованіе, непосредственно опирающееся на тѣ современныя работы, благодаря которымъ вопросъ о методѣ математики столь далеко продвинулся впередъ, а именно, съ одной стороны, на работы логической школы математиковъ, съ другой стороны — на неоцѣнимыя изслѣдованія А. Пуанкарэ.

Въ то же время настоящее изслѣдованіе является естественнымъ продолженіемъ нашихъ предшествующихъ изысканій по общимъ вопросамъ теоріи познанія. Вопросъ о методѣ математики былъ уже затронутъ нами ранѣе, въ „Мысляхъ о познаніи“ (1908—9), и дальнѣйшіе выводы уже выразились съ достаточной полнотой въ докладѣ, читанномъ авторомъ настоящей работы 24-го Марта 1911 г. въ частномъ математическомъ кружкѣ и послужившемъ основаніемъ настоящаго изслѣдованія.

Авторъ считаетъ своимъ долгомъ выразить здѣсь свою глубокую благодарность проф. А. В. Васильеву за нѣкоторыя указанія, которыми воспользовался авторъ при окончательномъ редактированіи текста.

Авторъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Введеніе.

Современное положеніе вопроса.

На методъ математическихъ наукъ съ давнихъ поръ намѣтилось два взгляда, которые выразились съ достаточной ясностью уже въ ученіяхъ Лейбница и Канта.

Съ одной стороны, обращая вниманіе на преобладающее значеніе логическихъ операцій во всѣхъ математическихъ дисциплинахъ, можно придти къ заключенію, что вся сущность математическаго изслѣдованія и состоитъ въ опредѣленіяхъ и логическихъ выводахъ изъ нихъ,—что вся математика цѣликомъ сводится къ логическому мышленію. Это—взглядъ Лейбница.

Съ другой стороны, можно замѣтить, что логическія операціи въ дѣйствительности далеко не исчерпываютъ всѣхъ функцій математической мысли. Можно предположить, что это—фактъ не случайный, зависящій не отъ временной незаконченности математическихъ теорій, и можно вывести отсюда, что математика черпаетъ еще изъ другого, не сводимаго къ логикѣ источника познанія, позволяющаго намъ создавать познавательныя сужденія, не вытекающія логически изъ предпосылокъ. Это, въ общемъ,—взглядъ Канта [1]).

Споръ между этими двумя направленіями до сихъ поръ не законченъ, а между тѣмъ теперь — благодаря общему ходу развитія математики за послѣднее время—онъ пріобрѣлъ особенное значеніе. Въ то время, когда подъ вліяніемъ идей Декарта, Лейбница и Ньютона только что создавались совершенно новыя области математическихъ знаній, о логической строгости въ математикѣ не было, конечно, и помину. „Я всѣми силами—писалъ Абель еще въ первой половинѣ девятнадцатаго столѣтія — хотѣлъ бы внести немного ясности въ поразительную путаницу, которую встрѣчаешь въ настоящее время въ Анализѣ. Въ немъ такъ мало цѣльности и плана, что, право, удивительно, какъ его могутъ еще изучать столько людей, и самое худшее это то, что его излагаютъ нестрого. Лишь немногія предложенія высшаго Анализа доказаны съ полной строгостью. Вездѣ видишь несчастную привычку заключать отъ частнаго къ общему, и очень странно, почему съ такимъ методомъ встрѣчается еще мало, такъ называемыхъ, парадоксовъ“ [2]). Съ тѣхъ поръ преобладающей тенденціей въ математикѣ и являлась тенденція къ логической строгости, стремленіе къ обнаруженію всѣхъ аксіомъ, лежащихъ въ основѣ доказываемыхъ предложеній, и къ такому построенію математическихъ дисциплинъ, чтобы въ нихъ всѣ выводы были просто логическими слѣдствіями основныхъ опредѣленій. Вновь завоеванныя области приводились въ порядокъ.

Это движеніе прошло по всѣмъ отдѣламъ математики, начиная съ геометріи и высшаго анализа, развитіе которыхъ все болѣе тѣсно связывалось съ точнымъ расчлененіемъ и опредѣленіемъ употребляемыхъ понятій, и кончая элементарной ариѳметикой, гдѣ понятія о числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними—въ работахъ Кронекера, Дедекинда, Вейерштрасса, Гельмгольтца, Фрегэ [3])—получаютъ все болѣе строгую логическую обработку. Чѣмъ дальше, однако, развивались эти теоріи, тѣмъ требованія логической строгости все болѣе повышались, и прежнія изслѣдованія казались уже недостаточными. Эта недостаточность сказывалась тѣмъ сильнѣе, что рядомъ съ логическимъ развитіемъ математики развивалась и сама логика, въ которой цѣлымъ рядомъ изслѣдователей—Гамильтономъ, Булемъ, Грассманомъ, Шредеромъ, П. Порѣцкимъ [4])—было сдѣлано много существеннаго для болѣе точнаго выраженія законовъ мышленія при помощи подходящаго алгоритма. И вотъ, наконецъ, въ послѣднее время появились многочисленныя и разнообразныя изслѣдованія,—изслѣдованія, напримѣръ, Гильберта, Пеано, Ресселя [5]),—въ которыхъ авторы пытаются разложить уже до конца на первоначальные логическіе элементы всѣ коренныя понятія математики, и сдѣлать всю математику простымъ отдѣломъ общей формальной логики. Такое направленіе математическихъ изслѣдованій, конечно, вполнѣ законно, такъ какъ безъ достиженія полной ясности въ логическихъ соотношеніяхъ разсматриваемыхъ математикой понятій не будетъ и полнаго о нихъ знанія. Нельзя назвать это направленіе и безплоднымъ, такъ какъ основное стремленіе математики—стремленіе открывать и охватывать все болѣе широкія области понятій—во многомъ обязано именно ему [6]). Но если необходимость строгой логической мысли въ математикѣ несомнѣнна, то ея достаточность для построенія всего зданія математическихъ наукъ еще не очевидна. Безъ спеціальнаго изслѣдованія мы не имѣемъ права постулировать эту достаточность. Слѣпое же убѣжденіе въ ней можетъ пагубно отозваться на характерѣ и направленіи дальнѣйшихъ математическихъ изысканій, такъ какъ, быть можетъ, поведетъ ихъ по ложному пути.

Однако, разъ начавшееся движеніе, по общему закону, должно было, перейдя за точку равновѣсія, докатиться до послѣднихъ возможныхъ предѣловъ. Дѣйствительно, мы видимъ, что логическая школа математиковъ не ограничивается однимъ фактическимъ разысканіемъ логическихъ связей математическихъ понятій. Нѣтъ, она именно утверждаетъ, что такое полное разложеніе математическихъ понятій и затѣмъ возстановленіе изъ полученныхъ элементовъ всего зданія математическихъ наукъ средствами одного логическаго мышленія вполнѣ достижимо, и даже — что оно уже достигнуто въ работахъ ея послѣдователей [7]).

Это утвержденіе, конечно, требуетъ прежде всего тщательной фактической провѣрки. Но и помимо этой провѣрки, — часто весьма трудной и кропотливой вслѣдствіе запутанности употребляемыхъ авторами терминовъ и алгоритма, и, главное, не дающей принципіальнаго отвѣта, — можно попытаться изслѣдовать проблему о методѣ математики въ ея общемъ видѣ, изучая непосредственно общія условія нашего познанія, и разсмотрѣть: не принуждены ли мы по необходимости пользоваться въ математикѣ сверхлогическими функціями нашей мысли? Не пользуются ли ими и сами послѣдователи логической школы, только не замѣчая этого?

Заслуга окончательнаго доказательства,—что это именно такъ—принадлежитъ А. Пуанкарэ [8]). Произведя анализъ простѣйшихъ примѣровъ математическихъ выводовъ, Пуанкарэ обнаружилъ въ нихъ такіе элементы, передъ которыми должна была бы остановиться чисто логическая мысль, но которые между тѣмъ не составляютъ препятствія для мысли математической. Этимъ онъ показалъ невозможность свести математическое мышленіе къ одному мышленію логическому и тѣмъ положилъ предѣлъ крайнимъ стремленіямъ логической школы.

Однако, изслѣдованія Пуанкарэ еще не исчерпываютъ вопроса. Прежде всего, его анализъ математическихъ доказательствъ, какъ основанный лишь на примѣрахъ, не достаточно полнъ. Выполняя свою отрицательную роль — роль критики утвержденій логической школы — этотъ анализъ еще не даетъ положительнаго знанія о гносеологической структурѣ математическаго метода. Далѣе, онъ не указываетъ, какое именно мѣсто среди нашихъ познавательныхъ способностей занимаетъ математическое мышленіе. И, наконецъ, онъ не даетъ тѣхъ основаній, на которыхъ это мышленіе покоится, разъ этимъ основаніемъ не являются одни принципы логики [9]).

Поэтому со всѣхъ сторонъ изслѣдованія Пуанкарэ нуждаются въ дополненіи и расширеніи. Теорію математическаго метода, удовлетворяющую современному положенію вопроса, необходимо еще создать. Пеано, Рессель и, вообще, послѣдователи логической школы сдвинули методологическіе вопросы математики—какъ и логическія теоріи вообще—съ той мертвой точки, на которой они, было, остановились, и значительно продвинули впередъ въ этой области наши знанія. Но, отдавшись всецѣло новымъ точкамъ зрѣнія, эти изслѣдователи не удержались до конца на вѣрной дорогѣ. Пуанкарэ внесъ необходимую поправку. Теперь остается связать въ одно цѣлое и упорядочить пріобрѣтенныя знанія, и вотъ попытку въ этомъ направленіи и представляетъ настоящее изслѣдованіе [10]).

Глава I.

Дедукція въ математикѣ.

1. Математика и естествознаніе.

Чтобы вполнѣ выяснить характеръ математическаго метода, мы должны разсмотрѣть проблему о немъ съ самой общей точки зрѣнія, т. е. съ точки зрѣнія познанія вообще, такъ какъ только такая общая постановка вопроса способна преодолѣть всѣ частныя затрудненія, которыя съ точекъ зрѣнія болѣе узкихъ казались бы безвыходными противорѣчіями. Только разсматривая математику, какъ часть всего нашего познавательнаго механизма, мы и можемъ выяснить ея настоящую роль, ея цѣли и средства,—какъ мы можемъ выяснить вполнѣ роль какого-либо органа, лишь разсматривая весь организмъ въ цѣломъ. Такъ какъ при этомъ центромъ нашего познанія является изученіе окружающей насъ дѣйствительности, составляющее предметъ естествознанія, то мы прежде всего и коснемся вопроса объ отношеніи математики къ естественно-научному знанію.

Впрочемъ, для рѣшенія нашей задачи намъ можно не останавливаться на проблемѣ о методологическихъ принципахъ естественныхъ наукъ во всѣхъ подробностяхъ, такъ какъ для нашей цѣли намъ необходимо знать лишь нѣкоторые наиболѣе общіе элементы методологіи естествознанія. Именно, намъ слѣдуетъ лишь принять во вниманіе, что все безъ исключенія естественно-научное знаніе образуется изъ нѣкоторыхъ гипотезъ о дѣйствительности, которыя мы строимъ для наиболѣе простого, — иначе говоря, наиболѣе вѣроятнаго—объясненія фактовъ нашего опыта [1']). Для созданія этихъ гипотезъ намъ необходимо имѣть соотвѣтствующій психическій матеріалъ въ видѣ нѣкотораго выбора общихъ понятій; и чѣмъ богаче будетъ этотъ выборъ, тѣмъ съ большимъ успѣхомъ мы можемъ строить гипотезы, дѣйствительно, наиболѣе простыя. Поэтому для возможности естественно-научныхъ изслѣдованій мы должны заранѣе этотъ необходимый матеріалъ въ себѣ заготовить, т. е. должны создать различныя простѣйшія схемы понятій, на которыя способенъ нашъ духъ, и изучить ихъ главнѣйшія логическія соотношенія—независимо отъ вопроса о реальномъ существованіи этихъ соотношеній и понятій.

Такимъ образомъ, весь процессъ нашего познанія долженъ разбиться на двѣ стадіи: Во-первыхъ, мы должны изучить создаваемыя нашимъ духомъ понятія независимо отъ ихъ отношенія къ дѣйствительности. Во-вторыхъ, мы должны изучить дѣйствительность при помощи опыта и заготовленнаго нами запаса понятій. Эта послѣдняя стадія познанія и образуетъ собою знаніе о дѣйствительныхъ вещахъ, знаніе матеріальное, которое мы и называемъ естествознаніемъ. Первая же стадія состоитъ лишь въ упорядоченіи внутреннихъ соотношеній нашего сознанія, въ изученіи тѣхъ общихъ формъ понятій, которыя оно способно выработать, и потому оно составляетъ знаніе не матеріальное, а формальное, какъ можно его назвать, слѣдуя общеупотребительной терминологіи. Это формальное знаніе и образуетъ собою математику, Мы видимъ такимъ образомъ, что математика прежде всего служитъ средствомъ для естествознанія, орудіемъ, при помощи котораго послѣднее лишь и можетъ быть построено. Но такъ какъ математическое изученіе логически предшествуетъ изученію естественно-научному, и такъ какъ въ математикѣ мы не касаемся внѣшней по отношенію къ намъ реальности, а лишь разсматриваемъ создаваемыя всецѣло нашимъ духомъ формы понятій, то математика— какъ средство естествознанія — все же оказывается логически независимой отъ послѣдняго. Въ математикѣ мы просто должны изучить тѣ формы понятій, на которыя фактически способенъ нашъ духъ, а будутъ-ли эти формы пригодны для познанія дѣйствительности и какія именно будутъ пригодны,—это должно рѣшить уже естествознаніе.

Правда, естествознаніе можетъ влiять если не на внутреннее развитіе математическихъ понятій, то на ихъ выборъ, такъ какъ предшествующій опытъ можетъ намъ съ нѣкоторою вѣроятностью указать, развитіе какихъ именно понятій и ихъ соотношеній было бы для естествознанія—по крайней мѣрѣ сейчасъ и въ ближайшемъ будущемъ — всего полезнѣе. Но такое внѣшнее вліяніе не можетъ имѣть для математики абсолютнаго значенія, потому что никакое вѣроятное предположеніе не можетъ гарантировать безполезность какого-либо отдѣла математики въ будущемъ навѣрное. Поэтому изъ осторожности въ интересахъ самого естествознанія математика должна удѣлять нѣкоторое вниманіе всѣмъ направленіямъ, по которымъ могутъ естественно развиваться наши общія понятія. И потому естествознаніе косвенно все же заинтересовано въ возможно широкомъ и свободномъ развитіи математическихъ теорій — вплоть до созданія различныхъ символическихъ счисленій, не-евклидовыхъ геометрій и не-ньютоновыхъ механикъ.

Но математика въ концѣ-концовъ освобождается и отъ послѣднихъ слѣдовъ посторонняго вліянія, такъ какъ ея значеніе для насъ не ограничивается ея служебной по отношенію къ естествознанію ролью. Дѣйствительно, хотя математика возникаетъ какъ средство для естествознанія, но при своемъ развитіи математическій интересъ получаетъ для насъ самостоятельное значеніе. Достигнувъ нѣкотораго уровня развитія, нашъ духъ не довольствуется познаніемъ одной внѣшней дѣйствительности, стремясь познать и внутреннія свои соотношенія. Тогда мы желаемъ изучить наиболѣе общія формы, которыя можетъ выработать нашъ духъ, ради нихъ самихъ, т. к. ихъ познаніе даетъ намъ нѣкоторое непосредственное удовлетвореніе въ силу присущей нашимъ общимъ понятіямъ, организованнымъ въ математическихъ теоріяхъ, внутренней стройности, гармоніи и красоты.

Въ этомъ развитіи чисто-математическаго интереса проявляется общій законъ духовнаго развитія, благодаря которому болѣе сложныя психическія образованія вырастаютъ — какъ бы въ силу инерціи—изъ болѣе элементарныхъ, и, въ частности, высшія цѣнности вырастаютъ изъ низшихъ. Стремясь къ какимъ-либо элементарнымъ, грубымъ цѣлямъ, мы, чтобы удовлетворить этому стремленію, часто бываемъ принуждены знакомиться съ объектами (т. е. съ фактами, идеями, чувствами и т. д.) болѣе сложными, служащими намъ сначала лишь средствами достиженія нашихъ цѣнностей элементарныхъ. Но самое это знакомство позволяетъ намъ иногда открыть въ новыхъ объектахъ болѣе цѣнныя качества, чѣмъ въ прежнихъ нашихъ грубыхъ цѣнностяхъ, и такимъ образомъ мы создаемъ новыя, болѣе высокія цѣли изъ тѣхъ объектовъ, которые были сначала для насъ лишь средствомъ, а теперь сами стали предметомъ нашего безкорыстнаго стремленія. Новое отношеніе къ этимъ объектамъ приводитъ къ болѣе полному ихъ изученію, и, вообще, къ такому ихъ культивированію въ нашемъ сознаніи, которое съ точки зрѣнія прежнихъ цѣлей уже не имѣло бы оправданія, и смыслъ котораго открывается только съ точки зрѣнія достигнутой нами новой стадіи духовнаго развитія. Такъ и въ естествознаніи—въ тѣхъ зачаточныхъ его формахъ, которыя мы можемъ прослѣдить въ исторіи и этнографіи, первоначально преобладаетъ утилитарный интересъ къ изученію лишь жизненно-примѣнимыхъ явленій, а потомъ мы начинаемъ познавать дѣйствительность и для нея самой, такъ какъ она обнаруживаетъ внутреннюю стройность и красоту, удовлетворяющую насъ непосредственно.

Перейдя за предѣлы простого средства, математика начинаетъ развиваться совершенно свободно, подъ вліяніемъ однихъ внутреннихъ побужденій. Тогда никакія постороннія соображенія уже не могутъ вліять на развитіе математики, и математика становится вполнѣ автономной. Поэтому въ ея разсмотрѣніе могутъ входить и такія области понятій, которыя даже были бы совершенно неприложимы къ познанію дѣйствительности, такъ какъ критеріемъ цѣнности всѣхъ математическихъ теорій становится уже не приносимая ими польза для познанія внѣшняго міра, а лишь внутренняя стройность, красота и порядокъ, достигаемыя при ихъ помощи въ нашемъ собственномъ сознаніи. Поэтому автономная математика, вообще говоря, должна быть гораздо шире математики-средства. И если нѣкоторая часть выработанныхъ автономной математикой понятій какъ разъ оказывается пригодной для всѣхъ нуждъ естествознанія, то это—какъ бы случайный даръ чистой математики, получаемый сверхъ того непосредственнаго духовнаго удовлетворенія, которое составляетъ прямую ея цѣль.

При этомъ не надо упускать изъ виду, что высшій интересъ и здѣсь, какъ и въ естествознаніи, не уничтожаетъ низшаго: онъ только присоединяется къ послѣднему. Дѣйствительно, какъ утилитарныя по отношенію къ нашей матеріальной жизни — цѣли естествознанія имѣютъ для насъ свое значеніе даже и тогда, когда мы изучаемъ дѣйствительность для нея самой, такъ и утилитарныя по отношенію къ естествознанію цѣли математики сохраняютъ для насъ все свое значеніе и при существованіи самостоятельнаго математическаго интереса, потому что и матеріальная дѣятельность, т. е. дѣятельность техническая, прикладная и естественно научное познаніе дѣйствительности суть необходимыя звенья нашего общаго духовнаго стремленія, и потому не могутъ быть нами изъ него выкинуты. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что математика имѣетъ для насъ одновременно двоякое значеніе, двоякую цѣнность: во-первыхъ, какъ средство для созданія естествознанія; во-вторыхъ, какъ удовлетвореніе безкорыстнаго стремленія познать наиболѣе общее содержаніе нашего духа.

Такъ какъ математика сначала имѣетъ для насъ первое изъ этихъ значеній, то мы и разсмотримъ прежде всего, въ какомъ видѣ математика необходима для естествознанія и къ чему сводится методъ такой математики.

2. Опытъ и безконечность.

Легко замѣтить, что математика въ полномъ своемъ объемѣ въ одномъ отношеніи даетъ завѣдомо болѣе, чѣмъ требуетъ естествознанiе. Именно, въ естествознанiи ни въ опытѣ, ни въ теорiи мы не встрѣчаемся никогда съ понятiемъ безконечности. Мы не встрѣчаемся ни съ безконечно-большими, ни съ безконечно-малыми величинами, а только—съ очень большими и очень малыми, но всегда—конечными [12]).

Наше воображенiе подавлено большими числами, поэтому мы легко перескакиваемъ въ умѣ отъ очень большого числа прямо на безконечность, и въ насъ создается иллюзiя о „безконечномъ океанѣ" фактовъ, доставляемыхъ опытомъ. Этой иллюзiи поддаются даже философы. Такъ, Г. Риккертъ говоритъ о „безконечномъ многообразiи" опыта, которое познанiе должно якобы преодолѣть [13]). Между тѣмъ можно убѣдиться, что область и опыта, и естественно-научной теорiи всегда ограничены конечными предѣлами.

Прежде всего, ограничена область нашего опыта, область воспрiятiй нашихъ органовъ чувствъ, такъ какъ мы непосредственно не познаемъ—какъ въ пространствѣ, такъ и во времени—ни слишкомъ больших, ни слишкомъ мелкихъ частей природы, о которыхъ мы можемъ составить себѣ понятiе теоретически. Такъ, въ пространствѣ мы не различаемъ, напримѣръ, ни атомовъ, ни сколько-нибудь большихъ разстоянiй, такъ что въ каждый моментъ мы имѣемъ всегда лишь конечное число различимыхъ нами пространственныхъ воспрiятiй. Во времени же нашъ личный опытъ ограниченъ—въ мелкихъ частяхъ—приблизительно десятыми долями секунды, а въ крупныхъ—предѣлами нашей жизни. Поэтому, если мы подсчитаемъ всю совокупность отдѣльно различимыхъ простыхъ фактовъ, которые мы не только воспринимаемъ сейчасъ, но и вообще можемъ воспринять въ продолженiи всей нашей жизни, всю совокупность различимыхъ для насъ промежутковъ времени, частей пространства, звуковыхъ, тепловыхъ и т. д. ощущеній,— то ихъ всегда окажется, хотя и очень большое, но непремѣнно конечное количество.

Но точно такъ же конечна и область нашихъ теоретическихъ знаній, получаемыхъ нами изъ фактовъ нашего непосредственнаго опыта средствами естественно-научнаго метода. Дѣйствительно, эта область ограничена во времени, такъ какъ при всякомъ состояніи нашихъ знаній — въ знаніи прошедшаго и будущаго—мы должны будемъ всегда остановиться на тѣхъ эпохахъ, внѣ которыхъ мы уже не будемъ имѣть никакихъ опирающихся на фактическія данныя свѣдѣній. Мы вѣдь судимъ о прошедшихъ и будущихъ состояніяхъ природы лишь по тѣмъ слѣдамъ, какія мы имѣемъ въ настоящемъ ея состояніи, и лишь изученіе этого настоящаго состоянія можетъ намъ дать теоретическія свѣдѣнія о прошедшихъ и будущихъ эпохахъ. Если бы мы знали совершенно адэкватно,—т. е. до конца, въ малѣйшихъ подробностяхъ—современное состояніе природы, то, можетъ быть, мы могли бы установить ея состояніе и въ любое время. Но, въ силу конечности нашего опыта, мы такого адэкватнаго знанія о настоящемъ состояніи природы никогда имѣть не будемъ, и потому степень вѣроятности нашихъ знаній о данной эпохѣ будетъ убывать вмѣстѣ съ удаленностью отъ насъ эпохи, оставаясь конечной лишь для конечныхъ промежутковъ времени.

Какъ наши знанія ограничены въ сторону увеличенія познаннаго промежутка времени, такъ они ограничены и въ сторону дѣленія промежутка времени на части. Въ самомъ дѣлѣ, если мы предполагаемъ, что дѣйствительное время имѣетъ болѣе мелкія части, чѣмъ тѣ, которыя мы можемъ различить непосредственно, т. е. меньшія одной десятой доли секунды,—

то только потому, что такимъ образомъ мы проще всего можемъ объяснить всю совокупность нашего опыта. Чѣмъ обширнѣе нашъ опытъ, тѣмъ намъ приходится для его объясненія прибѣгать къ все меньшимъ промежуткамъ времени, напримѣръ, къ такимъ его промежуткамъ, которые выражаютъ продолжительность самыхъ короткихъ свѣтовыхъ колебаній. Но, какъ бы ни былъ великъ нашъ дѣйствительный опытъ, мы знаемъ, что онъ всегда конеченъ, и потому какъ бы намъ ни пришлось въ нашихъ теоріяхъ уменьшать разсматриваемые промежутки времени, они все равно сохранятъ нѣкоторую конечную величину, за которой наши научныя теоріи не дадутъ никакихъ положительныхъ свѣдѣній о дальнѣйшемъ дѣленіи времени на части.

Точно также и по тѣмъ же причинамъ будутъ всегда конечны наши естественно-научныя свѣдѣнія и о пространствѣ, какъ въ его самыхъ большихъ частяхъ,—въ которыхъ въ настоящее время, напримѣръ, мы должны довольствоваться лишь знаніями въ предѣлахъ звѣздныхъ разстояній,—такъ и въ самыхъ мелкихъ, гдѣ наши знанія въ настоящее время не идутъ далѣе атомовъ и электроновъ [14]).

Правда, мы видимъ, что, несмотря на эту необходимую конечность всѣхъ естественно-научныхъ знаній, естествоиспытатели обыкновенно разсматриваютъ процессы природы какъ безконечные и непрерывные,—напримѣръ, разсматриваютъ движеніе тѣлъ, какъ непрерывное, а не какъ движеніе прерывистое, внезапными скачками. Но, рѣшая такіе вопросы, естествоиспытатели уже выходятъ изъ области естествознанія, потому что, какъ мы видѣли, естествознаніе не имѣетъ никакихъ положительныхъ данныхъ для сужденія о существованіи всѣхъ процессовъ, такъ или иначе требующихъ понятія безконечности. Когда мы допускаемъ, напримѣръ, дѣлимость пространства до величины электроновъ, и промежутковъ времени—до продолжительности свѣтовыхъ колебаній, то мы имѣемъ для этого основаніе въ томъ упрощеніи, которое вносятъ такія допущенія въ объясненіе нашего опыта. Точно также, въ силу принципа наибольшей простоты познанія,—хотя и съ меньшей степенью вѣроятности,—мы можемъ предположить, что дѣлимость пространства и времени простирается еще далѣе, чѣмъ на это положительно указываютъ наши теоріи. Но когда мы переходимъ къ безконечному протяженію и безконечной дѣлимости процессовъ природы, мы тѣмъ самымъ безконечно удаляемся отъ данныхъ нашего опыта, и потому сводимъ вѣроятность нашихъ утвержденій на-нѣтъ.

Правда, и такія утвержденія о безконечныхъ процессахъ—вообще, о природѣ въ цѣломъ—могутъ быть высказаны нами на основаніи нашего опыта въ видѣ предѣльныхъ выводовъ изъ естествознанія; но именно вслѣдствіе своего предѣльнаго положенія эти утвержденія не дадутъ намъ знанія, сравнимаго съ естествознаніемъ, будутъ имѣть для насъ совершенно другой характеръ, и потому должны быть нами выдѣлены изъ естествознанія въ видѣ особой дисциплины—въ видѣ ученія о мірѣ въ цѣломъ, которое можно назвать натурфилософіей, философіей природы или естественной философіей [15]).

Когда естествоиспытатели говорятъ о безконечности и непрерывности процессовъ или о природѣ въ цѣломъ, то они именно и примѣшиваютъ къ естествознанію элементы философіи природы, и такъ какъ естествознаніе и естественная философія суть двѣ стадіи одного и того же стремленія нашего духа, то такое ихъ смѣшеніе происходитъ въ нашемъ сознаніи совершенно незамѣтно и естественно, что и объясняетъ привычку естествоиспытателей переходить постоянно въ эту сторону за границы своего предмета.

Такой переходъ, кромѣ того, иногда и безвреденъ, если онъ служитъ только педагогическимъ средствомъ для упрощенія изложенія. Но если при этомъ мы примемъ выводы естественной философіи за дѣйствительное естественно-научное знаніе, сравнимое, напримѣръ, съ теоріями физики и химіи, то мы совершимъ существенную ошибку, такъ какъ разсматриваемое разграниченіе познанія не есть простая тонкость методологіи. Дѣйствительно, естественно-философское изслѣдованіе вслѣдствіе своего предѣльнаго положенія требуетъ особенной осторожности, особо-приноровленныхъ пріемовъ мышленія, а ихъ обыкновенно и упускаютъ изъ виду естествоиспытатели въ своихъ случайныхъ эксурсіяхъ въ эту область, почему ихъ заключеніе часто здѣсь и не имѣетъ большой познавательной цѣнности. Поэтому, принимая во вниманіе это необходимое для правильнаго развитія познанія методологическое отдѣленіе естественной философіи отъ естествознанія, мы и можемъ безъ всякихъ оговорокъ сказать, что области не только опыта, но и естественно-научной теоріи непремѣнно суть области конечныя.

3. Конечная математика.

Итакъ, и нашъ опытъ, и наши естественно-научныя теоріи по необходимости заключаютъ въ себѣ, можетъ быть, очень большое, но всегда конечное число фактовъ. Поэтому для ихъ выраженія и для выраженія ихъ соотношеній намъ достаточно конечнаго числа понятій и сужденій. Подвергая общія формы этихъ понятій и сужденій самостоятельному изученію и обработкѣ (для чего мы можемъ обозначить понятія при помощи особыхъ знаковъ, а сужденія—при помощи дѣйствій подъ этими знаками, равенствъ и т. д.), мы и получимъ нѣкоторую математику, которая удовлетворитъ всѣмъ требованіямъ естествознанія. Это и будетъ математика, какъ средство.

Такъ какъ въ этой математикѣ разсматривается лишь конечное число понятій и сужденій, выражаемыхъ конечнымъ числомъ знаковъ и ихъ комбинацій, то въ этой математикѣ уже вовсе не будетъ мѣста понятію о безпредѣльномъ возрастаніи, въ какомъ бы видѣ оно ни представлялось—въ видѣ-ли безконечнаго стремленія къ предѣлу какой-либо перемѣнной, или же въ видѣ ея неопредѣленнаго увеличенія. Такая математика будетъ математикой безъ безконечности, будетъ математикой конечной.

Для построенія, напримѣръ, такой конечной ариѳметики слѣдовало бы поступать слѣдующимъ образомъ.

Пусть самое большое число, которое мы въ настоящее время фактически встрѣчаемъ въ естествознаніи, будетъ Ω—например, число длинъ наиболѣе короткой извѣстной намъ свѣтовой волны, измѣряющее наибольшее извѣстное намъ звѣздное разстояніе. Тогда всю область цѣлыхъ чиселъ ариѳметика ограничила бы конечнымъ числомъ отдѣльныхъ чиселъ и ихъ знаковъ—отъ O до Ω положительныхъ, и отъ O до $-\Omega$ отрицательныхъ. Дробныя раціональныя числа составляли бы тоже конечную область дробей $\frac{M}{N}$, гдѣ M и N—любыя цѣлыя числа до Ω. Замѣтимъ при этомъ, что число всѣхъ такихъ дробей (сократимыхъ и несократимыхъ) было бы равно Ω^2, т. е. было бы больше, чѣмъ Ω, и, значитъ, это число уже не входило бы въ нашу ариѳметику: мы могли бы сказать, что „совокупность дробей не выражается числомъ“, что при сдѣланныхъ нами условіяхъ не влечетъ за собой никакихъ противорѣчій. Замѣтимъ еще, что и число отдѣльныхъ дѣйствій въ какой-нибудь сложной операціи нашей конечной ариѳметики — иначе говоря: число членовъ въ ея формулахъ, уравненіяхъ и т. д. — было бы ограничено. Напримѣръ, въ суммѣ не могло бы быть слагаемыхъ, въ произведеніи—множителей болѣе нѣкотораго конечнаго числа, и это число зависило бы отъ величины слагаемыхъ или множителей, такъ какъ всякое дѣйствіе, ведущее къ числу большему, чѣмъ Ω, не имѣло бы смысла въ нашей ариѳметикѣ[16].

Наконецъ, ирраціональныхъ чиселъ въ этой ариѳметикѣ не было бы вовсе. Всякое вычисленіе производилось бы съ точностью до $\frac{1}{\Omega}$, и такой результатъ считался бы точнымъ значеніемъ ирраціональнаго числа. Дробь $\frac{1}{\Omega}$, такимъ образомъ, являлась бы наименьшей и недѣлимой далѣе величиной. Это былъ бы числовой атомъ, изъ котораго слагались бы всѣ остальныя числа.

Но конечную ариѳметику можно было бы упростить еще болѣе. Принимая „числовой атомъ“ за единицу и тѣмъ переходя къ новой ариѳметической системѣ, мы могли бы вовсе изгнать изъ конечной ариѳметики понятіе о дроби и ограничиться лишь изученіемъ цѣлыхъ чиселъ, число которыхъ было бы въ новой системѣ равно $\Omega_1 = \Omega^2$ (т. е. = числу дробей въ старой системѣ) положительныхъ, и столько же — отрицательныхъ. Переходя, далѣе, опять къ новой ариѳметической системѣ, а именно—начиная счисленіе съ наибольшаго по абсолютной величинѣ отрицательнаго числа предыдущей системы (т. е. съ $-\Omega_1$), и считая его въ новой системѣ за ноль, мы могли бы изгнать изъ конечной ариѳметики понятіе объ отрицательномъ числѣ и могли бы ограничиться разсмотрѣніемъ однихъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, число которыхъ въ нашей системѣ было бы (не считая числа ноль) $\Omega_2 = 2\ \Omega_1 = 2\ \Omega^2$.

Если теперь за Ω_2 мы возьмпмъ число, измѣряющее наибольшую встрѣчающуюся въ естествознаніи величину наименьшей, то всѣ остальныя числа въ естествознаніи, измѣряемыя этой же самой наименьшей величиной, будутъ меньше, чѣмъ Ω_2, въ то же время дробныхъ чиселъ при такой системѣ измѣренія не будетъ, такъ какъ иначе величина, выражающаяся дробью, оказалась бы меньше принятой единицы измѣренія—что противорѣчитъ условію, — а отрицательныхъ чиселъ можно всегда избѣжать, выбирая соотвѣтствующимъ образомъ начало измѣренія. Такимъ образомъ мы видимъ, что для естествознанія необходима и достаточна такая ариѳметика, которая разсматриваетъ лишь нѣкоторую конечную группу цѣлыхъ положительныхъ чиселъ и дѣйствія надъ ними, не ведущія за предѣлы этой группы. Въ этой ариѳметикѣ всѣ вычисленія производились бы съ точностью до единицы — т. е. до числового атома этой системы,—а вычисленія, ведущія къ числамъ большимъ, чѣмъ Ω_2, считались бы не имѣющими смысла.

Примѣнительно къ такой ариѳметикѣ можно было бы приспособить и всѣ остальные отдѣлы математики. Такъ, въ анализѣ бесконечно-малыхъ, мы разсматривали бы не дифференціалы, а нѣкоторыя достаточно малыя, но конечныя приращенія перемѣнныхъ. Если за эти приращенія независимой перемѣнной мы будемъ брать числовые атомы, то всѣ формулы дифференціональнаго и интегральнаго исчисленій получатся совершенно строго изъ общихъ правилъ конечной ариѳметики. Дѣйствительно, если мы придадимъ независимому перемѣнному приращеніе, равное одному числовому атому, то приращеніе функціи выразится совершенно точно произведеніемъ производной на числовой атомъ, такъ какъ всѣ слѣдующіе за вторымъ члены строки Тайлора, содержа числовой атомъ въ степеняхъ выше первой, были бы, по общему правилу конечной ариѳметики, равны нулю, какъ числа меньшія, чѣмъ числовой атомъ [17]).

Впрочемъ, этого правила конечной ариѳметики фактически и придерживаются во всѣхъ приложеніяхъ математики къ естественно-научнымъ вопросамъ, такъ какъ всѣ вычисленія въ такихъ случаяхъ производятся всегда лишь съ извѣстною точностью; и въ частности, дифференціалы замѣняются маленькими конечными приращеніями, а всѣ конечныя величины, порядокъ малости которыхъ превосходитъ принятую точность вычисленія, отбрасываются [18]).

Самое исчисленіе безконечно-малыхъ при своемъ возникновеніи носило на себѣ слѣды такихъ конечныхъ концепцій, что особенно замѣтно въ „методѣ недѣлимыхъ" Кавальери и въ концепціи дифференціаловъ самого Лейбница. Однако, тогдашнія попытки точно обосновать такой числовой атомизмъ были неудачны потому, что, принимая для чиселъ какъ будто предѣльное н а и м е н ь ш е е конечное число, тогдашніе изслѣдователи не принимали въ своихъ системахъ п р е д ѣ л ь н а г о н а и б о л ь ш а г о к о н е ч н а г о ч и с л а (т. е. Ω), и это упущеніе должно было всегда вести къ какимъ-нибудь противорѣчіямъ. Изъ этихъ противорѣчій существуетъ только д в а выхода: одинъ состоялъ въ созданіи теоріи предѣловъ, принимающей какъ неопредѣленное увеличеніе, такъ и неопредѣленное уменьшеніе чиселъ, и образующей основу современнаго анализа безконечно-малыхъ; другой выходъ состоитъ въ послѣдовательномъ проведеніи п р и н ц и п а к н е ч н о с т и не только въ наименьшихъ, но и въ наибольшихъ числахъ, какъ это мы здѣсь и указали.

Распространяя далѣе принципы конечной математики на геометрію, мы должны были бы разсматривать пространство не какъ безконечную непрерывную величину, а какъ нѣкоторую конечную совокупность недѣлимыхъ далѣе простыхъ элементовъ—атомовъ объема. Всѣ геометрическія фигуры составлялись бы изъ этихъ атомовъ, какъ составляются фигуры изъ отдѣльныхъ кусочковъ въ мозаикѣ, изъ кирпичей въ архитектурѣ, или—еще лучше—какъ составляются физическія тѣла изъ атомовъ и электроновъ. А всѣ пространственныя соотношенія сводились бы къ различнымъ комбинаціямъ атомовъ объема, такъ что геометрія являлась бы просто особымъ видомъ комбинаціоннаго анализа для конечной группы элементовъ.

Наконецъ, въ механикѣ мы разсматривали бы лишь прерывистыя движенія, совершаемыя въ продолженіе нѣкоторыхъ наименьшихъ разсматриваемыхъ конечныхъ промежутковъ или атомовъ времени. Всѣхъ такихъ атомовъ слѣдовало бы принять лишь конечное число (Ω), такъ что время имѣло бы абсолютное начало и абсолютный конецъ. При равномѣрномъ движеніи точка (т. е. атомъ пространства) въ опредѣленное конечное число атомовъ времени проходила бы опредѣленное конечное число атомовъ пространства, при равномѣрно-ускоренномъ движеніи — число пройденныхъ атомовъ пространства было бы пропорціонально квадрату соотвѣтствующаго числа атомовъ времени и т. д. Такимъ образомъ, скорости тоже мѣнялись бы скачками и различныхъ скоростей имѣлось бы тоже нѣкоторое конечное число.

Точно также числами конечной ариѳметики выражались бы и всѣ остальныя механическія величины, напримѣръ: сила, энергія, масса. А для послѣдней „атомы массы“ и являлись бы тѣми дѣйствительными

„атомами“, которые разсматриваетъ естествознаніе, если, впрочемъ, сдѣлать необходимыя въ настоящее время поправки и считать истинными „недѣлимыми“ не химическіе атомы, а электроны, или какіе-либо иные, еще болѣе мелкіе элементы природы.

4. Логика въ математикѣ.

Если теперь задаться вопросомъ о методѣ такой конечной математики, удовлетворяющей требованіямъ естествознанія, то мы можемъ убѣдиться, что этотъ методъ можетъ быть сведенъ къ однѣмъ логическимъ операціямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ разсматриваемой нами математикѣ будетъ конечное число понятій и ихъ соотношеній, выражаемыхъ конечнымъ числомъ сужденій, то можно такъ опредѣлить эти понятія, чтобы всѣ сужденія математики были логическими слѣдствіями этихъ опредѣленій, и такимъ образомъ были бы простыми аналитическими сужденіями, выводимыми изъ опредѣленій при омопщи силлогизмовъ черезъ одну дедукцію.

Для созданія такихъ опредѣленій нѣтъ никакихъ препятствій, такъ какъ въ созданіи опредѣленій мы всегда свободны. Единственное требованіе, которому должно удовлетворять всякое опредѣленіе,—требованіе, налагаемое на насъ нашими логическими нормами, — это, чтобы въ системѣ нашихъ опредѣленій не было логическихъ противорѣчій. Давая какія-либо опредѣленія, мы всегда должны убѣдиться, что такихъ противорѣчій не встрѣтится во всѣхъ слѣдствіяхъ изъ нашихъ опредѣленій, иначе мы не имѣемъ права утверждать, что мы логически-строго опредѣлили понятія.

Но такъ какъ въ нашей математикѣ мы разсматриваемъ конечное число понятій и сужденій, выражаемыхъ конечнымъ числомъ знаковъ и ихъ комбинацій, то какъ бы велико ни было это число, мы—по крайней мѣрѣ, теоретически—можемъ всегда пересмотрѣть всѣ сужденія, сдѣлавъ всѣ выводы изъ нашихъ опредѣленій, и можемъ убѣдиться на дѣлѣ, что въ нашей системѣ противорѣчій не существуетъ. Поэтому-то мы и имѣемъ возможность при помощи надлежащимъ образомъ выбранныхъ опредѣленій свести всѣ дѣйствія конечной математики къ однѣмъ логическимъ операціямъ.

Чтобы показать на дѣлѣ образецъ такого строго-дедуктивнаго доказательства математическаго предложенія, воспользуемся примѣромъ, даннымъ еще Лейбницемъ,—какъ можно сдѣлать аналитическимъ всякій результатъ сложенія, напримѣръ, доказать предложеніе $2+2=4$ [19]). Пусть опредѣлены какимъ бы то ни было образомъ число 1 и дѣйствіе $x+1$,—дальнѣйшія разсужденія отъ этихъ опредѣленій не зависятъ. Далѣе, числа 2, 3 и 4 мы **опредѣляемъ** равенствами: $1+1=2$ (1); $2+1=3$ (2); $3+1=4$ (3). Наконецъ, дѣйствіе $x+2$ мы опредѣляемъ соотношеніемъ: $x+2=(x+1)+1$ (4). Тогда мы будемъ имѣть:

(по опред. 4)	$2+2=(2+1)+1$ [20]).
(по опред. 2)	$(2+1)+1=3+1$
(по опред. 3)	$3+1=4$
Откуда	$2+2=4$, что и тр. док.

Такимъ же точно образомъ, давая соотвѣтствующія опредѣленія, мы можемъ свести къ дедуктивно-логическому разсужденію доказательство всякаго предложенія математики, если это предложеніе касается лишь конечнаго числа понятій и сужденій, такъ какъ въ такомъ случаѣ мы можемъ всегда убѣдиться, что въ нашихъ опредѣленіяхъ не будетъ противорѣчій.

Поэтому къ однѣмъ логическимъ операціямъ, т. е. къ опредѣленіямъ и дедуктивнымъ выводамъ изъ нихъ, можетъ быть сведена не только вся конечная математика, но и всѣ тѣ части обыкновенной математики, въ которыхъ мы разсматриваемъ конечное число понятій и ихъ соотношеній. Если предложеніе касается только этого конечнаго числа понятій, то доказательство можетъ быть сведено къ логическому разсужденію цѣликомъ.

Но даже и тогда, когда предложеніе охватываетъ и неопредѣленное количество понятій—какъ всякое общее предложеніе математики,—къ одной логикѣ могутъ быть сведены всѣ тѣ элементы доказательства, которые относятся къ конечному числу логическихъ соотношеній, напримѣръ, къ отношеніямъ конечнаго числа общихъ понятій между собой, такъ какъ къ нимъ могутъ быть примѣнены всѣ только что изложенныя соображенія. Въ этомъ и состоитъ участіе чисто-логическихъ операцій во всякомъ предложеніи математики.

Такимъ образомъ мы видимъ, что Кантъ былъ неправъ, говоря, что всякій математическій выводъ, напримѣръ, всякій результатъ сложенія, есть непремѣнно сужденіе синтетическое. Поэтому взгляды Канта настолько же удаляются отъ истины въ одну сторону, насколько взгляды Лейбница—какъ это мы увидимъ далѣе—уклоняются въ другую.

Глава II.

Недостаточность дедукціи.

1. Общая математика.

Та конечная математика, которую мы до сихъ поръ разсматривали, является тѣмъ minimum'омъ математическихъ знаній, который строго-необходимъ и строго-достаточенъ для естествознанія. Но если эта математика для естествознанія достаточна, то это не значитъ, что, построивъ ее, мы уже не должны стремиться къ нахожденію иныхъ, болѣе общихъ точекъ зрѣнія, облегчающихъ намъ пониманіе и употребленіе строго-необходимыхъ для естествознанія математическихъ соотношеній. Строго-необходимая для естествознанія математика, быть можетъ, еще не самая для него удобная.

Дѣйствительно, если бы мы построили по указанному выше рецепту конечную математику, удовлетворяющую въ настоящій моментъ всѣмъ требованіямъ естествознанія, то этой математики, по всей вѣроятности, хватило бы не надолго. Съ новымъ расширеніемъ знаній, съ увеличеніемъ точности измѣреній, съ возрастаніемъ разнообразія и числа производимыхъ опытовъ пришлось бы вновь увеличивать и число математическихъ объектовъ, и строить новую математическую систему, въ которой Ω будетъ болѣе, чѣмъ въ предыдущей. При этомъ пришлось бы съ самаго начала вновь опредѣлять всѣ математическія понятія, провѣрять отсутствіе въ нихъ противорѣчій и т. д., и этотъ трудъ пришлось бы повторять при всякомъ новомъ расширенiи естественно-научныхъ знанiй. Поэтому конечная математика, дѣйствительно, не вполнѣ удобна для естествознанiя: при ней всегда есть рискъ новыхъ перестроенiй въ будущемъ.

Такимъ образомъ уже для математики, какъ средства, было бы полезно построить такую теорiю, которая была бы годна для всякого Ω числа математическихъ понятiй и соотношенiй, какъ бы велико это число ни было. А это и приводитъ къ понятiю неопредѣленнаго возрастанiя чиселъ, т. е. къ понятiю безконечности, включенiе котораго въ математическую теорiю и даетъ обыкновенную или общую математику [21]). Изъ этой общей математики всѣ математики конечныя, построенныя для всѣхъ возможныхъ Ω, вытекаютъ уже, какъ простыя логическiя слѣдствiя, и потому при расширенiи естественно-научныхъ знанiй въ общей математикѣ уже не приходится передѣлывать всю работу заново, а приходится только прилагать готовыя общiя понятiя и сужденiя къ даннымъ частнымъ случаямъ. Поэтому уже для математики, какъ средства, общая математика была бы удобнѣе, чѣмъ математика конечная.

Если естествознанiе всетаки и могло бы обходиться безъ общей математики, то это было бы уже совершенно невозможно для предѣльныхъ выводовъ изъ естествознанiя для естественной философiи, т. е. для ученiя обо всей дѣйствительности въ цѣломъ. Изучая дѣйствительность, естественная философiя является по предмету своего изслѣдованiя одною изъ матерiальныхъ наукъ, и, слѣдовательно, должна строиться общенаучнымъ методомъ индуктивныхъ обобщенiй изъ болѣе частнаго матерiала остальныхъ знанiй; но ея положенiе, какъ наиболѣе общей науки, доставляющей намъ предѣльное знанiе, выдвигаетъ ее, какъ мы видѣли, на отдѣльное мѣсто среди нашихъ познавательныхъ дисциплинъ. И такъ какъ естественная философія имѣетъ особый, ей одной присущій характеръ, то она нуждается и въ средствахъ болѣе широкихъ, чѣмъ любой другой отдѣлъ изученія дѣйствительности.

Именно: естественная философія должна обнять— хотя бы съ нѣкоторыхъ сторонъ—всю дѣйствительность, а при этомъ, быть можетъ, всякое конечное число понятій и всякій конечный алгоритмъ окажутся недостаточными. Утверждать это заранѣе навѣрное нельзя, такъ какъ, вѣдь, дѣйствительность можетъ оказаться и конечной, но нельзя это и отрицать заранѣе. А потому, приступая къ построенію естественной философіи, нужно во всякомъ случаѣ заготовить такіе кадры понятій, которые могли бы вмѣстить и безконечную дѣйствительность, т. е. нужно создать общую математику. Кромѣ того, мы знаемъ, что изученіе фактовъ склоняетъ и на самомъ дѣлѣ вѣроятность на сторону безконечной дѣйствительности, мысль о которой всегда и господствовала надъ философскими построеніями всѣхъ временъ; достаточно вспомнить, что философы всегда приписывали аттрибутъ безконечности Божеству. Поэтому основныя понятія общей математики, если не для естествознанія, то во всякомъ случаѣ для естественной философіи оказываются, дѣйствительно, уже необходимыми.

Но каково бы ни было это, такъ сказать, утилитарное значеніе общей математики, мы все равно, слѣдуя естественному развитію понятій въ нашемъ сознаніи, должны будемъ придти къ ней въ математикѣ автономной. Дѣйствительно, создавая конечныя математическія системы для различныхъ, все большихъ Ω, мы констатируемъ, что въ нашемъ сознаніи нѣтъ опредѣленной границы для образованія чиселъ и, вообще, математическихъ понятій. Въ то же время мы можемъ замѣтить, что нѣкоторыя общія свойства остаются неизмѣнными во всѣхъ системахъ, построенныхъ для различнаго числа Ω понятій, и такимъ образомъ мы приходимъ къ построенію такой общей математической системы, изъ которой всякая конечная вытекала бы какъ частный случай. Такъ какъ такимъ образомъ мы достигаемъ наибольшей стройности и простоты въ образованіи нашихъ математическихъ понятій, то автономная математика и должна быть необходимо построена не какъ конечная, а какъ общая математика, разсматривающая безпредѣльное количество математическихъ объектовъ.

Такимъ образомъ понятіе безконечности, безъ котораго математика-средство въ значительной своей части могла бы еще обходиться, является существенной принадлежностью математики автономной. Поэтому для того, чтобы опредѣлить методъ автономной математики, мы должны разсмотрѣть методъ математики общей, имѣющей дѣло съ безпредѣльнымъ количествомъ математическихъ объектовъ. А такъ какъ разсмотрѣнный выше чисто-логическій методъ конечной математики основывается на возможности прямой провѣрки отсутствія противорѣчій во всѣхъ входящихъ въ эту математику сужденіяхъ и понятіяхъ, то онъ уже не можетъ быть просто приложенъ къ математикѣ общей, въ которой количество понятій и сужденій неисчислимо, и потому этотъ методъ общей математики требуетъ отдѣльнаго изслѣдованія.

2. Недостаточность логическаго мышленія для математики.

Мы видимъ, что вся конечная математика можетъ быть сведена къ однимъ логическимъ дѣйствіямъ. Однако, уже и въ ней примѣненіе однѣхъ логическихъ операцій было бы крайне неудобно. Въ самомъ дѣлѣ, при нѣсколько большомъ числѣ Ω число разсматриваемыхъ понятій, соотношеній, знаковъ было бы такъ велико, что провѣрить на дѣлѣ отсутствіе противорѣчій во всѣхъ слѣдствіяхъ изъ опредѣленій было бы крайне трудно, особенно, если вспомнить огромность чиселъ, необходимыхъ въ настоящее время для естествознанія. Если бы мы пожелали на дѣлѣ провѣрить всѣ логическія соотношенія, опредѣляющія эти числа, то намъ едва-ли хватило бы на этотъ трудъ всей нашей, жизни. Кромѣ того, если бы мы фактически должны были добиваться каждаго конкретнаго результата вычисленій при помощи однихъ силлогизмовъ, то нашъ трудъ былъ бы крайне тяжелъ.

Поэтому уже въ области конечной математики было бы желательно имѣть такіе пріемы, которые освобождали бы насъ отъ тяжелой цѣпи логическихъ разсужденій, и укороченнымъ путемъ вели бы насъ прямо къ цѣли. При этомъ добытые результаты, конечно, утратили бы логическую достовѣрность, такъ какъ методъ, совершенно равный по точности логическому, былъ бы тождественъ послѣднему, и, слѣдовательно, ничѣмъ бы ужъ отъ него не отличался, но за потерю логической достовѣрности мы были бы вознаграждены сторицей достигнутой экономіей мышленія, упрощеніемъ познанія, а это упрощеніе и является, вообще, верховнымъ критеріемъ цѣнности всякаго познавательнаго метода [22]). Да, впрочемъ, разъ мы предназначаемъ конечную математику лишь какъ средство для естествознанія, въ которомъ всѣ результаты никогда не обладаютъ абсолютной достовѣрностью, а обладаютъ лишь вѣроятностью, то нѣтъ особенной нужды заботиться объ абсолютной достовѣрности и математическихъ выводовъ. Намъ надо только, чтобы средство соотвѣтствовало цѣли, а для этого было бы даже достаточно, чтобы результаты математики только не уступали въ надежности результатамъ естествознанія. Поэтому съ точки зрѣнія естествознанія было бы очень выгодно упростить конечную математику даже цѣною логической достовѣрности ея результатовъ [23]).

Если такіе пріемы упрощенія были бы полезны для конечной математики, то для математики въ полномъ ея объемѣ они уже необходимы. Дѣйствительно, мы видимъ, что общая математика разсматриваетъ безпредѣльное количество различныхъ понятій, напримѣръ, различныхъ чиселъ,—и потому общія предложенія математики, касаясь всѣхъ частныхъ понятій какого-либо рода, касаются безпредѣльнаго количества математическихъ объектовъ. Такъ, законъ распредѣлительный въ ариѳметикѣ касается всѣхъ произведеній чиселъ, а такихъ произведеній можно составить безконечно-много. Поэтому, если бы мы захотѣли на дѣлѣ провѣрить отсутствіе противорѣчій во всѣхъ слѣдствіяхъ изъ какого-нибудь общаго предложенія математики, то мы бы никогда не закончили это предпріятіе, такъ какъ намъ пришлось бы имѣть дѣло съ безпредѣльнымъ количествомъ понятій и силлогизмовъ. Итакъ, тотъ путь, который позволяетъ сдѣлать конечную математику строго-аналитической — путь прямой провѣрки — для математики общей закрытъ.

Правда, можно подумать, что если нельзя провѣрить всѣ слѣдствія изъ общихъ предложеній математики, то, быть можетъ, понятіямъ, входящимъ въ эти предложенія, можно дать такія опредѣленія, чтобы вся безпредѣльная вереница слѣдствій прямо логически вытекала изъ этихъ опредѣленій. Обыкновенно наше безсиліе доказать логически какое-нибудь предложеніе выражается прежде всего въ томъ, что при такихъ доказательствахъ мы должны допускать — явно или скрытнымъ образомъ—нѣкоторыя недоказанныя положенія—постулаты или аксіомы. И вотъ, встрѣтившись съ такой аксіомой при доказательствѣ, не можемъ ли мы просто включить эту аксіому въ опредѣленіе разсматриваемыхъ понятій, придавъ этимъ понятіямъ новый признакъ, отвѣчающій аксіомѣ? Такой способъ уничтоженія постулатовъ и аксіомъ и называютъ иногда „опредѣленіемъ черезъ постулаты“ [24]). Вообще, нельзя ли исчерпывающимъ образомъ перечислить въ опредѣленіяхъ основныхъ понятій математики всѣ независимыя свойства этихъ понятій такъ, чтобы всѣ дальнѣйшія разсужденія математики сводились къ однѣмъ логическимъ операціямъ?

Конечно, такое перечисленіе, по крайней мѣрѣ, теоретически, возможно, такъ какъ, имѣя при всякомъ состояніи математическихъ знаній по необходимости лишь конечное число общихъ предложеній математики, мы можемъ подобрать тоже въ конечномъ числѣ такія посылки, изъ которыхъ эти предложенія вытекали бы, какъ слѣдствія; и, слѣдовательно, можемъ такъ опредѣлить основныя понятія черезъ конечное число признаковъ, чтобы всѣ предложенія математики стали аналитическими.

Но на этомъ пути мы встрѣчаемся съ непреодолимымъ препятствіемъ съ другой стороны, такъ какъ мы существенно не имѣемъ возможности оправдать наши „опредѣленія черезъ постулаты“. Правда, при опредѣленіи какого-либо математическаго понятія черезъ нѣкоторые признаки мы не должны заботиться о доказательствѣ возможности реальнаго существованія такого понятія, такъ какъ мы знаемъ, что математика не занимается внѣшней реальностью, и потому отъ нея совершенно независима. Для математики, какъ для знанія формальнаго, „возможно“ и

„существуетъ“ рѣшительно все, что только согласно съ нашими логическими нормами. Но именно это послѣднее требованіе налагаетъ на насъ при созданіи математическихъ понятій нѣкоторую неизбѣжную обязанность: чтобы какое-либо опредѣленіе было логически правильно, необходимо, чтобы въ немъ не было логическихъ противорѣчій. Давая опредѣленіе, мы должны убѣдиться, что оно такихъ противорѣчій за собой не влечетъ. И если мы не имѣемъ логическаго ручательства въ этомъ, то иаше опредѣленіе будетъ логически неправомѣрно.

Но какое же, вообще, мы можемъ имѣть логически-значимое ручательство въ отсутствіи противорѣчій въ данной системѣ понятій и сужденій? Только одно: мы должны дѣйствительно сознавать все содержаніе понятій, свободное отъ противорѣчій, такъ какъ за все, находящееся въ настоящій моментъ внѣ нашего сознанія, мы, вообще, уже не можемъ ручаться съ безусловной достовѣрностью [25]). Самонаблюденіемъ же мы можемъ убѣдиться въ каждый моментъ, что сознавать (т.-е. мыслить или представлять) мы можемъ сразу лишь конечное число вещей, понятій, сужденій и, вообще, какихъ бы то ни было объектовъ мысли. Чѣмъ больше число сознаваемыхъ одновременно такихъ объектовъ, тѣмъ большее напряженіе испытываетъ наше сознаніе, и, практически, такому возрастанію сознаваемыхъ объектовъ скоро наступаетъ предѣлъ. За этимъ предѣломъ положеніе котораго зависитъ отъ индивидуальной силы сознанія каждой личности, объекты уже вовсе не сознаются нами раздѣльно. И если мы продолжаемъ ихъ все же создавать, то уже въ силу другихъ способностей, позволяющихъ намъ обращаться съ объектами какъ если бы мы ихъ сознавали раздѣльно. При этомъ такая замѣна дѣйствительнаго сознанія основывается лишь на нѣкоторыхъ предположеніяхъ, гипотезахъ, болѣе или менѣе вѣроятныхъ, и потому такая замѣна не равносильна дѣйствительному сознанію и, во всякомъ случаѣ, выходитъ изъ области логическаго мышленія, такъ какъ основывается на другихъ принципахъ, характеръ которыхъ мы будемъ имѣть случай изучить далѣе [26]). Но разъ мы можемъ дѣйствительно сознавать раздѣльно лишь конечное число понятій, ихъ признаковъ и сужденій, изъ нихъ образованныхъ, то мы можемъ сознавать дѣйствительно отсутствіе противорѣчій лишь именно въ такой конечной системѣ понятій и сужденій, а слѣдовательно, лишь для нея можемъ имѣть логически-значимое ручательство въ отсутствіи противорѣчій, т. е. въ логической правильности системы. Логическая же правильность всѣхъ остальныхъ системъ будетъ не безусловно доказана и можетъ только п р е д п о л а г а т ь с я съ большею или меньшею вѣроятностью—смотря по обстоятельствамъ вопроса [27]). Такъ какъ при этомъ для того, чтобы сознавать раздѣльно всѣ логическія соотношенія какой-либо системы, всего удобнѣе эти соотношенія предварительно пересмотрѣть въ послѣдовательномъ порядкѣ, и такъ какъ послѣдовательно пересмотрѣть мы можемъ тоже лишь конечное число понятій и сужденій, то в о з м о ж н о с т ь п е р е с м о т р ѣ т ь д о к о н ц а в с ѣ л о г и ч е с к і я с о о т н о ш е н і я д а н н о й с и с т е м ы и м о ж е т ъ н а м ъ с л у ж и т ь п р а к т и ч е с к и м ъ к р и т е р і е м ъ в о з м о ж н о с т и л о г и ч е с к а г о о п р а в д а н і я д а н н о й с и с т е м ы, т. е. у с т а н о в л е н і я о т с у т с т в і я в ъ н е й п р о т и в о р ѣ ч і й.

Такъ, въ математикѣ конечной мы имѣемъ дѣло только съ конечнымъ числомъ понятій и сужденій, можемъ—имѣя достаточно времени—пересмотрѣть всѣ слѣдствія изъ опредѣленій до конца, и потому можемъ сдѣлать опредѣленія логически-правильными. Точно также и въ общей математикѣ мы можемъ сдѣлать логически правильными отношенія общихъ понятій между собою, такъ какъ мы фактически употребляемъ конечное число общихъ понятій, и, слѣдовательно, можемъ пересмотрѣть до конца всѣ ихъ взаимныя логическія соотношенія. Въ этомъ то смыслѣ и можно дать исчерпывающія опредѣленія понятій „черезъ постулаты“.

Но въ общей математикѣ мы разсматриваемъ не одни отношенія общихъ понятій и не одни общія предложенія, но еще и понятія частныя, подчиненныя первымъ, и частныя слѣдствія изъ общихъ предложеній. Такъ, мы разсматриваемъ не одно общее понятіе суммы, но еще и конкретныя суммы— напримѣръ $2+2$, $3+5+8$ и т. п.—и не одинъ общій законъ перестановительный, но и конкретныя перестановки чиселъ, которыми мы пользуемся при вычисленіяхъ. Этихъ частныхъ понятій и частныхъ слѣдствій изъ общихъ предложеній, какъ мы знаемъ, въ общей математикѣ безконечно много. И вотъ, если бы мы пожелали на дѣлѣ провѣрить отсутствія противорѣчій между всѣми частными предложеніями математики, то сдѣлать это намъ никогда бы не удалось, такъ какъ число частныхъ понятій безконечно. Такъ напримѣръ, давъ соотвѣтствующія опредѣленія связей чиселъ, мы можемъ сдѣлать аналитическимъ предложеніе $7+5=12$, если будемъ разсматривать конечное количество чиселъ. Но при разсмотрѣніи безконечнаго ихъ количества наши опредѣленія чиселъ черезъ ихъ связи не будутъ логически правомѣрными, такъ какъ число 12 тогда должно разсматриваться какъ результатъ безчисленнаго количества различныхъ дѣйствій, напримѣръ: $12=50-38$, $12=36:3$ и т. п., и потому нельзя будетъ провѣрить отсутствіе противорѣчій между сужденіемъ, выражаемымъ связью $7+5=12$, и остальными сужденіями, въ которыя входитъ понятіе о числѣ 12, сужденіями, выражаемыми безчисленнымъ множествомъ другихъ ариѳметическихъ связей; нельзя будетъ провѣрить, не придемъ ли мы при достаточномъ продолженіи ариѳметическихъ операцій къ какимъ-либо софизмамъ, напримѣръ, къ связи $12=13$, хотя мы первоначально и опредѣлили 13 какъ не-12, такъ какъ $13=12$ плюсъ единица [28]).

Такимъ образомъ если, давая опредѣленія и высказывая предложенія въ математикѣ, мы предполагаемъ, что они, дѣйствительно, обнимаютъ безъ противорѣчій безконечное количество частныхъ понятій и слѣдствій, то наши опредѣленія не будутъ логически оправданными, и, значитъ, наши предложенія не будутъ логически доказанными. Иначе говоря, въ математикѣ намъ придется по крайней мѣрѣ допустить, какъ верховный постулатъ,—непротиворѣчивость общихъ аксіомъ математики или опредѣляемыхъ черезъ нихъ общихъ понятій. И этотъ верховный постулатъ будетъ уже совершенно неуничтожаемъ средствами логики.

Дѣйствительно, если бы, слѣдуя общему логическому рецепту уничтоженія постулатовъ, мы захотѣли включить постулатъ непротиворѣчивости въ опредѣленія общихъ понятій, то по поводу этихъ новыхъ опредѣленій опять возникъ бы вопросъ о ихъ непротиворѣчивости, и чтобы ихъ оправдать, намъ опять пришлось бы допустить постулатъ непротиворѣчивости. Если бы мы попытались опять включить его въ опредѣленія, то по тѣмъ же соображеніямъ постулатъ возникъ бы опять, и эти попытки могли бы продолжиться до безконечности, оставаясь, какъ видимъ, всегда совершенно тщетными.

3. Примѣры недостаточности логики.

Этотъ общій результатъ позволяетъ намъ теперь a priori утверждать, что всѣ попытки доказательства непротиворѣчивости общихъ аксіомъ математики должны быть безплодными, и что во всѣхъ предполагаемыхъ такихъ доказательствахъ въ лучшемъ случаѣ должны заключаться какія-нибудь скрытыя допущенія, обнаруженіе которыхъ привело бы вопросъ къ первоначальному положенію. Поэтому всѣ такія попытки можно сравнить съ попытками рѣшенія тѣхъ знаменитыхъ задачъ—о трисекціи угла, о квадратурѣ круга и т. д.,—неразрѣшимость которыхъ при извѣстной постановкѣ вопросовъ теперь строго доказана.

Для примѣра, мы теперь и разсмотримъ одинъ изъ возможно-предполагаемыхъ такихъ путей рѣшенія нашей проблемы. Именно, можно было бы подумать, что для оправданія общихъ опредѣленій математики, изъ которыхъ вытекала бы логически безконечная вереница частныхъ слѣдствій, примѣнимъ тотъ методъ провѣрки правильности опредѣленій, который состоитъ въ указаніи хоть одного частнаго примѣра, гдѣ бы всѣ приписываемыя опредѣленіями свойства понятій могли бы мыслиться безъ противорѣчій. Дѣйствительно, если всѣ данныя опредѣленіями связи не будутъ противорѣчить другъ другу въ одномъ частномъ случаѣ, т. е. въ одной опредѣленной системѣ понятій, то онѣ не будутъ противорѣчивыми и вообще, такъ какъ въ силу закона тождества мы должны ихъ мыслить всегда одnѣми и тѣми же. И вотъ, если бы мы могли найти хоть одинъ примѣръ, хоть одну строго-опредѣленную логически и, слѣдовательно, конечную группу частныхъ понятій, въ которыхъ бы совмѣстились безъ противорѣчій всѣ свойства, высказываемыя въ общихъ опредѣленіяхъ, то эти опредѣленія были бы логически оправданы.

Но если мы желаемъ, чтобы общія свойства, черезъ которыя мы опредѣляемъ математическія понятія, давали намъ возможность судить обо всемъ безконечномъ рядѣ понятій и сужденій математики — напримѣръ, обо всемъ рядѣ чиселъ,—то мы какъ разъ такой конечной группы и не найдемъ, такъ какъ, по условію, наши ствойства должны касаться безконечнаго, а не конечнаго ряда.

Если бы, напримѣръ, всѣ свойства, которыми мы желаемъ опредѣлить числа, совмѣстились въ какой-либо конечной группѣ чиселъ, то мы—при помощи однихъ нашихъ опредѣленій—уже не могли бы выйти за предѣлы такой группы. Ибо если бы хотя одно наше опредѣленіе указывало на число внѣ нашей группы, то это опредѣленіе въ предѣлахъ нашей группы уже не могло бы быть провѣрено, и, слѣдовательно, группа не удовлетворяла бы условію. Если же ни одно опредѣленіе чиселъ черезъ общія свойства не ведетъ за предѣлы группы, то мы тѣмъ самымъ не могли бы разсматривать чиселъ внѣ группы, такъ какъ наши опредѣленія не вводили бы ихъ въ математику, и, слѣдовательно, мы имѣли бы не безконечное, а конечное число математическихъ понятій, что опять противорѣчитъ условію.

Итакъ, опредѣленія математическихъ понятій черезъ общія свойства не могутъ быть оправданы на примѣрѣ въ конечной группѣ математическихъ понятій. На безконечной же группѣ мы опять не будемъ въ состояніи провѣрить всѣ слѣдствія изъ нашихъ опредѣленій, такъ какъ никогда не исчерпаемъ эти слѣдствія. И такимъ образомъ путь оправданія на примѣрѣ опредѣленій общей математики, какъ и слѣдовало ожидать на основаніи общихъ соображеній, тоже закрытъ.

Для иллюстраціи этого положенія воспользуемся примѣромъ Пуанкарэ [29]), разсмотрѣвшаго слѣдующія пять общихъ аксіомъ, на которыхъ Пеано желаетъ построить ариѳметику:

I. Ноль есть цѣлое число.

II. Ноль не слѣдуетъ ни за какимъ цѣлымъ числомъ.

III. Слѣдующее за цѣлымъ числомъ есть цѣлое.

IV. Два цѣлыхъ числа равны, если слѣдующія за ними равны.

V. Пятая аксіома есть принципъ, такъ называемой, „полной индукціи".

Можно считать эти аксіомы — какъ это и дѣлаетъ Кутюра—за **опредѣленія** ноля, цѣлаго числа и числа „слѣдующаго за даннымъ". Но чтобы имѣть на это право, необходимо показать, что данное общее опредѣленіе не влечетъ за собой противорѣчій въ примѣненіяхъ къ частнымъ случаямъ. Попробуемъ же убѣдиться въ этомъ на примѣрѣ.

Возьмемъ группу чиселъ: 0, 1, 2. Можно провѣрить, что она удовлетворяетъ аксіомамъ I, II, IV и V, т. е. не противорѣчитъ высказаннымъ въ четырехъ аксіомахъ свойствамъ. Но чтобы она удовлетворяла III-му опредѣленію, надо, чтобы и 3 было цѣлымъ числомъ, потому что, по опредѣленію III-му, за цѣлымъ 2 должно слѣдовать цѣлое же. Слѣдовательно, надо, чтобы группа 0, 1, 2, 3 удовлетворяла всѣмъ аксіомамъ.

Можно провѣрить и для этой группы согласіе съ аксіомами I, II, IV и V, но, чтобы она удовлетворяла III-ей, надо, чтобы 4 было цѣлымъ числомъ и чтобы группа 0, 1, 2, 3, 4 удовлетворяла аксіомамъ. Такъ можно идти далѣе до безконечности, никогда не провѣривъ всѣхъ аксіомъ на примѣрѣ. И легко видѣть, что этотъ результатъ не случаенъ, а имѣетъ мѣсто именно потому, что общія свойства, опредѣляющія безконечную группу понятій, не могутъ совмѣститься въ группѣ конечной, такъ какъ хоть одно опредѣленіе должно вести за предѣлы группы. Роль этого опредѣленія въ разсматриваемой системѣ и играетъ аксіома III-ья, которая обезпечиваетъ неопредѣленное возрастаніе числа разсматриваемыхъ понятій, т. е. ведетъ къ безконечности. Поэтому же нельзя убѣдиться въ правомѣрности аксіомъ Пеано, и пересматривая всѣ слѣдствія изъ нихъ.

Другимъ примѣромъ недостаточности логики можетъ служить теорія предѣловъ, на которой основывается весь анализъ безконечно-малыхъ. Можно утверждать заранѣе, что построеніе этой теоріи требуетъ допущенія понятій или аксіомъ, непротиворѣчивость которыхъ не можетъ быть доказана, такъ какъ въ теоріи предѣловъ мы должны имѣть дѣло съ безконечно-большимъ количествомъ значеній перемѣннаго, т. е. съ безконечнымъ количествомъ объектовъ. Поэтому утвержденія теоріи предѣловъ не могутъ быть ни непосредственно-провѣрены, ни оправданы на примѣрѣ въ какой-либо конечной группѣ понятій, и потому требуютъ неоправдываемыхъ логически постулатовъ, присутствіе которыхъ и составляло главное препятствіе для развитія всѣхъ связанныхъ съ теоріей предѣловъ областей математики [30]). Чтобы преодолѣть эти препятствія, нуженъ былъ въ древности геній Архимеда, а въ новое время—геній Ньютона и Лейбница.

Какъ извѣстно, для построенія теоріи предѣловъ необходимо допустить аксіому о существованіи точнаго высшаго предѣла, гласящую, что всякая увеличивающаяся перемѣнная, остающаяся меньшей, какого-нибудь постояннаго числа, имѣетъ точный высшій предѣлъ, иначе говоря—что въ данномъ случаѣ можно всегда указать число („точный предѣлъ"), разность между которымъ и перемѣнной можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой. Впрочемъ, эту аксіому можно доказать. Но такое доказательство не избавляетъ насъ отъ существенно новой аксіомы, такъ какъ при немъ приходится скрытымъ образомъ или явно опереться на другую аксіому — аксіому дѣлимости, утверждающую, что при всякомъ a и n, (хотя бы только цѣломъ) можно найти всегда такое x, чтобы $a = nx$, иначе говоря, что всякое число a дѣлимо до безконечности. Но такая аксіома не можетъ быть ни непосредственно провѣрена, ни оправдана на примѣрѣ, а потому не будетъ логически доказана и ея непротиворѣчивость въ связи съ прямыми опредѣленіями чиселъ; и вотъ въ необходимости допустить такую аксіому и сказывается невозможность построенія теоріи предѣловъ при помощи принциповъ одной логики.

Поэтому же всѣ теоріи ирраціональныхъ чиселъ, какъ основанныя на разсмотрѣніи предѣловъ и безконечныхъ совокупностей объектовъ, не могутъ быть сведены къ одной логикѣ и требуютъ допущенія логически неоправдываемыхъ аксіомъ. Такъ, напримѣръ, при опредѣленіи ирраціональныхъ чиселъ черезъ „разрѣзы" Дедекинду приходится просто допускать существованіе ирраціональныхъ чиселъ слѣдующей аксіомой: „Если совокупность дѣйствительныхъ чиселъ можетъ быть раздѣлена на два такихъ класса, чтобы каждое число перваго класса было меньше каждаго числа второго класса, то существуетъ дѣйствительное число, и только одно, которое производитъ это раздѣленіе" [31].

Такъ какъ въ математикѣ „существовать“ значитъ „не заключать въ себѣ противорѣчій“, то этой аксіомой, въ сущности, постулируется лишь отсутствіе противорѣчій при разсмотрѣніи неопредѣленно продолжающагося дробленія раціональныхъ чиселъ на все болѣе мелкія части, и распредѣленія этихъ частей на два класса, т. е. постулируется лишь возможность построенія логически-правильной ариѳметики для безпредѣльнаго количества чиселъ. Но мы знаемъ, что именно такой постулатъ и не можетъ быть оправданъ средствами одной логики, въ чемъ и сказывается недостаточность послѣдней для построенія данной теоріи.

Замѣтимъ, между прочимъ, что Рессель [32]) думалъ дать чисто-логическую теорію ирраціональныхъ чиселъ, опредѣляя дѣйствительное число, какъ совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ, отвѣчающихъ низшему классу, упомянутому въ аксіомѣ Дедекинда. Но въ опредѣленіи Ресселя приходится постулировать, что такая совокупность—да еще безконечнаго множества чиселъ! — всегда существуетъ безъ противорѣчій, что невозможно провѣрить уже и для одной совокупности, а тѣмъ болѣе, когда постулатъ высказывается о безконечномъ количествѣ такихъ совокупностей. Поэтому точка зрѣнія Ресселя не представляетъ въ логическомъ смыслѣ никакихъ преимуществъ по сравненію съ теоріей Дедекинда.

Всѣми этими примѣрами, такимъ образомъ, и подтверждается наше общее заключеніе, что если для конечной математики пользованіе однѣми логическими операціями было бы лишь неудобно, то для математики вообще это уже совершенно невозможно.

4. Структура математики.

Такая недостаточность для математики логическаго мышленія требуетъ еще изслѣдованія ея внутреннихъ причинъ, лежащихъ, очевидно, въ общихъ условіяхъ нашего познанія. Чтобы выяснить эти причины, мы и должны теперь остановиться на вопросѣ о роли логики въ познаніи вообще въ зависимости отъ его общей структуры, и съ этой общей точки зрѣнія освѣтить ее роль уже и въ математикѣ въ зависимости отъ структуры послѣдней.

Недостаточность логическаго мышленія для естествознанія понятна. Она зависитъ отъ того, что логическое мышленіе касается понятій и сужденій лишь со стороны формы, а не содержанія, и, слѣдовательно одно не можетъ дать положительнаго знанія о дѣйствительности. Не можетъ оно дать достаточнаго для насъ знанія и въ совокупности съ однимъ опытомъ, такъ какъ опытъ вливаетъ въ логическія формы лишь рядъ сужденій строго-единичныхъ („камень упалъ", „стало свѣтло" и т. д.)[33]), не выходящихъ за предѣлы этого самаго опыта, между тѣмъ какъ цѣнное знаніе необходимо должно выходить за эти предѣлы[34]). Поэтому то и понятно, почему для построенія естествознанія требуется еще иной, сверхлогическій принципъ, какимъ и является принципъ наибольшей простоты или „экономіи мышленія", обосновывающій всѣ роды индуктивныхъ выводовъ[35]).

Не такъ просто объясняется недостаточность логики для построенія математики. Въ математическомъ познаніи мы уже не имѣемъ дѣла ни съ внѣшней дѣйствительностью, проявляющейся въ опытѣ, ни съ сужденіями единичными. Объекты математики создаются нами самими, и притомъ мы можемъ убѣдиться, что это—понятія общія, порождающія общія же, а не единичныя сужденія. Такъ какъ это послѣднее положеніе необходимо для правильнаго пониманія мѣста математики въ познаніи, то, прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшему, мы это положеніе точно и установимъ.

Убѣдиться въ томъ, что всѣ понятія математики суть понятія общія, мы можемъ, доказавъ, что даже самыя частныя понятія, надъ которыми оперируетъ математика, являются уже понятіями общими. А для этого мы должны лишь показать, что таковыми являются понятія объ отдѣльныхъ цѣлыхъ положительныхъ числахъ — понятія: „1“, „2“, „3“ и т. д.—и объ отдѣльныхъ дѣйствіяхъ надъ ними, такъ какъ можно показать, что эти понятія и являются самыми частными и при томъ единственными, на которыя разлагаются всѣ остальныя понятія математики.

Дѣйствительно, мы можемъ констатировать, что всѣмъ остальнымъ понятіямъ математики подчинены всегда какія-либо понятія болѣе частныя,—напримѣръ, понятію суммы подчинены понятія объ отдѣльныхъ конкретныхъ суммахъ, понятію числа подчинены понятія объ отдѣльныхъ конкретныхъ числахъ и т. д., между тѣмъ какъ понятіямъ отдѣльныхъ чиселъ (и отдѣльныхъ дѣйствій надъ ними) уже не подчинены въ предѣлахъ математики никакія другія понятія. Такъ что въ предѣлахъ математики отдѣльныя числа являются даже какъ бы понятіями единичными, или, говоря точно: понятіями наиболѣе частными.

Но при этомъ можно убѣдиться, что это и суть единственныя наиболѣе частныя понятія, на которыя разлагаются въ концѣ-концовъ всѣ безъ исключенія болѣе общія понятія математики. Дѣйствительно, мы знаемъ, что въ чемъ бы ни состояла математическая теорія, она всегда сводится къ изученію различныхъ видовъ функціональныхъ зависимостей, а всякая функціональная зависимость всегда выражаетъ нѣкоторое соотношеніе величинъ, или—что то же—нѣкоторыхъ чиселъ, измѣряющихъ эти величины. А что такое всѣ, вообще, виды чиселъ? Въ концѣ-концовъ—какъ это выяснили особенно работы Вейерштрасса, Дедекинда, Кронекера—это всегда лишь различныя комбинацiи цѣлыхъ положительныхъ чиселъ—„1“, „2“, „3“ и т. д., — лишь отличающiяся правилами дѣйствiй надъ этими числами. Такъ, напримѣръ, дробныя числа суть комбинацiи пары цѣлыхъ положительныхъ чиселъ (a, b)—„числителя“ и „знаменателя“; ирpацiональныя числа суть комбинацiи безпредѣльно увеличивающагося ряда по опредѣленнымъ правиламъ составляемыхъ дробныхъ, а слѣдовательно, въ концѣ-концовъ, и цѣлыхъ положительныхъ чиселъ. И вообще какiя бы мы ни придумывали символическiя исчисленiя (вродѣ исчисленiя кватернiоновъ), всѣ они будутъ отличаться лишь правилами дѣйствiй — все надъ тѣми же цѣлыми положительными числами, являющимися такимъ образомъ единственнымъ матерiаломъ, на который разлагаются всѣ болѣе общiя понятiя математики [36]). Но точно также и всѣ понятiя геометрiи, механики и, вообще, всякой имѣющей математическiй характеръ теорiи, въ концѣ-концовъ, разлагаются на одни понятiя цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, такъ какъ всѣ геометрическiя, механическiя и т. п. соотношенiя являются лишь особыми видами функцiональныхъ зависимостей, и, слѣдовательно, въ концѣ-концовъ, сводятся къ соотношенiямъ опредѣленнымъ образомъ связанныхъ чиселъ, что и подтверждается возможностью построенiя насквозь-аналитической геометрiи, механики и т. д. [37]). Такимъ образомъ цѣлыя положительныя числа, какъ единственный самый частный матерiалъ математики, являются какъ бы отдѣльными кирпичами, на которые разлагается и изъ которыхъ строится все зданiе математическихъ наукъ, или какъ бы органическими клѣтками математическаго тѣла [38]).

Итакъ, чтобы показать, что всѣ понятiя математики, разсматриваемыя уже не въ предѣлахъ одной математики, а во всей совокупности познанія, суть понятія общія, намъ достаточно показать, что таковыми являются уже всѣ отдѣльныя цѣлыя числа, напримѣръ, число „5". Разсмотримъ же, что выражаетъ каждое такое число.

Мы не будемъ при этомъ касаться вопроса о точномъ опредѣленіи числа, чему болѣе или менѣе удачныя попытки дѣлались какъ математиками прошлаго столѣтія—Гельмгольтцемъ, Кронекеромъ, Дедекиндомъ,—такъ и представителями новѣйшей логической школы—Пеано, Рёсселемъ и другими [39]). Намъ достаточно лишь констатировать, что каждое отдѣльное число—напримѣръ, число 5—обнимаетъ цѣлый классъ самыхъ различныхъ понятій, какъ напримѣръ: „пять орѣховъ", „комната высотою въ пять аршинъ", „пять внѣшнихъ чувствъ", „пять склоненій", „пять добродѣтелей", и, вообще, безчисленное множество понятій, начиная съ грубо-матеріальныхъ и кончая отвлеченно-духовными. Такимъ образомъ для всѣхъ этихъ подчиненныхъ понятій отдѣльное число „пять" является общимъ понятіемъ, выражающимъ какое-то общее свойство подчиненныхъ ему объектовъ; и такъ какъ то же самое имѣетъ мѣсто и для каждаго изъ остальныхъ чиселъ—1, 2, 3 и т. д., —то всѣ они суть понятія общія.

Но такъ какъ мы видѣли, что отдѣльныя числа суть единственный и самый частный матеріалъ математики, то, слѣдовательно, въ математикѣ, вообще, нѣтъ уже единичныхъ понятій, а лишь понятія общія, и потому для нея не имѣетъ силы то объясненіе недостаточности логики, которое дѣлаетъ понятной эту недостаточность въ естествознаніи, гдѣ мы имѣемъ дѣло съ сырымъ матеріаломъ понятій строго-единичныхъ. Насколько отличается логическій характеръ математическаго познанія отъ естественно-научнаго, можно видѣть уже изъ того, что для естествознанія понятіе объ отдѣльномъ числѣ является послѣднимъ результатомъ сложной работы отвлеченія [10]), между тѣмъ какъ для математики то же понятіе является наиболѣе простымъ, съ котораго она еще только начинаетъ свою работу. И такимъ образомъ, въ смыслѣ общности своихъ понятій, математика составляетъ какъ бы слѣдующій этажъ въ лѣстницѣ понятій, лишь соприкасающійся съ низшимъ этажемъ при помощи понятій объ отдѣльныхъ числахъ.

5. Почему недостаточна логика.

Однако, если логическія структуры естествознанія и математики не тождественны, все же онѣ представляютъ между собой извѣстную аналогію. Въ самомъ дѣлѣ, какъ естествознаніе получаетъ извнѣ свой первоначальный сырой матеріалъ въ видѣ чистаго опыта, такъ и математика извнѣ (т. е. изъ предыдущей обобщающей работы, которая уже не входитъ въ математику) получаетъ свой сырой матеріалъ въ видѣ чиселъ и разсматриваетъ этотъ матеріалъ тоже какъ первоначальный, такъ какъ вопросъ о томъ, какой смыслъ придавать числамъ, какія изъ нихъ дѣлать примѣненія, входитъ уже въ задачу не математики, а ея приложеній, т. е. въ задачу естествознанія. Какъ естествознаніе изъ своего наиболѣе частнаго матеріала, т. е. изъ строго-единичныхъ сужденій чистаго опыта стремится получить болѣе общіе выводы, такъ точно поступаетъ и математика со своимъ наиболѣе частнымъ матеріаломъ, такъ какъ мы знаемъ, что понятіе объ отдѣльныхъ числахъ охватывается послѣдовательно рядомъ все болѣе общихъ понятій, кончая понятіемъ о функціональной зависимости вообще. И такимъ образомъ математика является лишь продолженіемъ обобщающаго процесса естествознанія, т. е. тѣмъ же процессомъ, но лишь совершающимся на высшихъ ступеняхъ общности понятій [41]). Иначе и не можетъ быть, потому что всякое цѣнное познаніе должно руководствоваться однимъ и тѣмъ же принципомъ — принципомъ наибольшей простоты, изъ котораго и вытекаетъ въ цѣляхъ экономіи мышленія необходимость объединенія болѣе частныхъ понятій все болѣе общими. Въ силу этихъ общихъ чертъ естествознанія и математики и становится понятнымъ, почему здѣсь и тамъ логическое мышленіе играетъ по существу одинаковую роль.

Правда, въ силу того, что въ математикѣ мы уже поднялись въ сферу общихъ понятій, мы въ ней не будемъ имѣть дѣла съ тѣмъ хаотическимъ матеріаломъ сужденій, какія намъ доставляетъ непосредственный опытъ. Объекты математики, какъ понятія общія и нами создаваемыя, будутъ для насъ существовать лишь въ силу опредѣленій, сводящихъ ихъ къ наименьшему числу понятій первоначальныхъ, и это справедливо, конечно, даже для самыхъ частныхъ понятій математики, какими являются, какъ мы видѣли, понятія объ отдѣльныхъ цѣлыхъ положительныхъ числахъ. Дѣйствительно, какъ извѣстно, всѣ отдѣльныя числа могутъ быть получены черезъ сложеніе единицъ, и потому, принявъ за первоначальныя понятіе единицы и понятіе сложенія съ единицей, мы можемъ получить логическое опредѣленіе для каждаго отдѣльнаго числа — 2, 3, 4 и т. д.,—символически выражаемое формулами: $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ $4 = 3 + 1$ и т. д., гдѣ знакъ равенства выражаетъ знакъ логическаго тождества и замѣняетъ связку „есть“. Для возможности суммированія чиселъ къ этимъ опредѣленіямъ математика должна прибавить еще рядъ опредѣленій дополнительныхъ, указывающихъ на различныя логическія связи отдѣльныхъ чиселъ между собою, напримѣръ, какъ мы видѣли, для вывода $2+2=4$ надо опредѣлить, что $2+2=(2+1)+1$. Точно также и для возможности производства другихъ дѣйствій надъ числами мы должны сдѣлать еще другія опредѣленія, связывающія числа между собой, но если мы ограничимся суммированіемъ и, вообще, производствомъ дѣйствій надъ числами лишь въ конечныхъ предѣлахъ, то всѣхъ этихъ опредѣленій будетъ число конечное, и, слѣдовательно, они могутъ быть сдѣланы логически-правомѣрными прямой провѣркой. Такимъ образомъ отдѣльныя наиболѣе частныя понятія математики уже не составляютъ хаотическаго матеріала, а всѣ связаны между собой опредѣленіями.

Обратимъ, однако, вниманіе, какого рода эти опредѣленія. Эти опредѣленія суть опредѣленія отъ частныхъ понятій къ частнымъ. Они принадлежатъ къ тому типу номинальныхъ опредѣленій, къ какому принадлежитъ, напримѣръ, слѣдующій рядъ: „Великороссія, Малороссія, Польша и т. д., вмѣстѣ взятыя, суть Европейская Россія"; „Европейская Россія, Германія, Франція и т. д., вмѣстѣ взятыя, суть Европа"; „Европа, Африка, Азія, вмѣстѣ взятыя, суть Старый Свѣтъ". Точно также и для чиселъ: „единица и единица, вмѣстѣ взятыя, суть два", „два и единица, вмѣстѣ взятыя, суть три" и т. д. Такимъ образомъ, хотя эти прямыя опредѣленія и объединяютъ всѣ частныя математическія понятія, но все же они не обнимаютъ чиселъ, какъ общія понятія обнимаютъ частныя, а лишь связываютъ ихъ между собой, такъ что сколько чиселъ, столько, по крайней мѣрѣ, и опредѣленій [42]). И потому наиболѣе частный матеріалъ математики представляетъ все же нѣкоторую ослабленную аналогію матеріалу естествознанія: какъ въ этомъ послѣднемъ для полученія каждаго новаго единичнаго объекта познанія требуется отдѣльный актъ воспріятія, такъ и въ математикѣ для каждаго новаго числа требуется отдѣльный актъ опредѣленія. И если въ естествознаніи законы логики намъ недостаточны потому, что мы не можемъ такими отдѣльными воспріятіями охватить всю дѣйствительность, включая всю вереницу давно-прошедшаго и будущаго времени и все пространство, то эти же законы должны быть недостаточными и въ математикѣ, такъ какъ мы тоже не можемъ охватить всѣхъ чиселъ безконечнымъ количествомъ отдѣльныхъ актовъ опредѣленія, ибо мы знаемъ, что мы можемъ сознавать раздѣльно лишь конечное число отдѣльныхъ актовъ, и лишь конечное число таковыхъ можемъ совершать послѣдовательно.

Какъ извѣстно, естествознаніе, не будучи въ состояніи охватить всей дѣйствительности прямымъ воспріятіемъ и охватывая лишь малую ея часть въ нашемъ дѣйствительномъ опытѣ, все же стремится всю дѣйствительность охватить, и для этого, заключая на основаніи нашего опыта отъ частнаго къ общему, строитъ рядъ общихъ сужденій, выражающихъ законы природы и, вообще,—гипотезы науки. Такое знаніе уже не будетъ логически достовѣрнымъ, но все же будетъ для насъ значимымъ, какъ вѣроятное знаніе, построенное на цѣнныхъ для насъ познавательныхъ принципахъ [43]). Аналогію этого мы имѣемъ и въ математикѣ. Не будучи въ состояніи охватить всѣ отдѣльныя числа рядомъ опредѣленій частныхъ, математика стремится создать такія общія опредѣленія, чтобы всѣ свойства отдѣльныхъ чиселъ вытекали изъ этихъ опредѣленій, какъ простыя слѣдствія. Такимъ образомъ математика поднимается на слѣдующую ступень обобщенія и надъ рядомъ своихъ частныхъ понятій и частныхъ опредѣленій она надстраиваетъ новый этажъ общихъ понятій и общихъ опредѣленій, подчиняющихъ прежнія опредѣленія и понятія. Такъ, она опредѣляетъ понятія о цѣломъ положительномъ числѣ вообще черезъ нѣкоторыя общія его свойства— напримѣръ, черезъ пять оксіомъ Пеано, понятіе о суммѣ вообще черезъ ея общія свойства и т. д. Поэтому въ математикѣ мы имѣемъ по необходимости, по крайней мѣрѣ, двѣ системы опредѣленій [44]: опредѣленій отъ частнаго къ частному, связывающихъ между собой всѣ понятія одинаковой общности (напримѣръ, числа), и опредѣленій общихъ, содержащихъ въ себѣ всѣ частныя понятія, какъ подчиненныя.

Опредѣленія общія уже даютъ возможность обнять всю безконечную цѣпь математическихъ болѣе частныхъ понятій, такъ какъ каждое общее понятіе, вообще, содержитъ въ себѣ всѣ понятія подчиненныя. Однако, въ этомъ логическомъ преимуществѣ общихъ понятій лежитъ и ихъ логическая слабость, какъ и въ естествознаніи. Правда, давъ систему общихъ опредѣленій, мы можемъ провѣрить отсутствіе противорѣчій въ этихъ опредѣленіяхъ между собой, такъ какъ по необходимости такихъ общихъ опредѣленій мы можемъ создать лишь конечное число и, слѣдовательно, мы можемъ ихъ всѣхъ обозрѣть прямой провѣркой. Но въ томъ, что всѣ частныя слѣдствія изъ общихъ опредѣленій не войдутъ въ противорѣчіе съ частными опредѣленіями, непосредственно данными, мы уже не можемъ убѣдиться, такъ какъ частныхъ опредѣленій мы можемъ создавать неопредѣленно много и, слѣдовательно, никогда путемъ прямой провѣрки ихъ не исчерпаемъ.

Правда, во избѣжаніе могущихъ встрѣтиться противорѣчій можно было бы заранѣе условиться, что мы будемъ давать лишь такія частныя опредѣленія, которыя не противорѣчили бы опредѣленіямъ общимъ, отбрасывая остальныя. Но тогда не будетъ извѣстно: можемъ ли мы дать сколь угодно большой рядъ такихъ частныхъ опредѣленій? И это всегда придется лишь допускать, какъ постулатъ. Иначе говоря, въ математикѣ придется, по крайней мѣрѣ, допустить, что безконечный рядъ частныхъ понятій, подчиненныхъ общимъ опредѣленіямъ математики, можетъ существовать безъ противорѣчій. Ибо никакимъ логическимъ методомъ доказать этого мы не можемъ.

Можно было бы возразить, что такъ дѣло обстоитъ не въ одной математикѣ, а вездѣ, гдѣ изъ общихъ сужденій приходится извлекать частныя слѣдствія. Общее сужденіе, вообще, обнимаетъ всѣ слѣдствія, сколько бы ихъ ни было, и, однако, извлекая эти слѣдствія, мы за предѣлы логики не выходимъ, такъ какъ все время вращаемся въ сферѣ однихъ силлогизмовъ. Пусть, напримѣръ, мы имѣемъ общее сужденіе: „всѣ люди смертны", каторое мы можемъ разсматривать какъ опредѣленіе понятія „человѣкъ" черезъ признакъ смертности. Мы можемъ создать рядъ частныхъ понятій, подчиняя ихъ понятію „человѣкъ" рядомъ опредѣленій, напримѣръ, „Сократъ — человѣкъ", „Кай — человѣкъ" и т. д., и мы знаемъ, что, извлекая изъ этихъ опредѣленій по принципамъ силлогизма слѣдствія: „Сократъ—смертенъ", „Кай-смертенъ" и т. д., мы къ противорѣчію не придемъ, такъ какъ если какое-либо понятіе не подойдетъ подъ признакъ смертности, то мы просто скажемъ, что тѣмъ самымъ это понятіе не подходитъ и подъ понятіе „человѣкъ". А если такъ, то почему же мы говоримъ, что мы можемъ придти къ противорѣчію, извлекая частныя слѣдствія изъ общихъ понятій математики?

Но дѣло въ томъ, что во всякой логической системѣ общихъ сужденій, въ которой мы хотимъ оставить за собой свободу извлекать всѣ слѣдствія, завѣдомо не встрѣчая противорѣчій, мы должны оставить открытымъ всѣ вопросы объ индивидуальныхъ особенностяхъ подчиненныхъ понятій, т. е. о такихъ ихъ логическихъ признакахъ, которые справедливы только относительно каждаго изъ нихъ въ отдѣльности. Именно тѣмъ самымъ, что мы даемъ общія опредѣленія, мы уже ничего не можемъ сказать въ нихъ объ единичномъ свойствѣ каждаго подчиненнаго понятія. Только въ томъ случаѣ, если мы отказываемся принимать во вниманіе эти индивидуальныя свойства понятій подчиненныхъ, мы и можемъ утверждать, что общія опредѣленія обнимаютъ всѣ частные случаи безъ противорѣчій, потому что, если мы имѣемъ для образованія индивидуальныхъ особенностей понятій какой бы то ни было источникъ (который не лежитъ въ общихъ опредѣленіяхъ, такъ какъ мы видѣли, что они не даютъ индивидуальныхъ особенностей понятій), то мы не будемъ имѣть въ нашей системѣ общихъ опредѣленій никакого логическаго ручательства за тѣ результаты, къ которымъ насъ приведетъ дѣятельность этого источника. Такъ, мы не будемъ знать: 1) дѣйствительно ли этотъ источникъ доставитъ намъ безчисленное множество индивидуальныхъ свойствъ, необходимыхъ для созданія безчисленнаго множества индивидуальныхъ понятій; 2) не приведетъ ли ихъ этотъ источникъ роковымъ образомъ къ нѣкоторымъ противорѣчіямъ?

Между тѣмъ, въ математикѣ мы имѣемъ какъ разъ такой случай безчисленнаго множества понятій индивидуальныхъ, подчиняемыхъ нами общимъ опредѣленіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, каждое частное математическое понятіе — каждое число — имѣетъ свою индивидуальную особенность, ему одному присущую, именно и выражаемую его частнымъ опредѣленіемъ. Напримѣръ, опредѣленіемъ $8 = 7 + 1$ выражается, что свойство быть суммою семи и единицы изъ всѣхъ чиселъ принадлежитъ восьми и только восьми. И если бы какое-либо число не отличалось подобной индивидуальной особенностью отъ другого, то оно было бы просто равно другому. Поэтому на основаніи опредѣленій общихъ свойствъ числа еще нельзя сказать, можно ли создать безъ противорѣчій сколько угодно чиселъ. И дѣйствительно, не давъ на самомъ дѣлѣ всѣхъ опредѣленій чиселъ до N, мы не имѣемъ права утверждать, что нами можетъ мыслиться безъ противорѣчія съ предыдущими и число $N + 1$, а такъ какъ мы на дѣлѣ можемъ создать лишь конечное число опредѣленій, то мы и не имѣемъ логическаго основанія относить ко всему безконечному ряду чиселъ, индивидуально различныхъ, общія свойства, даваемыя общими опредѣленіями. И такимъ образомъ мы видимъ, что это то совмѣщеніе общихъ свойствъ въ безконечномъ рядѣ индивидуально-различныхъ понятій и не поддается логическому контролю.

Легко замѣтить, что это — въ болѣе смягченномъ видѣ повтореніе того, что мы имѣемъ въ естествознаніи. Тамъ изъ строго-единичныхъ сужденій опыта мы должны вывести сужденія общія—гипотезы о природѣ,—и не можемъ этого сдѣлать съ достовѣрностью, т. е. по однимъ логическимъ законамъ, такъ какъ никогда не можемъ ручаться, что неопредѣленно-возрастающій рядъ опыта не войдетъ въ противорѣчіе съ установленнымъ нами общимъ знаніемъ. Здѣсь мы имѣемъ рядъ опредѣленій или основанныхъ на нихъ сужденій, которыя, какъ мы видѣли, въ предѣлахъ математики можно считать тоже единичными, сужденій, которыя мы подчиняемъ основаннымъ на общихъ опредѣленіяхъ сужденіямъ общимъ, но опять не можемъ сдѣлать этого съ достовѣрностью, не будучи въ состояніи ручаться за отсутствіе противорѣчій въ неопредѣленно-возрастающемъ рядѣ частныхъ понятій и сужденій математики.

И если мы теперь вглядимся во внутреннія причины недостаточности логики для построенія всей математики, то мы увидимъ, что эта недостаточность зависитъ отъ невозможности соблюсти до конца формальный характеръ математическихъ теорій. Первоначально мы опредѣлили математику, какъ дисциплину чисто-формальную, изслѣдующую не дѣйствительность, а лишь формы нашихъ понятій. Но этотъ строгій формальный характеръ математика сохраняетъ во всей чистотѣ лишь по отношенію къ естествознанію, и потому здѣсь то мы и можемъ сдѣлать математику строго дедуктивной, какъ это мы и показали для математики конечной, являющейся математикой-средствомъ. Когда же отъ утилитарной математики мы обращаемся къ математикѣ, носящей для насъ свое значеніе въ себѣ, то мы уже не можемъ сохранить за этой математикой формальный характеръ во всей чистотѣ, потому что здѣсь, какъ и въ естествознаніи, мы, въ сущности, имѣемъ дѣло не съ однѣми логическими формами понятій, а съ нѣкоторою реальностью. Только это будетъ уже не реальность внѣшняя, какъ въ естествознаніи, а реальность внутренняя, а именно, способность нашего духа создавать математическія понятія. Фактически, мы создаемъ всегда лишь ограниченное число такихъ понятій (и въ ограниченномъ ихъ числѣ нуждаемся), между тѣмъ мы постулируемъ, что такое творчество для нашего духа — или, по крайней мѣрѣ для духа идеальнаго, но подобнаго нашему—безгранично, и вотъ этотъ то переходъ за предѣлы фактически даннаго и ускользаетъ отъ принциповъ логики [45]). Между тѣмъ безъ него нѣтъ математики, ибо нѣтъ общихъ предложеній математики, образующихъ главную внутреннюю ея цѣнность.

Поэтому то созданіе математики и требуетъ еще иной нашей способности сверхъ способности къ логическому мышленію.

Глава III.

Индукція въ математикѣ.

1. Простая индукція, какъ эвристическій методъ математики.

Можно убѣдиться, что эта способность есть не что иное, какъ наша способность къ индуктивнымъ выводамъ, способность заключать отъ частнаго къ общему, на которой основано познаніе, вообще, всего реально существующаго. Индукція въ математикѣ прежде всего проявляется въ чистомъ, простомъ своемъ видѣ тогда, когда мы впервые изслѣдуемъ какой-нибудь математическій вопросъ, когда создается математическая теорія. Здѣсь индукція служитъ намъ единственнымъ путеводителемъ—она есть эвристическій методъ математики...

Въ геометріи, напримѣръ, мы обыкновенно сначала замѣчаемъ какое-нибудь свойство фигуры на частныхъ случаяхъ, когда это свойство выступаетъ съ особенной ясностью. Мы тогда дѣлаемъ предположеніе: не есть ли оно общее свойство даннаго рода фигуры? Если нѣсколько попытокъ привести такое предположеніе къ абсурду не удаются, а въ частныхъ примѣрахъ оно подтверждается, то мы уже пріобрѣтаемъ нѣкоторую увѣренность въ нашемъ предположеніи, и она то насъ и ведетъ къ нахожденію болѣе точнаго доказательства. Точно также и въ анализѣ мы устанавливаемъ первоначально какое-нибудь положеніе для частныхъ случаевъ, напримѣръ, провѣряемъ справедливость какой-нибудь формулы для n=1, 2, 3, 4. Тогда у насъ является съ нѣкоторой увѣренностью предположеніе о справедливости формулы для всякаго n, и тогда уже мы стараемся доказать это предложеніе.

Вообще, мы видимъ, что всякое новое математическое изслѣдованіе не является простымъ, случайнымъ, комбинированіемъ основныхъ допущеній, изъ которыхъ механически получаются совершенно неожиданныя для изслѣдователя слѣдствія. Нѣтъ, обыкновенно математикъ уже приблизительно знаетъ, къ чему онъ идетъ, и онъ сознательно старается подобрать доказательства къ положеніямъ, въ справедливости которыхъ онъ уже заранѣе получилъ нѣкоторую субъективную увѣренность [46]). Эта увѣренность и является слѣдствіемъ производимой математикомъ индукціи, посредствомъ которой онъ обобщаетъ свойства, установленныя имъ изъ частныхъ примѣровъ. Существованіемъ этой индукціи объясняется и тотъ фактъ, что многія предложенія математики становятся извѣстными задолго до установленія хотя бы нѣсколько строгаго ихъ доказательства.

Чаще всего, когда математическая теорія закончена, этотъ первоначальный индуктивный путь ея возникновенія скрывается самимъ авторомъ теоріи, такъ что въ твореніяхъ великихъ математиковъ мы обыкновенно не находимъ и слѣдовъ предварительной индуктивной работы. Однако, иногда благодаря какимъ-нибудь особымъ обстоятельствамъ эту работу удается все же обнаружить. Такъ, мы знаемъ, что Ферматъ далъ рядъ замѣчательныхъ предложеній по теоріи чиселъ, предложеній, оставленныхъ имъ безъ доказательствъ. Какимъ путемъ онъ отыскалъ эти предложенія? Можно убѣдиться, что во всѣхъ результатахъ, достигнутыхъ Ферматомъ, именно индукція и играла главную роль [47]). Это обнаруживается изъ того, что нѣкоторыя предложенія Ферматa оказались ошибочными, и въ то же время они вѣрны для наиболѣе легко провѣряемыхъ частыхъ случаевъ, которые путемъ индукціи и могли навести Фермата на мысль объ общности какого-нибудь устанавливаемаго имъ свойства. Такъ напримѣръ, Ферматъ утверждалъ, что число вида $2^{2^n}+1$, гдѣ n—любое цѣлое число, есть всегда число простое. Дѣйствительно, это такъ для первыхъ четырехъ чиселъ натуральнаго ряда, гдѣ провѣрка какъ разъ оказывается доступной. Дальше вслѣдствіе огромности чиселъ провѣрка становится чрезвычайно трудной. Однако, мы знаемъ, что Эйлеръ впервые показалъ, что число разсматриваемаго вида для $n=5$ дѣлится на 641, а послѣ (между прочимъ, священникомъ Іоанномъ Первушинымъ въ 1877 г.) было найдено и много другихъ дѣлимыхъ чиселъ разсматриваемаго вида для $n>5$, что опровергаетъ предположеніе Фермата. Значитъ, это предположеніе не было основано на какомъ-нибудь неизвѣстномъ намъ точномъ методѣ, а потому, по всей вѣроятности, не имѣло подъ собой иной почвы, кромѣ простой индукціи, что, кромѣ того, подтверждается и нѣкоторыми мѣстами изъ переписки Фермата.

Вообще, всякое новое математическое изслѣдованіе ведется путемъ обобщеній: установивъ какія-либо свойства въ болѣе частныхъ условіяхъ, мы дѣлаемъ предположеніе или гипотезу—не будутъ ли эти свойства справедливы и въ болѣе общихъ условіяхъ? Частныя предложенія такимъ образомъ являются матеріаломъ для индуктивнаго заключенія къ предложеніямъ болѣе общимъ, а это и показываетъ, что именно индукція является отправной точкой нашихъ новыхъ математическихъ изысканій. Если мы стремимся послѣ этой первой индуктивной стадіи теоріи болѣе прочно обосновать найденныя такимъ путемъ результаты, то это уже процессъ вторичный, возникающій, когда главные этапы теоріи уже намѣчены въ нашемъ сознаніи и уже успѣли въ немъ укорениться, пріобрѣтя для насъ нѣкоторую индуктивную вѣроятность.

2. Простая индукція, какъ основаніе математическаго творчества.

Но кромѣ роли эвристическаго метода для открытія новыхъ предложенійи, ндукція въ математическомъ творчествѣ играетъ еще и другую, не менѣе важную роль: она создаетъ самый матеріалъ математическаго изслѣдованія, указывая путь, куда должна направить свое развитіе математика. Дѣйствительно, въ математикѣ намъ приходится обобщать не только предложенія, но и самыя понятія, расширяя прежнія опредѣленія или, какъ говорятъ, „дѣлая новыя соглашенія". Такъ, напримѣръ, понятіе числа изъ цѣлаго положительнаго послѣдовательно расширяется черезъ понятія отрицательныхъ, дробныхъ, ирраціональныхъ, комплексныхъ, гиперкомплексныхъ и т. д. чиселъ. При всѣхъ такихъ расширеніяхъ приходится вновь опредѣлять „черезъ соглашеніе" всѣ прежнія понятія, какъ напримѣръ, дѣйствія надъ числами. Эти опредѣленія дѣлаются такъ, чтобы прежнія понятія входили какъ частный случай въ новыя, т. е. были бы понятіями, подчиненными новымъ; и это дѣлается для того, чтобы новыя понятія не противорѣчили старымъ, иначе введеніе новыхъ понятій было бы не расширеніемъ, а разрушеніемъ прежней системы, что противорѣчило бы общимъ цѣлямъ математики, стремящейся, какъ мы видѣли, организовать наши понятія наиболѣе стройнымъ и наиболѣе простымъ или „экономнымъ“ образомъ. Но такихъ общихъ понятій, включающихъ, какъ частный случай, болѣе частныя, всегда можно подобрать безчисленное множество различныхъ, такъ какъ всякое частное понятіе можетъ быть обобщено безчисленнымъ множествомъ способовъ. Который же изъ нихъ выбираетъ математика, дѣлая какое-нибудь „новое соглашеніе“? Чѣмъ, вообще, руководится математика въ направленіи соглашеній? Объ этомъ всѣ чисто-математическіе трактаты совершенно умалчиваютъ, и по вполнѣ понятной причинѣ, такъ какъ основанія математическаго творчества, изслѣдуемыя гносеологіей, уже не входятъ въ предметъ самой математики. Обобщая, математикъ просто руководствуется своимъ инстинктомъ, и это въ большинствѣ случаевъ для него достаточно.

Въ литературѣ по методологіи математики былъ уже указанъ Пикокомъ и Ганкелемъ [48]), какъ основаніе новыхъ соглашеній въ ариѳметикѣ при расширеніи понятія о числѣ, „принципъ постоянства“ или „принципъ сохраненія свойствъ“, по которому свойства, установленныя для старыхъ чиселъ (законы сложенія и т. д.), прямо переносятся черезъ опредѣленія на новыя числа. Но, кромѣ того, что этотъ принципъ касается лишь небольшой области математическихъ обобщеній, относясь лишь къ ариѳметическимъ обобщеніямъ числа, онъ, какъ показалъ уже Пеано [49]), оказывается еще и невѣрнымъ,—мы скажемъ лучше недостаточнымъ,—такъ какъ, расширяя математическія понятія, мы не можемъ сохранить всѣ безъ исключенія свойства старыхъ и потому должны дѣлать выборъ тѣхъ свойствъ, которыя мы желаемъ „сохранить“ въ новыхъ понятіяхъ, а этотъ то выборъ и можетъ быть сдѣланъ безчисленнымъ количествомъ способовъ. Дѣлая тотъ или другой выборъ сохраняемыхъ свойствъ, мы тѣмъ самымъ относимъ старыя понятія къ той или другой системѣ понятій болѣе общихъ, и, значитъ, „принципъ постоянства" оставляетъ открытымъ какъ разъ тотъ самый вопросъ, которой мы поставили въ началѣ: по какому принципу мы дѣлаемъ выборъ болѣе общихъ понятій при „новыхъ соглашеніяхъ" въ математикѣ?

И вотъ, можно убѣдиться, что въ основаніи этого выбора лежитъ какъ разъ индуктивная способность нашего мышленія. Какъ мы показали въ нашихъ изслѣдованіяхъ по гносеологіи, всякая индукція состоитъ въ вырабатываніи простѣйшихъ, т. е. наиболѣе соотвѣтствующихъ нашей внутренней природѣ, наиболѣе стройныхъ и легкоусвояемыхъ болѣе общихъ сужденій для подчиненія и объединенія болѣе частныхъ. Но однимъ изъ необходимыхъ элементовъ такого процесса именно и является созданіе и выборъ простѣйшихъ общихъ понятій, потому что безъ нихъ невозможны и простѣйшія общія сужденія. Поэтому тотъ естественный инстинктъ, который заставляетъ математиковъ дѣлать соглашенія въ одну опредѣленную сторону, не занимаетъ въ нашей умственной жизни никакого изолированнаго положенія: это просто наша общая способность индукціи, руководимая, какъ и всегда, общимъ принципомъ—какъ мы его условились называть—„наибольшой простоты". И такимъ образомъ, не только какъ методъ изысканія новыхъ математическихъ предложеній при уже готовыхъ понятіяхъ, но и какъ методъ, опредѣляющій самое направленіе въ дальнѣйшемъ созиданіи и развитіи этихъ понятій, индукція является основаніемъ математическаго творчества. Это и есть то первое значеніе индукціи въ математикѣ, которое слѣдовало прежде всего установить.

Чтобы правильно оцѣнить эту роль индукціи, надо, конечно, имѣть въ виду, что по самому своему существу индукція никогда не гарантируетъ насъ безусловно отъ ошибокъ: всякое предварительное обобщеніе можетъ быть опрометчивымъ, неудачнымъ, можетъ заключать въ себѣ скрытыя противорѣчія и, слѣдовательно, можетъ оказаться ошибочнымъ. Всѣ эти недочеты въ области конечной математики окончательно разрѣшаются только логическимъ разсужденіемъ, а въ математикѣ общей—какъ увидимъ далѣе—самымъ полнымъ логическимъ контролемъ надъ индукціей. Но тяжелое и громоздкое орудіе логики является всегда лишь post factum, когда понятія и теоріи уже намѣчены. Индуктивная работа математическаго обобщенія является какъ бы предварительной рекогносцировкой, въ которой нашъ духъ какъ бы стремится раскрыть передъ собой тѣ общія формы, на которыя онъ способенъ, еще не заботясь объ опасности возможныхъ противорѣчій въ частностяхъ и желая обнять лишь возможно полнѣе цѣлое. Логическое же изслѣдованіе двигается сзади, не поспѣваетъ за индукціей, но зато уже окончательно закрѣпляетъ за нами ту маленькую область, куда оно проникаетъ. Поэтому нашу индуктивную способность лучше всего можно было бы сравнить со зрѣніемъ, быстро обнимающимъ огромныя пространства, охватывающимъ сразу взаимное расположеніе многихъ весьма удаленныхъ предметовъ, но легко поддающимся обманамъ; логическое же наше разсужденіе—съ осязаніемъ, дающимъ намъ свѣдѣнія лишь о томъ, что мы держимъ въ рукахъ, но уже свѣдѣнія надежныя. Все, что видитъ глазъ, можно было бы ощупать и руками, подвигаясь шагъ за шагомъ, но это потребовало бы огромнаго времени и огромнаго труда. Такъ, все, что даетъ въ математикѣ индукція—въ конечной области—можно было бы получить и путемъ силлогизмовъ, но тоже лишь съ огромными психическими затратами. И какъ лишь зрѣніе показываетъ намъ, куда направить шаги, чтобы схватить руками желаемый предметъ, такъ и индукція одна указываетъ намъ путь въ области доказательствъ, куда должны направиться наши разсужденія, чтобы получить желаемое предложеніе, а въ области „соглашеній“, куда должны направиться наши опредѣленія, чтобы получить желаемую нами, т. е. наиболѣе стройную, совокупность математическихъ понятій. И, наконецъ, въ области общей математики, обнимающей безконечность, индукція—какъ мы сейчасъ увидимъ — даетъ намъ возможность заглянуть туда, куда мы никогда не могли бы дотянуться руками логическихъ разсужденій.

3. Собственно-математическая индукція.

Конечно, въ простомъ своемъ видѣ индукція при математическихъ выводахъ все же образуетъ лишь чисто-субъективный методъ изысканій, очень слабо гарантирующій безошибочность результатовъ. Если въ естествознаніи мы и должны довольствоваться именно такой индукціей, то лишь за невозможностью имѣть тамъ болѣе надежный методъ. Въ естествознаніи мы имѣемъ дѣло съ внѣшней реальностью, съ объектами, лишь въ весьма слабой степени зависящими отъ нашей воли, и потому это мы должны къ нимъ приноравливаться, а не можемъ по своему желанію приноравливать ихъ къ себѣ. Въ математикѣ же мы находимся въ болѣе счастливомъ положеніи по отношенію къ изучаемымъ ею объектамъ. Объекты математики—это создаваемыя нами самими понятія. Понятно, что мы можемъ ими распорядиться такъ, чтобы ихъ приспособить какъ можно полнѣе къ нашему логическому мышленію, чтобы на долю индукціи оставить при выводахъ лишь строго необходимый минимумъ. Такимъ образомъ и возникаетъ собственно-математическая индукція, которую мы теперь и разсмотримъ подробнѣе [50]).

Мы уже видѣли, что единственный сверхлогическій элементъ, который нельзя устранить изъ законченной математической теоріи, это—допущеніе непротиворѣчивости общихъ понятій математики или аксіомъ, ихъ опредѣляющихъ; и, какъ мы знаемъ, это допущеніе можетъ быть сведено къ одному неуничтожаемому постулату, гласящему, что общія аксіомы математики обезпечиваютъ существованіе безъ противорѣчій безконечнаго ряда частныхъ математическихъ понятій. Мы уже знаемъ, что никакимъ чисто-логическимъ путемъ мы не можемъ оправдать этотъ постулатъ. Теперь намъ остается убѣдиться, что этотъ постулатъ все же можетъ быть нами оправданъ. И вотъ, если мы разсмотримъ тотъ путь, которымъ мы фактически убѣждаемся въ правильности постулата, то мы увидимъ, что этотъ путь во всемъ существенномъ представляетъ собой настоящій индуктивный процессъ, отличающійся отъ остальныхъ индуктивныхъ выводовъ только нѣкоторыми особенностями, благодаря которымъ неустранимый minimum индукціи въ математикѣ можетъ быть выдѣленъ, какъ особый видъ индукціи, подъ названіемъ „индукціи собственно-математической“. Такимъ образомъ вопросъ объ основаніи сверхлогическихъ утвержденій математики будетъ нами приведенъ къ общему гносеологическому вопросу объ основаніи всякой индукціи, и, значитъ, какъ самостоятельная проблема, будетъ уничтоженъ. Намъ остается поэтому лишь обнаружить индуктивный характеръ оправданія высшаго постулата математики, а для этого намъ слѣдуетъ лишь изучить тотъ общій ходъ, какимъ фактически создается математическая теорія. Къ этому изученію мы теперь и приступимъ.

Мы уже знаемъ, что общія понятія и сужденія, которыя мы строимъ въ математикѣ надъ понятіями и сужденіями частными, вырастаютъ въ нашемъ сознаніи сами собой, естественнымъ путемъ, и мы могли уже убѣдиться, что практически такимъ путемъ и является обыкновенная неполная индукція, служащая эвристическимъ методомъ для всякой вновь создающейся теоріи. Установленіе этимъ путемъ общихъ понятій и предложеній и составляетъ первую стадію созданія математической теоріи.

Но разъ мы такъ или иначе создали нѣкоторую конечную группу общихъ понятій математики, мы можемъ привести ихъ въ порядокъ, опредѣливъ логически ихъ соотношенія или связи, и тогда, какъ мы знаемъ, всѣ общія предложенія математики станутъ простыми слѣдствіями изъ нашихъ опредѣленій. Такъ, напримѣръ, если мы опредѣлимъ группу двухъ понятій (a, b) черезъ ихъ взаимныя связи, выражающіяся законами умноженія, дѣленія, сложенія, вычитанія, возведенія въ степень,—напримѣръ, черезъ такія связи: $a+b=b+a$, $ab=ba$, $a\ (a+b)=aa+ab$, $aa=a^2$, $-(-a)=a$ и т. д.,—то мы можемъ строго логически вывести такія формулы, какъ $(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$, $(a+b)^2=a^2+2\ ab+b^2$ и т. п., которыя такимъ образомъ будутъ обращены нами при помощи нашихъ опредѣленій въ сужденія аналитическія. Вотъ это опредѣленіе общихъ понятій черезъ ихъ связи и аналитизація черезъ то всѣхъ общихъ предложеній математики и образуетъ вторую стадію созданія математической теоріи.

Но процессъ созданія теоріи на этой стадіи еще не можетъ быть конченъ. Доказывая, напримѣръ, въ предыдущемъ случаѣ, такія формулы, какъ $(a+b)^2=a^2+$ $+2ab+b^2$, мы должны помнить, что во всѣхъ этихъ формулахъ понятія a и b сами по себѣ остаются еще совершенно неопредѣленными, такъ какъ они опредѣлены лишь черезъ взаимныя связи, и потому безъ особаго доказательства мы еще не можемъ приписывать имъ никакихъ свойствъ, сверхъ свойствъ, выраженныхъ въ связяхъ. Такъ, напримѣръ, мы еще не можемъ утверждать, что вмѣсто a и b, не нарушая справедливости формулъ, можно подставить любое изъ чиселъ натуральнаго ряда. Такъ и вообще: всѣ предложенія, доказанныя для понятій, опредѣленныхъ только ихъ взаимными связями, будутъ логически-оправданными лишь тогда, когда мы въ этихъ понятіяхъ не утверждаемъ ничего сверхъ данныхъ въ опредѣленіяхъ связей, т. е. оставляемъ понятія *сами по себѣ* совершенно неопредѣленными, такъ какъ иначе намъ пришлось бы еще оправдать логически наши утвержденія, на что въ матеріалѣ нашихъ опредѣленій черезъ связи нѣтъ никакихъ данныхъ.

Такимъ образомъ, когда мы опредѣлимъ нѣкоторую группу общихъ понятій черезъ ихъ взаимныя связи, то съ логическсй точки зрѣнія эти понятія сами по себѣ будутъ еще совершенно *пусты*, т. е. не будутъ имѣть еще собственныхъ, имъ однимъ присущихъ признаковъ. Конечно, употребленіе пустыхъ понятій съ логической точки зрѣнія вполнѣ допустимо, такъ какъ логика занимается лишь формальной стороной понятій, заботится лишь о соблюденіи законовъ тождества, противорѣчія и т. д. въ ихъ соотношеніяхъ, а собственное содержаніе понятій—поскольку оно не нарушаетъ эти соотношенія—для нея совершенно безразлично. Зато не безразлично это содержаніе для математики. Правда, наиболѣе частныя понятія математики—понятія объ отдѣльныхъ числахъ—*въ предѣлахъ математики* будутъ понятіями пустыми, такъ какъ здѣсь мы ихъ опредѣляемъ лишь черезъ ихъ взаимныя отношенія. Чтò такое число само по себѣ, какія реальныя отношенія вещей оно способно выразить, этимъ занимается уже не математика, и это обнаруживается лишь въ приложеніяхъ математики къ дѣйствительности, гдѣ пустое понятіе числа заполняется реальнымъ содержаніемъ („пять орѣховъ", „пять минутъ" и т. д.). Но пустота понятій объ отдѣльныхъ числахъ въ предѣлахъ математики зависитъ лишь отъ ихъ крайняго положенія въ математическихъ теоріяхъ, какъ понятій наиболѣе частныхъ, почему эта пустота и не можетъ нарушить связи между остальными понятіями математики. Совсѣмъ другое дѣло—для понятій болѣе общихъ. Всѣ общія понятія математики имѣютъ для насъ зниченіе—если не единственно, то по крайней мѣрѣ главнымъ образомъ—постольку, поскольку они способны выражать понятія болѣе частныя, потому что лишь тогда они даютъ намъ единое стройное зданіе подчиненныхъ другъ другу понятій. Мы будемъ говорить, что лишь въ этомъ случаѣ понятіе обладаетъ математической реальностью. Такимъ образомъ всякое математическое понятіе должно быть математически-реально, и эту реальность оно пріобрѣтаетъ лишь тогда, когда пустой знакъ наполняется содержаніемъ, иначе говоря, когда мы будемъ знать, какія именно понятія подчиняетъ себѣ данное понятіе общее, и когда мы будемъ имѣть право утверждать, что оно ихъ дѣйствительно подчиняетъ. Такъ, напримѣръ, понятія a и b, опредѣленныя лишь черезъ указанныя выше связи, пріобрѣтутъ математическую реальность лишь тогда, когда мы будемъ имѣть право утверждать, что они выражаютъ любое изъ чиселъ всего натуральнаго ряда. И вотъ въ математической реализаціи понятій и состоитъ третья стадія созданія математической теоріи. Такимъ образомъ задача этой стадіи заключается въ томъ, чтобы какимъ-то способомъ оправцать утвержденіе объ отсутствіи противорѣчій во всей вереницѣ частныхъ понятій и сужденій, обнимаемыхъ общими, иначе говоря,—чтобы оправдать какъ разъ верховный постулатъ математики о непротиворѣчивости.

Когда мы имѣемъ дѣло съ конечной группой понятій и сужденій—какъ въ математикѣ конечной,—то реализація математическихъ понятій, т. е. оправданное заполненіе общихъ схемъ частнымъ содержаніемъ, можетъ быть совершено средствами одной логики, и притомъ это заполненіе, благодаря работѣ, совершенной при второй стадіи математической теоріи, совершается безъ всякаго труда. Дѣйствительно, имѣя опредѣленія общихъ понятій черезъ связи, мы можемъ получить опредѣленія частныхъ понятій черезъ связи, просто замѣняя въ выраженіяхъ связей общія понятія частными. Такъ, напримѣръ, въ общемъ опредѣленіи числа непосредственно слѣдующаго за даннымъ числомъ n черезъ связь: $n+1$, замѣняя общее понятіе n какимъ-либо частнымъ, ему подчиненнымъ, напримѣръ, понятіемъ „7", мы можемъ сразу получить опредѣленіе числа, „непосредственно слѣдующаго за числомъ 7", при помощи связи: $7+1$. Такимъ образомъ, въ общихъ опредѣленіяхъ связей мы имѣемъ какъ бы образецъ, слѣдуя которому, мы можемъ быстро и легко получить сколько угодно частныхъ опредѣленій. Но точно такъ же и для выводовъ общихъ предложеній: замѣняя во всѣхъ разсужденіяхъ общія понятія частными,—напримѣръ, буквы числами—мы можемъ быстро и легко провѣрить данный выводъ для каждаго частнаго понятія и сужденія, слѣдуя образцу разсужденій, данному въ общемъ выводѣ. Такимъ образомъ, если мы имѣемъ опредѣленія общихъ понятій и основанные на нихъ выводы общихъ предложеній, то мы можемъ механически, безъ всякой затраты умственныхъ силъ, накопить сколь угодно большой матеріалъ частныхъ случаевъ, согласныхъ съ даннымъ общимъ предложеніемъ, понимаемымъ теперь уже не какъ отношеніе пустыхъ понятій, а какъ математически реальное общее свойство всѣхъ перечисленныхъ частныхъ случаевъ. Такъ какъ при этомъ въ конечной математикѣ все количество частныхъ случаевъ, подчиненныхъ каждому общему предложенію, всегда конечное, то мы можемъ всегда частные случаи исчерпать до конца и такимъ образомъ можемъ доказать каждое общее предложеніе, понимаемое математически-реально, черезъ строго-правильную полную логическую индукцію, которая, какъ извѣстно, является однимъ изъ видовъ аналитическаго вывода.

Когда мы имѣемъ дѣло съ безконечнымъ числомъ понятій, какъ въ математикѣ общей, то этотъ логическій методъ обращенія пустыхъ соотношеній въ математически - реальныя непримѣнимъ, такъ какъ число частныхъ случаевъ здѣсь будетъ неисчерпаемо, и, слѣдовательно, индукція здѣсь никогда не можетъ быть полной. Но если мы будемъ поступать точь-въ-точь какъ въ предыдущемъ случаѣ, создавая по образцу общихъ опредѣленій и разсужденій опредѣленія и разсужденія частныя, то мы совершенно механически, безъ всякой затраты умственныхъ силъ, можемъ опять получить сколь угодно большой матеріалъ частныхъ опредѣленій и предложеній, согласныхъ съ опредѣленіями и предложеніями общими, понимаемыми уже математически-реально. И вотъ, этотъ матеріалъ непротиворѣчивыхъ опредѣленій и доказанныхъ предложеній, по общему принципу познанія, можетъ намъ служить основаніемъ для вывода черезъ индукцію неполную къ непротиворѣчивости данныхъ общихъ опредѣленій и къ справедливости общихъ предложенiй, на нихъ основанныхъ, понимаемыхъ математически-реально. А такъ какъ этотъ матерiалъ индукцiи можетъ быть нами сколь угодно расширенъ, то основанiе нашей индукцiи можетъ быть сдѣлано сколь угодно широкимъ, и, слѣдовательно, нашъ индуктивный выводъ можетъ быть сдѣланъ сколь угодно надежнымъ. Въ этой-то реализацiи пустыхъ математическихъ понятiй и предложенiй черезъ сколь угодно обширный механически совершаемый индуктивный процессъ и заключается собственно-математическая индукцiя.

Практически эта индукцiя совершается въ нашемъ сознанiи настолько легко, что мы ея обыкновенно совершенно не замѣчаемъ при математическихъ выводахъ, такъ какъ наше вниманiе поглощено тогда болѣе трудными сторонами предмета. Поэтому то, между прочимъ, третья стадiя созданiя математической теорiи и не получаетъ никакого осязаемаго выраженiя въ математическихъ трактатахъ, кромѣ развѣ обращенiя къ частнымъ примѣрамъ для поясненiя общихъ положенiй.

Но если мы внимательнѣй вглядимся въ сознаванiе каждаго общаго математическаго понятiя и предложенiя, то мы можемъ убѣдиться, что при этомъ мы всегда смутно сознаемъ какъ бы мельканiе ряда соотвѣтствующихъ частныхъ случаевъ или примѣровъ, единственно благодаря которымъ общiя понятiя изъ пустыхъ символовъ прiобрѣтаютъ для насъ математическую реальность. Вотъ это-то мельканiе частныхъ случаевъ,—которое отчасти замѣтилъ уже Кантъ въ своемъ ученiи о „схематизмѣ понятiй",—и является представителемъ быстро совершаемаго нами индуктивнаго процесса.

Однако очень часто даже и этотъ процессъ протекаетъ почти цѣликомъ внѣ нашего сознанiя, какъ, впрочемъ, и при большинствѣ остальныхъ индуктивныхъ выводовъ. Къ этимъ выводамъ мы, вообще, такъ привыкли въ нашей повседневной дѣятельности, что весь процессъ индукціи обыкновенно протекаетъ подъ сознаніемъ, а на его поверхности замѣняется въ насъ простой непосредственной увѣренностью въ правильности результата. Когда мы говоримъ, что завтра наступитъ день, что брошенный камень упадетъ и т. д., мы обыкновенно не думаемъ о предыдущемъ аналогичномъ нашемъ опытѣ, служащемъ основаніемъ для данныхъ нашихъ индуктивныхъ заключеній, а просто ощущаемъ нѣкоторую непосредственную увѣренность въ правильности нашихъ утвержденій и этой увѣренностью довольствуемся. Только возбужденіе сомнѣнія въ правильности того или другого нашего вывода заставляетъ вглядѣться въ его природу и открыть его настоящее индуктивное основаніе. Но если мы такъ довѣряемъ нашимъ заключеніямъ о процессахъ внѣшней природы, которая отъ насъ не зависитъ, и такъ мало затрудняемся выводами этихъ заключеній, то насколько же должны быть увѣреннѣе и насколько легче должны совершаться нами выводы о дѣятельности нашего собственнаго духа, дѣятельности, которая зависитъ отъ насъ всецѣло! Поэтому неудивительно, что нужно гораздо болѣе тонкое вниманіе и гораздо большее напряженіе сомнѣнія для того, чтобы сознательно замѣтить тотъ индуктивный процессъ, который лежитъ въ основѣ математическихъ выводовъ.

4. Методъ „полной“ математической индукціи.

Впрочемъ, есть возможность привести математическія разсужденія къ такой формѣ, при которой индуктивный ихъ элементъ обнаруживается съ полной наглядностью. Мы знаемъ, что всѣ математическія тео ріи можно изложить такъ, что единственнымъ логически-неоправданнымъ постулатомъ, остающимся на долю индукціи, будетъ лишь постулатъ о непротиворѣчивости математическихъ аксіомъ или опредѣленныхъ черезъ эти аксіомы понятій. Но можно представить дѣло и иначе: можно доказать постулатъ о непротиворѣчивости аксіомъ, и такимъ образомъ можно его уничтожить, но при этомъ необходимо будетъ оставить недоказаннымъ (и вообще логически-неоправданнымъ) нѣкоторый другой общій постулатъ, который раньше служилъ опредѣленіемъ математическихъ понятій и, слѣдовательно,—при допущеніи ихъ непротиворѣчивости — какъ постулатъ раньше не существовалъ. Такимъ общимъ постулатомъ, могущимъ замѣнить постулатъ непротиворѣчивости, и является принципъ такъ называемой „полной" математической индукціи.

Здѣсь же надо, кстати, замѣтить, что названіе „полной" въ примѣненіи къ этой индукціи неправильно, такъ какъ въ логикѣ полной индукціей называется умозаключеніе отъ видовыхъ понятій къ родовому, если видовыя понятія полностью перечислены въ посылкахъ. Въ математикѣ же какъ разъ мы и не можемъ этого сдѣлать, такъ какъ число частныхъ понятій и сужденій, служащихъ матеріаломъ индукціи, въ математикѣ безпредѣльно. Поэтому такъ называемая въ математикѣ „полная" индукція на самомъ дѣлѣ будетъ всегда индукціей неполной, и ей гораздо болѣе подходитъ французское названіе—démonstration par récurrence, характеризующее ея поступательный ходъ отъ случая къ случаю [51]). Въ дальнѣйшемъ мы будемъ чаще всего называть этотъ методъ разсужденія просто „индукціей математической".

Надо еще замѣтить, что нѣкоторые изслѣдователи—

напримѣръ, Фреге, Дедекиндъ, Веберъ, — отрицаютъ самостоятельность принципа математической индукціи и стремятся его доказать на основаніи однихъ законовъ логики. Однако, можно a priori утверждать, что всѣ такія доказательства должны быть ошибочными, такъ какъ логика не можетъ провѣрить безконечнаго ряда опредѣленій, необходимыхъ для созданія натуральнаго ряда чиселъ, о которомъ высказывается нашъ принципъ. Чаще всего, очевидно, должны встрѣчаться при этихъ попыткахъ скрытыя petitiones principii, такъ какъ эту ошибку обыкновенно всего труднѣе замѣтить.

Эту ошибку мы, напримѣръ, и встрѣчаемъ по крайней мѣрѣ дважды у А. Фосса [52]) въ слѣдующемъ разсужденіи, воспроизводящемъ общій типъ „доказательствъ“ принципа математической индукціи:

„Принципъ полной индукціи... можетъ быть приведенъ къ принципу противорѣчія.

Въ формулировкѣ Г. Вебера онъ гласитъ: „Общая теорема, примѣнимая къ каждому элементу вполнѣ распредѣленнаго комплекса M, доказана, если она правильна для перваго элемента комплекса a_0, и если можно доказать, что она правильна для элемента, слѣдующаго за a, коль скоро она правильна для a“.

Предположимъ, что теорема правильна не для всѣхъ элементовъ M; тогда мы образуемъ часть M_1 комплекса M, содержащую всѣ элементы, для которыхъ эта теорема неправильна. Этотъ комплексъ тоже вполнѣ распредѣленъ; онъ имѣетъ свой первый элементъ α (подчеркнуто нами). Этотъ послѣдній не есть a_0, ибо для него теорема правильна; элементу α предшествуетъ, слѣдовательно, въ M элементъ β, а для β теорема правильна, потому что β не содержится въ M_1. Въ такомъ случаѣ теорема, согласно предложенію, правильна и для α. Но это противорѣчитъ допущенію, что M_1 содержитъ элементъ a. Посему комплексъ M_1 вообще не можетъ содержать въ себѣ никакого элемента, что и требовалось доказать".

Легко замѣтить несостоятельность этого доказательства, такъ какъ въ подчеркнутыхъ нами словахъ, очевидно, заключаются два совершенно произвольные постулата. Дѣйствительно:

1) Предполагая, что часть M_1 комплекса M тоже „вполнѣ распредѣлена", мы приписываемъ комплексу M нѣкоторое свойство, которое можно формулировать въ видѣ постулата: „если комплексъ M „вполнѣ распредѣленъ", то и всякая его часть (или, по крайней мѣрѣ, всякая часть, удовлетворяющая поставленнымъ Фоссомъ условіямъ) тоже всегда будетъ „вполнѣ распредѣлена". Конечно, черезъ этотъ постулатъ можно было бы опредѣлить „вполнѣ распредѣленный" комплексъ, но тогда нельзя будетъ доказать, что такое опредѣленіе не ведетъ къ противорѣчіямъ въ случаѣ безконечнаго комплекса, и, слѣдовательно, petitio principii останется налицо.

2) Если даже мы допустимъ безъ доказательства первый постулатъ, т.-е. допустимъ, что полученный по рецепту Фосса комплексъ M_1 „вполнѣ распредѣленъ", то отсюда нельзя еще будетъ заключить, что „онъ имѣетъ свой первый элементъ α", такъ какъ, по опредѣленію Вебера (см. Фоссъ, стр. 77), вполнѣ-распредѣленный комплексъ можетъ иногда имѣть элементъ послѣдній, но не имѣть перваго, если только мы не опредѣлимъ получаемый въ нашемъ частномъ случаѣ „вполнѣ распредѣленный" комплексъ черезъ то свойство, что онъ имѣетъ непремѣнно первый элементъ, но тогда опять въ случаѣ безконечнаго комплекса мы не будемъ въ состояніи доказать непротиворѣчивость нашего опредѣленія и не избѣгнемъ новаго petitionis principii.

Надо при этомъ замѣтить, что утвержденіе, будто комплексъ M_1 „долженъ имѣть свой первый элементъ α", вовсе даже не обладаетъ непосредственной очевидностью. Дѣйствительно, мы можемъ мыслить такой комплексъ, двѣ части котораго безконечно удалены другъ отъ друга, какъ это символически можно представить въ слѣдующемъ рядѣ:

$$a_0,\ a_1,\ a_2\ .\ .\ .\ (\infty)\ .\ .\ .\ \alpha_{-2},\ \alpha_{-1},\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .$$

Если въ этомъ рядѣ, начиная отъ элемента α_0, мы начнемъ возвращаться назадъ послѣдовательно черезъ члены α_0, α_{-1}, α_{-2}, . . . , то утвержденіе, что часть ряда N_1 (состоящая изъ членовъ, примыкающихъ слѣва къ элементу α_0) „имѣетъ первый членъ", было бы равносильно утвержденію, что безконечный рядъ α_0, α_{-1}, α_{-2} . . . имѣетъ членъ послѣдній, что, конечно, далеко не очевидно. Если же, какъ часть M_1, мы будемъ разсматривать совокупность ряда членовъ, примыкающихъ съ обѣихъ сторонъ къ α_0, то мы увидимъ, что часть M_1 комплекса M можетъ не имѣть ни перваго, ни послѣдняго члена, т. е. можетъ не быть вовсе „вполнѣ-распредѣленнымъ" комплексомъ въ смыслѣ Вебера, что опровергаетъ самоочевидность и перваго допущенія Фосса.

Поэтому соображенія, приводимыя Фоссомъ, не только не достигаютъ своей прямой цѣли, но даже не приводятъ вопроса къ какимъ-нибудь, хотя бы и недоказаннымъ, но болѣе простымъ и общимъ положеніямъ, въ чемъ былъ бы извѣстный прогрессъ. Наоборотъ, эти соображенія сводятъ почти очевидную аксіому къ весьма темнымъ постулатамъ. Впрочемъ, этого оборота и слѣдовало ожидать, въ виду неправильности всего избраннаго пути. Такимъ образомъ мы видимъ, что математическая индукція, какъ это, впрочемъ, признаетъ и большинство послѣдователей логической школы (Пеано Рессель), не является слѣдствіемъ законовъ логики, и въ то же время, какъ мы видѣли, она не является индукціей полной.

Какъ извѣстно, чтобы преодолѣть эту неполноту „полной“—т.-е. математической—индукціи и обратить выводы, при которыхъ она примѣняется, въ выводы логическіе,—можно разсматривать принципъ математической индукціи **какъ постулатъ**, которому удовлетворяютъ всѣ математическія понятія, и черезъ этотъ постулатъ можно эти понятія **опредѣлить**. Но тогда именно и останется логически-неоправданнымъ постулатъ о непротиворѣчивости математическихъ понятій, такъ какъ не будетъ извѣстно: не приведетъ ли примѣненіе принципа математической индукціи въ безконечной вереницѣ понятій къ какимъ-либо противорѣчіямъ.

Но можно избрать и другой путь изложенія математическихъ теорій: можно не включать въ опредѣленіе математическихъ понятій принципа математической индукціи и, вообще, вовсе не высказывать его въ видѣ постулата, а просто **разсматривать его какъ практическій методъ** для быстраго и легкаго накопленія сколь угодно большого **числа частныхъ случаевъ, могущихъ служить матеріаломъ для общаго заключенія черезъ общепознавательный методъ неполной индукціи**. Дѣйствительно, при выводахъ черезъ математическую индукцію мы должны доказать, опираясь на взаимныя связи общихъ понятій, общее предложеніе: „если данная формула—или, вообще, данное общее сужденіе—справедливы для какого-либо n, то та же формула или сужденіе справедливы и для числа $n+1$, непосредственно слѣдующаго за числомъ n“. Но это предложеніе и даетъ намъ **образецъ разсужденій**, повторяя который въ точности для частныхъ чиселъ, мы получимъ рядъ частныхъ предложеній: „если формула справедлива для 1, то она справедлива и для 2“ и т. д. И если мы непосредственно докажемъ—опираясь на опредѣленія частныхъ понятій черезъ ихъ связи—частное предложеніе: „формула справедлива для 1“, то мы и имѣемъ возможность построить рядъ силлогизмовъ, черезъ которые выводимъ, что формула —или вообще данное сужденіе—справедливы для 2, 3, 4 и т. д. Такимъ образомъ мы совершенно механически, безъ всякой затраты силъ, доставимъ сколь угодно обширный матеріалъ частныхъ предложеній для сколь угодно надежнаго индуктивнаго заключенія къ предложенію общему: „данная формула или сужденіе справедливы для всякаго n“ [53]).

5. Обобщенный методъ „полной“ математической индукціи.

Исключивъ такимъ способомъ принципъ математической индукціи изъ числа аксіомъ, черезъ которыя мы опредѣляемъ понятія, мы, конечно, еще не уничтожаемъ вопроса о непротиворѣчивости остальныхъ основныхъ аксіомъ между собою, хотя уже значительно разгружаемъ общую проблему о непротиворѣчивости, такъ какъ теперь въ опредѣленіяхъ становится одною аксіомою меньше, и, слѣдовательно, отпадаетъ цѣлая категорія логически-неоправданныхъ связей, вытекающихъ изъ этой аксіомы. Но дѣло въ томъ, что намъ стоитъ лишь немного обобщить принципъ математической индукціи, и тогда онъ дастъ уже полное рѣшеніе проблемы непротиворѣчивости въ томъ же направленіи, въ какомъ этотъ принципъ и въ его узкой формулировкѣ сдвигаетъ эту проблему съ ея мертвой точки.

Доказательство черезъ математическую индукцію, какъ извѣстно, состоитъ изъ слѣдующихъ двухъ этаповъ: 1) мы доказываемъ нѣкоторое предложенiе для $n=1$; 2) мы доказываемъ, что при справедливости этого предложенiя для какого-нибудь конечнаго числа n оно будетъ справедливо и для числа $n+1$. Такъ какъ каждое доказательство какого-нибудь предложенiя можно разсматривать, какъ обнаруженiе непротиворѣчивости между какой-нибудь одной опредѣленной связью понятiй—именно и выражаемой даннымъ предложенiемъ—и остальными связями понятiй, выражаемыми аксiомами и прочими предложенiями, — то доказательство каждаго предложенiя можно разсматривать, какъ частное дѣйствiе въ одной общей операцiи установленiя непротиворѣчивости данной системы понятiй. Поэтому, чтобы обобщить принципъ математической индукцiи, мы должны его отнести не къ доказательству непротиворѣчивости какой-либо одной связи понятiй, а къ общему доказательству непротиворѣчивости данной математической системы. Кромѣ того—чтобы обобщить первый этапъ индуктивнаго доказательства, мы должны въ немъ разсматривать не доказательство предложенiя для $n=1$, что не охватило бы всѣхъ встрѣчающихся въ математикѣ случаевъ, а доказательство предложенiя—или, согласно предыдущему: доказательство непротиворѣчивости связей,—вообще, для одной изъ конечныхъ системъ понятiй, подчиненныхъ даннымъ общимъ понятiямъ, непротиворѣчивость которыхъ мы желаемъ установить. Въ этомъ случаѣ обобщенный первый этапъ индукцiи охватитъ уже всѣ случаи, встрѣчающiеся въ математикѣ, такъ какъ мы знаемъ, что общiя предложенiя и общiя системы понятiй должны всегда обнимать предложенiя и системы частныя и, въ концѣ концовъ, системы, состоящiя изъ конечнаго числа понятiй.

Если теперь внести эти измѣненія, то обобщенный принципъ математической индукціи можетъ быть формулированъ слѣдующимъ образомъ:

„Если данная система общихъ понятій, обнимающихъ безконечное количество понятій частныхъ, непротиворѣчива въ примѣненіи къ какой-либо конечной системѣ понятій, подчиненной данной общей системѣ, и если можно показать, что, при непротиворѣчивости любой такой же конечной системы понятій, можно въ ней безъ противорѣчій увеличить число понятій, не нарушая ея подчиненности общей системѣ,—то данная система общихъ понятій, вообще, свободна отъ противорѣчій для всего безконечнаго множества подчиненныхъ ей понятій“.

Принявъ этотъ принципъ математической индукціи, можно доказать уже въ полномъ объемѣ основной постулатъ математики о непротиворѣчивости математическихъ аксіомъ или понятій. Чтобы убѣдиться въ этомъ, намъ стоитъ только показать, что справедливость обоихъ предположеній, составляющихъ два этапа обобщенной математической индукціи, для всѣхъ математическихъ понятій всегда можетъ быть провѣрена.

Какъ мы видимъ, первый этапъ обобщенной математической индукціи состоитъ въ доказательствѣ предложенія: „общія математическія аксіомы, примѣненныя къ какой-либо конечной области подчиненныхъ имъ понятій, не ведутъ къ противорѣчіямъ“. Мы видѣли раньше (гл. II,3), что общія аксіомы никогда не могутъ быть полностью провѣрены въ какой-нибудь конечной области, такъ какъ мы знаемъ, что въ каждой конечной группѣ подчиненныхъ аксіомамъ понятій отразятся не всѣ свойства общихъ аксіомъ, ибо нѣкоторыя свойства непремѣнно требуютъ неопредѣленнаго возрастанія понятій (см. гл. II,3). Но въ нашемъ предложеніи мы именно только и требуемъ провѣрки непротиворѣчивости тѣхъ свойствъ, которыя отразились въ данной системѣ, а такъ какъ эта система конечная, то мы знаемъ, что такая провѣрка будетъ всегда возможной. Поэтому справедливость предложенія перваго этапа индукціи для всѣхъ математическихъ понятій можетъ быть всегда провѣрена.

Второй этапъ математической индукціи состоитъ въ доказательствѣ предложенія: „если данная совокупность аксіомъ непротиворѣчива для какой-либо конечной системы частныхъ математическихъ понятій, подчиненныхъ общимъ, опредѣленнымъ черезъ данную совокупность аксіомъ, то эта совокупность аксіомъ будетъ непротиворѣчива и для другой такой же системы частныхъ понятій, но содержащей большее ихъ число“.

Разсматривая содержаніе этого предложенія, мы можемъ убѣдиться, что его справедливость можетъ быть тоже провѣрена для всякой системы математическихъ аксіомъ. Но прежде всего надо пояснить, какъ это предложеніе слѣдуетъ понимать. Мы видимъ, что при доказательствѣ этого предложенія по условію принимается слѣдующее допущеніе: данная совокупность аксіомъ непротиворѣчива въ примѣненіи къ любой какой-нибудь конечной системѣ понятій. Допуская эту непротиворѣчивость для любого конечнаго количества понятій, мы здѣсь еще не предрѣшаемъ вопроса: можетъ ли быть это „любое количество“ безконечнымъ, или оно имѣетъ верхнюю границу и даже—существуетъ ли въ этомъ количествѣ хоть одно понятіе. Мы только говоримъ: если данное количество частныхъ понятій существуетъ, то, по условію, мы допускаемъ для него непротиворѣчивость аксіомъ. Но если мы разсматриваемъ нѣкоторую неопредѣленную систему частныхъ понятій, подчиненную данной системѣ общихъ понятій, безъ предрѣшенія вопроса о томъ, сколько именно въ разсматриваемой системѣ можетъ существовать понятій — конечное или безконечное ихъ число или даже ни одного понятія,—мы разсматриваемъ не что иное, какъ данную общую систему понятій, но понимаемую уже не какъ система математически-реальныхъ понятій—такъ какъ мы исключаемъ всѣ вопросы о понятіяхъ подчиненныхъ,—а какъ система понятій пустыхъ. Такимъ образомъ доказательство предложенія второго этапа индукціи сведется къ слѣдующему: мы должны убѣдиться, что при условіи непротиворѣчивости аксіомъ для данной системы общихъ понятій, понимаемыхъ какъ пустыя, мы можемъ къ этимъ пустымъ общимъ понятіямъ присоединить нѣкоторое конечное количество частныхъ понятій, подчиненныхъ тѣмъ же аксіомамъ, и что въ новой такимъ образомъ полученной системѣ понятій не будетъ противорѣчій. Такъ, напримѣръ, въ простѣйшемъ случаѣ индуктивнаго разсужденія—при доказательствѣ формулы отъ N къ $N+1$, мы должны считать N понятіемъ пустымъ и должны убѣдиться, что присоединеніе къ системѣ N чиселъ новаго понятія $N+1$ не противорѣчитъ данной формулѣ.

Это требованіе—требованіе разсматривать при доказательствѣ предложенія второго этапа индукціи всѣ общія понятія какъ пустыя—является лишь разъясненіемъ того, какъ надо понимать принципъ математической индукціи. Далѣе—при установленіи обще-индуктивой природы этого принципа—обнаружится внутренній смыслъ такого требованія. Теперь же мы можемъ констатировать, что при такомъ пониманіи предложенія второго этапа количество всѣхъ подлежащихъ въ немъ разсмотрѣнію понятій всегда будетъ конечное. Дѣйствительно, таковымъ будетъ количество понятій общихъ, опредѣляемыхъ данными аксіомами, такъ какъ мы знаемъ, что общихъ понятій въ математикѣ по необходимости всегда—конечное количество; эти общія понятія въ данномъ случаѣ мы разсматриваемъ, по условію, какъ пустыя, и потому вся разсматриваемая система общихъ пустыхъ понятій будетъ строго конечная. Но къ этимъ общимъ понятіямъ мы должны, по условію, присоединить нѣкоторое конечное же количество понятій частныхъ. А потому вся разсматриваемая система будетъ конечная, и, слѣдовательно, въ ней можно всегда прямой провѣркой установить отсутствіе противорѣчій. Иначе говоря: справедливость предложенія второго этапа индукціи всегда можетъ быть провѣрена для всѣхъ встрѣчающихся въ математикѣ системъ понятій.

Такимъ образомъ оба этапа обобщенной математической индукціи для всѣхъ математическихъ теорій могутъ быть пройдены, и потому мы приходимъ къ общему результату:

Если допустить обобщенный принципъ математической индукціи, то основной постулатъ математики о непротиворѣчивости общихъ ея аксіомъ—или опредѣляемыхъ черезъ эти аксіомы понятій (понимаемыхъ математически реально)—можетъ быть доказанъ [54]).

Это общее положеніе легко иллюстрировать конкретными примѣрами изъ анализа и геометріи. Разсмотримъ, напримѣръ, съ точки зрѣнія нашего принципа систему приведенныхъ выше (гл. II, 3) пяти аксіомъ, черезъ которыя Пеано опредѣляетъ цѣлыя числа. Изъ этихъ аксіомъ пятая состоитъ въ принципѣ математической индукціи, слѣдовательно, согласно излагаемой точкѣ зрѣнія, она не должна быть принимаема во вниманіе при установленіи непротиворѣчивости данной системы. Непротиворѣчивость между собой трехъ изъ остальныхъ аксіомъ—именно аксіомъ I, II и IV—какъ мы уже видѣли, можетъ всегда быть провѣрена на любомъ конечномъ примѣрѣ; и такимъ образомъ остается установить лишь непротиворѣчивость связей, вытекающихъ изъ аксіомы третьей, гласящей, что за каждымъ цѣлымъ числомъ всегда слѣдуетъ новое цѣлое число. Чтобы рѣшить вопросъ, докажемъ для данной системы оба предложенія, составляющія два этапа математической индукціи.

1) Данная система аксіомъ непротиворѣчива для конечной группы подчиненныхъ понятій, состоящей изъ слѣдующихъ чиселъ: „0, 1, 2", такъ какъ за числами 0 и 1 мы можемъ мыслить безъ противорѣчія съ остальными соотвѣтственно числа за ними „непосредственно-слѣдующія", т. е. 1 и 2, а для числа 2 мы не обязаны провѣрять аксіомы, такъ какъ, согласно принципу математической индукціи, мы должны провѣрять лишь тѣ свойства аксіомъ, которыя отражаются въ конечной системѣ, свойство же аксіомы III не можетъ, какъ мы видѣли, вполнѣ отразиться въ конечной группѣ чиселъ, именно потому, что у такой группы всегда есть число послѣднее. Поэтому для этого послѣдняго числа мы и не должны провѣрять аксіомы III-ьей.

2) Предположимъ, что данная система аксіомъ примѣнима безъ противорѣчій къ какой-нибудь системѣ N чиселъ. Понимая N, согласно требованію нашего принципа, какъ понятіе пустое, мы можемъ опредѣлить понятіе N + 1 какъ цѣлое число, такъ какъ, мысля въ то же время три остальныя аксіомы: „ноль есть цѣлое число" (I), „ноль не слѣдуетъ ни за какимъ цѣлымъ числомъ" (II), и „два цѣлыя равны, если

слѣдующія за ними равны“ (IV), — мы не встрѣчаемъ въ этой системѣ противорѣчій. Слѣдуетъ только—въ виду появленія новаго числа $N+1$ — провѣрить новое соотношеніе, вытекающее изъ аксіомы IV-ой, т.-е. провѣрить, что при $N+1=N+1$ мы должны имѣть и равенство предыдущихъ чиселъ, т. е. равенство $N=N$. Но такъ какъ это слѣдуетъ по закону тождества, то четвертая аксіома оказывается вполнѣ оправданной въ новой системѣ, и, значитъ, эта система свободна отъ противорѣчій.

Такъ какъ такимъ образомъ оба предложенія, входящія въ математическую индукцію, для системы аксіомъ Пеано доказаны, то на основаніи нашего принципа мы и можемъ высказать предложеніе: „система аксіомъ Пеано непротиворѣчива для всего безконечнаго множества цѣлыхъ чиселъ“.

Точно также непротиворѣчивость основныхъ аксіомъ можетъ быть доказана и для геометріи, и это доказательство могло бы намъ служить вторымъ примѣромъ примѣненія общаго принципа индукціи. Но, чтобы не останавливаться слишкомъ подробно на этомъ предметѣ, мы лишь приведемъ текстуально заключеніе, къ которому пришелъ Пуанкарэ, анализируя извѣстныя работы Гильберта въ этомъ направленіи:

„Какова, въ концѣ-концовъ,—говоритъ Пуанкарэ—основная теорема Геометріи? Это,— что аксіомы Геометріи не заключаютъ противорѣчій, а доказать это нельзя безъ принципа индукціи.

Какъ доказываетъ Гильбертъ этотъ существенный пунктъ? Лишь опираясь на Анализъ, а черезъ него—на Ариѳметику, а черезъ нее—на принципъ индукціи.

И если когда-нибудь придумаютъ другое доказательство, все же придется опять опереться на этотъ принципъ, такъ какъ существуетъ безконечное число возможныхъ слѣдствій изъ аксіомъ, непротиворѣчивость которыхъ слѣдуетъ показать [55])".

Пояснивъ этими примѣрами примѣненіе общаго принципа индукціи, вернемся къ истолкованію его настоящаго значенія. Конечно, если бы мы выставили этотъ принципъ просто какъ верховный неуничтожаемый постулатъ, долженствующій замѣнить постулатъ о непротиворѣчивости, то мы нисколько бы не подвинулись впередъ въ области обоснованія математическаго знанія, такъ какъ необходимый и неуничтожаемый постулатъ по прежнему продолжалъ бы стоять во главѣ этого знанія, измѣненіе же содержанія этого постулата принципіально было бы для насъ безразлично.

Но въ томъ-то и дѣло, что мы можемъ разсматривать принципъ математической индукціи не какъ постулатъ, а опять лишь какъ практическій методъ, доставляющій систематически, безъ всякой затраты умственныхъ силъ съ нашей стороны, сколь угодно обширный матеріалъ частныхъ сужденій, могущихъ служить сколь угодно широкимъ основаніемъ для заключенія къ соотвѣтствующему сужденію общему черезъ неполную индукцію. Какъ мы видѣли, второй этапъ разсматриваемаго метода состоитъ въ доказательствѣ общаго предложенія о возможности расширенія какой-либо конечной системы понятій, подчиненныхъ даннымъ аксіомамъ, причемъ мы условились понимать всѣ входящія въ это доказательство общія понятія и ихъ знаки, какъ понятія и знаки пустые, т. е. такіе, въ отношеніи которыхъ мы обязаны соблюдать лишь формальные логическіе законы, не заботясь о томъ, дѣйствительно-ли эти понятія вмѣщаютъ нѣкоторый рядъ—конечный или безконечный—подчиненныхъ понятій частныхъ. Только этой цѣной мы достигли возможности чисто логическаго доказательства предложенія второго этапа. Но если понимать принципъ математической индукціи какъ практическій методъ систематизированія индукціи неполной, то доказанное при сдѣланныхъ условіяхъ предложеніе второго этапа дастъ намъ какъ разъ все, что намъ отъ него надо. Дѣйствительно, доказавъ это предложеніе для пустыхъ понятій, мы получимъ практическій образецъ разсужденій, повторяя которыя въ точности и лишь замѣняя механически общія понятія частными, мы можемъ доказать всѣ частныя предложенія, нужныя для индукціи. Для этого доказательства намъ надо только еще доказать непосредственно первое частное предложеніе—о непротиворѣчивости одной какой-нибудь конечной группы частныхъ понятій, но мы знаемъ, что какъ разъ это доказательство и составляетъ первый этапъ разсматриваемаго метода. Если же предложеніе перваго этапа установлено, т. е. если доказано, что нѣкоторая конечная группа понятій A_1 непротиворѣчива, то, разсуждая по образцу предложенія второго этапа, но замѣняя въ разсужденіяхъ пустыя общія понятія соотвѣтствующими частными понятіями группы A_1, мы устанавливаемъ, что непротиворѣчива нѣкоторая группа A_2, содержащая понятій больше, чѣмъ A_1. Потомъ—все по тому же образцу, данному во второмъ этапѣ,—мы послѣдовательно доказываемъ непротиворѣчивость для все болѣе широкихъ группъ частныхъ понятій — A_3, A_4... и такимъ образомъ доставляемъ механически сколь угодно большой матеріалъ для индуктивнаго заключенія о непротиворѣчивости данныхъ общихъ понятій, опредѣляемыхъ черезъ данныя аксіомы, для всего безконечнаго ряда заключающихся въ нихъ понятій частныхъ. При этомъ, этотъ процессъ механическаго доставленія частныхъ случаевъ для индуктивнаго заключенія протекаетъ въ насъ столь быстро и легко, что онъ, обыкновенно, остается почти цѣликомъ подъ нашимъ сознаніемъ, отражаясь лишь въ полусознаваемомъ мельканіи частныхъ примѣровъ при операціяхъ, совершаемыхъ въ общемъ выводѣ надъ пустыми понятіями.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что методъ математической индукціи какъ разъ удовлетворяетъ требованіямъ практическаго метода систематизированія неполной индукціи, и потому мы и имѣемъ право разсматривать его именно какъ такой методъ. Но какъ разъ при этой точкѣ зрѣнія только и уничтожается тотъ тупикъ, въ который мы попадаемъ на вершинѣ математики,—уничтожается необходимость допущенія необоснованнаго и неуничтожаемаго постулата. Мы видѣли, что можно изложить математическія теоріи такъ, чтобы такимъ необоснованнымъ постулатомъ остался одинъ принципъ математической индукціи. Если же мы уничтожимъ его, какъ постулатъ, то необоснованныхъ постулатовъ въ математикѣ не останется вовсе, а этого мы именно и достигаемъ, разсматривая нашъ принципъ, какъ методъ систематизированія обыкновенной индукціи. Поэтому только такая точка зрѣнія и будетъ единственной законной.

Правда, еще остается вопросъ: почему отъ частныхъ сужденій, служащихъ матеріаломъ индукціи, мы имѣемъ право заключать къ соотвѣтствующему сужденію общему? Иначе говоря—остается еще вопросъ объ основаніи неполной индукціи. Но это—вопросъ уже общегносеологическій. Доведя обоснованіе математической теоріи до этого пункта, мы можемъ считать это обоснованіе законченнымъ, потому что мы уничтожили обособленность математическаго метода, показали тѣ точки, которыми онъ соприкасается съ методами остального познанія, словомъ — ввели вопросъ въ общее познавательное русло. Теперь намъ уже не придется рѣшать изолированной проблемы о методѣ математики, такъ какъ рѣшеніе общей проблемы объ основаніи индукціи сразу дастъ ключъ къ обоснованію всего познанія въ цѣломъ—какъ къ обоснованію естествознанія и естественной философіи, такъ и къ обоснованію математики.

6. Особенности математической индукціи.

Такимъ образомъ мы видимъ, что послѣднимъ основаніемъ математическаго знанія является въ концѣ концовъ та же индукція, которая является основаніемъ познанія вообще. Но при этомъ мы нашли, что единственная законная въ математикѣ индукція, служащая не простымъ эвристическимъ методомъ, но обоснованіемъ результатовъ, должна являться лишь въ особомъ, опредѣленномъ видѣ, и эту-то индукцію мы и называемъ собственно-математической. Чтобы отдать себѣ ясный отчетъ въ особенностяхъ этой индукціи, отличающихъ ее отъ прочихъ видовъ индукціи, намъ полезно будетъ формулировать теперь эти особенности въ сжатомъ видѣ, опираясь на предыдущее изслѣдованіе. При этомъ мы должны придти къ слѣдующимъ заключеніямъ.

1. Мы видѣли, что собственно-математическая индукція можетъ представиться въ д в у х ъ ф о р м а х ъ: или въ видѣ непосредственной реализаціи общихъ математическихъ понятій и предложеній при помощи послѣдовательной подстановки въ нихъ ряда частныхъ понятій—причемъ этотъ процессъ обыкновенно протекаетъ полусознательно и не получаетъ осязаемаго выраженія въ математикѣ,—или въ видѣ метода „пол-

ной", т. е., какъ мы его называемъ, математической индукціи, который фигурируетъ обыкновенно въ математикѣ въ видѣ особаго постулата. Первая форма индукціи легко примѣнима лишь въ простѣйшихъ случаяхъ, а въ прочихъ она еще не даетъ наибольшей экономіи мышленія; вторая же форма индукціи, какъ мы видѣли, примѣнима ко всѣмъ безъ исключенія случаямъ, и такъ какъ она въ сложныхъ случаяхъ дѣлаетъ индукцію наиболѣе систематической и, слѣдовательно, наиболѣе легкой, то именно къ ней и приходится прибѣгать во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда желаютъ придать математической теоріи наиболѣе законченный видъ. Такъ, напримѣръ, изъ непротиворѣчивости такихъ пустыхъ общихъ формулъ алгебры, какъ $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$ и т. д., мы могли бы придти прямо къ заключенію о непротиворѣчивости опредѣленія суммы чиселъ черезъ законы перестановительный и сочетательный при помощи непосредственной реализаціи пустыхъ понятій a, b, c—подстановкою въ нихъ понятій частныхъ 1, 2, 3 и т. д. Но наиболѣе законченный видъ ариѳметическая теорія пріобрѣтетъ тогда, когда непосредственной реализаціей пустыхъ понятій мы убѣдимся лишь въ непротиворѣчивости простѣйшей общей связи понятій: $(a+b)+1=a+(b+1)$, которую обыкновенно, вслѣдъ за Гельмгольцемъ, и называютъ „аксіомой Грассмана", а затѣмъ уже при помощи математической индукціи выведемъ для суммы законъ перестановительный и сочетательный, т. е. убѣдимся въ непротиворѣчивости такихъ формулъ, какъ $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$, гдѣ a, b, c понимаются уже математически-реально.

2. Мы видѣли, что при непосредственной реализаціи общихъ предложеній вся работа индукціи состоитъ лишь въ заполненіи уже готовыхъ пустыхъ понятій

математически-реальнымъ содержанiемъ. Но точно также и при доказательствахъ черезъ принципъ математической индукцiи во второмъ его этапѣ мы непремѣнно должны пользоваться уже готовыми пустыми понятiями. Поэтому именно созданiе пустыхъ понятiй черезъ опредѣленiе ихъ логическихъ связей и позволяетъ намъ въ математикѣ систематизировать индукцiю, такъ какъ логическiя операцiи, т. е. опредѣленiя и выводы, совершаемые надъ пустыми понятiями, могутъ служить намъ практическимъ образцомъ для ряда аналогичныхъ операцiй надъ понятiями частными, доставляющими намъ матерiалъ для общаго индуктивнаго заключенiя. Этой то возможностью систематизированiя индукцiи, благодаря которой частные случаи получаются нами совершенно механически, математическая индукцiя и отличается отъ всякой другой индукцiи,—какъ отъ простой эвристической индукцiи математики, такъ и отъ индукцiи естественно-научной, и, можно сказать, настолько же превосходитъ эти послѣднiя по быстротѣ и легкости достиженiя результатовъ, насколько фабричное производство превосходитъ ручной кустарный промыселъ, такъ какъ математическая индукцiя какъ бы штампуетъ частныя операцiи по образцу, даваемому пустыми формами понятiй и разсужденiй.

3. Эта легкость полученiя матерiала индукцiи въ индукцiи математической усиливается еще тѣмъ, что въ математикѣ факты создаются нами самими, между тѣмъ какъ въ естествознанiи они получаются изъ независимой отъ насъ реальности, почему необходимый для индукцiи подборъ фактовъ можетъ тамъ совершаться нами лишь медленно и съ большимъ трудомъ. Наоборотъ, въ математикѣ, гдѣ роль фактовъ играютъ наши внутреннiе логическiе акты—опредѣленiя, выводы и т. д.,—которые зависятъ отъ нашей

воли,--мы однимъ простымъ желаніемъ, посредствомъ незначительнаго напряженія воли—получаемъ цѣлыя серіи необходимыхъ для индукціи фактовъ и получаемъ ихъ сколько намъ угодно, когда мы систематизировали индукцію при помощи образцовъ разсужденій. Поэтому-то, зная изъ предыдущаго опыта эту послушность нашего сознанія нашей воли, мы обыкновенно настолько довѣряемъ нашей способности создавать математическіе факты, что практически мы и не предпринимаемъ—по крайней мѣрѣ сознательно—сколько-нибудь обширныхъ опытовъ въ этомъ направленіи: эти опыты кажутся намъ безполезными вслѣдствіи нашей непосредственной увѣренности въ характерѣ ихъ результатовъ. Но такая увѣренность возникаетъ именно черезъ индуктивное заключеніе изъ предыдущаго опыта и значитъ она не произвольна, а обоснована; а потому въ отдѣльныхъ случаяхъ она и можетъ насъ законно освободить отъ фактическаго накопленія частнаго матеріала индукціи, разъ всѣ препятствія для такого накопленія устранены, т. е. разъ теорія доведена до одной индукціи математической. Во всякомъ случаѣ, когда теорія доведена до этой стадіи, мы при малѣйшемъ сомнѣніи можемъ всегда это сомнѣніе уничтожить подавляющимъ количествомъ фактовъ безъ всякаго почти усилія, чѣмъ существенно и отличается математическая индукція отъ всякой другой, гдѣ число нужныхъ фактовъ не можетъ быть нами увеличено иначе какъ съ значительнымъ трудомъ.

4. Благодаря этой возможности безпрепятственнаго доставленія для индуктивнаго заключенія произвольнаго числа фактовъ, математическая индукція во всякой конечной области можетъ быть всегда доведена до конца, т. е. можетъ быть обращена въ индукцію полную. Поэтому математи-

ческая индукція позволяетъ простѣйшимъ образомъ, т. е. съ наименьшей затратой силъ, сдѣлать любой конечный отдѣлъ математики строго-аналитическимъ— т. е. основнанымъ на однѣхъ логическихъ операціяхъ;— и, значитъ, математическая индукція является прежде всего практическимъ методомъ аналитизаціи конечной математики.

5. Такъ какъ въ нашей дѣятельности мы можемъ имѣть дѣло всегда лишь съ конечнымъ числомъ математическихъ понятій—конечнымъ числомъ цѣлыхъ чиселъ, дѣйствій надъ ними и т. д.,—то всѣ математическія истины, съ которыми мы будемъ въ жизни практически-соприкасаться, всегда могутъ быть сдѣланы аналитическими благодаря доведенію математической индукціи до конца. Поэтому математическая индукція, въ противуположность естественно-научной и эвристической, отличается той особенностью, что она въ нашей жизни фактически не можетъ привести насъ къ противорѣчію. Вотъ это-то сознаніе практической невозможности встрѣтитъ противорѣчія въ жизненныхъ приложеніяхъ законченныхъ математическихъ теорій и создаетъ иллюзію ихъ совершенной логической обоснованности. Эта иллюзія усиливается благодаря тому, что мы особенно чувствительны къ близкимъ, практическимъ вопросамъ, и, сознавая невозможность противорѣчій для математики въ конечной области, съ которой мы практически лишь и можемъ имѣть дѣло, мы обыкновенно бываемъ совершенно успокоены и удовлетворены.

6. Логическая необоснованность математики касается лишь области идеальной, куда мы никогда не проникаемъ въ реальной своей дѣятельности, но куда можемъ проникнуть разумомъ, — касается лишь области безконечности—все равно актуально или

потенціально понимаемой [56]).—Въ этой области законченная математическая теорія не гарантируетъ отъ противорѣчій, и здѣсь-то лишь и начинается истинная роль математической индукціи. Здѣсь математическая индукція является не методомъ аналитизаціи предложеній, какъ въ конечной области, такъ какъ здѣсь эта индукція никогда не можетъ быть обращена нами въ индукцію полную, — но методомъ вѣроятнаго обоснованія предложеній—или, по крайней мѣрѣ, верховнаго предложенія математики о непротиворѣчивости общихъ ея аксіомъ—черезъ индукцію неполную.

7. Такъ какъ математическая индукція черпаетъ свой матеріалъ изъ внутренняго опыта систематически, организованнымъ методомъ, то число фактовъ, служащихъ въ ней основаніемъ общихъ выводовъ, будетъ настолько большимъ числа фактовъ, служащихъ основаніемъ всѣхъ другихъ индуктивныхъ выводовъ,— что первое число мы должны считать практически числомъ высшаго порядка по сравненію со вторымъ, т. е. такимъ по сравненію съ которымъ вторымъ числомъ можно практически почти пренебречь при всѣхъ выводахъ. Поэтому и гносеологическая вѣроятность заключеній черезъ математическую индукцію будетъ порядка высшаго по сравненію съ такой же вѣроятностью заключеній черезъ всякую другую индукцію.

8. Впрочемъ, чтобы установить окончательно преимущество добытыхъ при помощи математической индукціи результатовъ надъ остальными индуктивными заключеніями, необходимо еще пояснить, какимъ образомъ мы должны правильно вести между ними сравненіе. Надо имѣть въ виду, что какъ бы ни было подавляюще велико число фактовъ, на которые можетъ опираться математическая индукція, все же это число будетъ безконечно-малымъ по сравненію съ

тѣмъ числомъ фактовъ, которые мы желаемъ при помощи индукціи установить, такъ какъ устанавливая черезъ индукцію общее предложеніе, мы тѣмъ самымъ устанавливаемъ и безконечное количество слѣдствій или—математическихъ фактовъ, изъ него вытекающихъ. Поэтому если бы мы сравнили результаты такой индукціи съ чисто естественно-научными данными для конечной, непосредственно-окружающей насъ дѣйствительности, то заключеніе о степени надежности результатовъ было бы не въ пользу общихъ результатовъ математики. Но къ этому заключенію мы приходимъ лишь отъ того, что ведемъ сравненіе неправильно.

Мы знаемъ, что всякое чисто-естественно-научное сужденіе касается лишь конечнаго числа фактовъ, напримѣръ — событій, простирающихся хотя бы до эпохи и весьма удаленной отъ насъ въ прошедшемъ или будущемъ, но непремѣнно на конечный промежутокъ времени удаленной, и происходящихъ хотя бы въ очень большой или маленькой части пространства, но непремѣнно въ конечной его части. И вотъ, если сравнить результаты естественно-научнаго и математическаго познанія въ той же конечной области, то мы увидимъ, что математическая индукція, обращающаяся здѣсь въ полную, даетъ достовѣрные результаты, естественно-научная же индукція—лишь вѣроятные, и, слѣдовательно, здѣсь математическая индукція безконечно превосходитъ естественно-научную по надежности.

Мы знаемъ, что когда мы стремимся высказаться на основаніи нашего опыта о безконечной вереницѣ явленій, мы уже выходимъ изъ области естествознанія и переходимъ въ область естественной философіи, которую мы можемъ построить въ видѣ предѣльныхъ выводовъ изъ естествознанія. Гносеологическая вѣроятность этихъ выводовъ (или же—степень ихъ точности), какъ мы видѣли, будетъ низшаго порядка по сравненію съ вѣроятностью выводовъ естествознанія, но все же будетъ имѣть для насъ какъ разъ то значеніе, которое намъ надо. И вотъ если мы опять сравнимъ результаты математической и обыкновенной индукціи въ той же области, т. е. теперь въ области безконечности, то мы увидимъ, что гносеологическая вѣроятность выводовъ черезъ математическую индукцію будетъ опять высшаго порядка по сравненію съ такой же вѣроятностью выводовъ черезъ индукцію обыкновенную. Дѣйствительно, какъ бы ни было велико число фактовъ, на которые могутъ опираться естественно-философскіе индуктивные выводы, все же число фактовъ, т. е. частныхъ сужденій, на которые могутъ опираться выводы математически-индуктивные,—будетъ, какъ мы знаемъ, подавляющее бо́льшимъ, а пропорціонально этому будетъ подавляюще бо́льшей и гносеологическая вѣроятность выводовъ черезъ индукцію математическую.

Слѣдовательно, если правильно вести сравненіе, то мы должны придти къ общему заключенію, что математическая индукція является индукціей высшаго порядка по сравненію со всѣми остальными видами индукціи.

Глава IV.

Заключенiе.

1. Объ идеалѣ математическаго знанiя.

Теперь, когда мы знаемъ общiй характеръ математическаго метода, мы можемъ рѣшить вопросъ: къ чему же должна стремиться математическая теорiя, чтобы мы могли считать ея обоснованiе совершенно законченнымъ? Мы знаемъ, что идеалъ обращенiя ея въ родъ логическихъ слѣдствiй изъ логически-оправданныхъ опредѣленiй—неосуществимъ. Въ то же время недопустимо оставить теорiю на степени индукцiи въ простомъ ея видѣ, такъ какъ мы можемъ сдѣлать теорiю болѣе точной. Чтобы довести математическую теорiю до возможной строгости, мы должны довести ея аналитичность до возможно высокой степени, оставивъ въ теорiи какъ можно меньше логически недоказаннаго. Какъ мы знаемъ, сверхлогическiе элементы неустранимы въ математикѣ лишь въ отношенiяхъ между болѣе общими и болѣе частными, имъ подчиненными, понятiями, когда этихъ послѣднихъ безконечно много. Поэтому основныя требованiя математической строгости состоятъ въ томъ, 1) чтобы всякая конечная область математики была сдѣлана строго-аналитической или, по крайней мѣрѣ, могла быть сдѣлана таковой при первомъ требованіи безъ всякихъ затрудненій, и 2) чтобы во всякой безконечной области математики неустранимые сверхлогическіе элементы были сведены къ одному неуничтожаемому логически постулату о непротиворѣчивости понятій, а справедливость этого послѣдняго была бы установлена при помощи индукціи наивысшаго намъ доступнаго порядка. Какъ мы уже знаемъ, обоимъ этимъ требованіямъ—и для конечной и для безконечной области—какъ разъ удовлетворяетъ индукція математическая, а потому въ идеально-обоснованной математической теоріи единственнымъ сверхлогическимъ элементомъ должна быть оставлена лишь она.

Какъ извѣстно, математическая индукція становится возможной лишь тогда, когда надъ рядомъ частныхъ понятій, опредѣленныхъ черезъ взаимныя связи, мы создадимъ рядъ понятій болѣе общихъ, которыя сначала играютъ роль лишь пустыхъ схемъ, а потомъ, благодаря индуктивному процессу, пріобрѣтаютъ математическую реальность. До сихъ поръ для упрощенія разсужденій мы обыкновенно разсматривали лишь двѣ ступени понятій разной общности, изъ которыхъ одни непосредственно подчиняли себѣ другія. Но наше стремленіе къ обобщенію не ограничивается этими двумя ступенями понятій, такъ какъ надъ ступенью общихъ понятій мы можемъ создать слѣдующую ступень еще болѣе общихъ понятій, непосредственно подчиняющихъ понятія предыдущей ступени. Это созданіе высшей ступени, подобно созданію самой математики, удовлетворяетъ одновременно двоякой цѣли. Во-первыхъ, расширяя математическое знаніе созданіемъ болѣе общихъ понятій, мы удовлетворяемъ нашему непосредственному стремленію—познать наиболѣе общее содержаніе нашего духа, обладающее для насъ внутренней цѣнностью въ силу его стройности и красоты. Во-вторыхъ, мы этимъ созданіемъ приводимъ теорію къ тому виду, который мы выставили какъ идеалъ математической точности.

Дѣйствительно, тѣхъ болѣе общихъ понятій, которыя подчиняютъ себѣ первую ступень частныхъ понятій, можно создать, въ свою очередь, неопредѣленно много, такъ какъ мыслимому творчеству нашего духа во всѣ стороны нѣтъ предѣловъ. Поэтому, чтобы установить логическія связи этихъ болѣе общихъ понятій, развитыхъ во всей полнотѣ, потребуется опять прибѣгнуть къ математической индукціи, а для этого, какъ мы знаемъ, надъ данной системой понятій необходимо создать систему понятій еще болѣе общихъ. Такимъ образомъ, мы и приходимъ къ построенію системы понятій третьей ступени общности, которая, какъ мы видимъ, играетъ прежде всего утилитарную роль по отношенію къ системѣ, ей непосредственно подчиненной. Такъ, напримѣръ, надъ понятіями цѣлыхъ чиселъ—положительныхъ и отрицательныхъ—можно создать болѣе общее понятіе чиселъ дробныхъ, и разсматривать цѣлыя числа какъ частные случаи дробныхъ, т. е. какъ дроби, имѣющія знаменателемъ единицу; тогда цѣлыя числа будутъ понятіями, подчиненными общему понятію дробнаго числа. Чтобы привести къ строго-математическому виду теорію дробныхъ чиселъ, надо надъ понятіями дробныхъ чиселъ создать систему аксіомъ или общихъ, опредѣленныхъ черезъ эти аксіомы, понятій (причемъ придется прибѣгнуть къ индукціи при установленіи непротиворѣчивости этихъ аксіомъ), и вотъ эта то система общихъ понятій и будетъ по отношенію къ цѣлымъ числамъ системой третьяго этажа общности.

Но по тѣмъ же причинамъ, по которымъ намъ пришлось построить третій этажъ понятій, намъ, быть можетъ, придется построить и четвертый, и пятый и т. д. этажи. При этомъ дѣло усложняется тѣмъ, что мы обобщаемъ понятія не въ одну сторону, а въ разныя, такъ какъ за принципъ обобщенія мы можемъ брать различныя свойства понятій частныхъ. Такимъ образомъ система послѣдовательно подчиненныхъ понятій математики будетъ подобна не перевернутому генеологическому дереву, гдѣ частныя понятія по вѣтвямъ сходились бы къ одному верховному обобщенію, изображаемому стволомъ, а скорѣе будетъ похожа на сложную желѣзнодорожную сѣть съ одной центральной узловой станціей — понятіемъ о натуральномъ рядѣ чиселъ,—отъ которой по разнымъ направленіямъ, поднимаясь, опускаясь и пересѣкаясь, шли бы различные пути обобщенія. Этой сложной структурой математики, между прочимъ, и объясняется тотъ фактъ, что такъ часто совершенно различныя теоріи встрѣчаются въ одномъ и томъ же вопросѣ и неожиданно оказываютъ другъ другу существенную помощь.

На всѣхъ этихъ путяхъ математическаго знанія методъ его остается однимъ и тѣмъ же, такъ какъ, ввиду существеннаго сходства всѣхъ математическихъ операцій, мы въ нихъ всегда можемъ оставить единственнымъ сверхлогическимъ эламентомъ одну математическую индукцію. Впрочемъ, если бы мы пожелали безгранично расширять математическое знаніе, строя другъ надъ другомъ до безконечности все новые этажи понятій большей общности, то мы не могли бы остаться въ предѣлахъ одной математической индукціи, такъ какъ эта индукція должна исходить изъ логически-завершенной системы пустыхъ наиболѣе общихъ понятій, которой мы въ нашемъ случаѣ, въ виду незавершенности восходящей лѣстницы понятій, какъ разъ бы и не имѣли. Но, во-первыхъ, мы не можемъ знать навѣрное, возможно ли такое безконечное восхожденіе въ общности понятій. Во-вторыхъ, мы не можемъ его на самомъ дѣлѣ совершить въ нашей жизни, такъ какъ мы можемъ въ ней совершить лишь конечное количество раздѣльно сознаваемыхъ актовъ. Это безконечное восхожденіе, конечно, можетъ быть сдѣлано предметомъ философскаго изслѣдованія, причемъ мы по необходимости должны будемъ пользоваться обыкновенной индукціей при совершеніи нашихъ обобщеній, но при этомъ мы уже выйдемъ изъ предѣловъ математики, и потому въ математической организованной теоріи мы должны будемъ разсматривать лишь конечное число ступеней понятій разной общности.

Если при этомъ въ верхнемъ этажѣ понятій, т. е. въ группѣ понятій наибольшей общности, будетъ заключаться безконечное количество понятій, то мы опять не будемъ въ состояніи ограничиться въ математикѣ одной математической индукціей, такъ какъ въ верховной группѣ математическихъ понятій мы не будемъ имѣть возможности дать логически-правомѣрныя опредѣленія понятій черезъ ихъ связи. Но это затрудненіе уже легко обойти: въ верховной группѣ математическихъ понятій мы условимся разсматривать лишь конечное число понятій, и потому надъ послѣдней безконечной группой понятій надстроимъ еще одинъ этажъ въ видѣ конечной группы понятій большей общности, подчиняющихъ понятія предыдущей группы. Конечно, можно было бы подумать, что послѣднюю безконечную группу понятій, быть можетъ, нельзя будетъ подчинить конечной группѣ понятій болѣе общихъ. Но такое предположеніе противорѣчитъ общему характеру математическихъ понятій, которыя создаются нами не въ видѣ безпорядочныхъ вереницъ, а въ видѣ вереницъ, упорядоченныхъ подчиненіемъ какимъ-либо общимъ свойствомъ. Отвлекая эти общія свойства отъ индивидуальныхъ особенностей понятій, мы и получаемъ, вообще, группу понятій большей общности. А эту группу мы можемъ всегда по условію ограничить конечнымъ числомъ членовъ, такъ какъ мы можемъ условиться разсматривать въ математикѣ лишь тѣ понятія, которыя подчинены данной группѣ. Такъ, напримѣръ, если мы будемъ разсматривать теорію цѣлыхъ положительныхъ чиселъ совершенно изолированно отъ всей остальной математики, то мы ее непосредственно можемъ подчинить нѣкоторому конечному количеству общихъ понятій, опредѣляемыхъ конечнымъ числомъ аксіомъ,—хотя бы, напримѣръ, пятью аксіомами Пеано.

Такимъ образомъ мы можемъ построить всю математику такъ, чтобы всѣ различные пути обобщенія математическихъ понятій на вершинѣ оканчивались всегда нѣкоторыми конечными группами наиболѣе общихъ понятій, а такія общія понятія мы можемъ всегда логически-правомѣрно опредѣлить черезъ взаимныя связи. Эти понятія, разсматриваемыя сначала какъ пустыя, при помощи одной математической индукціи могутъ быть сдѣланы математически-реальными по отношенію къ понятіямъ, непосредственно имъ подчиненнымъ, эти послѣднія тѣмъ же путемъ могутъ сдѣлаться реальными по отношенію къ своимъ подчиненнымъ понятіямъ, и такъ, спускаясь со ступеньки на ступеньку общности, мы можемъ дойти при помощи одной математической индукціи до наиболѣе частныхъ понятій математики — до цѣлыхъ положительныхъ чиселъ. Такимъ образомъ вся математика можетъ быть обращена въ одно стройное связное цѣлое математически-реальныхъ понятій, созданныхъ при помощи однѣхъ логическихъ операцій и математической индукціи.

Но если теоретически мы можемъ привести математику къ такому предѣлу, то практически мы этого никогда не достигнемъ, да и не должны практически стремиться къ этому. Дѣйствительно, если бы единственнымъ сверхлогическимъ элементомъ теорій оставалось бы установленіе непротиворѣчивости основныхъ аксіомъ, то всѣ остальные выводы математики должны были бы опираться на одни силлогизмы и потому были бы крайне громоздки. Съ этой точки зрѣнія всѣ наши самыя строгія доказательства показались бы недостаточными, и „настоящія" доказательства хотя бы, напримѣръ, самыхъ простыхъ ариѳметическихъ истинъ, потребовали бы цѣлыхъ томовъ изложенія.

Поэтому практически математика никогда не доводитъ своихъ разсужденій до полной логической строгости и оставляетъ всегда большинство звеньевъ вывода логически - недоказанными, а обоснованными лишь простой индукціей. Такія индуктивныя заключенія мы встрѣчаемъ въ математическихъ трактатахъ на каждомъ шагу. Они наиболѣе замѣтны въ тѣхъ случаяхъ, когда въ доказательствахъ мы встрѣчаемъ, напримѣръ, такія выраженія: „по образцу предыдущаго, доказывается и слѣдующее положеніе:..." „легко доказать..." (а доказательство не приводится) и т. д.;— въ тѣхъ, случаяхъ, когда мы обрываемъ перечисленіе понятій и замѣняемъ ихъ рядъ многоточіемъ, какъ, напримѣръ, въ выраженіи многочлена, расположеннаго по степенямъ: $A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$, или когда дальнѣйшее изложеніе замѣняемъ выраженіемъ: „и такъ далѣе". Здѣсь всюду логическое разсужденіе мы замѣняемъ предположеніемъ — или гипотезой, — что оно при желаніи для насъ здѣсь легко осуществимо, а увѣренность въ правильности этого предположенія возникаетъ у насъ индуктивнымъ путемъ, изъ разсмотрѣнія предыдущихъ случаевъ, весьма похожихъ въ существенныхъ чертахъ на данный.

Мы можемъ замѣтить вообще, что при изложеніи математическихъ теорій мы пропускаемъ логическое разсужденіе во всѣхъ наиболѣе легкихъ частяхъ доказательства и останавливаемъ свое вниманіе лишь на элементахъ болѣе трудныхъ, гдѣ наше разсужденіе становится болѣе полнымъ. Такой характеръ математическаго изложенія вполнѣ оправдывается той цѣлью, которую мы этимъ изложеніемъ желаемъ достигнуть: вслѣдствіе практическихъ соображеній мы отказываемся отъ подробныхъ логическихъ выводовъ предложеній, но мы, по крайней мѣрѣ, желаемъ такъ намѣтить путь разсужденій, чтобы всякій такой подробный выводъ при желаніи можно было всегда возстановить простѣйшимъ образомъ. Для этого то всѣ наиболѣе трудные этапы доказательствъ какого-либо предположенія мы и излагаемъ подробно, а легкіе пропускаемъ, благодаря индуктивнымъ заключеніямъ, предполагая ихъ доказанными, такъ какъ при желаніи мы можемъ ихъ всегда возстановить подробно.

Какъ выбирать въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ этотъ путь логическихъ и индуктивныхъ элементовъ при доказательствахъ, это можетъ подсказать лишь особый даръ изложенія, которымъ такъ выдѣляются, напримѣръ, классическіе трактаты французскихъ математиковъ, и благодаря которому изложеніе пріобрѣтаетъ свойства понятности, легкой усвояемости, изящества, и, вообще, всѣ свойства настоящаго художественнаго произведенія. Ибо какъ въ научныхъ, такъ и въ художественныхъ произведеніяхъ высшая цѣль, (не исключающая цѣлей низшихъ, но къ нимъ присоединяющаяся), какъ мы знаемъ, въ концѣ-концовъ, одна: достиженіе наибольшей, доступной въ нашей жизни, красоты [57]); только въ научныхъ произведеніяхъ эта красота болѣе внутренняго, отвлеченно-духовнаго свойства и потому не такъ замѣтна для обыкновеннаго глаза. Но, во всякомъ случаѣ, средства ея передачи въ обоихъ областяхъ оказываются одинаковыми, такъ какъ мы видимъ, что здѣсь и тамъ въ удачномъ изложеніи весь эффектъ достигается наилучшимъ выборомъ элементовъ, дающихъ наиболѣе полное содержаніе въ наиболѣе простой формѣ.

Мы убѣдились, что даже въ совершенно законченной математической теоріи индукція, кромѣ своей высшей формы индукціи математической, имѣетъ еще мѣсто и въ простомъ своемъ видѣ, какъ постоянный вспомогательный пріемъ разсужденія и изложенія, безъ котораго созданіе математической теоріи для насъ было бы практически неосуществимо. Но это тѣмъ въ большей степени относится къ математической теоріи незаконченной, еще создаваемой. Здѣсь элементъ простой индукціи, который въ законченной теоріи играетъ вспомогательную роль сокращенія разсужденій, пріобрѣтаетъ существенную роль, такъ какъ здѣсь еще не всѣ связи понятій сознательно обнаружены. Притомъ, какъ мы видѣли раньше, индукція же здѣсь руководитъ нами въ созданіи новыхъ понятій и въ открытіи новыхъ предложеній.

Но такъ какъ, практически, математическія теоріи никогда нельзя считать вполнѣ законченными, потому что мы можемъ всегда улучшить старыя теоріи какими-нибудь болѣе простыми и широкими опредѣленіями и выводами, то мы должны вообще признать, что даже и простая индукція практически изъ математики неустранима, хотя она здѣсь играетъ и не ту роль, что въ естествознаніи [58]).

2. Объ основаніи всякой индукціи.

Итакъ, математика, какъ и естествознаніе, роковымъ образомъ приговорена къ заключеніямъ отъ частнаго къ общему, отъ даннаго къ неизвѣстному. Такія заключенія въ естествознаніи давно уже были описаны и получили названіе заключеній индуктивныхъ, но въ математикѣ на нихъ еще не обращали достаточно вниманія [59]).

Правда, давно уже было замѣчено, что математика пользуется нѣкоторыми способностями нашего духа, не сводящимися къ логическимъ, и эти способности называли иногда общимъ именемъ способности „математической интуиціи". Терминъ „интуиція", ведущій свое начало изъ древней философіи, вообще говоря, употребляется философами—напримѣръ, Спинозой, Локкомъ, Кантомъ, а въ новое время, напримѣръ, А. Бергсономъ, Н. О. Лосскимъ—въ довольно различныхъ значеніяхъ, но въ примѣненіи къ математикѣ стало наиболѣе распространеннымъ пониманіе интуитивнаго мышленія какъ такого, которое, въ противоположность дискурсивному (или въ противоположность „рефлексіи"), даетъ намъ выводы непосредственно, безъ помощи логическихъ разсужденій, и даже тогда, когда эти разсужденія—какъ въ случаѣ безконечности — были бы совершенно безсильны. Поэтому признаніемъ неустранимости интуитивныхъ выводовъ въ математикѣ многими изслѣдователями, въ сущности, былъ уже давно обнаруженъ сверхлогическій характеръ ея методовъ.

Однако, понятіе о математической интуиціи все же было до сихъ поръ совершенно неопредѣленнымъ, такъ какъ не были указаны ея положительные признаки и—на основаніи этихъ признаковъ—ея мѣсто среди нашихъ познавательныхъ способностей. Теперь же мы видимъ, что математическая интуиція не занимаетъ въ нашемъ духѣ какого-то изолированнаго положенія, что это есть просто одинъ изъ частныхъ видовъ болѣе общей нашей способности—способности индукціи, такъ какъ эта „интуиція" удовлетворяетъ всѣмъ положительнымъ признакамъ послѣдней.

Поэтому, чтобы дать теорію математической „интуиціи", т. е. математической индукціи, и оцѣнить ея познавательное значеніе, мы не должны строить отдѣльное гносеологическое зданіе, такъ какъ изученіе ея структуры и основаній входитъ, какъ частный случай, въ гносеологическое изученіе индукціи въ ея общемъ видѣ. По этой причинѣ мы здѣсь и не будемъ подробно останавливаться на этомъ предметѣ, такъ какъ это значило бы излагать основанія гносеологіи вообще, что не входитъ въ нашу настоящую задачу. Но все же, чтобы закончить наше изслѣдованіе, мы желали бы вкратцѣ коснуться и этого общаго предмета.

Мы знаемъ, что индуктивныя заключенія вообще дѣлаются нами отъ частнаго къ общему. Съ точки зрѣнія логическаго мышленія такія заключенія не могутъ быть оправданы, такъ какъ они не гарантируютъ насъ отъ возможности логическихъ противорѣчій. Въ то же время мы не можемъ постулировать безусловную правильность такихъ заключеній, хотя бы, напримѣръ, самыхъ общихъ, какъ это дѣлалъ Кантъ, называвшій ихъ „синтетическими сужденіями a priori"; не можемъ постулировать потому, что на почвѣ познанія мы не имѣемъ для этого никакого уже основанія. Правда, видя, что большинство нашихъ индуктивныхъ заключеній оправдывается въ дѣйствительности, мы могли бы сдѣлать отсюда индуктивное заключеніе, что наши индуктивные выводы, вообще, въ большинствѣ случаевъ должны быть правильными. Но такое заключеніе какъ разъ само основано на индукціи, и, слѣдовательно, чтобы оно для насъ имѣло силу, мы должны заранѣе признать для себя значимость индукціи, а эту значимость мы и желаемъ какъ разъ еще обосновать. Поэтому, если бы мы постулировали правильность индукціи, то въ области познанія намъ пришлось бы это сдѣлать совершенно безъ основанія, совершенно голословно. Но если бы мы допустили въ основаніе знанія хоть одно совершенно необоснованное сужденіе, то наука ничѣмъ бы не отличалась отъ самой дикой фантазіи, потому что мы бы вѣдь могли по желанію измѣнять основныя необоснованныя положенія, и съ равнымъ правомъ вмѣсто научнаго знанія могли бы проповѣдовать какую угодно нелѣпость. Поэтому мы не можемъ постулировать голословно правильность или достовѣрность основныхъ положеній, на которыхъ зиждится научный методъ, и такимъ образомъ все наше познаніе оказывается недостовѣрнымъ.

Однако, такое положеніе дѣла нисколько не подрываетъ для насъ значимости нашего познанія, основаннаго на индукціи, потому что абсолютная достовѣрность не является необходимымъ признакомъ такой значимости. Тамъ, гдѣ абсолютная, логическая достовѣрность недостижима, тамъ мы имѣемъ еще иные критеріи для оцѣнки нашего знанія, и вотъ эти то критеріи мы и должны приложить къ оцѣнкѣ знанія индуктивнаго.

Мы здѣсь не будемъ останавливаться на вопросѣ объ основаніи самихъ этихъ критеріевъ, замѣтивъ лишь, что вообще послѣднимъ основаніемъ какъ принциповъ достовѣрныхъ т. е. логическихъ выводовъ, такъ и принциповъ всѣхъ остальныхъ выводовъ, является ихъ оцѣнка нашимъ нравственнымъ сознаніемъ, такъ какъ наши познавательные акты являются нашими поступками въ широкомъ смыслѣ и, слѣдовательно, подлежатъ нашему нравственному суду, который для насъ обладаетъ уже абсолютнымъ характеромъ, т. е. черпаетъ свое основанiе въ себѣ, а не въ чемъ-либо постороннемъ. Здѣсь мы и приведемъ лишь окончательный выводъ, къ которому приводитъ такъ понимаемая этическая гносеологiя.

Именно, мы можемъ убѣдиться, что когда у насъ нѣтъ данныхъ для достовѣрнаго сужденiя о какой-нибудь области познанiя, то наиболѣе цѣннымъ поведенiемъ будетъ стремленiе составить себѣ понятiе объ этой области при помощи нѣкоторыхъ предположенiй или гипотезъ, пользующихся всѣми тѣми элементами, которые въ нашемъ сознанiи фактически находятся. Этихъ гипотезъ, вообще говоря, о каждой области познанiя можно составить безконечно-много различныхъ, но одна изъ такихъ составленныхъ нами гипотезъ въ каждомъ случаѣ будетъ для насъ наиболѣе цѣнной, и это будетъ именно та, которая будетъ наиболѣе простымъ (а значитъ, и наиболѣе „экономнымъ“ по отношенiю къ нашему мышленiю) образомъ объединять наличный матерiалъ нашего сознанiя. Можно убѣдиться, что эта наиболѣе простая гипотеза въ то же время будетъ наиболѣе стройной и красивой и, вообще, будетъ наиболѣе соотвѣтствовать внутреннимъ стремленiямъ нашего духа, будетъ наиболѣе полнымъ образомъ насъ удовлетворять. Эти наиболѣе простыя положенiя мы будемъ] называть наиболѣе вѣроятными, придавая понятiю „вѣроятности“ (гносеологической) болѣе широкое значенiе, чѣмъ въ математической „Теорiи Вѣроятностей“, изучающей лишь одинъ изъ частныхъ видовъ гносеологической вѣроятности.

Всякая индукцiя и состоитъ именно въ томъ, что изъ многихъ возможныхъ гипотезъ, т. е. общихъ сужденiй, изъ которыхъ данныя намъ частныя сужденiя могутъ вытекать, какъ слѣдствiя, мы вырабатываемъ и выбираемъ простѣйшія, т. е. вѣроятнѣйшія. Какъ мы видѣли, весь этотъ процессъ опирается исключительно на свойства нашего нравственнаго сознанія, а потому онъ имѣетъ для насъ въ гносеологіи совершенно абсолютное оправданіе.

Почему именно эти наиболѣе свойственныя нашему духу гипотезы оказываются и въ практической дѣятельности наиболѣе удачными, т. е. обезпечивающими намъ наибольшее господство надъ независящей отъ насъ внѣшней природы это проблема, уже не входящая въ область гносеологіи, такъ какъ это одна изъ проблемъ познанія дѣйствительности, хотя, правда, одна изъ самыхъ общихъ проблемъ и ведущая насъ къ самымъ высокимъ обобщеніямъ. Эта проблема, какъ и всякая проблема, представляемая намъ дѣйствительностью, можетъ и должна быть рѣшена, ибо индуктивный путь познанія не знаетъ никакихъ абсолютныхъ границъ. Но изслѣдованіе этой проблемы уже совершенно выходитъ за предѣлы настоящей работы.

3. Тезисы.

Подводя теперь итогъ главнѣйшимъ результатамъ настоящаго изслѣдованія, мы можемъ коротко формулировать наиболѣе важные выводы въ слѣдующихъ положеніяхъ:

1. Математика имѣетъ для насъ одновременно двоякое значеніе: какъ средство для естествознанія и какъ самоцѣнное удовлетвореніе нашего безкорыстнаго стремленія познать наиболѣе общія, простыя и прекрасныя формы нашего духа.

2. Математика, какъ средство естествознанія, уже, чѣмъ математика вообще; а именно, это будетъ конечная математика, въ которой отсутствуютъ понятія о предѣлѣ и безконечности. Общая же математика если и можетъ являться иногда средствомъ, то лишь

для естественной философіи, которую мы не можемъ причислить на равныхъ правахъ къ остальнымъ естественнымъ наукамъ.

3. Конечная математика можетъ быть при желаніи сдѣлана строго-аналитической, т. е. можетъ быть сведена къ однѣмъ логическимъ операціямъ; такимъ же можетъ быть сдѣланъ и каждый частный выводъ математики, пользующійся лишь конечнымъ числомъ понятій.

4. Общія предложенія математики не могутъ быть логически доказаны на основаніи логически оправданныхъ опредѣленій.

5. Для построенія математики логика недостаточна потому, что она не можетъ обнимать безконечное количество понятій, изъ которыхъ каждое должно имѣть свое особое опредѣленіе, между тѣмъ какъ этотъ случай и представляется въ математикѣ. Иначе говоря, недостаточность логики для математики сказывается въ томъ, что логическое оправданіе общихъ понятій, подчиняющихъ себѣ безконечное множество понятій частныхъ, оказывается невозможнымъ, такъ какъ мы не можемъ логически строго установить непротиворѣчивость такихъ понятій.

6. Доказательство математическихъ предложеній становится возможнымъ лишь благодаря индукціи; индукція прежде всего служитъ основаніемъ математическаго творчества и эвристическимъ методомъ, при созданіи новыхъ математическихъ предложеній и понятій.

7. Математическое доказательство не должно останавливаться на степени простой индукціи, такъ какъ въ немъ можно довести индукцію до наиболѣе совершеннаго вида въ индукціи математической. Превосходство математической индукціи зависитъ отъ того: 1) что она черпаетъ свой матеріалъ не изъ внѣшней дѣйстви-

тельности, а изъ самаго нашего сознанія, 2) что она есть индукція систематизированная благодаря созданію образцовъ разсужденій въ видѣ пустыхъ схемъ понятій и выводовъ.

8. Математическая индукція играетъ одновременно двоякую роль: 1) Она является наиболѣе простымъ методомъ аналитизаціи всякаго конечнаго отдѣла математики, почему, между прочимъ, она и не можетъ насъ никогда фактически привести къ противорѣчію, такъ какъ мы въ жизни имѣемъ дѣло всегда лишь съ конечнымъ числомъ понятій и выводовъ. 2) Въ общей математикѣ она является методомъ сколь угодно надежнаго вѣроятнаго обоснованія результатовъ черезъ неполную индукцію.

9. Идеаломъ математическаго изложенія является аналитическое развитіе теорій съ оставленіемъ лишь того неустранимаго минимума индукціи, который представляетъ индукція математическая. Однако, изъ практическихъ соображеній мы должны оставить въ математикѣ на степени простой индукціи всѣ наиболѣе легкія стороны теорій, причемъ болѣе или менѣе удачное распредѣленіе логическихъ и индуктивныхъ элементовъ изложенія зависитъ отъ степени таланта изложенія автора.

10. Такъ называемая „математическая интуиція“ цѣликомъ сводится къ индукціи.

11. Основаніе математической индукціи сводится къ основанію всякой индукціи. Это основаніе нельзя искать въ теоретическомъ знаніи. Оно лежитъ, какъ и основаніе всякой познавательной дѣятельности, въ нашей нравственной оцѣночной способности, которая заставляетъ насъ выбирать наиболѣе простыя изъ возможныхъ гипотезъ, какъ наиболѣе вѣроятныя.

Примѣчанія.

[1]) Такова, впрочемъ, лишь самая общая мысль, которую можно извлечь изъ благожелательнаго разбора ученія Канта. Болѣе конкретные взгляды его на математику въ большинствѣ случаевъ совершенно ошибочны. Такъ, въ противуположность общепризнанному теперь взгляду, онъ считалъ математику наукой не формальной, не изучающей лишь наши субъективныя формы понятій независимо отъ ихъ примѣненія въ естествознаніи, а нѣкоторымъ апріорнымъ матеріальнымъ знаніемъ о самыхъ общихъ законахъ природы, которымъ подчинены явленія и которыя будто бы мы можемъ устанавливать безъ предварительной ихъ опытной провѣрки. Сюда же относятся его утвержденія, будто синтетичны всѣ математическія сужденія, какъ, напримѣръ: $7+5=12$; будто основаніемъ математической достовѣрности служитъ представленіе; будто чистый Анализъ есть ученіе о чистомъ времени (между тѣмъ какъ Анализъ, очевидно, логически предшествуетъ понятію времени, такъ какъ понятія о величинѣ, о числѣ, о функціи и т. д. гораздо шире и относятся одинаково какъ ко времени, такъ, напримѣръ, и къ пространству и вообще къ цѣлому ряду мыслимыхъ объектовъ) и т. д. Исчерпывающій разборъ всѣхъ взглядовъ Канта на математику далъ L. Couturat „La philosophie des matématiques de Kant“ (въ Revue de Métaphysique et de Morale, май, 1904, перепечатано въ „Les princ. d. Math“, того же автора, есть русск. перев. Б. Кореня. 1913). Соглашаясь безусловно съ критикой Кутюра ученій Канта,

такъ какъ она вполнѣ отвѣчаетъ современному положенію вопроса, надо, однако, замѣтить, что положительные взгляды самого Кутюра тоже недостаточны, такъ какъ они не объясняютъ ни основаній математическаго творчества, ни принциповъ, позволяющихъ математикѣ охватывать безконечныя совокупности объектовъ. Въ настоящей статьѣ мы и стремимся восполнить именно эти недостатки.

[2]) Письмо изъ Дрездена отъ 29-го марта 1826 г. Цитировано по Ch. Lucas de Pesloüan „N.—H. Abel, sa vie et son oeuvre".

[3]) Главнѣйшія изъ этихъ работъ: Kronecker „Ueber den Zahlbegriff" (журналъ Crelle'я, t. CI, 1887); H. von-Helmholtz „Zählen und Messen, erkenntnisstheoretiseh betrachtet" (1887); R. Dedekind „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (1872), „Was sind und was sollen die Zahlen?" (1887); Frege „Die Grundlagen der Arithmetik" (1884). На русскомъ языкѣ есть переводъ нѣкоторыхъ работъ въ „Сборникѣ научно-популярныхъ статей Пуанкарэ, Гельмгольца, Кронекера и др. по основаніямъ ариѳметики. Подъ редакціей И. П. Парфентьева" Казань. 1906.

[4]) Главнѣйшія работы: G. Boole „The mathematical analisis of Logic" (1847), „An investigotion of the Lavs of Thought" (1854). E. Schröder „Algebra der Logik (1890—95). Главнѣйшіе результаты изложены въ общедоступномъ видѣ у L. Couturat „L'Algèbre de la logique" (есть русск. перев. изд. „Матезисъ").

[5]) Главнѣйшія работы: Hilbert, „Grundlagen der Geometrie"; B. Russell „The Principles of Mathematics" (1903); Peano, „Formulaire de Mathematiques" (1903).

[6]) Дѣйствительно, всякое обнаруженіе новой аксіомы, независимой отъ прежнихъ, тотчасъ же даетъ возможность расширить математическую теорію, — стоитъ только разсматривать всѣ прежде употребляемыя понятія независимо отъ новой аксіомы, т. е. разсматривать ихъ въ болѣе широкомъ смыслѣ, классическимъ примѣромъ чего можетъ служить разсмотрѣніе геометрическихъ понятій независимо отъ постулата Евклида о параллельныхъ въ системахъ Лобочевскаго и Римана.

[7]) Эта тенденція нашла, напримѣръ, свое полное выраженіе въ работѣ L. Couturat „Les principes des Mathématiques“ (1905), по которой можно ознакомиться со всѣми главнѣйшими идеями разсматриваемаго теченія (есть русск. перев.).

[8]) H. Poincaré „La Science et l' Hypothèse“ (1902), „La Valeur de la Science“ (1905), „Science et Méthode“ (есть русск. переводы).

[9]) Вообще неоцѣнимыя—что касается до критической глубины, яснаго расчлененія проблемъ и трезвой постановки вопросовъ—гносеологическія изслѣдованія Пуанкарэ не содержатъ въ себѣ ясныхъ и послѣдовательныхъ положительныхъ взглядовъ на познаніе, и потому, служа какъ бы незамѣнимымъ введеніемъ къ удовлетворяющей всѣмъ современнымъ требованіямъ гносеологіи, они этой гносеологіи еще не создаютъ.

[10]) Сознавая всю важность прогресса, достигнутаго логической школой въ пониманіи математики, авторъ настоящаго изслѣдованія первоначально всецѣло примкнулъ къ ней, и съ этой точки зрѣнія изложилъ свои взгляды въ „Мысляхъ о познаніи“ (1909), въ главѣ: „Роль математики въ познаніи“. Однако, при дальнѣйшей работѣ авторъ оцѣнилъ все значеніе критики Пуанкарэ, вполнѣ согласной съ направленіемъ общихъ гносеологическихъ воззрѣній автора, и это заставило его дополнить предыдущее изслѣдованіе новыми существенными элементами, результатомъ чего и явилась излагаемая здѣсь теорія математическаго метода.

[11]) „Мысли о познаніи“ гл. II, 4. „Оправданіе истины“ I, 4.

[12]) Дѣло не измѣнится, если мы будемъ различать „актуальную“ и „потенціальную“ безконечность, для которыхъ иногда вводятъ термины: infinitum и indefinitum, и если вмѣсто „безконечно-большія и малыя“ величины мы будемъ говорить: „сколь-угодно большія и малыя“, или: „большія и меньшія всякой напередъ заданной величины“ и т. п. Всѣми этими выраженіями мы только на словахъ обходимъ понятіе о дѣйствительно-мыслимой, „актуальной“ безконечности, а на самомъ дѣлѣ всегда въ нихъ подразумѣваемъ существованіе безконечнаго количества объектовъ,

что и можно въ каждомъ частномъ случаѣ обнаружить, раскрывая полное содержаніе, подразумѣвающееся во всѣхъ употребляемыхъ выраженіяхъ. Такъ, напримѣръ, мы не могли бы взять „сколь-угодно“ много объектовъ, если бы ихъ не было безконечно много, или не могли бы взять числа больше всякаго заданнаго, если бы существовало послѣднее по величинѣ число, которое отсутствуетъ лишь въ безконечномъ рядѣ. Принимая это во вниманіе, мы можемъ также сказать, что мы не встрѣчаемся въ естествознаніи съ величинами сколь-угодно большими и малыми и т. п., а лишь съ очень большими и малыми, но опредѣленными величинами.

Вообще, понятіе объ актуальной безконечности, отъ котораго такъ долго отмахивались математики, считая его лишь „пустымъ символомъ“ (совершенно подобно тому, какъ прежде считали пустыми символами „мнимыя“ и даже отрицательныя числа), въ настоящее время вполнѣ реабилитировано. Такъ, въ обстоятельномъ изслѣдованіи („De l'Infini mathématique“, 1896) L. Couturat выяснилъ, что „символъ“ безконечности фигурируетъ во всѣхъ математическихъ теоріяхъ съ такой же опредѣленностью, какъ, напримѣръ, и символъ „ноль“ или какое-либо другое число, а потому,— если только помнить о присущихъ этому символу свойствахъ и не приписывать ему свойствъ неприсущихъ,—на этотъ символъ необходимо распространить понятіе числа, какъ оно распространяется и на символъ ноль. Лишь тогда область чиселъ будетъ дѣйствительно совершенно замкнутой, такъ какъ лишь тогда такія выраженія, какъ $\frac{A}{O}$, будутъ имѣть смыслъ и не будутъ выводить за предѣлы этой области.

Еще болѣе заставили обратить вниманіе на „реальность“ понятія безконечности изслѣдованія Дюбуа-Реймона о ростѣ функцій, приводящія совершенно естественно къ понятію о числахъ, находящихся за рядомъ натуральныхъ чиселъ, т. е. какъ бы „большихъ безконечности“—трансфинитныхъ (Borel, Leçons sur les séries à termes positifs, 1905), не подчиненныхъ аксіомѣ Архимеда. Къ подобнымъ же числамъ приходитъ самостоятельно и G. Cantor въ рядѣ своихъ извѣстныхъ изслѣдованій, логическая состоятельность которыхъ, впрочемъ, еще окончательно не установлена, въ виду обнаруживаемыхъ въ нихъ противорѣчій,—такъ называемыхъ „антимоній“ канторизма. Во всякомъ случаѣ, можно утверждать навѣрное, что въ томъ или другомъ видѣ, но теорія безконечныхъ чиселъ можетъ быть построена безъ противорѣчій, такъ какъ понятіе „трансфинитной“ величины можетъ быть получено черезъ простое устраненіе нѣкоторыхъ аксіомъ (напр., аксіомы Архимеда), которымъ подчиняются величины обыкновенныя, и черезъ опредѣленіе величины трансфинитной при помощи однѣхъ оставшихся аксіомъ, безъ ихъ измѣненія. Такъ какъ эти оставшіяся аксіомы непротиворѣчивы для обыкновенныхъ величинъ, то онѣ должны быть a fortiori непротиворѣчивыми и для трансфинитныхъ. Впрочемъ, какъ обнаруживаетъ критика (напр., Пуанкарэ „Sciènce et Métode“), канторизмъ далеко еще не удовлетворяетъ такимъ требованіямъ.

[13]) Г. Риккертъ „Границы естественно-научнаго образованія понятій“ перев. А. Водена, 1904.

[14]) Болѣе подробныя соображенія объ атомистическомъ строеніи нашихъ воспріятій находятся въ „Мысляхъ о познаніи“ (IV, 2 и 3). Теперь къ прежнимъ выводамъ о конечности числа отдѣльныхъ простѣйшихъ воспріятій—или временно-пространственно-простыхъ представленій—мы присоединяемъ соображенія о конечности и всѣхъ отдѣльныхъ простѣйшихъ объектовъ естественныхъ наукъ, такъ какъ дальнѣйшее развитіе нашихъ гносеологическихъ изслѣдованій заставило выдѣлить на особое мѣсто естественную философію съ ея предѣльными выводами о безконечности и непрерывности природы.

[15]) Чѣмъ отдаленнѣе отъ насъ какая-нибудь эпоха, тѣмъ, вообще говоря, бѣднѣе и менѣе вѣроятно наше знаніе о ней. Съ возрастаніемъ промежутка времени, насъ отъ нея отдѣляющаго, до безконечности количество и вѣроятность нашихъ познаній о ней становятся безконечно-малыми сравнительно съ нашимъ обыкновеннымъ знаніемъ, и, слѣдовательно, о безконечно удаленныхъ эпохахъ мы уже не имѣемъ никакихъ знаній, сравнимыхъ по величинѣ и ка-

честву съ обыкновеннымъ естественно-научнымъ знаніемъ. То же, разумѣется, относится и къ безконечному пространству, а также къ безконечно-малымъ промежуткамъ времени и пространства.

Но такъ какъ безконечно-малая вѣроятность нашихъ познаній о цѣлой природѣ обращается въ ноль лишь по сравненію съ познаніями естественно-научными объ окружающей насъ конечной части природы, и такъ какъ сама по обѣ безконечно-малая величина не есть ноль, то все же мы можемъ имѣть о всей безконечной дѣйствительности въ цѣломъ нѣкоторое знаніе особаго рода, не сравнимое по вѣроятности со знаніемъ естественно-научнымъ. Впрочемъ, если мы будемъ довольствоваться познаніемъ лишь самыхъ общихъ сторонъ цѣлой дѣйствительности, то мы можемъ разсматривать само это знаніе какъ безконечно-малое, и тогда оно будетъ уже сравнимо по вѣроятности съ естествознаніемъ, но зато особенный его характеръ проявится въ этой его общности или безконечной малости. Во всякомъ случаѣ мы видимъ, что мы имѣемъ право создать знаніе о всей природѣ, т. е. естественную философію въ видѣ предѣльныхъ выводовъ изъ естествознанія, если мы будемъ помнить объ особомъ характерѣ нашего естественно-философскаго знанія и не будемъ его ставить по порядку вѣроятности или по степени величины наравнѣ со знаніемъ естественно-научнымъ. Поэтому возможность нѣкотораго естественно - философскаго знанія о цѣлой безконечной природѣ не противорѣчитъ невозможности естественно-научнаго знанія о ней, чѣмъ и разрѣшаются многочисленныя недоразумѣнія, часто встрѣчающіяся по этому поводу.

Такъ, напримѣръ, проф. О. Д. Хвольсонъ въ своей статьѣ „Можно-ли прилагать законы физики ко вселенной" (1911) приходитъ къ безусловно отрицательному отвѣту на поставленный имъ въ заглавіи вопросъ. Мы теперь знаемъ, что хотя этотъ результатъ и вѣренъ, если имѣть въ виду только естественно-научное знаніе, но съ точки зрѣнія всего познанія въ цѣломъ, включая и естественную-философію, онъ ошибоченъ. Кромѣ того, надо замѣтить, что примѣненную проф. Хвольсономъ аргументацію нельзя считать правильной даже въ предѣлахъ одной физики, такъ какъ эта аргументація приводитъ къ заключенію, что мы не можемъ прилагать законы физики не только ко вселенной, но уже и къ пространствамъ нѣсколько большимъ, чѣмъ непосредственно-изученныя нами при помощи нашихъ органовъ чувствъ, и такъ какъ такая аргументація сводится къ ошибкамъ безусловнаго скептицизма, упускающаго изъ виду точку зрѣнія вѣроятнаго познанія, какъ результата всякой индукціи. Центръ тяжести разсматриваемой статьи лежитъ въ неправильной аналогіи, которую авторъ проводитъ между нашимъ познаніемъ и познаніемъ воображаемыхъ маленькихъ мыслящихъ существъ, которыми онъ населяетъ поверхности атомовъ и электроновъ, какъ поверхности планетъ. „Предположимъ, пишетъ онъ, что міръ, на которомъ они живутъ, атомъ мѣди внутри мѣдной монеты; ихъ астрономическій міръ, содержащій милліоны такихъ атомовъ, представляется намъ въ видѣ микроскопической пылинки мѣди. Представимъ себѣ, далѣе, что между этими существами нашлись ученые, которые рѣшились мысленно перешагнуть отъ доступнаго ихъ наблюденію міра ко вселенной и высказать мысль, что вселенная, т. е. совокупность всего существующаго, однородна, что въ ней происходяхъ лишь тѣ явленія, которыя они наблюдали и открыли въ доступномъ имъ астрономическомъ мірѣ. На нашемъ языкѣ это значило бы: вселенная состоитъ изъ мѣди. Должны-ли мы такую гипотезу назвать смѣлой или легкомысленной? Такъ какъ мы знаемъ, что она ложна, намъ приходится остановиться на послѣднемъ“.

Дѣйствительно, если бы предполагаемыя „мыслящія существа“ сдѣлали эту гипотезу, то они доказали бы лишь свое легкомысліе. Но дѣло въ томъ, что, разсуждая научно, они пришли бы къ совершенно инымъ и уже правильнымъ результатамъ. Во-первыхъ, правильно прилагая къ своимъ знаніямъ законъ единообразія или „однородности“ вселенной, они не сказали бы, что вселенная состоитъ изъ мѣди, а лишь, что всюду, гдѣ повторяются окружающія ихъ условія, явленія будутъ происходить по тѣмъ же законамъ, какъ и у нихъ; и въ этомъ они будутъ правы, потому что они такимъ образомъ правильно угадаютъ теченіе процессовъ на отдаленнѣйшихъ отъ нихъ разстояніяхъ, такъ какъ мы знаемъ, что атомы мѣди съ характерными для нихъ свойствами существуютъ во всемъ доступномъ намъ астрономическомъ пространствѣ. Такимъ образомъ аргументъ проф. Хвольсона оборачивается противъ него: гипотеза о существованіи въ отдаленнѣйшихъ мірахъ процессовъ, подобныхъ процессамъ въ атомахъ мѣди, для предполагаемыхъ жителей этого атома была бы, дѣйствительно, смѣлой, но въ то же время была бы вѣрной гипотезой, а потому этотъ примѣръ можетъ насъ только ободрить въ нашихъ предположеніяхъ о единообразіи вселенной.

Во-вторыхъ, зная лучше насъ внутреннія свойства атома мѣди, предполагаемыя существа не могли бы претендовать на званіе „мыслящихъ", если бы они по этимъ свойствамъ не возстановили теоретически всей періодической системы элементовъ. Дѣйствительно, если мы, зная лишь поверхностно кое-какія грубыя свойства нѣсколькихъ химическихъ элементовъ, могли предсказать теоретически существованіе другихъ элементовъ, то жители атома мѣди, имѣющіе возможность непосредственно наблюдать тончайшія его свойства, экстраполлируя свои наблюденія, должны установить условія существованія всѣхъ возможныхъ элементовъ съ гораздо большей легкостью, чѣмъ это можемъ сдѣлать мы. Правда, имъ придется исходить изъ наблюденія не нѣсколькихъ, а лишь одного элемента, и въ этомъ отношеніи ихъ положеніе хуже нашего; но это невыгода съ избыткомъ вознаграждается возможностью наглядно наблюдать весь внутренній механизмъ элемента, благодаря чему всѣ загадки нашей физики и химіи объ отношеніяхъ матеріи къ эфиру, электричеству и т. д. для нихъ не существовали бы, и атомная механика представляла бы для нихъ не больше трудности, чѣмъ для насъ механика небесная. Знаніе астрономическихъ разстояній, на протяженіи которыхъ мы не находимъ, вѣдь, ничего существенно новаго, что касается до общихъ законовъ природы, вознаграждаетъ насъ слишкомъ слабо за незнаніе внутренней механики хотя бы одного атома, и потому воображаемые жители атомовъ въ отношенiи познанiя природы въ ея цѣломъ находились бы въ гораздо лучшихъ условiяхъ, чѣмъ находимся мы, а это какъ разъ противуположно тому, что желалъ доказать своей аналогiей проф. Хвольсонъ.

Впрочемъ, аргументы проф. Хвольсона остаются въ силѣ противъ слишкомъ поспѣшныхъ, слишкомъ увѣренныхъ и недостаточно обдуманныхъ обобщенiй нѣкоторыхъ наблюдаемыхъ нами процессовъ (напр., увеличенiя энтропiи), и, какъ такой умѣряющiй факторъ, разсматриваемая статья сохраняетъ все свое значенiе.

[16]) Этотъ основной принципъ конечной ариѳметики можно было бы назвать „принципомъ конечности". Замѣтимъ, между прочимъ, что въ философiи уже были попытки придать подобному принципу абсолютное значенiе, т. е. отрицать правомѣрность понятiя безконечности. Такiе, приблизительно, взгляды развивалъ, напримѣръ, основатель французскаго критицизма Ch. Renouvier въ своихъ сочиненiяхъ. Само собой разумѣется, такiе взгляды совершенно отличны отъ развиваемыхъ нами здѣсь, такъ какъ здѣсь мы придаемъ принципу конечности лишь методологическое значенiе, въ извѣстныхъ границахъ, а не значенiе абсолютное. Интересно, впрочемъ, отмѣтить, что къ финистическимъ концепцiямъ приводитъ современное развитiе физики: верхняя граница для скорости тѣлъ (принципъ относительности), теорiя квантъ и т. п. „Теперь ясно, говоритъ, напримѣръ, Brillouin, что придется ввести въ наши физическiя и химическiя концепцiи прерывистость, элементъ, измѣняющiйся скачками, о которомъ мы не имѣли раньше никакого понятiя" („La théorie du rayonnement et les quanta", rapp. publiés p. MM. Langevin et d-Broglie, 1912, стр. 451).

[17]) Если числовой атомъ будетъ $\frac{1}{\Omega}$, то изъ строки Тейлора получимъ:

$$\Delta f(x) = f\left(x + \frac{1}{\Omega}\right) - f(x) = \frac{1}{\Omega} f'(x) + \frac{1}{2\Omega^2}\left(\frac{f''(x)}{1} + \frac{1}{\Omega}\cdot\frac{f'''(x)}{1.3} + \ldots\right).$$

Такъ какъ, по общему правилу конечной ариѳметики, сумма въ скобкахъ въ правой части этого равенства не можетъ быть больше, чѣмъ Ω (иначе она не имѣла бы смысла), то второй членъ правой части равенства можетъ быть—самое большее—равенъ $\frac{\Omega}{2\Omega^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Omega}$, т. е. будетъ меньше числового атома, а потому, по правиламъ конечной ариѳметики, этотъ членъ будетъ равенъ нулю. Поэтому, принимая за дифференціалъ независимаго перемѣннаго числовой атомъ, мы получимъ совершенно точную формулу дифференцированія:

$$df(x) = f'(x)\, dx,$$

изъ которой и вытекаютъ всѣ остальные элементы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

То же правило, конечно, можетъ быть получено и для ариѳметической системы „Ω_2“ (для которой числовой атомъ равенъ единицѣ), такъ какъ эта новая система должна разсматриваться, какъ прежняя, съ тѣми же самыми предложеніями, но лишь выраженными при помощи другого алгоритма.

18) Это различіе между точной и приближенной математикой, между прочимъ, разобрано у Ф. Клейна— „Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien“ (1902).

19) Выводъ Лейбница мы приводимъ по Пуанкарэ „La Science et l'Hipothèse“ chap. I, § II.

20) Въ сущности, для полной логической строгости слѣдуетъ именно это соотношеніе принять за 4-ое опредѣленіе, такъ какъ если подъ знакомъ x подразумѣвать любое число, то надо еще убѣдиться, что опред. 4 не войдетъ въ противорѣчіе съ предыдущими, что, какъ увидимъ ниже, невозможно въ случаѣ безпредѣльнаго множества чиселъ.

21) Мы уже видѣли (прим. 12), что иногда различаемыя понятія „неопредѣленнаго возрастанія“ или потенціальной безконечности (indefinitum) и безконечности данной (infinitum) на самомъ дѣлѣ тождественны по содержанію, такъ какъ безъ актуальной безконечности

не было-бы и „возможности" неопредѣленнаго возрастанія, т. е. не было бы безконечности потенціальной, а безъ потенціальной безконечности не было бы a fortiori и актуальной.

На самомъ же дѣлѣ эти два понятія различаются не содержаніемъ, а лишь различнымъ нашимъ отношеніемъ къ различнымъ элементамъ этого содержанія. Происхожденіе понятія потенціальной безконечности, очевидно, утилитарное, подчиненное интересамъ естествознанія: здѣсь насъ еше не интересуетъ изученіе самой безконечности, а лишь построеніе такой теоріи, которая была бы вѣрна при всякомъ конечномъ Ω, т. е. при неопредѣленномъ возрастаніи чиселъ. Безконечность обращается въ актуальную безъ всякаго измѣненія содержанія понятій—какъ только нашъ интересъ переходитъ на самую безконечность, что именно и совершается при переходѣ отъ естествознанія къ естественной философіи.

[22]) Принципъ наибольшей простоты является, вообще, основаніемъ всего нашего познанія, какъ мы старались показать въ „Мысляхъ о познаніи" и въ „Оправданіи истины".

[23]) Что при фактическихъ приложеніяхъ математики къ естествознанію мы далеко не заботимся о полной логической достовѣрности результатовъ, видно уже изъ того, что мы при этомъ довѣряемъ далеко не абсолютно-надежнымъ вспомогательнымъ средствамъ. Такъ, при вычисленіяхъ мы пользуемся перомъ, бумагой, чернилами и, слѣдовательно, становимся въ зависимость отъ ихъ физическихъ и химическихъ свойствъ, такъ какъ, если бы, напримѣръ, написанныя нами цифры въ продолженіе вычисленія—вслѣдствіе какого либо естественнаго процесса—измѣнили бы очертанія и приняли другія значенія, то наше вычисленіе стало бы ошибочнымъ. Далѣе, мы употребляемъ для вычисленій вспомогательные физическіе приборы — счеты, ариѳмометры и т. д.—и, слѣдовательно, становимся въ зависимость отъ ихъ механическихъ и физическихъ свойствъ. Наконецъ, примѣняя при вычисленіяхъ находящіяся въ продажѣ таблицы—логариѳмовъ, квадратовъ и т. д. — и прибѣгая къ помощи сотрудниковъ, мы становимся въ зависимость даже отъ мораль-

ныхъ факторовъ, такъ какъ опираемся на добросовѣстность, аккуратность, внимательность и прочія личныя свойства составителей таблицъ и нашихъ сотрудниковъ.

[24]) Этотъ терминъ именно и употребляетъ Л. Кутюра („Les Princ. d. Math".) въ своей логической теоріи математическаго метода, вызвавшей плодотворную критику Пуанкарэ.

[25]) Здѣсь мы даемъ лишь отрицательный критерій: за это мы не можемъ логически ручаться, такъ какъ здѣсь мы желаемъ лишь отграничиться отъ догматизма. Чтобы отграничиться отъ скептицизма и обосновать критерій положительно, т. е. показать, что дѣйствительное сознаніе отсутствія противорѣчій является не только необходимымъ, но и достаточнымъ признакомъ логической правильности системы, надо изслѣдовать, въ чемъ именно для насъ заключается цѣнность всякаго познанія, цѣнность истины. Это изслѣдованіе произведено нами въ работѣ „Оправданіе истины", гдѣ, между прочимъ, и установлено, что однимъ изъ признаковъ цѣннаго для насъ понятія истины является сознаніе отсутствія противорѣчій въ нашихъ утвержденіяхъ, и что это сознаніе является для насъ достаточной логической гарантіей („Оправд. ист.", I, 2 стр. 9).

[26]) Замѣтимъ, между прочимъ, что возможность совершенія нами логическихъ ошибокъ при нѣсколько запутанныхъ, разсужденіяхъ, дающихъ намъ иногда иллюзію строго-логическаго доказательства,— эта возможность объясняется именно тѣмъ, что настоящее логическое сознаніе—по слабости, лѣни или торопливости мысли—мы часто замѣняемъ упрощенными пріемами разсужденій, а именно, вмѣсто осуществленія логическихъ операцій, мы дѣлаемъ лишь рядъ гипотезъ о томъ, какъ, по всей вѣроятности, шли бы эти операціи въ случаѣ ихъ дѣйствительнаго осуществленія. Такъ какъ такія гипотезы не могутъ намъ гарантировать навѣрное отсутствіе ошибокъ, то и становится понятнымъ, почему мы иногда такія ошибки встрѣчаемъ и на самомъ дѣлѣ.

[27]) Можно, конечно, пытаться утверждать—въ духѣ мистицизма Вл. Соловьева и „интуитивизма" проф.

Н. О. Лосскаго или А. Бергсона,—что мы можемъ непосредственно съ достовѣрностью сознавать отсутствіе противорѣчій въ безпредѣльной совокупности понятій. Не вдаваясь въ критику общихъ основаній названныхъ гносеологическихъ системъ (которыя страдаютъ догматизмомъ, не могутъ выдержать нападенія скептицизма и потому не отвѣчаютъ современнымъ требованіямъ), надо лишь замѣтить, что добросовѣстный изслѣдователь, какихъ бы теоретическихъ взглядовъ онъ ни придерживался, не можетъ отрицать факта невозможности раздѣльно мыслить, представлять и, вообще, сознавать безконечное количество различныхъ объектовъ. По крайней мѣрѣ, авторъ, лично такой способности въ себѣ не сознаетъ. Конечно, мистикъ-интуитивистъ можетъ заявить, что эта способность присуща не всѣмъ людямъ, а составляетъ лишь его индивидуальную особенность. Но въ такомъ случаѣ почему же мы не видимъ плодовъ этого дара въ дѣйствительной дѣятельности мистиковъ и интуитивистовъ? Наоборотъ, въ сочиненіяхъ мистиковъ и интуитивистовъ обыкновенно бываетъ мало научныхъ открытій, и, наоборотъ, въ нихъ можно найти не мало ошибокъ, которыя можетъ обнаружить всякій обыкновенный человѣкъ, даже не выходя изъ конечной области понятій, а это совершенно подрываетъ довѣріе къ возможнымъ утвержденіямъ объ особой одаренности. Конечно, мистики-интуитивисты могутъ относить эту одаренность не къ себѣ, а лишь къ особеннымъ, геніальнымъ натурамъ. Но такихъ натуръ на землѣ мы не встрѣчаемъ. Ниже мы увидимъ, что даже геніальнѣйшимъ ученымъ (Ферматъ) свойственно ошибаться даже въ томъ, въ чемъ они были глубоко увѣрены, и что ихъ пути познанія въ существенныхъ чертахъ совпадаютъ съ путями всѣхъ людей, а потому возможныя ссылки мистиковъ на чужое сознаніе не подтверждаются фактами. Обращаясь же къ своему сознанію, мы опять не находимъ подтвержденія ихъ ученію.

[28]) Такимъ образомъ мы видимъ, что, смотря по тому, будемъ ли мы относить сужденіе $7+5=12$ къ конечной или безконечной ариѳметикѣ, будетъ правъ Лейбницъ или Кантъ.

[29]) „Science et Methode“ chap. IV § V.

[30]) Именно присутствіе этихъ непровѣримыхъ на примѣрѣ постулатовъ, которое обращаетъ всѣ доказательства въ скрытыя petitiones principii, если мы будемъ думать, что эти доказательства вытекаютъ логически строго изъ прямыхъ опредѣленій чиселъ и дѣйствій надъ ними, и сказывается у всякаго приступающаго впервые къ изученію связанныхъ съ теоріей предѣловъ областей математики въ нѣкоторой неловкости въ сознаніи, въ неполной очевидности результатовъ, въ возможности легко запутаться въ софизмахъ. Таково именно происхожденіе знаменитыхъ софизмовъ Зенона—о невозможности движенія, о неподвижности летящей стрѣлы и о томъ, что Ахиллесъ не можетъ догнать черепаху. Всѣ эти софизмы возникли какъ разъ на зарѣ теоріи предѣловъ, когда человѣчество впервые столкнулось съ данными вопросами, и ихъ возможность именно и свидѣтельствуетъ, что въ этомъ пунктѣ наткнулись на необходимость допущенія новыхъ аксіомъ.

[31]) Dedekind «Stetigkeit und irrationale Zahlen» (1872) стр. 18.

[32]) B. Russel «The Principles of Mathematics, t. I. 1903.

[33]) Иногда утверждаютъ, что опытъ даетъ намъ также непосредственно и общія сужденія о дѣйствительности, напримѣръ, законы природы, когда мы сознаемъ ихъ съ нѣкоторою увѣренностью (Н. О. Лосскій, „Обоснованіе интуитивизма“, 1906). Такія общія сужденія, дѣйствительно, для насъ достовѣрны, но достовѣрны лишь какъ психологическій матеріалъ нашего сознанія, такъ какъ только такую достовѣрность мы можемъ защищать внѣ законныхъ нападеній скептицизма и такъ какъ наша увѣренность есть тоже не что иное, какъ нѣкоторое субъективное чувство, само по себѣ еще ничего не гарантирующее для объективнаго познанія. На самомъ дѣлѣ общія сужденія о дѣйствительности, возникающія въ нашемъ сознаніи, имѣютъ для насъ познавательное значеніе не непосредственно въ силу своего существованія, какъ факты нашего внутренняго опыта, а лишь въ силу вторичныхъ актовъ ихъ познавательной оцѣнки, а потому и нельзя утверждать, что мы непосредствен-

нымъ опытомъ получаемъ прямо общія сужденія о дѣйствительности. („М. о п.“ „Опр. ист.“).

[34]) Дѣйствительно, въ составъ цѣннаго знанія входятъ какъ сужденія о будущихъ переживаніяхъ, которыя не входятъ въ составъ непосредственнаго опыта, такъ и сужденія объ общемъ устройствѣ дѣйствительности и ея законахъ, каковыя сужденія уже совершенно недоступны непосредственному опыту. („М. о п.“ „Опр. ист.“).

[35]) Эти выводы развиваются подробнѣе въ вышеуказанныхъ нашихъ гносеологическихъ работахъ, и мы надѣемся освѣтить эти вопросы еще болѣе полно въ ближайшихъ подготовляемыхъ къ печати изслѣдованіяхъ.

[36]) Мы видимъ такимъ образомъ, что для полнаго „ариѳметизированія“ математики нѣтъ нужды прибѣгать къ искусственнымъ пріемамъ Кронекера, разсматривавшаго вмѣсто равенствъ сравненія, такъ какъ достаточно того факта, что единственнымъ матеріаломъ всѣхъ нашихъ операцій оказываются одни цѣлыя числы.

[37]) Вообще, наглядное представленіе пространства отнюдь не является предметомъ изученія геометріи, какъ думалъ Кантъ. На самомъ дѣлѣ геометрія изучаетъ лишь мыслимое нами понятіе пространства. Это понятіе пространства господствуетъ надъ всѣми нашими отдѣльными представленіями пространства (въ которыхъ предметы намъ представляются въ видѣ лишь нѣсколько идеализированныхъ реальныхъ физическихъ предметовъ съ ихъ толщиной, окраской и т. д.) совершенно такъ же, какъ, напримѣръ, общее понятіе „дерево“ господствуетъ надъ всѣми конкретными представленіями отдѣльныхъ деревьевъ („Опр. ист.“, стр. 36); и если мы пользуемся при доказательствахъ чертежами, то лишь какъ нагляднымъ пособіемъ, облегчающимъ передачу нашихъ знаній, а отнюдь не какъ необходимымъ факторомъ самой теоріи. Точно также мы, напримѣръ, пользуемся чертежами и для болѣе нагляднаго изображенія роста функцій, что вовсе не дѣлаетъ чертежъ необходимымъ факторомъ теоріи функцій. Въ послѣднее время цѣлый рядъ изслѣдователей во главѣ съ Гильбертомъ (см.

прим. 5) показали на дѣлѣ возможность построенія геометріи въ видѣ совокупности понятій, гдѣ вовсе не прибѣгаютъ къ помощи представленій. Поэтому пользованіе представленіями вовсе не является характерной особенностью геометріи. Представленія могутъ, правда, служить психологическимъ поводомъ для возникновенія геометрическихъ изслѣдованій, а эти послѣднія могутъ имѣть прикладное значеніе для истолкованія представленій, но между представленіями и геометріей не болѣе связи, чѣмъ, напримѣръ, между пивовареніемъ и химіей, которыя вовсе не неразрывно связаны, хотя первое можетъ послужить поводомъ для развитія второй (процессы броженія), а вторая можетъ быть приложена для улучшенія перваго.

При этомъ не надо думать, что пространственныя представленія являются единственнымъ поводомъ для развитія геометрическихъ понятій. Нѣтъ, прежде всего, геометрическія понятія могутъ равнымъ образомъ развиваться изъ всякихъ представленій, гдѣ мы имѣемъ дѣло съ многообразіями нѣсколькихъ измѣреній, наприм., съ многообразіями, характеризующими физическое состояніе тѣла (давленіе, температура и т. д.). Но, главное, совокупность геометрическихъ понятій и сужденій имѣетъ собственный смыслъ, независимо отъ всякихъ представленій, какъ одинъ изъ естественныхъ путей, по которому можетъ развиваться чистый Анализъ. Это развитіе, по общему принципу, зависитъ лишь отъ внутреннихъ факторовъ (каковы— стремленіе къ достиженію наибольшей простоты и стройности во внутреннихъ соотношеніяхъ нашего духа), а потому оно совершенно свободно отъ такихъ внѣшнихъ обстоятельствъ, какъ наши наличныя представленія. Такъ, напримѣръ, развитіе Анализа показываетъ, что къ такимъ геометрическимъ понятіямъ, каковы тригонометрическія и круговыя функціи, число π и т. д., можно придти совершенно самостоятельно и независимо отъ геометрическихъ представленій, но точно также и ко всѣмъ вообще геометрическимъ соотношеніямъ, причемъ и само пространство, по Пуанкарэ, является лишь нѣкоторой группой преобразованій, т. е. однимъ изъ частныхъ примѣненій чисто-аналитической „Теоріи группъ“. Поэтому геометрію и нельзя противупоставлять Анализу, такъ какъ геометрія является лишь его частнымъ отдѣломъ.

[38]) Мы видимъ такимъ образомъ, что задачей математики является изученіе понятія о числѣ и связанныхъ съ нимъ понятій, чѣмъ и можетъ быть отграничена математика отъ логики, имѣющей дѣло съ пустыми формами понятій. Поэтому и нельзя согласиться съ мнѣніемъ представителей логической школы математиковъ, по которому математика есть просто отдѣлъ логики. Математика, конечно, подчинена логикѣ, какъ ей подчинена, напримѣръ, и химія. Но какъ химія имѣетъ свой специфическій предметъ изученія въ мірѣ физическомъ, такъ и математика въ мірѣ духовномъ имѣетъ свой специфическій предметъ изученія—число, почему, какъ скоро увидимъ, пріемы логики и оказываются для нея недостаточными.

Поэтому-то изрѣченіе Рёсселя: „математика можетъ быть опредѣлена, какъ доктрина, въ которой мы никогда не знаемъ, ни о чемъ мы говоримъ, ни то, вѣрно ли то, что мы говоримъ“ („Новѣйшія работы о началахъ математики“ 1901 русск. перев. въ сборн. № 1 „Новыя идеи въ мат.“) можетъ быть принято лишь очень условно.

[39]) Можно сильно сомнѣваться въ логической состоятельности многихъ такихъ теорій, такъ какъ въ нихъ можно предполагать, какъ это выставилъ на видъ Пуанкарэ, существованіе болѣе или менѣе замаскированныхъ логическихъ круговъ. Такъ, напримѣръ, Рессель думаетъ опредѣлить отдѣльное число, говоря, что оно есть общее свойство „эквивалентныхъ“ классовъ, т. е. такихъ, „между элементами которыхъ можно установить однозначное и взаимное соотвѣтствіе“ (цитирую по Couturat, Les Principes des Math. стр. 47), но здѣсь совершенно непонятно, какимъ образомъ устанавливать это соотвѣтствіе.

Вообще говоря, нѣкоторое соотвѣтствіе можно всегда установить между элементами двухъ частныхъ понятій, соподчиненныхъ понятію общему, такъ какъ общее понятіе можно разсматривать какъ выраженіе этого соотвѣтствія. Такъ, между элементами понятій „человѣкъ“ и „обезьяна“, соподчиненныхъ понятію „животное“ (тѣснѣе—зоологическому понятію

„приматы"), можно установить „однозначное и взаимное соотвѣтствіе", такъ какъ, напримѣръ, глазамъ обезьяны соотвѣтствуютъ глаза человѣка, носу—носъ и т. д. И потому, по Ресселю, обезьяна и человѣкъ должны были бы измѣряться какимъ-то одинаковымъ числомъ, между тѣмъ какъ на самомъ дѣлѣ существующее соотвѣтствіе доказываетъ лишь то, что оба класса соподчинены одному понятію („приматы"). Итакъ, не всякое „однозначное и взаимное" соотвѣтствіе выражаетъ число. Слѣдовательно, числовое соотвѣтствіе есть соотвѣтствіе особое, показывающее, что оба класса соподчинены понятію одного опредѣленнаго числа, и такимъ образомъ, развертывая до конца мысль Ресселя, мы должны были бы опредѣлить понятіе числа черезъ понятія «числового соотвѣтствія», иначе говоря—черезъ понятіе числа же, т. е. должны бы совершить логическій кругъ.

Еще легче замѣтить существованіе этого круга въ разсматриваемомъ опредѣленіи, если обратить вниманіе на то, что въ немъ упоминается объ „элементахъ" двухъ классовъ, и между этими элементами предполагается соотвѣтствіе. Слѣдовательно, оба класса предполагаются разбитыми на отдѣльные элементы и совокупность этихъ элементовъ мы уже должны мыслить, когда опредѣляемъ „число" черезъ установленіе соотвѣтствія между элементами. Но вѣдь это понятіе о совокупности элементовъ и есть не что иное, какъ понятіе «числа» элементовъ, и, значитъ, прежде чѣмъ приступить къ опредѣленію „числа", по Ресселю, черезъ соотвѣтствіе элементовъ, мы уже должны мыслить число, почему такое опредѣленіе будетъ страдать ошибкой idem per idem, такъ какъ оно сводится къ такому опредѣленію: „число есть общее свойство классовъ, элементы которыхъ измѣряются однимъ и тѣмъ же числомъ".

[40]). Въ самомъ дѣлѣ, каждое отдѣльное число непосредственно подчиняетъ себѣ еще не единичныя, а общія понятія. Такъ, напримѣръ, понятіе 5 подчиняетъ себѣ понятіе „5 орѣховъ", которое является понятіемъ общимъ, такъ какъ оно само подчиняетъ себѣ безчисленное множество болѣе частныхъ понятій, напримѣръ, „пять спѣлыхъ орѣховъ", „пять грецкихъ

орѣховъ" и т. д., которыя опять еще являются понятіями общими, подчиняющими другія понятія. Рядъ этихъ послѣдовательныхъ подчиненныхъ классовъ лишь на самомъ концѣ завершается строго-единичными понятіями: „эти пять орѣховъ, которые я сейчасъ вижу", „которые видѣлъ $\frac{1}{10}$ секунды тому назадъ" и т. д. И такимъ образомъ каждое отдѣльное отвлеченное число, наприм., 5, является уже классомъ классовъ... ...классовъ понятій, т. е. результатомъ сложнаго послѣдовательнаго обобщенія.

[41]). При этомъ надо, однако, помнить, что математика, поднимаясь въ сферу болѣе общихъ понятій, уже отрывается отъ реальной дѣйствительности, въ противоположность естествознанію, и потому при сходствѣ обѣихъ сторонъ познанія со стороны формальной онѣ существенно различны со стороны матеріальной.

[42]). Какъ мы видѣли, опредѣленій должно быть даже больше, чѣмъ чиселъ, такъ какъ надо еще опредѣлить рядъ отдѣльныхъ связей чиселъ.

[43]). Именно, на принципѣ наибольшей простоты, обосновывающемъ индуктивные вѣроятные выводы.

[44]). На самомъ дѣлѣ гораздо больше, такъ какъ въ математикѣ много этажей общности (о чемъ подробнѣе въ гл. III, 1). Но для нашихъ цѣлей намъ пока достаточно установить существованіе хотя бы двухъ этажей опредѣленій.

[45]). Можно было бы попытаться спасти чисто-логическую структуру общихъ предложеній математики, относя математику не къ нашему реальному сознанію, а къ нѣкоторому воображаемому, которое по опредѣленію не встрѣтило бы противорѣчій въ безконечномъ рядѣ слѣдствій изъ общихъ предложеній. Но тогда такое опредѣленіе воображаемаго сознанія само не было бы логически-оправдано, такъ какъ неизвѣстно было бы, нѣтъ ли въ этомъ опредѣленіи противорѣчій. А если бы мы пожелали логически изслѣдовать этотъ вопросъ, то мы и вернулись бы къ первоначальной проблемѣ, такъ какъ намъ пришлось бы разсмотрѣть содержаніе воображаемаго сознанія, даваемое ему нашимъ опредѣленіемъ, а это содержаніе какъ разъ и состоитъ изъ общихъ и частныхъ предложеній ма-

тематики и ихъ взаимоотношеній, непротиворѣчивость которыхъ и составляетъ первоначальный вопросъ. Такимъ образомъ и этотъ путь не спасаетъ математику отъ необходимости опереться на внѣлогическіе элементы.

Впрочемъ, слѣдуетъ замѣтить, что можно было бы все же создать чисто-формальную математику, основанную на одной логикѣ,—стоило бы только въ ней каждый разъ оговаривать, что опредѣляемыя въ ней общія понятія и высказываемыя общія предложенія, быть можетъ, по отношенію къ частнымъ понятіямъ и предложеніямъ не вѣрны. Иначе говоря,—стоило бы только каждую группу (притомъ конечную) общихъ понятій, т. е. каждый этажъ понятій, разсматривать въ изолированномъ видѣ, безъ приложенія этихъ понятій къ понятіямъ болѣе частнымъ. Напримѣръ, при такомъ пониманіи въ алгебрѣ слѣдовало бы разсматривать буквы не какъ представительницы чиселъ, а какъ особые, ничего не означающіе или — какъ мы будемъ говорить—„пустые", знаки и т. д.

Но такая математика не имѣла бы для насъ никакого значенія, такъ какъ не давала бы намъ одной системы подчиненныхъ другъ другу понятій, слѣдовательно, не вносила бы въ наше сознаніе порядка, не могла бы примѣняться какъ орудіе познанія дѣйствительности и потому, вообще, не выполняла бы той роли, для которой предназначена нами математика.

Чтобы спасти цѣнность этой математики, намъ пришлось бы постулировать, что понятія математики подчинены безъ противорѣчій другъ другу. И, значитъ, опять: цѣнная математика не могла бы удержаться въ однѣхъ логическихъ рамкахъ.

[46]). Конечно, иногда новыя предложенія въ математикѣ удается установить и чисто-механически. Такъ напримѣръ, нѣкоторые принципы высшей геометріи, именно, принципы „дуальности" и „гомографіи" (M. Chasles «Aperçu historique.... suivi d'un mémoire de Géometrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie». 1875), даютъ способъ такъ превращать нѣкоторыя геометрическія предложенія, что изъ нихъ совершенно механически полу-

чаются новыя. Но вѣдь разъ такой принципъ превращенія установленъ, то предложенія, получаемыя при его помощи, нельзя уже считать существенно-новыми, а потому индуктивный путь изслѣдованія все же остается единственнымъ путемъ всѣхъ существенно-новыхъ открытій.

[47]). Этотъ фактъ отнюдь не умаляетъ заслугъ геніальнаго математика, такъ какъ могучая способность индукціи и является главнымъ отличительнымъ признакомъ всякаго генія, какъ показываетъ исторія всѣхъ великихъ открытій.

[48]). G. Peacock, «Treatise on Alyebra» 1830 и др. H. Hankel, «Theorie der conplexen Zahlsysteme», 1867. (русскій переводъ подъ редакціею проф. Парфентьева Казань, 1912 г.).

[49]). Peano, «Principio de permanentia» въ Rev. d. Math., t. VIII p. 84.

[50]). Математическую индукцію не слѣдуетъ смѣшивать съ нѣкоторыми похожими на нее съ внѣшней стороны дедуктивными выводами, напримѣръ, съ анализомъ древнихъ, съ обратными дѣйствіями (или, вообще, съ обратными функціональными зависимостями), съ полной логической индукціей. Для выясненія дедуктивнаго характера этихъ видовъ математическаго разсужденія напомнимъ ихъ главнѣйшія особенности.

I. Какъ математическій синтезъ, такъ и анализъ относятся къ дедукціи, такъ какъ это лишь двѣ различныя формы логическаго разсужденія. Именно, математическій синтезъ представляетъ простую форму силлогизма, которую можно изобразить слѣдующей схемой:

Если A есть B, то C есть D

A есть B

слѣд. C есть D

Здѣсь „A есть B" это исходное общее доказанное уже предложеніе, „C есть D"—вытекающее изъ него слѣдствіе.

Математическій же анализъ представляетъ обратный ходъ разсужденій:

Если A есть B, то C есть D
C есть D
―――――――――
слѣд. A есть B

Эта схема по формѣ напоминаетъ индукцію, такъ какъ здѣсь какъ будто изъ существованія слѣдствія («C есть D») выводится существованіе его основанія («A есть B»). Но такое сходство лишь внѣшнее, такъ какъ математическій анализъ будетъ лишь тогда правильнымъ, когда мы можемъ убѣдиться въ обратимости связи въ большей посылкѣ, т. е. когда доказано, что оба сложныя предложенія: «Если A есть B, то C есть D» и «Если C есть D, то A есть B»—одновременно вѣрны. Поэтому общій ходъ аналитическаго разсужденія представится въ слѣдующемъ видѣ.

1) Изъ условій вопроса выводимъ, что если имѣетъ мѣсто предложеніе „Если A есть B, то C есть D“, то имѣетъ мѣсто и предложеніе „Если C есть D, то A есть B“. Обозначая предложеніе, заключенное въ первыя кавычки, черезъ M, во вторыя—черезъ N, получимъ:

Если M, то N.

2) Изъ условій вопроса убѣждаемся, что предложеніе M имѣетъ мѣсто.

3) Строимъ выводъ:

Если M, то N
M
―――――――――
Слѣд. N,

иначе говоря, мы убѣждаемся, что если C есть D, то A есть B.

4) Изъ условій вопроса убѣждаемся, что C есть D,

5) Строимъ выводъ:

Если C есть D, то A есть B
C есть D
―――――――――
Слѣд. A есть B, что и тр. док.

Слѣдовательно, въ математическомъ анализѣ мы примѣняемъ одни дедуктивныя разсужденія.

Замѣтимъ кстати, что если обратимую связь предложенiй обозначить знакомъ равенства, наприм., $M = N$, (и необратимую знакомъ неравенства; эти обозначенiя приняты у новѣйшихъ логиковъ), то математическiй анализъ можетъ быть изображенъ въ простой формѣ вывода:

$$\begin{array}{l} M = N \\ N \\ \hline \text{Слѣд. } M \end{array}$$

При этомъ, конечно, анализъ можетъ еще усложниться тѣмъ, что будетъ разсматриваться цѣлая цѣпь обратимыхъ предложенiй: $M = N = \ldots = S$; S справедливо, слѣдов., M справедливо.

II. Обратнымъ дѣйствiемъ (или обратной функцiональной зависимостью) по отношенiю къ какому-нибудь дѣйствiю прямому мы называемъ дѣйствiе, посредствомъ котораго мы подыскиваемъ такое предложенiе, формулу или число, изъ которыхъ бы слѣдовало, по правилу соотвѣтствующаго прямого дѣйствiя, и при заданныхъ условiяхъ—заданное предложенiе, формула или число, какъ слѣдствiе. Такое обратное дѣйствiе мы производимъ, напримѣръ, когда мы ищемъ частное двухъ чиселъ, т. е. такое число, которое, подвергнутое соотвѣтствующему прямому дѣйствiю (умноженiю), въ данныхъ условiяхъ (т. е. при нашемъ заданномъ дѣлителѣ) дало бы данное число (дѣлимое); или, когда, интегрируя какую-либо функцiю, мы подыскиваемъ такую, дифференцированiе которой дало бы функцiю, намъ данную, и т. п. Здѣсь вездѣ ходъ мысли съ внѣшней стороны очень напоминаетъ индукцiю, потому что мы здѣсь по слѣдствiю (изъ прямого дѣйствiя) отыскиваемъ основанiе. Но все же всякое обратное дѣйствiе всегда основано исключительно на дедукцiи, такъ какъ въ немъ связь слѣдствiя и основанiя всегда обратимая. Поэтому всякое обратное дѣйствiе, въ сущности, основано на аналитическомъ разсужденiи, схема котораго дана выше. Впрочемъ, надо замѣтить, что обратимость математическихъ функцiй не всегда полная, такъ какъ, напримѣръ, при интегрированiи получается произвольная постоянная, при обращенiи тригонометрическихъ функцiй—произвольный цѣлый множитель и т. д. Но въ такихъ случаяхъ математика просто констатируетъ размѣръ этой необратимости (въ видѣ постоянной интеграціи и т. д.), не пытаясь ее восполнить (если это нельзя сдѣлать дедуктивно, какъ напримѣръ, въ механикѣ изъ начальныхъ условій вопроса), и потому все, что даетъ математика въ обратныхъ дѣйствіяхъ, всегда имѣетъ исключительно дедуктивный характеръ.

III. Полная логическая индукція (съ которой не надо смѣшивать такъ называемую „полную" математическую индукцію, разсматриваемую нами далѣе, гл. III, 4), тоже встрѣчаемая въ математикѣ, представляетъ собою, конечно, тоже строго-дедуктивный процессъ, такъ какъ она имѣетъ мѣсто лишь тогда, когда какое-либо предложеніе доказывается отдѣльно для всѣхъ безъ исключенія видовъ, на которые разбивается данное родовое понятіе, служащее подлежащимъ доказываемаго предложенія, и которыхъ поэтому должно быть число конечное. Такъ, напримѣръ, всѣ треугольники, по опредѣленію, можно раздѣлить на остроугольные, прямоугольные и тупоугольные, и потому, доказавъ какое-нибудь свойство относительно каждаго вида треугольниковъ, мы можемъ по принципамъ силлогизма заключить при помощи полной индукціи о существованіи этого свойства у всѣхъ треугольниковъ вообще. Такимъ образомъ полная индукція тоже не выходитъ за предѣлы дедукціи, и опять оттого, что здѣсь связь основанія и слѣдствія обратимы, такъ какъ общее понятіе, по опредѣленію, тождественно съ совокупностью частныхъ, на которыя оно полностью разбивается.

[51]). Récurrent (отъ латинскаго recurrere), по французски, значитъ дословно „возвращающійся назадъ", въ математикѣ—требующій вычисленій надъ членами ряда, расположенными сзади даннаго члена (напр., série récurrente). Такъ какъ для доказательства черезъ „полную" индукцію какого-либо свойства или формулы для числа N мы должны послѣдовательно провести разсужденіе для чиселъ 1, 2, 3..., т. е. чиселъ, находящихся сзади даннаго, то и становится понятнымъ смыслъ французскаго названія метода.

[52]) А. Фоссъ „О сущности математики" 1908 г. перев. І. В. Яшунскаго, примѣч. 37-ое.

[53]). Ходъ разсужденій при доказательствахъ черезъ „полную“ индукцію можно представить слѣдующей схемой:

I. Изъ опредѣленій пустыхъ понятій доказываемъ логически предложеніе: „если формула (или предложеніе) справедлива для n, то она справедлива и для n+1“.

II. Подставляя въ опредѣленіе пустыхъ понятій и въ разсужденіе предыдущаго доказательства вмѣсто общихъ схемъ послѣдовательно понятія частныя, доказываемъ логически рядъ частныхъ предложеній:

1. Если предложеніе справедливо для 1, то оно справедливо и для 2.

2. Если предложеніе справедливо для 2, то оно справедливо и для 3, и т. д.

III. Изъ данныхъ опредѣленій логически доказываемъ предложеніе: „данное предложеніе (или формула) справедливо для 1“.

IV. Беремъ предложенія пункта II-го за большія посылки ряда силлогизмовъ, а за первую, меньшую, беремъ предложеніе пункта III-го. Тогда получаемъ рядъ силлогизмовъ:

1. Если предложеніе справедливо для 1, то оно справедливо для 2.

Оно справедливо для 1.
___
Слѣдов., оно справедливо для 2.

2. Если предложеніе справедливо для 2, то оно справедливо для 3.

Оно справедливо для 2.
___
Слѣдов., оно справедливо для 3, и т. д.

V. Беремъ выводы всѣхъ силлогизмовъ пункта IV-го и изъ нихъ дѣлаемъ выводъ черезъ неполную индукцію:

Формула справедлива для 1, для 2, для 3.... (приводимъ сколько угодно чиселъ).
___
Слѣдовательно, съ любой степенью вѣроятности она справедлива и для всѣхъ чиселъ.

[54]) Къ этому основному предложенію всей математической аксіоматики во многихъ мѣстахъ подходитъ Пуанкарэ въ названныхъ гносеологическихъ изслѣдованіяхъ, такъ что ему и принадлежитъ вся заслуга его установленія.

[55]). H. Poincaré „Science et Méthode“ стр. 185.

[56]) Мы видѣли выше (прим. 12 и 21), что существенное содержаніе актуальной и потенціальной безконечности тождественно.

[57]) Какъ ни кажется съ перваго взгляда парадоксальнымъ это утвержденіе, однако, болѣе глубокое изученіе вопроса неизбѣжно къ нему приводитъ. Обыкновенный отвѣтъ, что „цѣль науки—истина“ не противорѣчитъ нашему утвержденію, такъ какъ именно анализируя понятіе „истина“, которое имѣло бы для насъ цѣнность, мы и приходимъ къ установленію его этической природы, анализъ же этическихъ цѣнностей приводитъ къ установленію ихъ эстетической природы. Болѣе подробно эти вопросы изложены въ нашихъ названныхъ выше гносеологическихъ работахъ, въ которыхъ содержатся предварительныя данныя для построенія чисто-этической гносеологіи и вообще нравственной философіи въ самомъ широкомъ смыслѣ. Въ ближайшихъ работахъ мы надѣемся изложить дальнѣйшіе результаты, къ которымъ мы пришли въ этомъ направленіи.

[58]). Еще большую роль простая индукція должна играть при педагогическомъ изложеніи математики. Дѣйствительно, мы видѣли, что простая индукція является единственнымъ путемъ, черезъ который создаются въ нашемъ сознаніи математическія понятія и сужденія. Но когда учащійся впервые знакомится съ предметомъ, математическая теорія для него всегда создается вновь. Поэтому если мы желаемъ, чтобы учащійся дѣйствительно понялъ теорію, т. е. сознавалъ разумную цѣль теоріи, умѣлъ бы ею пользоваться и вообще овладѣлъ бы ею всецѣло, мы должны ввести его въ новый для него міръ единственнымъ путемъ, который для этого существуетъ, т. е. путемъ индуктивнаго развитія понятій и предложеній. Иначе учащійся можетъ заучить требуемыя отъ него правила, знаки, названія, но онъ не будетъ знать математики, такъ какъ всѣ понятія и предложенія, не имѣя въ его сознаніи индуктивныхъ корней, будутъ для него пустыми, т. е. не обладающими математической реальностью. Словомъ, для того, чтобы математическое знаніе, такъ сказать, принялось въ созна-

віи, выросло и дало плоды, нужны такія же специфическія условія, какія требуетъ для своего развитія растеніе въ условіяхъ воздуха, почвы и климата, и этими условіями педагогія не можетъ пренебрегать. Эти условія можетъ обнаружить лишь изученіе метода математики, а потому это изученіе можетъ дать для педагогіи существенныя указанія. Эти указанія, вытекающія изъ установленія роли индукціи въ математикѣ, въ существенныхъ чертахъ сводятся къ слѣдующему.

1. Преподаваніе должно вестись отъ частнаго къ общему, а не наоборотъ. Нельзя излагать учащемуся математическія теоріи въ ихъ логическомъ порядкѣ, т. е. начиная съ самыхъ общихъ опредѣленій и предложеній, изъ которыхъ дедуктивно выводятся опредѣленія и предложенія болѣе частныя. Хотя къ такому построенію теорій и приводитъ ихъ окончательное развитіе, но для первоначальнаго ознакомленія съ ними такое построеніе непримѣнимо, такъ какъ оно противорѣчитъ естественному ходу развитія математическихъ познаній въ нашемъ духѣ. Это развитіе можетъ совершаться лишь путемъ индуктивныхъ обобщеній изъ болѣе узкихъ опредѣленій и предложеній къ болѣе широкимъ. Поэтому всякую теорію надо всегда излагать сначала въ ея узкомъ, конкретномъ видѣ, какъ она первоначально слагается въ сознаніи, и лишь потомъ, когда она такимъ образомъ хорошо усвоена, слѣдуетъ переходить къ болѣе широкимъ точкамъ зрѣнія. Это тѣмъ болѣе слѣдуетъ имѣть въ виду преподавателямъ, что они часто, желая „улучшить" преподаваніе, сдѣлать его „болѣе научнымъ", стремятся внести сразу логическій порядокъ въ свое изложеніе, а этимъ они не только не улучшаютъ послѣднее, но дѣлаютъ его никуда негоднымъ. Поэтому то мало образованный учитель часто можетъ понятнѣе изложить свой предметъ, чѣмъ начитанный, но недалекій, профессоръ математики, такъ какъ первый ближе къ сознанію учениковъ и потому находитъ общія съ ними схемы понятій, способныя вызвать въ нихъ индуктивную работу обобщенія, между тѣмъ какъ абстрактное изложеніе второго не создастъ въ сознаніи учениковъ математически-реальныхъ понятій и останется безплоднымъ. Это не значитъ, конечно, что

преподаватель математики не долженъ быть въ полной мѣрѣ математически образованъ, но это значитъ, что правильное преподаваніе должно сознательно удерживаться отъ „строго научнаго" изложенія, или вѣрнѣе—придерживаться строгой научности до конца, т. е. помнить объ устанавливаемыхъ наукой педагогическихъ требованіяхъ къ преподаванію.

2. Точно также, какъ не слѣдуетъ придерживаться логическаго порядка изложенія теорій, не слѣдуетъ придерживаться и строго логическаго метода изложенія. Даваемыя опредѣленія и совершаемые выводы—даже въ ихъ узкой формулировкѣ—не должны быть совершенно точны, и въ нихъ опять сознательно слѣдуетъ оставлять нѣкоторые существенные элементы на долю индукціи. Именно, не слѣдуетъ explicite высказывать тѣ аксіомы и доказывать тѣ предложенія, которыя совершенно очевидны для учащагося въ силу естественной предыдущей индуктивной работы его сознанія. Точное и кропотливое доказательство самоочевидныхъ истинъ имѣетъ философское значеніе лишь для того, кто уже объялъ всю область математическаго знанія, но оно будетъ лишь тормозить развитіе того, кто приступаетъ къ изученію этой области впервые, такъ какъ поведетъ это развитіе неестественнымъ путемъ. Увлеченіе математической точностью въ преподаваніи можно объяснить лишь ошибкой въ пониманіи математическаго метода, который многіе считаютъ чисто-логическимъ и потому думаютъ, что улучшить преподаваніе можно лишь увеличивая логическіе элементы теорій за счетъ элементовъ непосредственно наглядныхъ, порождаемыхъ индукціей. Но мы знаемъ, что индукція вообще неустранима изъ математики. Поэтому, будетъ ли ее въ преподаваніи немного болѣе или немного менѣе, это съ принципіальной стороны,—все равно, но это далеко не все равно съ педагогической точки зрѣнія и потому неразумно будетъ жертвовать простотой и наглядностью изложенія во имя достиженія фиктивныхъ идеаловъ. Мы знаемъ, что истинная цѣль математики состоитъ не въ тавтологическомъ пережевываніи нѣсколькихъ понятій, а въ открытіи передъ нашимъ сознаніемъ существенно новаго духовнаго міра, и потому главной

цѣлью преподаванія должно быть возможно полное ознакомленіе съ этимъ міромъ, хотя бы и въ ущербъ методологической строгости. Иначе говоря: измѣненіе программъ преподаванія должно идти не въ сторону строгости доказательствъ, а въ сторону всесторонняго ознакомленія со всѣми отдѣлами математики; доказательства же должны быть возможно упрощены, при чемъ надо пользоваться чувствомъ непосредственной очевидности и развивать его, а не разрушать.

3. Въ преподаваніи математики существенное, а не случайное значеніе имѣютъ конкретные примѣры приложенія общихъ теорій, такъ какъ эти примѣры только и даютъ пищу для индуктивной дѣятельности учащагося. Только черезъ эти примѣры общія математическія понятія и предложенія и получаютъ въ сознаніи учащагося математическую реальность. Поэтому умѣнье пользоваться теоріею въ конкретныхъ случаяхъ и доказываетъ настоящее знаніе теоріи, хотя бы учащійся и не могъ формулировать своего знанія въ общей формѣ. Заученная же общая теорія безъ умѣнья ею пользоваться въ примѣрахъ ничего не стоитъ, такъ какъ она останется въ пониманіи учащагося пустою и, слѣдовательно, не образуетъ математическаго знанія. Поэтому все преподаваніе должно базироваться цѣликомъ на обученіи практическому (т. е. на примѣрахъ) пользованію теоріями; общія же доказательства должны играть лишь вспомогательную, служебную роль, а не наоборотъ, какъ можно часто видѣть въ настоящее время.

4. Однако, индуктивный порядокъ развитія теорій, наглядность доказательствъ и практическій характеръ изложенія въ преподаваніи не слѣдуетъ доводить до крайности (какъ это тоже иногда дѣлаютъ, напримѣръ, въ такъ называемомъ „лабораторномъ" методѣ преподаванія), такъ какъ въ этомъ случаѣ преподаваніе будетъ отставать отъ развитія абстрактнаго мышленія учащагося, и, слѣдовательно, будетъ тормазить его развитіе. Поэтому идеаломъ математическаго преподаванія будетъ нѣкоторый максимумъ его продуктивности, который будетъ достигнутъ тогда, когда изложеніе будетъ наиболѣе соотвѣтствовать

естественному ходу развитія духа учащагося. Для этого индуктивные и дедуктивные элементы преподаваемыхъ теорій должны находиться въ нѣкоторой гармоніи, которую нельзя указать a priori, хотя бы потому, что она зависитъ отъ индивидуальныхъ особенностей учащагося, но которую можно находить все болѣе полно путемъ педагогическаго опыта.

5. Существеннымъ подспорьемъ въ этомъ выборѣ пути математическаго изложенія можетъ служить, кромѣ того, опытъ историческій. Хотя историческій ходъ развитія математики въ частностяхъ, конечно, зависѣлъ отъ многихъ случайныхъ обстоятельствъ, но, въ общемъ, онъ не могъ не отразить общаго хода естественнаго математическаго развитія человѣческаго сознанія, такъ какъ коллективное мышленіе людей, приступающее къ математическимъ проблемамъ, въ общемъ, находится въ тѣхъ же условіяхъ, что и индивидуальное. Поэтому историческій ходъ развитія математики можетъ служить до нѣкоторой степени образцомъ для педагогическаго хода ея изложенія. А потому въ преподаваніи математики необходимо дать мѣсто историческому элементу, такъ какъ такимъ путемъ индуктивное развитіе теорій пойдетъ всего естественнѣе. Но при этомъ, конечно, не слѣдуетъ рабски копировать исторію математики со всѣми ея случайными элементами, нѣтъ, надо лишь выбирать существенные элементы и пользоваться ими лишь пропустивъ черезъ критику педагогическаго опыта. Поэтому педагогическое развитіе математическихъ понятій въ сознаніи учащагося должно представлять лишь нѣкоторое подобіе дѣйствительнаго историческаго процесса, какъ индивидуальное, онтогенетическое развитіе каждаго организма, по закону Геккеля, представляетъ нѣкоторое подобіе его развитія филогенетическаго, т. е. развитія всего вида.

[59]) Встрѣчающіяся въ различныхъ гносеологическихъ изслѣдованіяхъ указанія на роль индукціи въ математикѣ чаще всего имѣютъ въ виду не внутренній, а внѣшній опытъ, при помощи котораго, дѣйствительно, вырабатываются такія простѣйшія понятія ма-

тематики, какъ, напримѣръ, числа (счетъ пальцевъ и т. д). Но, какъ мы видѣли, вся эта подготовительная работа сознанія не относится еще къ области математики, которая пользуется уже готовой способностью нашего духа создавать простѣйшія математическія понятія. Поэтому то всѣ указанія на психологическое происхожденіе простѣйшихъ математическихъ понятій, еще совершенно не касаются самаго математическаго метода, начинающаго функціонировать уже при готовыхъ простѣйшихъ понятіяхъ въ направленіи ихъ логической обработки и дальнѣйшаго обобщенія. Конечно, внѣшній опытъ можетъ служить для индуктивнаго установленія и болѣе сложныхъ математическихъ положеній (напримѣръ, взвѣшивая картонные кругъ и квадратъ и измѣряя соотвѣтственные радіусъ и сторону, можно найти приблизительное значеніе для π), но методологическое значеніе такой индукціи для современной математики ничтожно, и, во всякомъ случаѣ, такая индукція не существенна для математическаго метода. Поэтому встрѣчаемыя указанія на роль этой индукціи въ математикѣ въ большинствѣ случаевъ скорѣе надо признать ошибочными, такъ какъ они игнорируютъ внутренніе ресурсы математическаго метода и потому изображаютъ его въ ложномъ видѣ.

Такъ, напримѣръ, въ своей „Логикѣ" В. Вундтъ (соотвѣтствующія главы можно найти въ русскомъ переводѣ въ сб. № 1 „Новыхъ идей въ математикѣ" подъ ред. проф. А. В. Васильева) приписываетъ индукціи широкую роль въ математикѣ, но именно индукціи наивно-понимаемой, т. е. индукціи внѣшняго опыта. Хотя онъ и старается отдѣлить „историческое значеніе математической индукціи" отъ „перманентныхъ ея формъ", но въ обоихъ случаяхъ онъ имѣетъ въ виду индукцію изъ внѣшняго опыта. Это подтверждается всѣмъ его изложеніемъ, хотя бы, напримѣръ, слѣдующимъ отрывкомъ: „Сюда (т. е. къ „перманентной" индукціи) относятся, во-первыхъ, всѣ аксіоматическія положенія; они не только возникли путемъ индукціи, но для нихъ и въ дальнѣйшемъ не можетъ быть дано никакого иного основанія. То обстоятельство, что математическія аксіомы являются вообще лишь видоизмѣненіями опредѣленій, касающихся числа, величины, пространства и пр., ничего не измѣняетъ въ этомъ. Вѣдь и опредѣленія не имѣютъ другого происхожденія, кромѣ абстракціи изъ опыта". (подчеркнуто нами).

Такимъ образомъ мы видимъ, что Вундтъ здѣсь имѣетъ въ виду индукцію не какъ методъ обоснованія результатовъ математическаго изслѣдованія, а какъ психологическую причину „происхожденія" математическихъ понятій въ нашемъ сознаніи и происхожденія ихъ изъ опыта, и, значитъ, здѣсь онъ еще совершенно не касается метода самой математики. Но точь-въ-точь въ томъ же духѣ онъ продолжаетъ свои разсужденія до самаго конца, чѣмъ и опредѣляется степень цѣнности его изслѣдованія.

Надо, кромѣ того, замѣтить, что многія его утвержденія фактически уже не отвѣчаютъ современному развитію математики, напримѣръ, его утвержденіе насчетъ геометріи, будто ея „основныя положенія имѣютъ своимъ обоснованіемъ лишь указанія на непосредственное созерцаніе" — точка зрѣнія, такъ блестяще опровергнутая теперь изслѣдованіями Гильберта. Зато можно поставить въ заслугу Вундту указаніе на неполноту, такъ называемой, „полной" математической индукціи. И, кромѣ того, надо вообще помнить, что само по себѣ ученіе объ индуктивномъ происхожденіи простѣйшихъ математическихъ понятій изъ опыта вѣрно, но только оно не относится къ ученію о математическомъ методѣ.

Тип. „Печатный Трудъ“ Спб. Прачешный пер. 4.