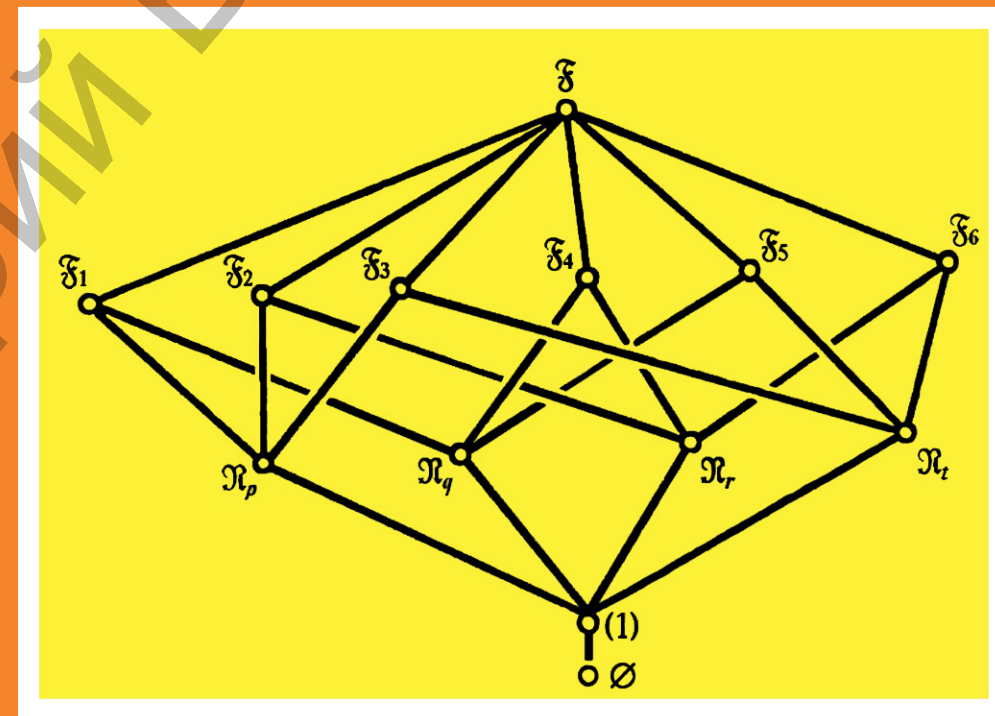
Воробьев
Николай Николаевич –
доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета им. П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент

- Дистрибутивные решетки классов Фиттинга
- Булевы подрешетки классов Фиттинга
- Полные решетки нормальных классов Фиттинга
- Модулярные решетки формаций
- Стоуновы решетки формаций
- Тождества решеток разрешимо насыщенных формаций
- Произведения формаций и классов Фиттинга

Н.Н. Воробьев Алгебра классов конечных групп

Н.Н. Воробьев

Алгебра классов конечных групп



Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
„Витебский государственный университет
имени П.М. Машерова"

Н.Н. ВОРОБЬЕВ

АЛГЕБРА КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Монография

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2012

УДК 512.542
ББК 22.144.1
В75

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования „Витебский государственный университет имени П.М. Машерова". Протокол № 4 от 20.12.2012 г.

Одобрено научно-техническим советом учреждения образования „Витебский государственный университет имени П.М. Машерова". Протокол № 10 от 12.12.2012 г.

Автор: кандидат физико-математических наук,
доцент **Н.Н. Воробьев**

Рецензенты:
член-корреспондент НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук, профессор *Л.А. Шеметков*;
доктор физико-математических наук, профессор *А.Н. Скиба*

Воробьев, Н.Н.
В75 Алгебра классов конечных групп : монография / Н.Н. Воробьев. — Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. — 322 с.
ISBN 978-985-517-393-0.

Монография посвящена теории решеток (разрешимо) насыщенных формаций и локальных классов Фиттинга конечных групп. Основное внимание уделено разработке новых методов исследования и конструирования (разрешимо) насыщенных формаций и локальных классов Фиттинга. Значительная часть материала может служить идейной основой при дальнейшей разработке теорий решеток (разрешимо) насыщенных формаций и локальных классов Фиттинга.

Предназначена для научных работников, аспирантов и студентов математических отделений университетов.

УДК 512.542
ББК 22.144.1

ISBN 978-985-517-393-0

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Характерной особенностью современной алгебры является то обстоятельство, что наряду с традиционным изучением различных индивидуальных объектов (решеток, групп, колец, линейных алгебр и др.) большое внимание уделяется исследованию различных образований, составленных из объектов такого рода (при этом обычно рассматривают классы, т. е. совокупности однотипных алгебраических систем, замкнутые относительно изоморфизмов). Следует однако отметить, что в „чистом" виде теория классов начинает свое развитие лишь в 30-е годы прошлого столетия с выходом работ Г. Биркгофа [253] и Б.Х. Неймана [301], связанных с изучением многообразий групп. В дальнейшем наряду с многообразиями были выделены и изучались и другие классы алгебраических систем (реплично полные классы, квазимногообразия и др.). Значительное влияние на процесс становления теории классов оказал, как известно, А.И. Мальцев. В докладах на IV Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде в 1961 году [117] (см. также [118, 119]) и на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 году [120] (см. также [122]) наряду с другими направлениями, А.И. Мальцев рассматривает как одно из наиболее важных направлений теорию классов алгебраических систем.

Особое место в теории классов алгебраических систем занимают исследования естественно возникающих объектов — полугрупп и решеток таких классов. В связи с изучением алгебры классов алгебраических систем и, в частности, операций на классах, были открыты новые бесконечные серии полугрупп и решеток с важными свойствами. Наиболее ярко это проявилось в теории классов групп, в частности, в теории многообразий групп, поскольку теория расширений групп занимает особое место в теории расширений алгебраических систем. Было доказано, что полугруппа многообразий свободна, а решетка многообразий групп модулярна и не является дистрибутивной; изучение такой решетки тесно связано с изучением относительно свободных групп.

Напомним, что многообразие групп $\mathfrak{M}$ можно определить как такой непустой гомоморф, что любая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу (обозначаемую символом $\mathfrak{M}(G)$), факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{M}$. Произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — это класс всех таких групп G, что $\mathfrak{H}(G) \in \mathfrak{M}$. Если рассмотреть эти две конструкции в классе всех конечных групп, то мы придем к определениям формации и произведения двух формаций (в этом случае вместо $\mathfrak{H}(G)$ обычно пишут $G^{\mathfrak{H}}$). Явная аналогия в определениях многообразия групп и формации ведет к предположению, что теория формаций должна быть близка в некоторых аспектах теории многообразий. Это действительно так, если мы рассматриваем алгебру классов. Более того, решетки и полугруппы многообразий и формаций оказались тесно связанными. В теории классов, например, хорошо известен следующий результат А.Н. Скибы: *полугруппа всех многообразий вкладывается в полугруппу всех наследственных формаций конечных групп, а решетка всех локально конечных многообразий вкладывается в решетку всех наследственных формаций конечных групп* [191] (см. также [203,230]). Отметим, что хотя многие результаты алгебры формаций являются аналогами соответствующих результатов теории многообразий, в то же время методы их доказательств практически не имеют пересечений с методами теории многообразий. Более того, в отличие от решетки всех многообразий групп, оказалось, что большинство решеток формаций являются алгебраическими. Отметим попутно, что вопрос об алгебраичности решетки всех насыщенных формаций конечных групп был впервые поставлен Б.И. Плоткиным в 1984 году на XVIII Всесоюзной алгебраической конференции (г. Москва) во время обсуждения совместного пленарного доклада Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы „Алгебра классов конечных групп". Такая задача была решена А.Н. Скибой в его монографии „Алгебра формаций" (Минск : Беларуская навука, 1997). В дальнейшем были найдены другие бесконечные серии алгебраических решеток формаций и классов Фиттинга и описаны их компактные элементы (см., например, [54,104,105,158,209,218]).

Двойственным объектом по отношению к формации является класс Фиттинга, т. е. класс конечных групп, замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп и их произведений. Уже в первые годы развития теории классов Фиттинга в начале 60-х г. г. прошлого столетия были получены замечательные результаты, связанные с изучением алгебры таких классов, что дало существенный дальнейший импульс к развитию алгебры классов вцелом (см. книги [264,270], а также работы [254,258,267,282,298,299]).

Отметим также, что первоначально теория формаций рассматривалась исключительно как аппарат исследования непростых конечных групп. По мере развития такого направления теории формаций возникла необходимость изучения самих формаций и, в частности, изучения алгебры формаций, связанной с исследованием различных операций над формациями. Среди таких операций важную роль играют операция умножения формаций, приводящая к необходимости изучения полугрупп формаций и операции пересечения и порождения формаций, приводящие к необходимости изучения различных классов решеток формаций. На этом этапе развития теории формаций открылся второй прикладной аспект этой теории, а именно: в рамках теории формаций стали активно разрабатываться методы построения решеток и полугрупп с различными заданными свойствами. И, наконец, следует отметить, что в последние годы открылся новый и несколько неожиданный аспект применения теории формаций в рамках теории формальных языков [247–249]. При этом оказалось, что как и в других прикладных аспектах теории формаций, наиболее полезными являются так называемые насыщенные и частично насыщенные формации.

Пусть ω — произвольное непустое множество простых чисел. Формация $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной* (или *ω-локальной*), если для любого простого числа $p \in \omega$ формация $\mathfrak{F}$ содержит всякую конечную группу G с $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ (А. Баллестер-Болинше и Л.А. Шеметков [241]). Формация $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо ω-насыщенной* (или *ω-композиционной*), если для любого простого числа $p \in \omega$ формация $\mathfrak{F}$ содержит всякую конечную группу G с $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ (Л.А. Шеметков [317]). Понятно, что всякая ω-насыщенная формация является разрешимо ω-насыщенной, но обратное в общем случае неверно. Если $\omega = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то символ ω опускают и говорят о *насыщенных* (или *локальных*) и *разрешимо насыщенных* (или *композиционных*, Л.А. Шеметков [224]) формациях соответственно.

Различные аспекты теории формаций, связанные с применением формационных методов при исследовании конечных и бесконечных групп в полном объеме отражены в монографиях [109, 178, 224, 230, 246, 252, 262, 264, 275, 286]. Многие фундаментальные результаты и основные понятия алгебры классов конечных групп хорошо освещены в монографиях [203, 230, 264]. Вместе с тем, следует отметить, что в последние пятнадцать лет был получен ряд новых глубоких результатов, связанных с изучением произведений и решеток формаций. Недавно опубликованная монография В.М. Селькина [171] посвящена изложению новых результатов, связанных с исследованием произведений формаций. Основной целью данной монографии является систематизация и дальнейший анализ свойств алгебры формаций, главным образом связанных с исследованием полугрупповых и решеточных операций на классах конечных групп.

Глава 1 носит вспомогательный характер. Здесь приводится ряд общих понятий, среди которых особое место отводится (разрешимо) ω-насыщенным формациям и ω-локальным классам Фиттинга, играющим важную роль на протяжении всей книги. Большое внимание уделяется описанию общих свойств и построению конкретных примеров (разрешимо) ω-насыщенных формаций и ω-локальных классов Фиттинга. Еще одним важным понятием, которое существенно использует автор, является понятие подгруппового функтора (в смысле А.Н. Скибы [203]).

Глава 2 посвящена произведениям n-кратно (разрешимо) ω-насыщенных формаций и ω-локальных классов Фиттинга. В параграфах 2.1, 2.3 и 2.4 приведено описание спутников произведений таких классов. Основной целью главы 2 является решение задачи А.Н. Скибы (2000) о разрешимости первого сомножителя несократимых факторизаций однопорожденной наследственной насыщенной формации. Такая задача решена в параграфе 2.2.

В главе 3 изучаются решетки классов Фиттинга. В параграфе 3.2 дается описание булевых подрешеток решетки всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга. В параграфе 3.3 найдены методы построения стоуновых решеток с заданными свойствами в рамках теории кратно локальных классов Фиттинга. Для произвольного n-кратно локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $L^n(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех n-кратно локальных подклассов Фиттинга из $\mathfrak{F}$. Если же класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тотально локален, то через $L^\infty(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех его тотально локальных подклассов Фиттинга. Оказалось, что решетки $L^n(\mathfrak{F})$ и $L^\infty(\mathfrak{F})$ стоуновы тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является подклассом класса всех нильпотентных групп. Параграф 3.4 посвящен решению задачи Скибы–Шеметкова (1999) о дистрибутивности решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга. Отметим, что другими методами эта задача решена в работе Рейфершейд [308]. В параграфе 3.5 доказана полнота решетки $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга, где $\mathfrak{X}$ — класс Фишера. Последних два параграфа главы 3 связаны с дальнейшим анализом известной гипотезы Локетта о нахождении таких классов Фиттинга, в решетку секции Локетта которых сюръективно отображается решетка всех нормальных классов Фиттинга.

Глава 4 „Решетки формаций” связана с изучением тождеств решеток насыщенных и обобщенно насыщенных формаций. В параграфе 4.2 описаны булевы подрешетки решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций. Результаты этого параграфа применены в параграфе 4.3 для классификации функторно замкнутых кратно насыщенных формаций со стоуновой решеткой подформаций. В параграфе 4.6 доказана алгебраичность и модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций. Параграфы 4.4 и 4.7 посвящены исследованию тождеств решеток τ-замкнутых кратно ω-насыщенных и кратно разрешимо ω-насыщенных формаций. Отметим, что из результатов этих двух параграфов в качестве следствий получаются теоремы о модулярности решеток насыщенных и обобщенно насыщенных формаций, доказанные ранее в работах многих других авторов (см. [100, 192, 203, 206, 209, 219, 230, 241]).

Последняя глава посвящена обзору результатов по алгебре классов, имеющих непосредственное отношение к содержанию данной монографии.

Библиография содержит свыше 300 статей, однако она не является исчерпывающей в этой области. За небольшим исключением, она содержит лишь статьи, на которые имеются ссылки в тексте. Для удобства читателя в конце книги помещен перечень основных используемых определений и обозначений. Подробный предметный указатель поможет читателю найти место, где впервые вводится соответствующее понятие. В терминологии мы будем следовать монографиям [203, 224, 230]. В дальнейшем везде, где не оговорено противное, все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Все используемые сплетения регулярны.

Монография посвящается 75-летию члена-корреспондента Национальной академии наук Беларуси, заслуженного деятеля науки Республики Беларусь, доктора физико-математических наук, профессора Леонида Александровича Шеметкова.

Автор искренне признателен всем, кто содействовал выходу данной книги. Прежде всего благодарю самых близких мне людей — моих дорогих родителей Николая Тимофеевича Воробьева, Светлану Ивановну Воробьеву и брата Сергея. Без их постоянной поддержки выход данной книги был бы невозможен. Особую благодарность выражаю своему учителю, профессору Александру Николаевичу Скибе, чей постоянный интерес и внимание ко мне стимулировали все мои исследования и, в конечном счете, способствовали выходу данной монографии.

Выражаю искреннюю благодарность рецензентам — члену-корреспонденту Национальной академии наук Беларуси, доктору физико-математических наук профессору Л.А. Шеметкову и доктору физико-математических наук профессору А.Н. Скибе и моим ученикам: кандидату физико-математических наук А.А. Цареву, А.П. Меховичу и В.О. Побойневу, оказавшим большую помощь при подготовке рукописи. Автор благодарит кандидата физико-математических наук, доцента И.В. Близнеца за помощь и полезные консультации по TEX, М.Н. Клецкова и С.А. Коренева — за подготовку оригинал-макета обложки.

Глава 1

БАЗИСНЫЕ ПОНЯТИЯ. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1 Основные определения

1.1.1 Определение. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией,* если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если N_1, $N_2 \trianglelefteq G$, причем $N_1 \cap N_2 = 1$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Если формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}$ называется *подформацией* формации $\mathfrak{F}$.

По определению, пустое множество $\varnothing$ является формацией (*пустая формация*). Формациями являются: класс $\mathfrak{G}$ всех групп, класс (1) всех единичных групп (*единичная формация*), класс $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп, класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп, класс $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп, класс $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп, класс $\mathfrak{N}_p$ всех p-групп (p — фиксированное простое число), класс $\mathfrak{G}_{p'}$ всех p'-групп, класс $\mathfrak{N}_{p'}$ всех нильпотентных p'-групп, класс $\mathfrak{S}_{p'}$ всех разрешимых p'-групп, класс $\mathfrak{G}_\pi$ всех π-групп, класс $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп, класс $\mathfrak{S}_\pi$ всех разрешимых π-групп, класс $\mathfrak{G}_{\omega'}$ всех ω'-групп, класс $\mathfrak{G}_{\omega d}$ всех таких групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой, класс $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп. Вместе с тем, класс всех конечных циклических групп не является формацией.

Если $\pi = \varnothing$, то, по определению, $\mathfrak{G}_\varnothing = \mathfrak{N}_\varnothing = \mathfrak{S}_\varnothing = (1)$.

1.1.2 Определение. Непустой класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга,* если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если M, $N \trianglelefteq G = MN$, причем M, $N \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Классы $\mathfrak{G}$, (1), $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{G}_{p'}$, $\mathfrak{N}_{p'}$, $\mathfrak{S}_{p'}$, $\mathfrak{G}_\pi$, $\mathfrak{N}_\pi$, $\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{G}_{\omega'}$, $\mathfrak{G}_{\omega d}$ являются классами Фиттинга. Вместе с тем, класс $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп и класс $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп не являются классами Фиттинга.

1.1.3 Определение. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы групп, то *произведение классов* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ определяется следующим образом:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G \text{ обладает нормальной подгруппой } N \in \mathfrak{F}$$

$$\text{такой, что } G/N \in \mathfrak{H}).$$

Если $\mathfrak{F} = \varnothing$ или $\mathfrak{H} = \varnothing$, то полагают $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \varnothing$.

Отметим, что произведение классов — бинарная алгебраическая операция на множестве всех классов групп, которая не ассоциативна и не коммутативна. Однако произведение классов для двух формаций в общем случае не является формацией ([264, гл. IV, пример 1.6]). Вместе с тем В. Гашюцом [270] был найден способ, как изменить определение произведения классов, чтобы произведение двух формаций снова являлось формацией.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то всякая группа G обладает наименьшей нормальной подгруппой, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$, называемой $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G и обозначаемой символом $G^{\mathfrak{F}}$. Полагают $G^{\omega d} = G^{\mathfrak{G}_{\omega d}}$, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}}$.

1.1.4 Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации. *Формационным произведением* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}).$$

1.1.5 Замечание. Ясно, что $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ всякий раз, когда $1 \in \mathfrak{F}$, и если $\mathfrak{F} = \mathrm{S}_n\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. В общем случае согласно [264, гл. IV, пример 1.6] имеет место неравенство $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \neq$ $\neq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Можно показать, что произведение классов для двух классов Фиттинга в общем случае не является классом Фиттинга (см. шаг 7 из [264, гл. IX, пример 2.14 b)]). Вместе с тем был найден специальный вид произведения — фиттингово произведение, такой чтобы произведение двух классов Фиттинга снова являлось классом Фиттинга.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то всякая группа G обладает наибольшей нормальной $\mathfrak{F}$-подгруппой, называемой $\mathfrak{F}$-*радикалом* группы G и обозначаемой символом $G_{\mathfrak{F}}$.

Полагают, что $G_{\omega d} = G_{\mathfrak{G}_{\omega d}}$, $F_p(G) = G_{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}$.

1.1.6 Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга. *Фиттинговым произведением* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп

$$\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} = (G \mid G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}).$$

1.1.7 Замечание. Ясно, что $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, и, что, если $\mathfrak{H} = \mathrm{Q}\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Очевидно также, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$. Вместе с тем, согласно шагу 8 из [264, гл. IX, пример 2.14 b)], в общем случае $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$. Кроме того, если $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{K}$, то $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{K}$. Вместе с тем, если $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{K}$ — классы Фиттинга, то согласно шагу 1 из [264, гл. IX, пример 2.5 a)], в общем случае $\mathfrak{H} \diamond \mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{K} \diamond \mathfrak{F}$. Однако если $\mathfrak{F} = \mathrm{Q}\mathfrak{F}$, то

$$\mathfrak{H} \diamond \mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}\mathfrak{F} = \mathfrak{K} \diamond \mathfrak{F}.$$

1.1.8 Теорема ([264, гл. IV, теорема 1.8 a), c); гл. IX, теорема 1.12 a),c)]). *Справедливы следующие утверждения*:

1) *относительно формационного произведения совокупность всех формаций образует полугруппу*;

2) *относительно фиттингова произведения совокупность всех классов Фиттинга образует полугруппу.*

1.1.9 Определение. Непустая совокупность классов групп Θ называется *полной решеткой классов* [203], если пересечение любой совокупности классов из Θ снова принадлежит Θ, и во множестве Θ имеется такой класс $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого другого класса $\mathfrak{H} \in \Theta$.

Относительно включения $\subseteq$ всякая полная решетка формаций и всякая полная решетка классов Фиттинга являются полными решетками в обычном смысле.

1.1.10 Определение. Полная решетка формаций (классов Фиттинга) Θ называется *частичной алгеброй* формаций (классов Фиттинга) (см. [203]), если для любого простого числа p, для любой формации (любого класса Фиттинга) $\mathfrak{F} \in \Theta$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \in \Theta$ (имеет место $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \in \Theta$ соответственно).

Как показано в [203], такие полные решетки и частичные алгебры играют при изучении классов групп ту же роль, что и сами классы (формации, классы Фиттинга и др.) при изучении групп.

1.2 Спутники формаций

Локальные спутники. В дальнейшем символ ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел. Следуя [206], символом $G_{\omega d}$ мы обозначаем наибольшую нормальную в G подгруппу N со свойством $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/K из N ($G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \pi(\mathrm{Soc}(G)) = \varnothing$).

Для произвольного класса простых групп $\mathfrak{T}$ символ $\mathrm{E}\mathfrak{T}$ обозначает класс всех таких групп, у которых все композиционные факторы принадлежат $\mathfrak{T}$. Как и в [264], через $C^p(G)$ мы обозначаем пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, чьи композиционные факторы имеют простой порядок p ($C^p(G) = G$, если в G нет главных факторов с таким свойством), через $R_\omega(G)$ мы обозначаем $\mathfrak{S}_\omega$-радикал группы G, т. е. произведение всех таких ее разрешимых нормальных подгрупп, чьи порядки являются ω-группами. Легко видеть, что $C^p(G) = G_{\mathfrak{G}_{cp}}$, где $\mathfrak{G}_{cp}$ — класс всех таких групп, все главные p-факторы которых центральны (см. [108, лемма 1.2]).

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}, \tag{1.1}$$

где $f(\omega') \neq \varnothing$. Следуя [206, 209], соответственно, сопоставим функции f два класса групп

$$LF_\omega(f) = \big(G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p)$$
$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\big)$$

и

$$CF_\omega(f) = \big(G \mid G/G_{\mathfrak{S}_\omega} \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p)$$
$$\text{для всех таких } p \in \omega, \text{ что в } G \text{ имеется}$$
$$\text{композиционный фактор порядка } p\big).$$

1.2.1 Замечание. Пусть f — произвольная функция вида (1.1), $\pi_1 = \omega \cap \mathrm{Supp}(f)$ и $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$, где $\mathrm{Supp}(f) = \{p \in \omega \mid f(p) \neq \varnothing\}$. Легко видеть, что

$$LF_\omega(f) = \left(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{G}_{p'}\right) \cap \left(\bigcap_{p\in\pi_1} \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p)\right) \cap \mathfrak{G}_{\omega d} f(\omega'). \tag{1.2}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (1.2) :

1. Если $\pi_1 = \varnothing$, то формула (1.2) приобретает вид

$$LF_\omega(f) = \mathfrak{G}_{\omega'} \cap \mathfrak{G}_{\omega d} f(\omega') = \mathfrak{G}_{\omega'} \cap f(\omega').$$

2. Если $\pi_1 = \omega$, то мы получаем формулу

$$LF_\omega(f) = \left(\bigcap_{p\in\omega} \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p)\right) \cap \mathfrak{G}_{\omega d} f(\omega').$$

3. Если $\omega = \{p\}$ и $f(p) \neq \varnothing$, то формула (1.2) приобретает вид

$$LF_{\{p\}} = LF_p(f) = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p) \cap \mathfrak{G}_{pd} f(p').$$

Если $\omega = \{p\}$ и $f(p) = \varnothing$, то

$$LF_p(f) = \mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{G}_{pd} f(p') = \mathfrak{G}_{p'} \cap f(p').$$

4. Если $\omega = \mathbb{P}$, то $\pi_1 = \mathrm{Supp}(f)$, $\pi_2 = \mathbb{P} \setminus \mathrm{Supp}(f)$. В этом случае получаем формулу

$$LF_{\mathbb{P}}(f) = LF(f) = \left(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{G}_{p'}\right) \cap \left(\bigcap_{p\in\pi_1} \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p)\right).$$

1.2.2 Замечание. Пусть f — произвольная функция вида (1.1), $\pi_1 = \mathrm{Supp}(f)$ и $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$, где $\mathrm{Supp}(f) = \{p \in \omega \mid f(p) \neq \varnothing\}$. Легко видеть, что

$$CF_\omega(f) = \left(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathrm{E}(Z_p)'\right) \cap \left(\bigcap_{p\in\pi_1} \mathfrak{G}_{cp} f(p)\right) \cap \mathfrak{G}_\omega f(\omega'). \qquad (1.3)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (1.3) :
1. Если $\omega = \{p\}$ и $f(p) \neq \varnothing$, то формула (1.3) приобретает вид

$$CF_{\{p\}}(f) = CF_p(f) = \mathfrak{G}_{cp} f(p) \cap \mathfrak{N}_p f(p').$$

Если $\omega = \{p\}$ и $f(p) = \varnothing$, то

$$CF_p(f) = \mathrm{E}(Z_p)' \cap \mathfrak{N}_p f(p').$$

2. Если $\omega = \mathbb{P}$, то $\pi_1 = \mathrm{Supp}(f)$, $\pi_2 = \mathbb{P} \setminus \mathrm{Supp}(f)$. В этом случае получаем формулу

$$CF_{\mathbb{P}}(f) = CF(f) = \left(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathrm{E}(Z_p)'\right) \cap \left(\bigcap_{p\in\pi_1} \mathfrak{G}_{cp} f(p)\right).$$

Поскольку пересечение и произведение любых двух формаций снова является формацией, то из приведенных формул (1.2) и (1.3) вытекает, что для любой функции f вида (1.1) классы групп $LF_\omega(f)$ и $CF_\omega(f)$ являются формациями.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1.1), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной* или *ω-локальной формацией* с *ω-локальным спутником* f [206]. Если же $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, то $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо ω-насыщенной* или *ω-композиционной формацией* с *ω-композиционным спутником* f [209]. ω-Локальный (ω-композиционный) спутник называется *пустым,* если $\mathrm{Supp}(f) = \varnothing$.

Нетрудно заметить, что класс локальных формаций совпадает с классом $\mathbb{P}$-локальных формаций (см. подробнее [206]), а класс композиционных формаций совпадает с классом $\mathbb{P}$-композиционных формаций.

Локальный спутник f формации $\mathfrak{F}$ называется *минимальным спутником* формации $\mathfrak{F}$, для любого ее локального спутника h и любого простого числа p имеет место включение $f(p) \subseteq h(p)$. Локальный спутник f формации $\mathfrak{F}$ называется *внутренним* (или *приведенным*), если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Для произвольного внутреннего локального спутника f формации $\mathfrak{F}$ через F обозначают такой спутник, что $F(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Легко видеть (см. подробнее [224, теорема 3.3]), что $\mathfrak{F} = LF(F)$, причем спутник F таков, что имеет место включение $h(p) \subseteq F(p)$ для любого другого внутреннего локального спутника h формации $\mathfrak{F}$ и любого простого числа p. Локальный спутник F формации $\mathfrak{F}$ называется *каноническим.* В дальнейшем канонические спутники обозначаются большими латинскими буквами.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, p — простое число. Полагают (см. [203])

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Пересечение всех локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают через $l\mathrm{form}\mathfrak{X}$ и называют *локальной формацией, порожденной* $\mathfrak{X}$.

1.2.3 Лемма ([230, теорема 8.3]; [203, следствие 1.1.6]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}\mathfrak{X}$ и f — минимальный локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$;
2) $f(p) = \mathfrak{X}(F_p)$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$;
3) *если* $\mathfrak{F} = LF(h)$, *то для любого* $p \in \pi(\mathfrak{F})$ *имеет место*

$$f(p) = \mathrm{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(A) = 1).$$

1.2.4 Замечание. Процедура получения канонического локального спутника формации $\mathfrak{F}$, исходя из наличия ее минимального локального спутника f, состоит в следующем. Строим локальный спутник F такой, что $F(p) = \mathfrak{N}_p f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p)$ для любого простого p. Спутник F и будет каноническим локальным спутником формации $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем без всяких ссылок мы будем использовать следующую очевидную лемму.

1.2.5 Лемма ([206, лемма 1]). *Пусть* N *— нормальная подгруппа группы* G. *Справедливы следующие утверждения*:
1) *если* N *—* p'*-группа, то* $F_p(G/N) = F_p(G)/N$;
2) *если* G/N *—* p'*-группа, то* $F^p(G) = F^p(N)$;
3) *если* $N \in \mathfrak{G}_{\omega d}$, *то* $(G/N)_{\omega d} = G_{\omega d}/N$;
4) *если* $G/N \in \mathfrak{G}_{\omega d}$, *то* $G^{\omega d} = N^{\omega d}$.

1.2.6 Пример. Пусть формация $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'}$, а f — такой пустой ω-локальный спутник, что $f(\omega') = \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M} = LF_\omega(f)$.

Действительно, если $G \in \mathfrak{M}$, то, ввиду того, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'}$ имеем

$$G \cong G/1 = G/G_{\omega d} \in \mathfrak{M} = f(\omega').$$

Значит, $\mathfrak{M} \subseteq LF_\omega(f)$. Обратно. Пусть $G \in LF_\omega(f)$. Тогда $G/G_{\omega d} \in$ $\in f(\omega') = \mathfrak{M}$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Но по условию спутник f пустой. Значит, $\omega \cap \pi(G) = \varnothing$. Поэтому $G_{\omega d} = 1$. Следовательно,

$$G \cong G/1 = G/G_{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{M}.$$

Значит, $LF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{M}$. Итак, $\mathfrak{M} = LF_\omega(f)$.

Таким образом, всякая подформация формации $\mathfrak{G}_{\omega'}$ ω-локальна. Отсюда, в частности, вытекает, что пустая формация $\varnothing$ и формация единичных групп (1) ω-локальны при всех ω.

Напомним, что непустая формация $\mathfrak{F}$ называется *p-локальной* [200,227] (p — простое число), если $l\mathrm{form}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ p-локальна для любого $p \in \omega$, то $\mathfrak{F}$ называется *ω-локальной формацией.* Формация $\mathfrak{F}$ называется *p-насыщенной* (см. [200, 227]), если из $G/K \in \mathfrak{F}$, где K — p-подгруппа из $\Phi(G)$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной,* если ей принадлежит всякая группа G с $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$.

1.2.7 Теорема ([206, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщена;*
2) $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех* $p \in \omega$;
3) $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ *для всех* $p \in \omega$;
4) *формация $\mathfrak{F}$ ω-локальна.*

Доказательство. Покажем сначала импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть h — минимальный локальный спутник формации $l\mathrm{form}\mathfrak{F}$. Тогда, согласно лемме 1.2.3, $h(q) = \mathfrak{F}(F_q)$ для всех простых q.

Пусть формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщенна. Тогда $\mathfrak{F}$ p-насыщена для всех $p \in \omega$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$. Поскольку канонический спутник формации $l\mathrm{form}\mathfrak{F}$ является ее внутренним спутником, то

$$\mathfrak{N}_p h(p) \subseteq l\mathrm{form}\mathfrak{F}.$$

Если $A \in \mathfrak{N}_p h(p)$, то $A^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p$. С другой стороны, из $A \in \mathfrak{N}_p h(p)$ и $l\mathrm{form}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$ следует $A^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{p'}$. Значит, $A^{\mathfrak{F}} = 1$, т. е. $A \in \mathfrak{F}$. Тем самым,

$$\mathfrak{N}_p h(p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Если же $\omega \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, то $\mathfrak{F}(F_p) = \varnothing$, где $p \in \omega$. Поэтому

$$\varnothing = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$$

для всех $p \in \omega$.

Пусть имеет место 2). Докажем, что формация $\mathfrak{F}$ p-насыщенна, где $p \in \omega$. Пусть T — группа минимального порядка из $l\mathrm{form}\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$. Ясно, что T имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $L = T^{\mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}}$. Так как $l\mathrm{form}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то $T^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Теперь ясно, что $T^{\mathfrak{F}}$ — p-группа и $T^{\mathfrak{F}} = L$. Кроме того, $F_p(T) = O_p(T)$. Так как $T \in l\mathrm{form}\mathfrak{F}$, то $T/F_p(T) \in h(p)$ и, значит, $T \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Поэтому

$$T \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F},$$

т. е. формация $\mathfrak{F}$ p-локальна. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ p-насыщенна.

Действительно, если $\mathfrak{F}$ p-локальна и $A/B \in \mathfrak{F}$, где B — p-группа и $B \subseteq \Phi(A)$, то $A^{\mathfrak{F}}$ — p-группа, а из p-локальности $\mathfrak{F}$ следует, что $A^{\mathfrak{F}}$ — p'-группа, т. е. $A^{\mathfrak{F}} = 1$. Поэтому формация $\mathfrak{F}$ p-насыщенна.

Если же $\omega \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, то формация $\mathfrak{F}$ p-насыщенна, где $p \in \omega$.

Покажем теперь импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\mathfrak{M} = LF_{\omega}(f)$. Включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$ очевидно. Предположим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Тогда если R — ω'-группа, то $G_{\omega d} = 1$. Значит,

$$G \cong G/G_{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $\omega \cap \pi(R) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$. Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \cong G/F_p(G) \in f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F},$$

что противоречит выбору группы G. Значит, R — p-группа. По доказанному выше, формация $\mathfrak{F}$ p-насыщена. Следовательно, $R \not\subseteq \Phi(G)$, т. е. $R = C_G(R) = F_p(G)$. Но тогда $G/R \in f(p)$. Значит,

$$G \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Итак, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$.

Покажем, наконец, импликацию 4) $\Rightarrow$ 1). Пусть имеет место утверждение 4). Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ не является ω-насыщенной. Тогда найдется такое $p \in \omega$ и такая группа G с нормальной подгруппой $L \subseteq O_p(G) \cap \Phi(G)$, что $G/L \in \mathfrak{F}$, но $G \notin \mathfrak{F}$. Поскольку

$$(G/L)_{\omega d} = G_{\omega d}/L \text{ и } F_q(G/L) = F_q(G)/L$$

для простых $q \neq p$ и, кроме того, $G/L \in \mathfrak{F}$, то

$$G/G_{\omega d} \cong (G/L)/(G/L)_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и}$$

$$G/F_q(G) \cong (G/L)/F_q(G/L) \in f(q)$$

для всех $q \in \omega \cap \pi(G) = \omega \cap \pi(G/L)$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Ввиду примера 1.2.6 обе формации $\varnothing$ и (1) насыщены. Используя теорему 1.2.7, мы можем обосновать следующие примеры

1.2.8 Пример. Пусть

$$\mathfrak{F} = (A \times B \mid A \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{N}_\pi) = (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A}) \otimes \mathfrak{N}_\pi,$$

где $\pi \subseteq \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Согласно [201, следствие 1], класс $\mathfrak{F}$ — формация. Ввиду примера 1.2.6 и теоремы 1.2.7 эта формация не является p-насыщенной, но она ω-насыщена, где $\omega = \mathbb{P} \setminus \{p\}$.

1.2.9 Пример. Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$ p-насыщена, а значит, по теореме 1.2.7 эта формация p-локальна. Пусть p-локальный спутник f таков, что $f(p') = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{F}$. Тогда нетрудно показать, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} = LF_p(f)$.

1.2.10 Пример. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi$ — формация всех π-групп ($\varnothing \neq \pi \subseteq$ $\subseteq \mathbb{P}$). Пусть f — такой спутник, что

$$f(a) = \begin{cases} (1), & \text{если } a = \mathbb{P}', \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \mathbb{P} \setminus \pi, \\ \mathfrak{G}_\pi, & \text{если } a = p \in \pi. \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{F} = LF_{\mathbb{P}}(f) = LF(f)$.

Действительно, если $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi$, то $G/G_{\mathbb{P}d} = G/G \in (1) =$ $= f(\mathbb{P}')$ и $G/F_p(G) \in \mathfrak{G}_\pi = f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$. Поэтому $G \in$ $\in LF(f)$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq LF(f)$. Обратно. Предположим, что $LF(f) \not\subseteq$ $\subseteq \mathfrak{F}$ и пусть G — группа минимального порядка из $LF(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Если $\pi(R) \not\subseteq \pi$ и $p \in \pi(R) \setminus \pi$, то $G/F_p(G) \in f(p) = \varnothing$. Противоречие. Значит, $\pi(R) \subseteq \pi$. Отсюда $G \in \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $LF(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ и $f(a) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то f называется *внутренним* (или *приведенным*) спутником формации $\mathfrak{F}$.

Следующая лемма показывает, что всякая ω-насыщенная формация обладает по крайней мере одним внутренним ω-локальным спутником.

1.2.11 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *$\mathfrak{F} = LF_\omega(g)$, где $g(a) = f(a) \cap \mathfrak{F}$ для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$*;

2) *$\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$, где $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = LF_\omega(g)$. Так как $g(a) \subseteq f(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то, очевидно, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — формация, то $G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F}$ и $G/F_p(G) \in \in \mathfrak{F}$. Значит, $G/G_{\omega d} \in f(\omega') \cap \mathfrak{F} = g(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F} = g(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Пусть h — такой ω-локальный спутник, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = = f(p)$ для любого $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{H} = LF_\omega(h)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F} = h(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p) = h(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа G монолитична с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{H} = LF_\omega(h)$, то $G/G_{\omega d} \in h(\omega') = \mathfrak{F}$. Значит, $R \subseteq G_{\omega d}$ и по лемме 1.2.5

$$G/G_{\omega d} \cong (G/R)/(G_{\omega d}/R) = (G/R)/(G/R)_{\omega d} \in f(\omega').$$

Кроме того, $G/F_p(G) \in h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор ω-локальных спутников. Обозначим через $\bigcap_{i \in I} f_i$ такой ω-локальный спутник f, что $f(a) = = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Следующие две леммы доказываются прямой проверкой.

1.2.12 Лемма ([206, лемма 2]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$. *Тогда* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, *где* $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.

Полагают $f \leqslant h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

1.2.13 Лемма ([206, лемма 3]). *Пусть* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— цепь формаций,* $\{f_i \mid i \in I\}$ *— такая цепь ω-локальных спутников, что* $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$ *и* $f_i \leqslant f_j$ *имеет место в точности тогда, когда* $\mathfrak{F}_i \subseteq \subseteq \mathfrak{F}_j$ *для всех* $i, j \in I$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i = LF_\omega(f)$, *где* $f(a) = \bigcup_{i \in I} f_i(a)$ *для каждого* $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Непустая совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций,* если $\varnothing$, $\mathfrak{G} \in \Theta$ и пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ. Формации, принадлежащие Θ, называются Θ-*формациями.*

Спутник f назовем Θ-*значным,* если все его значения принадлежат Θ. Ниже везде Θ обозначает некоторую полную решетку формаций. Символом Θ^{ω_l} обозначим совокупность всех формаций, которые обладают ω-локальным Θ-значным спутником. Ввиду примеров 1.2.6, 1.2.10 и леммы 1.2.12 Θ^{ω_l} — полная решетка формаций.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех ω-локальных Θ-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.2.5 $\bigcap\limits_{i\in I} f_i$ — ω-локальный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, который называется *минимальным ω-локальным Θ-значным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

1.2.14 Лемма ([206, лемма 4]). *Если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Прежде заметим, что так как $O_p(G) \subseteq F_p(G)$, то $G/F_p(G) \in f(p)$. А поскольку $(G/O_p(G))_{\omega d} = G_{\omega d}/O_p(G)$ и для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$ имеет место

$$G/F_q(G) \cong (G/O_p(G))/(F_q(G)/O_p(G)) =$$
$$= (G/O_p(G))/F_q(G/O_p(G)),$$

то $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_q(G) \in f(q)$. Значит, $G \in LF_\omega(f)$. Лемма доказана.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ и для любой полной решетки формации Θ через $\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ мы обозначаем пересечение всех тех формаций из Θ, которые содержат все группы из $\mathfrak{X}$. В частности, мы пишем $\Theta\mathrm{form}(G)$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$.

1.2.15 Лемма ([206, лемма 5]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп. Если $\mathfrak{F} = \Theta^{\omega_l}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ и f — минимальный ω-локальный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = \Theta\mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = \Theta\mathrm{form}\big(\mathfrak{X}(F_p)\big)$ *для всех* $p \in \omega$;

3) *если $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$, спутник h Θ-значен и p — некоторое фиксированное число из ω, то $\mathfrak{F} = LF_\omega(f_1)$, где $f_1(a) = h(a)$ при любом $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$ и*

$$f_1(p) = \Theta\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1),$$

кроме того, $f_1(p) = f(p)$;

4) *$\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$, где $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = f(p)$ при всех $p \in \omega$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) очевидны. Докажем 3). Пусть f_1 — спутник, описанный в пункте 3), $\mathfrak{M} = LF_\omega(f_1)$. Поскольку для любой группы G имеет место $O_q(G/F_q(G)) = 1$, то для всех $G \in \mathfrak{F}$ имеет место $G/F_p(G) \in f_1(p)$. Поэтому $\mathfrak{X}(F_p) \subseteq f_1(p)$. Следовательно, $f \leqslant f_1 \leqslant h$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Пусть теперь $G \in h(p) \cap \mathfrak{F}$ и $O_p(G) = 1$. Обозначим через Z_p некоторую группу порядка p. Пусть $T = Z_p \wr G = [K]G$, где K — база сплетения T. Тогда $K = F_p(G)$. Но ввиду леммы 1.2.14, $T \in \mathfrak{F}$. Значит,

$$G \cong T/F_p(T) \in f(p).$$

Следовательно, $h(p) \subseteq f(p)$. Поэтому $f_1(p) = f(p)$. Тем самым доказано 3). Утверждение 4) доказывается прямой проверкой. Лемма доказана.

Из леммы 1.2.15 вытекает

1.2.16 Лемма ([206, лемма 6]). *Пусть f_1 и f_2 — минимальные ω-локальные Θ-значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

1.2.17 Замечание. Согласно теореме 1.2.7 всякая ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-локальный спутник f, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник называется *каноническим.* Заметим, что если $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$ и f — произвольный внутренний ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, то ввиду леммы 1.2.15 $f \leqslant F$.

Из леммы 1.2.15 и замечания 1.2.17 вытекает

1.2.18 Замечание. Если формация $\mathfrak{F} = LF_\omega(F) = LF_\omega(f)$, то $F(p) = \mathfrak{N}_p(f(p) \cap \mathfrak{F})$ для всех $p \in \omega$.

Из леммы 1.2.16 и замечания 1.2.17 вытекает

1.2.19 Лемма ([206, лемма 7]). *Пусть $\mathfrak{F}_1 = LF_\omega(F_1)$ и $\mathfrak{F}_2 = LF_\omega(F_2)$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $F_1 \leqslant F_2$.*

1.2.20 Лемма ([206, лемма 8]). *Пусть Θ — такая полная решетка формаций, что $\Theta^{\omega_l} \subseteq \Theta$ и для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \in \Theta$ при любом $p \in \omega$. Тогда если $\mathfrak{F} = LF_\omega(F) \in \Theta^{\omega_l}$, то спутник F Θ-значен.*

Доказательство. Пусть h — такой ω-локальный спутник, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = \Theta\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}(F_p)\big)$ для всех $p \in \omega$. Ввиду теоремы 1.2.7 и леммы 1.2.15 $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$. А так как $\Theta^{\omega_l} \subseteq \Theta$, то h — внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$. Применяя теперь лемму 1.2.15, видим, что $h(p) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ при всех $p \in \omega$. Значит, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$, то

$$F(p) = \mathfrak{N}_p\Theta\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}(F_p)\big) \in \Theta.$$

Лемма доказана.

1.2.21 Лемма ([206, лемма 9]). *Пусть формация* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $G \notin \mathfrak{F}$. *Тогда либо* $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq G_{\omega d}$, *либо найдется такое* $p \in \omega \cap \pi(G^{\mathfrak{F}})$, *что* $G/F_p(G) \notin f(p)$.

Доказательство. Пусть $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\omega d}$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G^{\mathfrak{F}})$. Первое влечет $G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Пусть $p \in (\omega \cap \cap \pi(G)) \setminus \pi(G^{\mathfrak{F}})$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq F_p(G)$ и $F_p(G/G^{\mathfrak{F}}) = F_p(G)/G^{\mathfrak{F}}$. Значит, для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеет место $G/F_p(G) \in f(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Лемма доказана.

Композиционные спутники. Композиционный спутник f формации $\mathfrak{F}$ называется *минимальным спутником* формации $\mathfrak{F}$, если для любого ее композиционного спутника h и любого простого числа p имеет место включение $f(p) \subseteq h(p)$. Композиционный спутник f формации $\mathfrak{F}$ называется *внутренним,* если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \in \mathbb{P}$. Для произвольного внутреннего композиционного спутника f формации $\mathfrak{F}$ через F обозначают такой спутник, что $F(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Легко видеть (см. подробнее [224, теорема 3.2]), что $\mathfrak{F} = CF(F)$, причем спутник F таков, что имеет место включение $h(p) \subseteq F(p)$ для любого другого внутреннего композиционного спутника h формации $\mathfrak{F}$ и любого простого числа p. Композиционный спутник F формации $\mathfrak{F}$ называется *каноническим.*

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ обозначают класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, p — простое число. Полагают (см. [209]), что

$$\mathfrak{X}(C^p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus (\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))). \end{cases}$$

В дальнейшем вместо $\mathfrak{X}\big(\mathfrak{H}(C^p)\big)$ будем писать $\mathfrak{X}\mathfrak{H}(C^p)$. Пересечение всех разрешимо насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают через $c$form$\mathfrak{X}$ и называют *разрешимо насыщенной формацией, порожденной* $\mathfrak{X}$.

1.2.22 Лемма ([198, теорема]; [209, лемма 5]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *непустая совокупность групп*, $\mathfrak{F} = c\mathrm{form}\mathfrak{X}$ *и* f — *минимальный композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$;

2) $f(p) = \mathfrak{X}(C_p)$ *для всех* $p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF(h)$, *то для любого* $p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$ *имеет место*

$$f(p) = \mathrm{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(A) = 1).$$

1.2.23 Замечание. Процедура получения канонического композиционного спутника формации $\mathfrak{F}$, исходя из наличия ее минимального композиционного спутника f, состоит в следующем. Строим композиционный спутник F такой, что $F(p) = \mathfrak{N}_p f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C_p)$ для всех $p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$. Спутник F и будет каноническим композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем, как правило, без ссылок мы будем использовать следующую очевидную лемму.

1.2.24 Лемма ([209, лемма 1]). *Пусть* N — *нормальная подгруппа группы* G. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $N \subseteq \Phi(L)$ *для некоторой нормальной разрешимой подгруппы* L *группы* G, *то* $C^p(G/N) = C^p(G)/N$;

2) *если* $N \in \mathfrak{S}_\omega$, *то* $R_\omega(G/N) = R_\omega(G)/N$.

1.2.25 Пример. Пусть $\mathfrak{L}$ — произвольный непустой класс групп простого порядка и $\omega = \pi(\mathfrak{L})$. Пусть формация $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{E}\mathfrak{L}'$, а f — такой пустой ω-композиционный спутник, что $f(\omega') = \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M} = CF_\omega(f)$.

Действительно, если $G \in \mathfrak{M}$, то, ввиду того, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{E}\mathfrak{L}'$ имеем

$$G \cong G/1 = G/R_\omega(G) \in \mathfrak{M} = f(\omega').$$

Значит, $\mathfrak{M} \subseteq CF_\omega(f)$. Обратно. Пусть $G \in CF_\omega(f)$. Тогда

$$G/R_\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{M} \text{ и}$$

$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G)).$$

Но по условию спутник f пустой. Значит, $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G)) = \varnothing$. Поэтому $R_\omega(G) = 1$. Следовательно,

$$G \cong G/1 = G/R_\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{M}.$$

Значит, $CF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{M}$. Итак, $\mathfrak{M} = CF_\omega(f)$.

Таким образом, всякая подформация формации $\mathrm{E}\mathfrak{L}'$ разрешимо ω-насыщена. Отсюда, в частности, вытекает, что пустая формация $\varnothing$ и формация единичных групп (1) разрешимо ω-насыщены при всех ω.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо p-насыщенной* или *p-композиционной* [317], если ей принадлежит всякая группа G такая, что $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$.

1.2.26 Теорема ([209, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, $\varnothing \neq \omega \subseteq \subseteq \mathbb{P}$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *формация $\mathfrak{F}$ является разрешимо p-насыщенной для всех $p \in \in \omega$;*

2) *$\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p)$ для всех $p \in \omega$;*

3) *формация $\mathfrak{F}$ разрешимо ω-насыщена.*

Доказательство. Пусть имеет место 1) и $\mathfrak{M} = CF_\omega(f)$, где f — спутник из условия. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$ очевидно. Предположим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$.

Если $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(R)) = \varnothing$, то $R_\omega(G) = 1$. Значит,

$$G \cong G/R_\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие.

Следовательно, $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(R)) \neq \varnothing$. Пусть $q \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(R))$. Значит, R — q-группа. Так как $G \in \mathfrak{M}$, то

$$G/C^q(G) \in f(q) = \mathfrak{N}_q\mathfrak{F}(C_q).$$

Заметим, что согласно замечанию 1.2.23 f можно рассматривать как канонический композиционный спутник формации $c\mathrm{form}\mathfrak{F}$ для всех $r \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$. Поэтому $G \in c\mathrm{form}\mathfrak{F}$. Но поскольку формация $\mathfrak{F}$ разрешимо p-насыщена для всех $p \in \omega$, то $c\mathrm{form}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{q'}\mathfrak{F}$, т. е. $G \in \in \mathfrak{N}_{q'}\mathfrak{F}$. Следовательно,

$$G \cong G/1 = G/O_{q'}(G) \in \mathfrak{F}.$$

Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$.

Пусть теперь имеет место 3) и $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(N) \cap O_p(N)$ для некоторой разрешимой нормальной в G подгруппы N, $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$. Тогда поскольку $G/L \in \mathfrak{F}$ и по лемме 1.2.24

$$G/R_\omega(G) \cong (G/L)/R_\omega(G/L) \text{ и } G/C^p(G) \cong (G/L)/C^p(G/L)$$

для всех простых $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$, т. е. формация $\mathfrak{F}$ разрешимо p-насыщена. Теорема доказана.

Ввиду примера 1.2.25 обе формации $\varnothing$ и (1) разрешимо насыщены. Всякая насыщенная формация является разрешимо насыщенной, однако, как показывает следующий пример, существуют разрешимо насыщенные формации, не являющиеся насыщенными.

Группа M называется *квазинильпотентной*, если справедливо $C_M(H/K)H = M$ для любого главного фактора H/K группы M.

1.2.27 Пример. Формация $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп не является насыщенной, однако является разрешимо насыщенной (см. [288, гл. X, определение 13.2] и [229]) с композиционным спутником f таким, что $f(p) = \mathfrak{G}$ для любого простого p.

1.2.28 Пример. Согласно примеру 1.2.9 для произвольной формации $\mathfrak{F}$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$ p-насыщена. Значит, она разрешимо p-насыщена. Пусть p-композиционный спутник f таков, что $f(p') = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{F}$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} = CF(f)$.

1.2.29 Пример. Пусть $\mathfrak{L} = \varnothing$ — пустое множество групп простого порядка. Тогда $\omega = \pi(\mathfrak{L}) = \varnothing$ и $\omega' = \mathbb{P}$. Покажем, что произвольная формация $\mathfrak{F}$ является разрешимо ω-насыщенной. Действительно, пусть f — такой ω-композиционный спутник, что $f(\omega') = f(\mathbb{P}) = \mathfrak{F}$. Докажем, что $CF_\omega(f) = \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/R_\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Значит, $G \in CF_\omega(f)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq CF_\omega(f)$. Обратно. Пусть $G \in CF_\omega(f)$. Так как $\omega = \varnothing$, то $R_\omega(G) = 1$. Поэтому

$$G \cong G/1 = G/R_\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Значит, $CF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Итак, $CF_\omega(f) = \mathfrak{F}$.

1.2.30 Пример. Пусть Z_p — группа простого порядка p такова, что $Z_p \notin \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ разрешимо p-насыщена. Действительно, пусть f — такой p-композиционный спутник, что $f(p) = \varnothing$ и $f(p') = \mathfrak{F}$. Докажем, что $CF_p(f) = \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/R_p(G) \in \mathfrak{F} = f(p')$. Значит, $G \in CF_p(f)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq CF_p(f)$. Обратно. Пусть $G \in CF_p(f)$. Тогда $G/R_{\{p\}}(G) \in f(p') = \mathfrak{F}$ и $G/C^p(G) \in f(p) = \varnothing$, где $p \in \pi(\mathrm{Com}(G))$. Но согласно условию $Z_p \notin \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$. Значит, $p \notin \pi(\mathrm{Com}(G))$. Отсюда следует $R_p(G) = O_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \cong G/1 = G/O_p(G) \in f(p') = \mathfrak{F}.$$

Значит, $CF_p(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Итак, $CF_p(f) = \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ и $f(a) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то f называется *внутренним* (или *приведенным*) спутником формации $\mathfrak{F}$.

Следующая лемма показывает, что всякая разрешимо ω-насыщенная формация обладает по крайней мере одним внутренним ω-композиционным спутником.

1.2.31 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *$\mathfrak{F} = CF_\omega(g)$, где $g(a) = f(a) \cap \mathfrak{F}$ для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$;*
2) *$\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$, где $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = CF_\omega(g)$. Так как $g(a) \subseteq f(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то, очевидно, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/R_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/C^p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — формация, то $G/R_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/C^p(G) \in \mathfrak{F}$. Значит, $G/R_\omega(G) \in f(\omega') \cap \mathfrak{F} = g(\omega')$ и $G/C^p(G) \in$ $\in f(p) \cap \mathfrak{F} = g(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Пусть h — такой ω-композиционный спутник, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/R_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$ и $G/C^p(G) \in f(p) =$ $= h(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа G монолитична с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, то $G/R_\omega(G) \in h(\omega') = \mathfrak{F}$. Значит, $R \subseteq R_\omega(G)$ и по лемме 1.2.24

$$G/R_\omega(G) \cong (G/R)/(R_\omega(G)/R) = (G/R)/R_\omega(G/R) \in f(\omega').$$

Кроме того, $G/C^p(G) \in h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор ω-композиционных спутников. Обозначим через $\bigcap\limits_{i\in I} f_i$ такой ω-композиционный спутник f, что $f(a) = \bigcap\limits_{i\in I} f_i(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Следующие две леммы доказываются прямой проверкой.

1.2.32 Лемма ([209, лемма 2]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, *где* $f = \bigcap\limits_{i\in I} f_i$.

Полагают $f \leqslant h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

1.2.33 Лемма ([209, лемма 3]). *Пусть* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— цепь формаций,* $\{f_i \mid i \in I\}$ *— такая цепь* ω*-композиционных спутников, что* $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$ *и* $f_i \leqslant f_j$ *имеет место в точности тогда, когда* $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}_j$ *для всех* i, $j \in I$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \bigcup\limits_{i\in I} \mathfrak{F}_i = CF_\omega(f)$, *где* $f(a) = \bigcup\limits_{i\in I} f_i(a)$ *для каждого* $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Символом Θ^{ω_c} обозначим совокупность всех формаций, которые обладают ω-композиционным Θ-значным спутником. Пусть $\mathfrak{F}$ — такая Θ-формация, что для любой Θ-формации $\mathfrak{M}$ имеет место $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. И пусть f — такой ω-композиционный спутник, что $f(a) = \mathfrak{F}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Тогда $CF_\omega(f) \in \Theta^{\omega_c}$, и если $\mathfrak{H}$ — произвольная Θ^{ω_c}-формация, то, очевидно, $\mathfrak{H} \subseteq CF_\omega(f)$. Таким образом, Θ^{ω_c} — полная решетка формаций.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех ω-композиционных Θ-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.2.32, $\bigcap\limits_{i\in I} f_i$ — ω-композиционный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, называемый *минимальным* ω*-композиционным* Θ*-значным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

1.2.34 Лемма ([198, лемма 2]). *Пусть* Z_p *— группа простого порядка* p *и* G *— группа с* $O_p(G) = 1$. *Тогда база регулярного сплетения* $T = Z_p \wr G$ *совпадает с* $C^p(T) = O_p(T)$.

1.2.35 Лемма ([209, лемма 4]). *Если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ *и* $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ *для некоторого простого* $p \in \omega$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Прежде заметим, что поскольку $O_p(G) \subseteq \subseteq C^p(G)$, то $G/C^p(G) \in f(p)$. А поскольку $R_\omega(G/O_p(G)) = = R_\omega(G)/O_p(G)$ и для всех $p \in \omega \setminus \{p\}$ имеет место

$$G/C^p(G) \cong (G/O_p(G))/(C^p(G)/O_p(G)) =$$

$$= (G/O_p(G))/C^p(G/O_p(G)),$$

то $G/R_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/C^p(G) \in f(p)$. Значит, $G \in CF_\omega(f)$. Лемма доказана.

1.2.36 Лемма ([224, лемма 3.9]). *Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \subseteq C_G(H/K)$.*

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \in \Theta$ и для любой полной решетки формации Θ через $\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ мы обозначаем пересечение всех тех формаций из Θ, которые содержат все группы из $\mathfrak{X}$. В частности, мы пишем $\Theta\mathrm{form}(G)$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$. Знак Θ опускается, если Θ — совокупность всех формаций.

1.2.37 Лемма ([209, лемма 5]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = \Theta^{\omega_c}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$ и пусть f — минимальный ω-композиционный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = \Theta\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
2) $f(p) = \Theta\mathrm{form}\big(\mathfrak{X}(C^p)\big)$ *для всех* $p \in \pi$;
3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi$;
4) *если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ *и спутник* h Θ*-значен, то для всех* $p \in \pi$ *имеет место*

$$f(\omega') = \Theta\mathrm{form}(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\ R_\omega(A) = 1)$$

и

$$f(p) = \Theta\mathrm{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(A) = 1);$$

5) *если* $\mathrm{E}(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) \in \Theta^{\omega_c}$, *то* $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Утверждения 1) – 3) и 4) вытекают из определений (см. доказательство [206, лемма 5] и [203, теорема 1.1.5]). Докажем 4). Пусть $G \in h(p) \cap \mathfrak{F}$ и $O_p(G) = 1$, где $p \in \pi$. Пусть $T = = Z_p \wr G = [K]G$, где K — база сплетения T. Согласно лемме 1.2.34, $C^p(T) = O_p(T) = K$. Значит, вследствие леммы 1.2.35, $T \in \mathfrak{F}$. Поэтому

$$G \cong T/C^p(T) \in f(p).$$

Заметим, что по лемме 1.2.36 для любой группы $A \in \mathfrak{X}$ имеет место $O_p(A/C^p(A)) = 1$. При этом $A/C^p(A) \in h(p) \cap \mathfrak{F}$. Итак,

$$f(p) = \Theta\mathrm{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(A) = 1).$$

Пусть $G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}$ и $R_\omega(G) = 1$. Тогда, поскольку $G \in \mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, то

$$G \cong G/1 = G/R_\omega(G) \in f(\omega').$$

Поэтому $h(\omega') \subseteq f(\omega')$.

Обратно. Пусть

$$G \in \big(A/R_\omega(A) \mid A \in \mathfrak{F}\big).$$

Тогда ввиду того, что $R_\omega(A/R_\omega(A)) = 1$, имеем

$$G \in \big(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\, R_\omega(A) = 1\big).$$

Отсюда $f(\omega') \subseteq h(\omega')$. Поэтому $f(\omega') = h(\omega')$. Аналогично проверяется последнее заключение леммы. Лемма доказана.

Из леммы 1.2.37 вытекает

1.2.38 Лемма ([209, лемма 6]). *Пусть f_1 и f_2 — минимальные ω-композиционные Θ-значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

1.2.39 Замечание. Согласно теореме 1.2.26 всякая ω-композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-композиционный спутник f, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p)$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник называется *каноническим*. Заметим, что если $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$ и f — произвольный внутренний ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, то ввиду леммы 1.2.37 $f \leqslant F$.

Из леммы 1.2.37 и замечания 1.2.39 вытекает

1.2.40 Замечание. Если формация $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) = CF_\omega(f)$, то $F(p) = \mathfrak{N}_p(f(p) \cap \mathfrak{F})$ для всех $p \in \omega$.

Из леммы 1.2.38 и замечания 1.2.39 вытекает

1.2.41 Лемма ([209, лемма 7]). *Пусть $\mathfrak{F}_1 = CF_\omega(F_1)$ и $\mathfrak{F}_2 = CF_\omega(F_2)$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $F_1 \leqslant F_2$.*

1.2.42 Лемма ([209, лемма 8]). *Пусть Θ — такая полная решетка формаций, что для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \in \Theta$ при любом $p \in \omega$, $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$. Тогда если $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \Theta$, то спутник F Θ-значен.*

Доказательство. Пусть h — такой ω-композиционный спутник, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = \Theta\mathrm{form}(\mathfrak{F}(C^p))$ для всех $p \in \omega$. Ввиду теоремы 1.2.26 и леммы 1.2.37 $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$. А так как $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$, то h — внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$. Применяя теперь лемму 1.2.37, видим, что $h(p) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p)$ при всех $p \in \omega$. Значит, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$, то

$$F(p) = \mathfrak{N}_p\Theta\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}(C^p)\big) \in \Theta.$$

Лемма доказана.

1.2.43 Лемма ([209, лемма 9]). *Пусть формация $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда либо $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq R_\omega(G)$, либо найдется такое число $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G^{\mathfrak{F}}))$, что $G/C^p(G) \notin f(p)$.*

Доказательство. Пусть $G^{\mathfrak{F}} \subseteq R_\omega(G)$ и $G/C^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G^{\mathfrak{F}}))$. Первое влечет $G/R_\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Пусть $p \in (\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))) \setminus \pi(\mathrm{Com}(G^{\mathfrak{F}}))$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C^p(G)$ и $C^p(G/G^{\mathfrak{F}}) = C^p(G)/G^{\mathfrak{F}}$. Значит, для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))$ имеет место $G/C^p(G) \in f(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Лемма доказана.

1.3 Функции Хартли

Символом $G^{\omega d}$ обозначается наименьшая нормальная подгруппа N группы G со свойством $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/K из G/N. В частности, $G^{\omega d} = G$, если $\omega \cap \pi(\mathrm{Soc}(G/N)) = \varnothing$ (см. [206]).

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}, \tag{1.4}$$

где $f(\omega') \neq \varnothing$. Следуя [206], сопоставим функции f класс групп

$$LR_\omega(f) = \big(G \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\big).$$

1.3.1 Замечание. Пусть f — произвольная функция вида (1.4), $\pi_1 = \omega \cap \mathrm{Supp}(f)$ и $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$, где $\mathrm{Supp}(f) = \{p \in \omega \mid f(p) \neq \varnothing\}$. Легко видеть, что

$$LR_\omega(f) = \left(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{G}_{p'}\right) \cap \left(\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}\right) \cap f(\omega')\mathfrak{G}_{\omega d}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (1.5):
1. Если $\pi_1 = \varnothing$, то формула (1.5) приобретает вид

$$LR_\omega(f) = \mathfrak{G}_{\omega'} \cap f(\omega')\mathfrak{G}_{\omega d} = \mathfrak{G}_{\omega'} \cap f(\omega').$$

2. Если $\pi_1 = \omega$, то мы получаем формулу

$$LR_\omega(f) = \left(\bigcap_{p\in\omega} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}\right) \cap f(\omega')\mathfrak{G}_{\omega d}.$$

3. Если $\omega = \{p\}$ и $f(p) \neq \varnothing$, то формула (1.5) приобретает вид

$$LR_{\{p\}} = LR_p(f) = f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'} \cap f(p')\mathfrak{G}_{pd}.$$

Если $\omega = \{p\}$ и $f(p) = \varnothing$, то

$$LR_p(f) = \mathfrak{G}_{p'} \cap f(p')\mathfrak{G}_{pd} = \mathfrak{G}_{p'} \cap f(p').$$

4. Если $\omega = \mathbb{P}$, то $\pi_1 = \mathrm{Supp}(f)$, $\pi_2 = \mathbb{P} \setminus \mathrm{Supp}(f)$. В этом случае получаем формулу

$$LR_{\mathbb{P}}(f) = LR(f) = \left(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{G}_{p'}\right) \cap \left(\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}\right).$$

Поскольку пересечение и произведение любых двух классов Фиттинга снова является классом Фиттинга, то из приведенной формулы (1.5) вытекает, что для любой функции f вида (1.4) класс групп $LR_\omega(f)$ является классом Фиттинга.

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1.4), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-локальным классом Фиттинга* с *ω-локальной функцией Хартли* f (более кратко, *ω-локальной H-функцией* f) [206]. ω-Локальная H-функция называется *пустой,* если $\mathrm{Supp}(f) = \varnothing$.

В приведенных выше определениях в случае, когда $\omega = \{p\}$, класс Фиттинга называется *p-локальным*, а в случае когда $\omega = \mathbb{P}$ символ ω опускается и класс Фиттинга называется *локальным.*

Группа G называется *комонолитической* [206], если в G имеется такая нормальная подгруппа M (*комонолит группы* G), что G/M — простая группа и $N \subseteq M$ для любой собственной нормальной подгруппы N группы G. Через $\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех классов Фиттинга, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, p — некоторое простое число. Полагают (см. [206])

$$\mathfrak{X}(F^p) = \begin{cases} \mathrm{fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}); \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

1.3.2 Теорема ([206, теорема 9]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех* $p \in \omega$;

2) $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $f(p) = \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p$ *для всех* $p \in \omega$;

3) *класс $\mathfrak{F}$ является ω-локальным.*

Доказательство. Пусть имеет место условие 1) и $\mathfrak{M} = LR_\omega(f)$, где f — H-функция, фигурирующая в условии 2). Тогда, очевидно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Предположим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Поскольку класс $\mathfrak{M} = LR_\omega(f)$ является нормально наследственным, группа G комонолитична и $R = G_{\mathfrak{F}}$ — ее комонолит. Предположим, что $\omega \cap \pi(G/R) = \varnothing$. Тогда $G^{\omega d} = G$. Так как при этом $G \in LR_\omega(f)$, то получаем $G \in f(\omega') = \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $\omega \cap \pi(G/R) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/R)$. Предположим, что G/R — неабелева группа. Тогда, очевидно, $F^p(G) = G$. Следовательно,

$$G \in f(p) = \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F},$$

противоречие. Значит, G/R — p-группа. Понятно, что $G^{\mathfrak{G}_{p'}} = G$. Следовательно, $F^p(G) = O^p(G)$. С другой стороны, $F^p(G) \in \mathfrak{F}(F^p)$. Поэтому

$$G \in \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}.$$

Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$.

Предположим теперь, что имеет место условие 3). Допустим, что для некоторого числа $p \in \omega$ класс $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p$ не содержится в $\mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \setminus \mathfrak{F}$. Пусть $R = G_{\mathfrak{F}}$ — комонолит группы G. Поскольку $\mathfrak{F}(F^p) \subseteq \mathfrak{F}$, заключаем, что $O^p(G) \subseteq R$. Следовательно, ввиду леммы 1.2.5 справедливы равенства

$$G^{\omega d} = R^{\omega d}, \quad F^p(G) = O^p(G) \quad \text{и} \quad F^q(G) = F^q(R)$$

для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Пусть $\mathfrak{F} = LR_\omega(h)$. Тогда поскольку $R \in \mathfrak{F}$, то

$$R^{\omega d} \in h(\omega') \quad \text{и} \quad F^q(R) \in h(q) \quad \text{для всех} \quad q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}.$$

Так как $G \in \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}(F^p) \subseteq h(p)$, имеем

$$F^p(G) = O^p(G) \in h(p).$$

Итак,

$$G^{\omega d} \in h(\omega') \quad \text{и} \quad F^q(G) \in h(q) \quad \text{для всех } q \in \omega \cap \pi(G).$$

Следовательно, $G \in LR_\omega(h) = \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что для всех $p \in \omega$ имеет место включение $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

1.3.3 Пример. Пусть f — пустая ω-локальная H-функция и

$$f(\omega') = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'}.$$

Тогда $\mathfrak{M} = LR_\omega(f)$. В частности, классы Фиттинга $\varnothing$ и (1) являются ω-локальными.

1.3.4 Пример. Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi$. Пусть, кроме того, $f(\mathbb{P}') = (1)$, и

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } p \in \pi, \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi. \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{F} = LR_{\mathbb{P}}(f) = LR(f)$. Действительно, включение $\mathfrak{F} \subseteq LR(f)$ очевидно. Предположим, что $LR(f) \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $LR(f) \setminus \mathfrak{F}$ с комонолитом $R = G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $\pi(G/R) \not\subseteq \pi$. Пусть $p \in \pi(G/R) \setminus \pi$. Тогда $F^p(G) \in f(p) = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} = LR_{\mathbb{P}}(f)$.

1.3.5 Пример. Для произвольного класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p$ является p-локальным. Действительно, понятно, что $\mathfrak{F}(F^p) \subseteq \mathfrak{H}$ и, следовательно, $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$. Ввиду теоремы 1.3.2 последнее означает, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является p-локальным.

1.3.6 Пример. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс Фиттинга, входящий в $\mathfrak{G}_{\omega'}$ и

$$\mathfrak{F} = (A \times B \mid A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}_\omega) = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}_\omega.$$

Можно доказать (см. [43, теорема 1]), что $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. По теореме 1.3.2 этот класс ω-локален.

Говорят, что H-функция f является *внутренней* или *приведенной* [206], если $f(a) \subseteq LR_\omega(f)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Следующая лемма показывает, что всякий ω-локальный класс Фиттинга обладает по крайней мере одной внутренней ω-локальной H-функцией.

1.3.7 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathfrak{F} = LR_\omega(g)$, *где* $g(a) = f(a) \cap \mathfrak{F}$ *для любого* $a \in \omega \cup \{\omega'\}$;

2) $\mathfrak{F} = LR_\omega(h)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *для всех* $p \in \omega$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = LR_\omega(g)$. Так как $g(a) \subseteq f(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то, очевидно, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\omega d} \in f(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $G^{\omega d} \in \mathfrak{F}$ и $F^p(G) \in \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\omega d} \in f(\omega') \cap \mathfrak{F} = g(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F} = g(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Пусть h — такая ω-локальная H-функция, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = = f(p)$ для любого $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{H} = LR_\omega(h)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\omega d} \in \mathfrak{F} = h(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p) = h(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа G монолитична с монолитом $R = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{H} = LR_\omega(h)$, то $G^{\omega d} \in h(\omega') = \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\omega d} \subseteq R$. Отсюда $G/R \in \mathfrak{G}_{\omega d}$ и по лемме 1.2.5

$$G/R \cong (G/R^{\omega d})/(R/R^{\omega d})$$

получаем $G/R^{\omega d} \in \mathfrak{G}_{\omega d}$. Поэтому $G^{\omega d} \subseteq R^{\omega d}$ и $G^{\omega d} \in f(\omega')$. Кроме того, $F^p(G) \in h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор ω-локальных H-функций. Обозначим через $\bigcap_{i \in I} f_i$ такую H-функцию f, что $f(a) = = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$ для всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$. Проверка показывает, что справедлива

1.3.8 Лемма ([206, лемма 21]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F} = LR_\omega(f_i)$. *Тогда* $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, *где* $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.

Совокупность классов Фиттинга Θ называется *полной решеткой классов Фиттинга,* если классы $\varnothing$ и $\mathfrak{G}$ принадлежат Θ и пересечение любого множества классов из Θ снова принадлежит Θ. Понятно, что всякая полная решетка классов Фиттинга является полной решеткой в обычном смысле. Примерами полных решеток классов Фиттинга являются совокупности всех наследственных, разрешимых, ω-локальных (при фиксированном ω) классов Фиттинга, а также совокупность всех фиттинговых формаций (т. е. формаций, являющихся классами Фиттинга).

Рассмотрим еще один важный пример. Пусть Θ — произвольная полная решетка классов Фиттинга. Говорят, что H-функция f является Θ-*значной*, если все ее значения принадлежат Θ. Пусть Θ^ω — совокупность всех тех классов Фиттинга, которые обладают Θ-значной H-функцией. Из примеров 1.3.3 и 1.3.4 вытекает $\varnothing, \mathfrak{G} \in \Theta^\omega$, а ввиду леммы 1.3.8 пересечение любой совокупности классов из Θ^ω снова принадлежит Θ^ω. Следовательно, Θ^ω — полная решетка классов Фиттинга.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех ω-локальных Θ-значных H-функций класса $\mathfrak{F} \in \Theta^\omega$. Тогда по лемме 1.3.8 $\bigcap_{i \in I} f_i$ — Θ-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$, называемая *минимальной ω-локальной Θ-значной H-функцией* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Всюду ниже Θ обозначает некоторую полную решетку классов Фиттинга. Символом $\Theta\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ обозначается пересечение всех тех классов Фиттинга из Θ, которые содержат $\mathfrak{X}$.

Непосредственная проверка показывает, что справедлива следующая

1.3.9 Лемма ([206, лемма 22]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *непустая совокупность групп. Если* $\mathfrak{F} = \Theta^\omega\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ *и* f — *минимальная ω-локальная Θ-значная H-функция, то справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = \Theta\mathrm{fit}(G^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;
2) $f(p) = \Theta\mathrm{fit}\big(\mathfrak{X}(F^p)\big)$ *для всех* $p \in \omega$;
3) $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *для всех* $p \in \omega$.

Если f_1 и f_2 — ω-локальные H-функции и $f_1(a) \subseteq f_2(a)$ для всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$, то мы будем писать $f_1 \leqslant f_2$. Из леммы 1.3.8 непосредственно вытекает

1.3.10 Лемма ([206, лемма 23]). *Пусть f_1 и f_2 — минимальные ω-локальные Θ-значные H-функции классов Фиттинга $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

1.3.11 Лемма ([206, лемма 24]). *Пусть $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$. Тогда если $O^p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, где $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $F^p(G) \in f(p)$, поскольку $F^p(G) \subseteq O^p(G)$. Кроме того, $F^q(O^p(G)) = F^q(G)$ для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$ и $G^{\omega d} = (O^p(G))^{\omega d}$ согласно лемме 1.2.5. Поскольку $O^p(G) \in \mathfrak{F}$, имеем $G^{\omega d} \in f(\omega')$ и $F^q(G) \in f(q)$ для всех $q \in \omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

1.3.12 Лемма ([206, лемма 25]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где f — внутренняя H-функция. Пусть, кроме того, h — такая H-функция, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = f(p)\mathfrak{N}_p$ при всех $p \in \omega$. Тогда $\mathfrak{F} = LR_\omega(h)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = LR_\omega(h)$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая группа с комонолитом $R = G_\mathfrak{F}$. Поскольку $G^{\omega d} \in h(\omega') = \mathfrak{F}$, и $G \notin \mathfrak{F}$, то $\omega \cap \pi(G/R) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/R)$. Предположим, что G/R — неабелева группа. Тогда $G \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$, поскольку $G = F^p(G) \in f(p)\mathfrak{N}_p$. Полученное противоречие показывает, что G/R — p-группа и $F^p(G) = O^p(G)$. Итак, $O^p(G) \in f(p)\mathfrak{N}_p$. С другой стороны, $O^p(O^p(G)) = O^p(G)$. Следовательно, $O^p(G) \in f(p)$. Применяя теперь лемму 1.3.11, видим, что $G \in \mathfrak{F}$. Полученное вновь противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

1.3.13 Замечание. Пусть Θ — такая полная решетка классов Фиттинга, что $\Theta^\omega \subseteq \Theta$. Тогда если $\mathfrak{F} \in \Theta^\omega$, то ввиду лемм 1.3.9 и 1.3.12 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ имеет H-функцию f, удовлетворяющую равенствам $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \Theta\mathrm{fit}\big(\mathfrak{F}(F^p)\big)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$. Такую H-функцию называют *Θ-канонической ω-локальной H-функцией* класса $\mathfrak{F}$. Для обозначения канонических H-функций мы будем использовать заглавные латинские буквы.

1.3.14 Лемма ([206, лемма 26]). *Пусть F_i — Θ-каноническая ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Включение $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $F_1 \leqslant F_2$.*

1.3.15 Лемма ([206, лемма 27]). *Пусть Θ — такая полная решетка классов Фиттинга, что $\Theta^{\omega} \subseteq \Theta$ и $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_p \in \Theta$ для всех $\mathfrak{H} \in \Theta$ и $p \in \omega$. Тогда все Θ-канонические ω-локальные H-функции являются одновременно Θ-значными и внутренними.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \in \Theta^{\omega}$ и F — Θ-каноническая ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Согласно условию H-функция F является Θ-значной.

Покажем, что F — внутренняя H-функция класса $\mathfrak{F}$. Предположим, что $F(p) \not\subseteq \mathfrak{F}$ для некоторого $p \in \omega$. Пусть G — группа минимального порядка из $F(p) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая группа с комонолитом $R = G_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $\Theta\mathrm{fit}\big(\mathfrak{F}(F^p)\big) \subseteq \mathfrak{F}$, заключаем, что $O^p(G) \subseteq R$. Следовательно, ввиду леммы 1.2.5 справедливы равенства

$$G^{\omega d} = R^{\omega d}, \quad F^p(G) = O^p(G) \quad \text{и} \quad F^q(G) = F^q(R)$$

для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Пусть $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(h)$. Тогда поскольку $R \in \mathfrak{F}$, то $R^{\omega d} \in h(\omega')$ и $F^q(G) = F^q(R) \in h(q)$ для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Так как $G \in F(p) = \Theta\mathrm{fit}\big(\mathfrak{F}(F^p)\big)\mathfrak{N}_p$ и $\Theta\mathrm{fit}\big(\mathfrak{F}(F^p)\big) \subseteq h(p)$, имеем

$$F^p(G) = O^p(G) \in \Theta\mathrm{fit}\big(\mathfrak{F}(F^p)\big) \subseteq h(p),$$

т. е. $F^p(G) \in h(p)$.

Итак, $G^{\omega d} \in h(\omega')$ и $F^r(G) \in h(r)$ для всех $r \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in LR_{\omega}(h) = \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что для всех $p \in \omega$ имеет место включение

$$F(p) = \Theta\mathrm{fit}\big(\mathfrak{F}(F^p)\big)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F},$$

т. е. Θ-каноническая ω-локальная H-функция F класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ является внутренней. Лемма доказана.

Аналогично лемме 1.2.21 может быть доказана следующая

1.3.16 Лемма ([206, лемма 29]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда либо $G_{\omega d} \not\subseteq G_{\mathfrak{F}}$, либо найдется такое простое число $p \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{F}})$, что $F^p(G) \notin f(p)$.*

Мы будем использовать конструкцию класса Фиттинга, которая была предложена Локеттом [299]. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F}^*$ — наименьший класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H. Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то полагают $\mathfrak{F}^* = \varnothing$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

1.3.17 Лемма ([68, лемма 3]). *Если* $\mathfrak{F}$ *— некоторый класс Фиттинга и* $\mathfrak{H}$ *— насыщенный радикальный гомоморф, то* $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера* [299], если из того, что $K \subseteq H \subseteq G \in \mathfrak{F}$, $K \trianglelefteq G$ и $H/K \in \mathfrak{N}_p$ всегда следует $H \in \mathfrak{F}$ (p — некоторое простое число).

1.3.18 Лемма ([68, лемма 2]). *Каждый локальный класс Фиттинга является классом Фишера.*

Всякое отображение множества всех классов групп в себя называется *операцией на классах групп* [224]. Результат операции C, примененной к классу $\mathfrak{X}$, обозначается через $\mathrm{C}\mathfrak{X}$. Степень операции C определяется так: $\mathrm{C}^1 = \mathrm{C}$, $\mathrm{C}^{n+1}\mathfrak{X} = \mathrm{C}^n(\mathrm{C}\mathfrak{X})$. Произведение операций определяется равенствами:

$$\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\mathfrak{X} = \mathrm{C}_1(\mathrm{C}_2\mathfrak{X}), \quad \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\ldots\mathrm{C}_t\mathfrak{X} = \mathrm{C}_1(\mathrm{C}_2\ldots\mathrm{C}_t\mathfrak{X}).$$

Введем операции S, S_n, S_F, Q, N_0, R_0, D_0 следующим образом:

$$\mathrm{S}\mathfrak{X} = \big(G \mid G \leqslant H \text{ для некоторой } H \in \mathfrak{X}\big);$$

$$\mathrm{S}_n\mathfrak{X} = \big(G \mid G \trianglelefteq H \text{ для некоторой } H \in \mathfrak{X}\big);$$

$$\mathrm{S}_F\mathfrak{X} = \big(G \mid G \leqslant H \in \mathfrak{X} \text{ и } G^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq H\big);$$

$$\mathrm{Q}\mathfrak{X} = \big(G \mid \text{существует } H \in \mathfrak{X} \text{ и эпиморфизм } H \text{ на } G\big);$$

$$\mathrm{N}_0\mathfrak{X} = \big(G \mid \text{существует } K_i \trianglelefteq G\,(i = 1, \ldots, r), \\ K_i \in \mathfrak{X} \text{ и } G = \langle K_1, \ldots, K_r\rangle\big);$$

$$\mathrm{R}_0\mathfrak{X} = \big(G \mid \text{существует } N_i \trianglelefteq G\,(i = 1, \ldots, r), \\ G/N_i \in \mathfrak{X} \text{ и } \bigcap_{i=1}^{r} N_i = 1\big);$$

$$\mathrm{D}_0\mathfrak{X} = \big(G \mid G = H_1 \times \ldots \times H_r, \text{ где } H_i \in \mathfrak{X}\big).$$

Класс $\mathfrak{X}$ называется *замкнутым относительно операции* C или, более коротко, C-*замкнутым*, если $\mathfrak{X} = \mathrm{C}\mathfrak{X}$.

1.3.19 Определение. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *формацией*, если он одновременно Q-замкнут и R_0-замкнут.

1.3.20 Определение. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *классом Фиттинга*, если он одновременно S_n-замкнут и N_0-замкнут.

1.3.21 Определение. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *классом Фишера*, если он одновременно S_F-замкнут и N_0-замкнут.

1.3.22 Лемма ([264, гл. X, предложение 1.25]). *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, который замкнут относительно взятия одной из операций* Q, R_0 *или* S_F *является классом Локетта.*

1.3.23 Лемма ([264, гл. X, лемма 1.8]). *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{A}$;

2) *если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, *то* $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$.

1.3.24 Лемма ([264, гл. X, лемма 1.26 b)]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Локетта и $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга. Тогда $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H})^* = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}^*$. В частности, фиттингово произведение двух классов Локетта снова является классом Локетта.*

1.3.25 Лемма ([264, гл. X, предложение 2.1 a)]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, G и H — группы. Тогда если $G \notin \mathfrak{F}$, то $(G \wr H)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})^{\natural}$.*

1.3.26 Лемма ([264, гл. A, лемма 18.2 d)]). *Пусть $W = X \wr G$. Тогда если $Y \trianglelefteq X$, то $W/Y^{\natural} \cong (X/Y) \wr G$.*

1.3.27 Теорема ([74, теорема]). *Пусть Ω — множество всех внутренних ω-локальных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, то справедливы следующие утверждения:*

1) *множество Ω обладает наибольшим элементом F;*

2) *если F — наибольший элемент из Ω, то $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и класс $F(p) = F(p)\mathfrak{N}_p$ является классом Локетта для всех $p \in \omega$.*

Доказательство. Покажем, что во множестве Ω всех внутренних ω-локальных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ есть такой элемент F, что $x \leqslant F$ для всех x из Ω. Из того, что ω-локальная H-функция x ω-локального класса $\mathfrak{F}$ является внутренней, по лемме 1.3.12 следует, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где f — такая внутренняя ω-локальная

H-функция, что $f(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Так как класс $\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$ является радикальной насыщенной формацией, то по лемме 1.3.17 для всех $p \in \omega$ справедливо равенство

$$\big(f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}\big)^* = \big(f(p)\big)^*\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}.$$

Легко видеть, что класс Фиттинга $f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'} = \mathfrak{F}_p$ локален и поэтому по лемме 1.3.18 $\mathfrak{F}_p$ — класс Фишера. Следовательно, ввиду леммы 1.3.22, $\mathfrak{F}_p$ является классом Локетта и

$$\mathfrak{F}_p = \big(f(p)\big)^*\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$$

для каждого $p \in \omega$. Далее учитывая определение ω-локального класса Фиттинга заключаем, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(F)$, где $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \big(f(p)\big)^*\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$. Так как функция $f \in \Omega$, то ввиду леммы 1.3.23 и леммы 1.3.24 вытекает, что $x \leqslant F \in \Omega$ и все значения H-функции F — классы Локетта.

Теперь для доказательства теоремы достаточно выяснить, что если X — любая другая внутренняя ω-локальная H-функция класса $\mathfrak{F}$ такая, что $X(\omega') = \mathfrak{F}$ и $X(p) = X(p)\mathfrak{N}_p$ — классы Локетта для всех $p \in \omega$, то $F = X$.

Предположим от противного, что $F(p)$ не содержится в $X(p)$ для некоторого простого $p \in \omega$ и G — группа из класса $F(p) \setminus X(p)$. Пусть $W = G \wr Z_p$ — регулярное сплетение группы G с циклической группой Z_p порядка p. Тогда $W \in F(p)\mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $p \in \omega \cap \pi(W)$ и $\mathfrak{F} = LR_\omega(X)$, то $W/W_{X(p)} \in \mathfrak{G}_{p'}$ и p не делит $|W/W_{X(p)}|$. С другой стороны, так как $G \notin X(p)$ и $X(p)$ — класс Локетта, то по лемме 1.3.25 $W_{X(p)} = (G_{X(p)})^*$, где $(G_{X(p)})^*$ — базисная группа сплетения $G_{X(p)} \wr Z_p$. Следовательно, ввиду леммы 1.3.26,

$$W/W_{X(p)} = W/(G_{X(p)})^* \cong G/G_{X(p)} \wr Z_p$$

и p делит $|W/W_{X(p)}|$.

Полученное противоречие доказывает, что $F \leqslant X$. Аналогично устанавливается, что $X \leqslant F$. Теорема доказана.

1.3.28 Замечание. Из теоремы 1.3.27 вытекает, что каждый ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется единственной максимальной внутренней H-функцией, которую мы обозначим через $\overline{f}$. Наибольшую полную внутреннюю ω-локальную H-функцию класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *канонической* ω-локальной H-функцией класса $\mathfrak{F}$ (см. также [206, замечание 4]).

1.3.29 Замечание. Используя лемму 1.3.8, легко видеть, что если F_λ является канонической ω-локальной H-функцией ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$, то $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ является канонической ω-локальной H-функцией ω-локального класса Фиттинга $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{F}_\lambda$.

Ввиду леммы 1.3.18 и леммы 1.3.22 каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта и поэтому из теоремы вытекает

1.3.30 Следствие ([68, лемма 5]). *Любой локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется наибольшей внутренней H-функцией F, каждое значение которой $F(p) = F(p)\mathfrak{N}_p$ и является классом Локетта.*

1.4 Подгрупповые функторы

1.4.1 Определение (А.Н. Скиба [203]). Со всякой группой $G \in \in \mathfrak{X}$ сопоставим некоторую систему ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — *подгрупповой функтор* [203], если

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для всякого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Подгрупповой функтор τ называется (см. [203]):

1) *замкнутым*, если для любых двух групп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$;

2) *тривиальным*, если для любой группы G имеет место $\tau(G) = = \{G\}$;

3) *единичным*, если для любой группы G имеет место $\tau(G) = = \mathrm{S}\{G\}$ — совокупность всех подгрупп группы G.

Тривиальный подгрупповой функтор обозначают через $0_\mathfrak{G}$, а единичный — через $1_\mathfrak{G}$.

1.4.2 Пример. Пусть $\tau(G)$ — множество всех субнормальных подгрупп из G для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$. Тогда τ — замкнутый подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор.

1.4.3 Пример. Пусть $\tau(G) = \mathrm{S}_n(G)$ — совокупность всех нормальных подгрупп группы G для каждой группы G. Такой функтор в общем случае замкнутым не является.

1.4.4 Пример. Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$. И пусть для каждой группы G множество $\tau(G)$ совпадает с совокупностью всех тех подгрупп из G, индексы которых не делятся на числа из π. Понятно, что τ — замкнутый подгрупповой функтор. Для обозначения такого функтора мы будем применять запись $\tau = \tau(\pi)$.

Напомним, что подгруппа H группы G называется *абнормальной в* G, если всегда из $H \subseteq M \subseteq G$ следует, что $M = N_G(M)$.

1.4.5 Пример. Пусть для любой группы G множество $\tau(G)$ совпадает с совокупностью всех абнормальных подгрупп группы G. Легко видеть, что τ — незамкнутый подгрупповой функтор. Для обозначения такого функтора мы будем применять запись $\tau = \tau_{ab}$.

1.4.6 Пример. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$*-абнормальной в* G, если выполняется одно из следующих двух условий:

1) $H = G$;

2) $H \neq G$ и для любых двух подгрупп M и T из G, где $H \subseteq M$ и M — максимальная подгруппа в T имеет место $T/M_T \notin \mathfrak{F}$. Легко видеть, если группа G разрешима, то ее подгруппа H абнормальна в G тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{N}$-абнормальна в G.

Сопоставляя каждой группе G множество всех ее $\mathfrak{F}$-абнормальных подгрупп $\tau(G)$, получаем подгрупповой функтор, для которого мы будем применять запись $\tau = \tau_{ab}(\mathfrak{F})$.

1.4.7 Пример. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$*-субнормальной в* G, если выполняется одно из следующих двух условий:

1) $H = G$;

2) $H \neq G$ и в G имеется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_t = G, \tag{1.6}$$

где H_{i-1} — максимальная в H_i подгруппа, содержащая $H_i^{\mathfrak{F}}$, $i = 1, \ldots \ldots, t$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая непустая формация и для каждой группы G система $\tau(G)$ состоит из всех $\mathfrak{F}$-субнормальных в G подгрупп. Покажем, что τ — подгрупповой функтор. Пусть H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. И пусть H_{i-1} и H_i — такие члены цепи (1.6), что $NH_{i-1} \neq \neq NH_i$, где N — нормальная в G подгруппа. Покажем, что NH_{i-1} — максимальная подгруппа в NH_i. Допустим, что $NH_{i-1} \subset L \subset NH_i$

для некоторой подгруппы L. Тогда поскольку H_{i-1} максимальна в H_i, то либо $H_i \cap L = H_{i-1}$, либо $H_i \cap L = H_i$. Пусть имеет место первое. Тогда поскольку $L = L \cap NH_i = N(L \cap H_i)$, то $L = NH_{i-1}$. Противоречие. Значит, $H_i \cap L = H_i$, т. е. $H_i \subseteq L$. Поэтому $NH_i \subseteq L$. Противоречие. Итак, ряд

$$HN/N = NH_0/N \subseteq NH_1/N \subseteq \ldots \subseteq NH_t/N = G/N \tag{1.7}$$

таков, что в нем для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ имеет место одно из двух условий:

1) $H_{i-1}N/N = H_iN/N$;

2) $H_{i-1}N/N$ — максимальная подгруппа в H_iN/N. Не теряя общности, мы можем считать, что все члены ряда (1.7) различны. Заметим, что поскольку

$$H_iN/H_i^{\mathfrak{F}}N \cong H_i/H_i^{\mathfrak{F}}(H_i \cap N) \cong$$

$$\cong (H_i/H_i^{\mathfrak{F}})/(H_i^{\mathfrak{F}}(H_i \cap N)/H_i^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F},$$

то

$$(H_iN)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i^{\mathfrak{F}}N \subseteq H_{i-1}N.$$

Итак, HN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G/N. Понятно также, что если H/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G/N, то H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G. Таким образом, τ — подгрупповой функтор. Для обозначения такого функтора применяют запись $\tau = \tau_{sub}(\mathfrak{F})$.

1.4.8 Пример. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая формация и пусть для всякой группы G множество $\tau(G)$ совпадает с совокупностью всех таких подгрупп H из G, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \subseteq G$. Понятно, что τ — подгрупповой функтор. Для обозначения такого функтора применяют запись $\tau = \tau_{res}(\mathfrak{F})$.

1.4.9 Пример. Пусть n — произвольное натуральное число. Для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ через $\tau(G)$ обозначают совокупность всех таких подгрупп H, для которых $|G : H| \leqslant n$. Понятно, что τ — подгрупповой функтор. Для обозначения такого функтора применяют запись $\tau = \tau(n)$.

1.4.10 Пример. Для каждой группы G через $\tau(G)$ обозначим совокупность всех абнормальных максимальных подгрупп из G. Понятно, что τ — подгрупповой функтор. Для обозначения такого функтора применяют запись $\tau = \tau_{abm}$.

Алгебра $\boldsymbol{\tau}$**.** Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\mathrm{S}_\tau\mathfrak{X}$ обозначают множество всех таких групп H, что $H \in \tau(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутым*, если $\mathrm{S}_\tau(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G из $\mathfrak{F}$.

Понятно, что совокупность всех τ-замкнутых формаций является алгеброй формаций. Для обозначения такой алгебры применяют символ τ. Кроме того, мы будем использовать символы S, S_n и S_{ab} для обозначения соответственно алгебр наследственных, нормально наследственных и абнормально наследственных формаций (при этом под абнормально наследственной мы понимаем всякую формацию, содержащую все абнормальные подгруппы своих групп).

Оператор $\boldsymbol{\tau}$**form**. Множество всех гомоморфных образов всех групп из $\mathfrak{X}$ обозначают через $\mathrm{Q}\mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *полуформацией*, если $\mathfrak{F} = \mathrm{Q}\mathfrak{F}$.

Пересечение всех тех τ-замкнутых полуформаций, которые содержат данную совокупность групп $\mathfrak{X}$, называют *τ-замкнутой полуформацией, порожденной* $\mathfrak{X}$.

1.4.11 Лемма ([203, лемма 1.2.21]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая полуформация, порожденная $\mathfrak{X}$. Тогда*

$$\mathfrak{F} = \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}\mathfrak{X}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{M}$ — полуформация и, очевидно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. С другой стороны, если $\mathfrak{H}$ — некоторая τ-замкнутая полуформация, содержащая $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, для доказательства леммы достаточно лишь установить, что класс $\mathfrak{M}$ τ-замкнут. Пусть $H \in \tau(G)$, где $G \in \mathfrak{M}$. И пусть $\varphi : T \to G$ — эпиморфизм, где $T \in \mathrm{S}_{\overline{\tau}}\mathfrak{X}$. Если $K = H^{\varphi^{-1}}$, то, очевидно, $K \in \mathrm{S}_{\overline{\tau}}\mathfrak{X}$. Но тогда $H = K^\varphi \in \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}\mathfrak{X} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

1.4.12 Лемма ([203, лемма 1.2.22]). *Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство*

$$\tau\mathrm{form}\mathfrak{X} = \mathrm{QR}_0\mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$. Понятно, что

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{QR}_0\mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Если $\varphi : T \to H$ — изоморфизм, где $H \in \overline{\tau}(G)$ для некоторой группы $G \in (\mathfrak{X})$, то существуют такая группа D, содержащая T в качестве подгруппы, и такой изоморфизм $f : D \to G$, который является продолжением φ (см. [123, с. 58]). Понятно, что $T \in \overline{\tau}(D)$. Значит, $(\mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})) = \mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})$. Таким образом, согласно [230, теорема 2.2], класс $\mathrm{QR}_0\mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})$ является формацией. Следовательно, для завершения доказательства леммы достаточно лишь установить, что эта формация τ-замкнута.

Пусть $\mathfrak{X}_1 = \mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X}), \mathfrak{X}_2 = \mathrm{R}_0\mathfrak{X}_1, A \in \mathfrak{X}_2$ и $H \in \tau(A)$. Покажем, что $H \in \mathfrak{X}_2$. Если $A \in \mathfrak{X}_1$, то это очевидно. В противном случае, по определению класса $\mathrm{R}_0\mathfrak{X}_1$, в A найдутся такие нормальные подгруппы $N_1, \ldots, N_t$ $(t \geqslant 2)$, что $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$ и $A/N_i \in \mathfrak{X}_1$, $i = 1, \ldots, t$. Поскольку

$$H/H \cap N_i \cong HN_i/N_i \in \tau(H/N_i) \subseteq \mathfrak{X}_1$$

и $(H \cap N_1) \cap \ldots \cap (H \cap N_t) = 1$, то $H \in \mathrm{R}_0\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$. Таким образом, $\mathrm{S}_\tau\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_2$. Пусть теперь $H \in \tau(A)$, где $A \in \mathrm{Q}\mathfrak{X}_2$ и $\varphi : G \to A$ — эпиморфизм, где $G \in \mathfrak{X}_2$. Тогда $T = H^{\varphi^{-1}} \in \tau(G) \subseteq \mathfrak{X}_2$. Значит, $H \in \mathrm{Q}(T) \subseteq \mathrm{Q}\mathfrak{X}_2$. Итак, формация $\mathrm{QR}_0\mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})$ τ-замкнута. Лемма доказана.

1.4.13 Следствие ([203, следствие 1.2.23]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, $\mathfrak{M} = \mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})$. Тогда*

$$\tau\mathrm{form}\mathfrak{X} = \mathrm{form}\mathfrak{M}.$$

1.4.14 Следствие ([203, следствие 1.2.24]). *Для любой совокупности τ-замкнутых формаций $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ имеет место*

$$\tau\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\Big) = \mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\Big).$$

Внося несложные изменения в доказательство [230, теорема 3.11] и используя лемму 1.4.12, можно доказать следующую теорему.

1.4.15 Теорема ([203, теорема 1.2.25]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — τ-замкнутая полуформация и $A \in \mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$. Тогда если $A \notin \mathfrak{X}$, то* *в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, N_1, \ldots, N_t, M_1, \ldots, M_t$ $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие утверждения*:

1) $H/N \cong A$ *и* $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$;

2) H/N_i *— τ-критическая $\mathfrak{X}$-группа с монолитом* M_i/N_i;

3) $K_i = N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t$ *— минимальная нормальная подгруппа группы H, причем $K_i \not\subseteq N$ и* $K_iN_i = M_i$;

4) $M_1 \cap \ldots \cap M_t \subseteq M$, *где* $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$.

Иногда удобно использовать теорему 1.4.15 в следующей форме.

1.4.16 Следствие ([203, следствие 1.2.26]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — τ-замкнутая полуформация и $A \in \mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$. Тогда если A — монолитическая группа и $A \notin \mathfrak{X}$, то в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, M, N_1, \ldots, N_t; M_1, \ldots, M_t$ $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие утверждения*:

1) $H/N \cong A$, $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;

2) $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$;

3) H/N_i *— монолитическая $\mathfrak{X}$-группа с монолитом M_i/N_i, который H-изоморфен* M/N;

4) $M_1 \cap \ldots \cap M_t \subseteq M$.

1.4.17 Следствие ([203, следствие 1.2.27]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — τ-замкнутая полуформация и G — неединичная группа из $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$. Тогда*

$$G/\mathrm{Soc}(G) \in \tau\mathrm{form}(A/\mathrm{Soc}(A) \mid A \in \mathfrak{X}).$$

Доказательство. Утверждение справедливо, если $G \in \mathfrak{X}$. В противном случае, согласно теореме 1.4.15, в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, N_1, \ldots, N_t; M_1, \ldots, M_t$ $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие утверждения: 1) $G \cong H/N$;

2) H/N_i — монолитическая $\mathfrak{X}$-группа с $M_i/N_i = \mathrm{Soc}(H/N_i)$;

3) $M_1 \cap \ldots \cap M_t \subseteq M$, где $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$. Из утверждений 1) и 3) следует, что $G/\mathrm{Soc}(G)$ — гомоморфный образ группы $H/M_1 \cap \cap \ldots \cap M_t$. Но

$$H/M_i \cong (H/N_i)/(M_i/N_i) =$$

$$= (H/N_i)/\mathrm{Soc}(H/N_i) \in \mathfrak{M} = \tau\mathrm{form}(A/\mathrm{Soc}(A) \mid A \in \mathfrak{X}).$$

Значит, $G/\mathrm{Soc}(G) \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

1.4.18 Следствие ([203, следствие 1.2.28]). *Пусть G — неединичная группа, принадлежащая τ-замкнутой формации $\mathfrak{F}$. Тогда* $G/\mathrm{Soc}(G) \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Проведем индукцию по $|G|$. Пусть $\mathfrak{M}$ — такая максимальная τ-подформация в $\mathfrak{F}$, что $G/\mathrm{Soc}(G) \notin \mathfrak{M}$. Пусть $A = G/\mathrm{Soc}(G)$ и $\mathfrak{X} = \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}(A)$. Ввиду леммы 1.4.11 $\mathfrak{X}$, а значит, и $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M}$ — –– τ-замкнутые полуформации. При этом, очевидно, $G \notin \mathfrak{X} \cup \mathfrak{M}$. Значит, согласно теореме 1.4.15, в

$$\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}(\{A\} \cup \mathfrak{M}) = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M})$$

найдется группа H с такими нормальными подгруппами

$$N, N_1, \ldots, N_t; M_1, \ldots, M_t \quad (t \geqslant 2),$$

что выполняются следующие утверждения:

1) $G \cong H/N$ и $M_1 \cap \ldots \cap M_t \subseteq M$, где $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;

2) H/N_i — монолитическая $(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M})$-группа с монолитом M_i/N_i.

Заметим, что $H/M_i \in \mathfrak{M}$ при всех $i \in \{1, \ldots, t\}$. Действительно, если $H/N_i \in \mathfrak{M}$, то это очевидно. Пусть $H/N_i \in \mathfrak{X}$. Тогда $|H/N_i| < |G|$. Значит, по индукции

$$(H/N_i)/\mathrm{Soc}(H/N_i) = (H/N_i)/(M_i/N_i) \cong H/M_i \in \Phi_\tau(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{M}.$$

Итак, $H/M_1, \ldots, H/M_t \in \mathfrak{M}$. Следовательно, ввиду 1) $G/\mathrm{Soc}(G) \in \mathfrak{M}$. Полученное противоречие завершает доказательство следствия.

В дальнейшем наряду с теоремой 1.4.15 мы будем часто применять следующий результат, доказательство которого можно найти в [230, теорема 3.37].

1.4.19 Теорема ([203, теорема 1.2.29]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая формация и пусть у каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ не имеет фраттиниевых G-главных факторов. Тогда если A — монолитическая группа из* $\mathrm{form}\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, *то* $A \in \mathrm{Q}(\mathfrak{X})$.

1.5 Решетки n-кратно ω-насыщенных формаций

В 1987 году А.Н. Скибой [193] (см. также [206]) предложена концепция кратной локализации, согласно которой всякая формация считается 0-*кратно ω-насыщенной.* При $n \geqslant 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-насыщенной,* если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями. Формация $\mathfrak{F}$ называется *тотально ω-насыщенной,* если она n-кратно ω-насыщена для всех целых неотрицательных n.

Пусть $l^\tau_{\omega_n}$ — совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций и $l^\tau_{\omega_\infty}$ — совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций.

Если $\omega = \mathbb{P}$, то вместо $l^\tau_{\mathbb{P}_n}$ мы пишем l^τ_n, обозначая совокупность всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций, а вместо $l^\tau_{\mathbb{P}_\infty}$ мы пишем l^τ_∞, обозначая совокупность всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций.

Если $n = 0$, то вместо символа $l^\tau_{\omega_0}$ будем использовать символ l^τ_0 для обозначения совокупности всех τ-замкнутых формаций.

Если же τ — тривиальный подгрупповой функтор, то символ τ опускают, причем вместо l_{ω_n} мы пишем l^ω_n, обозначая совокупность всех n-кратно ω-насыщенных формаций, а вместо l_{ω_∞} мы пишем l^ω_∞, обозначая совокупность всех тотально ω-насыщенных формаций.

При $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ вместо символа $l^\mathbb{P}_n$ будем использовать символ l_n для обозначения совокупности всех n-кратно насыщенных формаций, а вместо символа $l^\mathbb{P}_\infty$ — символ l_∞ для совокупности всех тотально насыщенных формаций.

В случае $n = 1$ для тривиального подгруппового функтора τ вместо l^ω_1 мы пишем l^ω, обозначая совокупность всех ω-насыщенных формаций.

Если $n = 1$ и $\omega = \{p\}$, то для тривиального подгруппового функтора τ вместо символа l^p_1 будем использовать символ l^p для совокупности всех p-насыщенных формаций.

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ вместо l_1 мы пишем l для совокупности всех насыщенных формаций.

1.5.1 Замечание. Большинство наиболее известных конкретных формаций тотально ω-насыщены. Таковы, например, формации $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$ всех π-нильпотентных, $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{G}_\pi$ всех π-разложимых, $\mathfrak{S}^\pi$ всех π-разрешимых, $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}$ всех π-замкнутых групп при любом непустом $\pi \subseteq \mathbb{P}$; формация всех φ-дисперсивных групп при любом упорядочении φ множества $\mathbb{P}$; формация метанильпотентных групп и др. (см. подробнее [230]).

1.5.2 Замечание. Ввиду примера 1.2.6 всякая подформация из $\mathfrak{G}_{\omega'}$ тотально ω-насыщена. В частности, формации $\varnothing$ и (1) тотально ω-насыщены. Тотально ω-насыщена и формация $\mathfrak{G}_\pi$ при любом $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Кроме того, формации $\varnothing$, (1), $\mathfrak{G}_\pi$ наследственны, а значит, τ-замкнуты для любого подгруппового функтора τ. Итак, $\varnothing$, (1), $\mathfrak{G}_\pi \in l^\tau_{\omega_\infty} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} l^\tau_{\omega_n}$.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Для произвольной совокупности Θ-формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big),$$

в частности,

$$\mathfrak{M} \vee_\Theta \mathfrak{H} = \Theta\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность Θ-значных функций вида

$$f_i : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$

Тогда через $\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую функцию f, что

$$f(\omega') = \Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(\omega')\Big),$$

в частности,

$$\big(f_1 \vee_\Theta f_2\big)(\omega') = \Theta\mathrm{form}\big(f_1(\omega') \cup f_2(\omega')\big)$$

и при $p \in \omega$ имеет место

$$f(p) = \Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big),$$

в частности,

$$\big(f_1 \vee_\Theta f_2\big)(p) = \Theta\mathrm{form}\big(f_1(p) \cup f_2(p)\big),$$

если по крайней мере одна из формаций $f_i(p) \neq \varnothing$. Если же $f_i(p) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагают $f(p) = \varnothing$.

В дальнейшем, когда $\Theta = l^\tau_{\omega_n}$ или $\Theta = l^\tau_{\omega_\infty}$, вместо символов $\vee_{l^\tau_{\omega_n}}$, $\vee_{l^\tau_{\omega_\infty}}$ будем соответственно писать $\vee^{\tau^l}_{\omega_n}$, $\vee^{\tau^l}_{\omega_\infty}$.

Таким образом, для произвольной совокупности τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee^{\tau^l}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big),$$

в частности,
$$\mathfrak{M} \vee {}^{\tau^l}_{\omega_n} \mathfrak{H} = l^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$
Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность $l^\tau_{\omega_n}$-значных функций вида
$$f_i : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$
Тогда через $\vee^{\tau^l}_{\omega_n}(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую функцию f, что
$$f(\omega') = l^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(\omega')\Big),$$
в частности,
$$\big(f_1 \vee {}^{\tau}_{\omega_n} f_2\big)(\omega') = l^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}\big(f_1(\omega') \cup f_2(\omega')\big)$$
и при $p \in \omega$ имеет место
$$f(p) = l^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big),$$
в частности,
$$\big(f_1 \vee {}^{\tau}_{\omega_n} f_2\big)(p) = l^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}\big(f_1(p) \cup f_2(p)\big),$$
если по крайней мере одна из формаций $f_i(p) \neq \varnothing$. Если же $f_i(p) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагают $f(p) = \varnothing$.

1.5.3 Теорема *Совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций $l^\tau_{\omega_n}$ является полной решеткой формаций, в которой наибольшим элементом является класс всех групп $\mathfrak{G}$, а для произвольного множества τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$*
$$\wedge^{\tau^l}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i \text{ — \textit{точная нижняя грань и}}$$
$$\vee^{\tau^l}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \text{ — \textit{точная верхняя грань.}}$$

Доказательство. Совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций $l^\tau_{\omega_n}$ частично упорядочена относительно включения $\subseteq$. Покажем сначала, что такое частично упорядоченное множество является решеткой.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольное непустое множество τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций и f_i — ω-локальный

$l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. Тогда по лемме 1.2.12 $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где f — такой ω-локальный спутник, что

$$f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a), \quad a \in \omega \cup \{\omega'\}$$

и, тем самым, формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщена. Как отмечено ранее, совокупность l^{τ} является алгеброй формаций. Поэтому формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута.

Таким образом, $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая ω-насыщенная формация, т. е.

$$\mathfrak{F} = \wedge^{\tau^l}_{\omega_1}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$$

и, как отмечено выше,

$$\vee^{\tau^l}_{\omega_1}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l^{\tau}_{\omega_1}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right).$$

Итак, совокупность всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций l^{τ}_{ω} является решеткой.

Пусть теперь $n > 1$ и при $n - 1$ лемма верна. Снова применяя лемму 1.2.12, получаем $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где ω-локальный спутник f таков, что

$$f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a), \quad a \in \omega \cup \{\omega'\}.$$

По индукции $f(a) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$, т. е. спутник f $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значен. Значит, согласно определению, формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой n-кратно ω-насыщенной.

Таким образом, совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций $l^{\tau}_{\omega_n}$ является решеткой формаций, а для произвольного множества τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$

$$\wedge^{\tau^l}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ — точная нижняя грань и,}$$

как отмечено выше,

$$\vee^{\tau^l}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right) \text{ — точная верхняя грань.}$$

Докажем теперь, что $l^{\tau}_{\omega_n}$ — полная решетка. Для этого достаточно показать, что класс всех групп $\mathfrak{G}$ является наибольшим элементом решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$. Докажем сначала, что формация $\mathfrak{G}$ n-кратно ω-насыщена для всех целых неотрицательных n. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. Согласно примеру 1.2.10 $\mathfrak{G} = LF_{\omega}(g)$, где ω-локальный спутник g таков, что

$$g(a) = \begin{cases} (1), & \text{если } a = \omega', \\ \mathfrak{G}, & \text{если } a = p \in \omega. \end{cases}$$

Поэтому формация $\mathfrak{G}$ ω-насыщена.

Пусть $n > 1$ и при $n-1$ утверждение верно. Согласно примеру 1.2.10 $\mathfrak{G} = LF_{\omega}(g)$, где ω-локальный спутник g таков, что

$$g(a) = \begin{cases} (1), & \text{если } a = \omega', \\ \mathfrak{G}, & \text{если } a = p \in \omega. \end{cases}$$

По индукции формация $\mathfrak{G} = g(p)$ $(n-1)$-кратно ω-насыщена. Следовательно, спутник g l^{ω}_{n-1}-значен. Значит, формация $\mathfrak{G}$ n-кратно ω-насыщена. Кроме того, формация $\mathfrak{G}$ наследственна, а значит, τ-замкнута для любого подгруппового функтора τ.

Итак, l^{ω}_{n} — полная решетка формаций, в которой наибольший элемент — формация всех групп $\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

1.5.4 Теорема *Совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ является полной решеткой формаций, в которой наибольшим элементом является класс всех групп $\mathfrak{G}$, а для произвольного множества τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$*

$$\wedge^{\tau^l}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ — \textit{точная нижняя грань и}}$$

$$\vee^{\tau^l}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \text{ — \textit{точная верхняя грань.}}$$

Доказательство. Совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ частично упорядочена относительно включения $\subseteq$. Покажем сначала, что такое частично упорядоченное множество является решеткой.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольное непустое множество τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций и f_i — ω-локальный $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Применяя теперь рассуждения, используемые при доказательстве теоремы 1.5.3, мы заключаем, что формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой n-кратно ω-насыщенной для всех целых неотрицательных n. Значит, $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формацией.

Таким образом, совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $l_{\omega_n}^{\tau}$ является решеткой формаций, а для произвольного множества τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$

$$\wedge_{\omega_\infty}^{\tau^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i \text{ — точная нижняя грань и,}$$

как отмечено выше,

$$\vee_{\omega_\infty}^{\tau^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right) \text{ — точная верхняя грань.}$$

Докажем теперь, что $l_{\omega_\infty}^{\tau}$ — полная решетка. Ввиду теоремы 1.5.3 формация $\mathfrak{G}$ является τ-замкнутой n-кратно ω-насыщенной для всех целых неотрицательных n. Значит, $\mathfrak{G}$ является τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формацией, т. е. $\mathfrak{G}$ — наибольший элемент решетки $l_{\omega_\infty}^{\tau}$.

Итак, $l_{\omega_\infty}^{\tau}$ — полная решетка формаций. Теорема доказана.

1.5.5 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathfrak{F}$ имеет внутренний τ-значный ω-локальный спутник, то $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация;*

2) *если $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация, то ее канонический ω-локальный спутник является τ-значным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где f — внутренний ω-локальный спутник, все значения которого τ-замкнуты. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута.

Предположим противное. Тогда найдутся такая группа $G \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $H \in \tau(G)$, что $H \notin \mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка среди групп с таким свойством. Пусть R — минимальная нормальная в G подгруппа. Покажем, что R — единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Допустим, что R и L — две различные минимальные нормальные в G подгруппы. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/R \in \mathfrak{F}$. Поскольку $|G/R| < |G|$, то по выбору группы G для любой группы $\overline{H} \in \tau(G/R)$ следует, что $\overline{H} \in \mathfrak{F}$. Заметим, что при каноническом эпиморфизме $\varphi : G \to G/R$ мы имеем $\varphi(H) = HR/R$. Значит, $HR/R \in \tau(G/R)$. Следовательно,

$$H/R \cap H \cong HR/R \in \mathfrak{F}.$$

Аналогично,

$$H/L \cap H \cong HL/L \in \mathfrak{F}.$$

Но так как $(R \cap H) \cap (L \cap H) = 1$, то

$$H \cong H/1 = H/(R \cap H) \cap (L \cap H) \in \mathfrak{F},$$

что противоречит выбору групп G и H. Значит, R — единственная минимальная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что R — ω'-группа. Тогда $G_{\omega d} = 1$ и поэтому

$$G \cong G/1 = G/G_{\omega d} \in f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}.$$

Следовательно, поскольку $H \in \tau(G)$ и формация $f(\omega')$ по условию τ-замкнута, то $H \in f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$, противоречие.

Значит, R — ωd-группа. Пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$. Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \cong G/1 = G/F_p(G) \in f(p).$$

Но так как $H \in \tau(G)$, то $H \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$, противоречие. Следовательно, R — абелева p-группа. Так как $R \cap H \lhd H$ и $R \cap H$ — p-группа, то

$$R \cap H \subseteq O_p(H) \subseteq H_{\omega d}.$$

По лемме 1.2.5 $(H/R \cap H)_{\omega d} = H_{\omega d}/R \cap H$. Но $H/R \cap H \in \mathfrak{F}$ и, следовательно,

$$(H/R \cap H)/(H/R \cap H)_{\omega d} \in f(\omega').$$

Значит,

$$(H/R\cap H)/(H/R\cap H)_{\omega d} = (H/R\cap H)/(H_{\omega d}/R\cap H) \cong H/H_{\omega d} \in f(\omega').$$

Пусть теперь $q \in \omega \cap \pi(H)$. Тогда поскольку

$$HF_q(G)/F_q(G) \in \tau(G/F_q(G)) \text{ и } G/F_q(G) \in f(p),$$

то

$$HF_q(G)/F_q(G) \cong H/F_q(G) \cap H \in f(p).$$

Поскольку, очевидно,

$$F_q(G) \cap H \subseteq F_q(H) \text{ и } H/F_q(G) \cap H \in f(p),$$

то $H/F_q(H) \in f(p)$. Значит, $H \in \mathfrak{F}$, что противоречит нашему выбору групп G и H. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута. Тем самым доказано утверждение 1).

Докажем теперь утверждение 2). Покажем сначала, что если некоторая формация $\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой, то формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ также τ-замкнута.

Предположим противное. Тогда найдется такая группа $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ и подгруппа $H \in \tau(G)$, что $H \notin \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Тогда $G^{\mathfrak{H}} \in \in \mathfrak{N}_p$ и $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$. Так как формация $\mathfrak{H}$ по предположению τ-замкнута, то для любой группы $\overline{H} \in \tau(G/G^{\mathfrak{H}})$ следует, что $\overline{H} \in \mathfrak{H}$. Но $G^{\mathfrak{H}}H/G^{\mathfrak{H}} \in \tau(G/G^{\mathfrak{H}})$. Следовательно,

$$G^{\mathfrak{H}}H/G^{\mathfrak{H}} \cong H/H \cap G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}.$$

Но $H \cap G^{\mathfrak{H}} \lhd H$ и $H \cap G^{\mathfrak{H}}$ – p-группа. Значит, $H \cap G^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(H)$ и поэтому $H^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(H)$, т. е. $H^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. Значит, $H \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ τ-замкнута.

Пусть $p \in \omega$ и F — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что формация $F(p)$ является τ-замкнутой. Пусть $G \in F(p)$ и $H \in \tau(G)$. Пусть P — неединичная p-группа и $D = = P \wr G = [K]G$, где K — база регулярного сплетения D. Тогда $HK \in \tau(D)$. Действительно, пусть $\varphi : D \to D/K$ — канонический эпиморфизм группы D на D/K. Тогда $HK/K = H^{\varphi}$ и поэтому $HK/K \in \tau(D/K)$. А так как $HK = (HK/K)^{\varphi^{-1}}$ — полный прообраз подгрупп HK/K при эпиморфизме φ, то $HK \in \tau(D)$. Поскольку спутник F является внутренним и

$$G \cong D/K \cong D/O_p(D) \in F(p),$$

то по лемме 1.2.14 $D \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута, то $HK \in \in \mathfrak{F}$. Пусть $M = HK$. Тогда $M/F_p(M) \in F(p)$. Поскольку K — нормальная в M p-группа, то $K \cap O_{p'}(M) = 1$. Значит, $O_{p'}(M) \subseteq \subseteq C_M(K)$. По свойству регулярных сплетений $C_G(K) \subseteq K$. Следовательно, $O_{p'}(M) = 1$. Значит, $O_p(M) = F_p(M)$.
Так как

$$O_p(M) = O_p(M) \cap M = O_p(M) \cap KH = K(O_p(M) \cap H)$$

и поскольку $O_p(M) \cap H \subseteq O_p(H)$, то

$$O_p(M) = K(O_p(M) \cap H) \subseteq KO_p(H) \subseteq O_p(M).$$

Значит, $KO_p(H) = O_p(M)$. Тогда

$$M/F_p(M) = KH/O_p(M) = KH/KO_p(H) \cong H/O_p(H)(K \cap H) =$$

$$= H/O_p(H) \in F(p) = \mathfrak{N}_pF(p),$$

т. е.

$$H \in (\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p)F(p) = \mathfrak{N}_pF(p) = F(p).$$

Значит, формация $F(p)$ τ-замкнута. Лемма доказана.

1.5.6 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$ — τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Тогда ω-локальный спутник F $l^\tau_{\omega_{n-1}}$-значен.*

Доказательство. Покажем сначала, что ω-локальный спутник F является l^ω_{n-1}-значным. Для этого ввиду леммы 1.2.20 нам достаточно лишь проверить, что для любого $p \in \omega$ и всякой n-кратно ω-насыщенной формации $\mathfrak{H}$ $(n \geqslant 0)$ формация $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ также является n-кратно ω-насыщенной. Если $n = 0$, то утверждение очевидно. Пусть теперь $n > 0$. Предположим, что доказываемое утверждение верно для $n - 1$. Пусть $\mathfrak{H} = LF_\omega(h)$, где h — внутренний ω-локальный l^ω_{n-1}-значный спутник. Формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник m, что

$$m(\omega') = (1), \quad m(p) = (1) \quad \text{и} \quad m(q) = \varnothing$$

для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$. Нетрудно показать (см., например, теорему 2.1.1), что формация $\mathfrak{M}$ имеет спутник f, удовлетворяющий условиям

$$f(\omega') = \mathfrak{M}, \quad f(p) = \mathfrak{H} \quad \text{и} \quad f(q) = \varnothing$$

для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$. Согласно нашему предположению $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является $(n-1)$-кратно ω-насыщенной формацией. Следовательно, $\mathfrak{M}$ — n-кратно ω-насыщенная формация. Значит, ω-локальный спутник F l^ω_{n-1}-значен. По лемме 1.5.5 ω-локальный спутник F $l^\tau_{\omega_{n-1}}$-значен. Лемма доказана.

Для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

1.5.7 Следствие ([206, лемма 11]). *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$ — n-кратно ω-насыщенная формация. Тогда ω-локальный спутник F l^ω_{n-1}-значен.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ получаем

1.5.8 Следствие ([203, лемма 1.3.1]). *Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$ — n-кратно насыщенная формация. Тогда локальный спутник F l_{n-1}-значен.*

1.5.9 Пример. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Хорошо известно (см., например, [224, с. 35]), что формация $\mathfrak{F}$ обладает таким внутренним локальным спутником t, что $t(p)$ — формация абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$ для любого $p \in \mathbb{P}$. В частности, $t(3)$ — формация всех элементарных абелевых 2-групп. Значит, если F — канонический локальный спутник $\mathfrak{F}$, то формация $F(3) = \mathfrak{N}_3 F(3)$ не насыщена. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной, но не является 2-кратно насыщенной.

1.5.10 Пример. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^n\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^n\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — непустая ненасыщенная формация. Покажем, что обе формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ являются n-кратно насыщенными, но не являются $(n+1)$-кратно насыщенными.

Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. Тогда, как и в примере 1.5.9, можно показать, что формация $\mathfrak{M}$ насыщена. Ввиду [230, следствие 7.13] и [230, следствие 7.19] формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ имеет такой локальный спутник f, что

$$f(p) = \mathfrak{F} \quad \text{и} \quad f(q) = \mathfrak{N}_q\mathfrak{H}$$

для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Так как формация $\mathfrak{H}$ не насыщена, то найдется такая группа $G \notin \mathfrak{H}$, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$. Не теряя общности, мы можем считать, что $\Phi(G) \subseteq O_t(G)$ для некоторого $t \in \mathbb{P}$. Предположим, что для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$ формация $\mathfrak{N}_q\mathfrak{H}$ насыщена. Тогда если $q \neq t$, p, то $G \in \mathfrak{N}_q\mathfrak{H}$, что влечет $G \in \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что найдется такое $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$, что формация $\mathfrak{N}_q\mathfrak{H} = f(q)$ не является насыщенной. Итак, при $n = 1$ обе формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ являются насыщенными, но не являются 2-кратно насыщенными.

Пусть $n > 1$ и предположим, что обе формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ $(n-k)$-кратно насыщены, но не $(n-k+1)$-кратно насыщены для всех $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Пусть F и T — канонические локальные спутники формаций $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^n\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^n\mathfrak{H}$ соответственно. Используя [230, следствие 7.13] и [230, следствие 7.19], легко убедиться, что для всех $q \in \mathbb{P}$ имеет место

$$F(q) = \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{H}, \quad T(p) = \mathfrak{M} \quad \text{и} \quad T(q) = \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{H}$$

для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Ввиду леммы 1.5.8 формация $\mathfrak{F}$ n-кратно насыщена. Заметим, что формация $T(p) = \mathfrak{M}$ n-кратно насыщена. Действительно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}^n\mathfrak{H})$ — произведение двух n-кратно насыщенных формаций $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}^n\mathfrak{H}$. Значит, согласно [230, следствие 7.14], $\mathfrak{M}$ — n-кратно насыщенная формация.

Итак, обе формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ являются n-кратно насыщенными, но не являются $(n+1)$-кратно насыщенными, если только $\varnothing \neq \mathfrak{H}$ — ненасыщенная формация.

1.5.11 Лемма ([321, лемма 2]). *При любом натуральном n справедливо равенство*

$$(l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega_l} = l^{\tau}_{\omega_n}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \in (l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega_l}$. Тогда по определению $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-локальный спутник f, каждое непустое значение которого принадлежит решетке $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Это означает, что формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-насыщена. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута. Пусть $H \in \tau(G)$, где $G \in \mathfrak{F}$. И пусть $p \in \omega \cap \pi(H)$, $F_p = F_p(G)$. Тогда поскольку для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ τ-замкнута, то

$$H/H_{\omega d} = H/G_{\omega d} \cap H \cong HG_{\omega d}/G_{\omega d} \in f(\omega')$$

и

$$H/F_p(H) = H/F_p \cap H \cong HF_p/F_p \in f(p).$$

Итак, $H/H_{\omega d} \in f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$ имеет место $H/F_p(H) \in f(p)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута, а значит, $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_n}$. Следовательно, $(l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega_l} \subseteq l^{\tau}_{\omega_n}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_n}$, F — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Очевидно, $F(\omega') = \mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Покажем, что для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ имеет место $F(p) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Прежде заметим, что ввиду леммы 1.5.7 имеет место $F(p) \in l_{\omega_{n-1}}$. Покажем, что формация $F(p)$ τ-замкнута. Пусть $H \in \tau(G)$, где $G \in F(p)$. Индукцией по $|G|$ покажем, что $H \in F(p)$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда, очевидно, $HR/R \in \tau(G/R)$. Значит, по индукции

$$H/R \cap H \cong HR/R \in F(p).$$

Поэтому если $O_p(G) \neq 1$, то $H \in F(p) = \mathfrak{N}_p F(p)$. Кроме того, если в G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы R и N, то

$$H \cong H/1 = H/R \cap N \cap H \in F(p).$$

Пусть $O_p(G) = 1$ и R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда существует простой точный $\mathbb{F}_p G$-модуль P. Пусть $T = [P]G$. Тогда поскольку ω-локальный спутник F является внутренним и $G \in F(p)$, то, согласно лемме 1.2.14, $T \in \mathfrak{F}$.

Если $\varphi : T \mapsto G$ — естественный эпиморфизм группы T на G, то, очевидно, $H^{\varphi^{-1}} = PH$. Значит, $PH \in \tau(T)$. Поэтому $PH \in \mathfrak{F}$.

Следовательно, если $F_p = F_p(PH)$, то $PH/F_p \in F(p)$. Так как при этом $C_T(P) = P$, то

$$F_p = O_p(PH) = O_p(PH) \cap PH = P(O_p(PH) \cap H) = PO_p(H).$$

Значит,

$$PH/F_p = PH/PO_p(H) \cong H/O_p(H)(P \cap H) = H/O_p(H) \in F(p).$$

Следовательно, $H \in F(p)$. Поэтому формация $F(p)$ τ-замкнута, где $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.

Итак, формация $F(a)$ τ-замкнута для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Значит, $F(a) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \in (l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega_l}$. Значит, $l^{\tau}_{\omega_n} \subseteq (l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega_l}$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 1.5.11 из леммы 1.2.15 вытекает следующий результат.

1.5.12 Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, где $n \geqslant 1$, и пусть f — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{X}(F_p)\big)$ *для всех* $p \in \omega$;

3) *если* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$, *спутник* h $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-*значен и* p — *некоторое фиксированное простое число из* ω, *то* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f_1)$, *где* $f_1(a) = h(a)$ *при любом* $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$ *и*

$$f_1(p) = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1),$$

кроме того, $f_1(p) = f(p)$;

4) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *при всех* $p \in \omega$.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ получаем следующее утверждение.

1.5.13 Следствие ([203, теорема 1.3.13]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{n}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, где $n \geqslant 1$, и пусть f — минимальный l^{τ}_{n-1}-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = l^{\tau}_{n-1}\mathrm{form}\big(\mathfrak{X}(F_p)\big)$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$;

3) *если* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$, *спутник* h l^{τ}_{n-1}-*значен, то при любом* $p \in \pi(\mathfrak{X})$ *имеет место*

$$f(p) = l^{\tau}_{n-1}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1).$$

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то получаем следующее утверждение.

1.5.14 Следствие ([206, лемма 10]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— непустая совокупность групп,* $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, *где* $n \geqslant 1$, *и пусть* f *— минимальный* l_{n-1}^{ω}*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(\mathfrak{X}(F_p)\big)$ *для всех* $p \in \omega$;

3) *если* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$, *спутник* h l_{n-1}^{ω}*-значен и* p *— некоторое фиксированное простое число из* ω, *то* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f_1)$, *где* $f_1(a) = h(a)$ *при любом* $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$ *и*

$$f_1(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1),$$

кроме того, $f_1(p) = f(p)$;

4) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *при всех* $p \in \omega$.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо следующее утверждение.

1.5.15 Следствие ([230, теорема 8.3]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— непустая совокупность групп,* $\mathfrak{F} = l_n\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, *где* $n \geqslant 1$, *и пусть* f *— минимальный* l_{n-1}*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = l_{n-1}\mathrm{form}\big(\mathfrak{X}(F_p)\big)$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$;

3) *если* $\mathfrak{F} = LF(h)$, *спутник* h l_{n-1}*-значен, то при всех* $p \in \pi(\mathfrak{X})$ *имеет место*

$$f(p) = l_{n-1}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1).$$

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

1.5.16 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— непустая совокупность групп,* $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ *и пусть* f *— минимальный локальный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = \mathrm{form}\big(\mathfrak{X}(F_p)\big)$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$;

3) *если* $\mathfrak{F} = LF(h)$, *то при всех* $p \in \pi(\mathfrak{X})$ *имеет место*

$$f(p) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1).$$

1.5.17 Пример. Пусть A — простая неабелева группа, $p \in \pi(A)$ и $\omega = \pi(A) \setminus \{p\}$. Пусть, кроме того, $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}(A)$ и f — минимальный ω-локальный спутник $\mathfrak{F}$. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ не является 2-кратно ω-насыщенной. Допустим противное. Тогда если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F)$, то по следствию 1.5.7 спутник F является l^{ω}-значным. Пусть $q \in \omega$. Тогда $F_q(A) = 1$. Согласно следствию 1.5.14 имеем

$$f(q) = l_0^{\omega}\mathrm{form}(A/F_q(A)) = \mathrm{form}(A).$$

Следовательно, согласно замечанию 1.2.18 справедливо равенство $F(q) = \mathfrak{N}_q\mathrm{form}(A)$. Пусть $r \in \omega \setminus \{q\}$. Тогда формация $F(q)$ является r-насыщенной и $r \in \pi(F(q))$, откуда в силу теоремы 1.2.7 вытекает включение

$$\mathfrak{N}_r \subseteq \mathfrak{N}_q\mathrm{form}(A).$$

Противоречие.

1.5.18 Пример. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — формация всех абелевых групп. Очевидно, формация $\mathfrak{F}$ является p-насыщенной. Понятно, что $\mathfrak{F}(F_q) = (1)$ для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Следовательно, ввиду теоремы 1.2.7 формация $\mathfrak{F}$ не является q-насыщенной для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Пусть $\mathfrak{F} = LF_p(F)$. Покажем, что $F(p) = \mathfrak{F}$. Предположим противное и рассмотрим группу G минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus F(p)$. Поскольку $F(p) = \mathfrak{N}_qF(p)$, то группа G является p'-группой. Значит, G — циклическая q-группа, где $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Пусть Z_p — группа порядка p и $A = Z_p \wr G = [K]G$, где $K = F_p(A)$ — база сплетения A. Понятно, что $A \in \mathfrak{F}$, и поэтому

$$A/F_p(A) \cong G \in F(p).$$

Противоречие. Итак, $F(p) = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$ — тотально p-насыщенная формация.

1.5.19 Пример. Пусть $\omega = \{p, q\}$, где p, q — различные простые числа и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{A}$. Как и в примере 1.5.18, можно показать, что формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной, но не r-насыщенной для всех $r \in \mathbb{P} \setminus \omega$.

Покажем, что $\mathfrak{F}$ не является 2-кратно ω-насыщенной. Предположим противное. Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F)$. Очевидно, $\mathfrak{F}(F_p) = \mathfrak{N}_{p'} \cap \mathfrak{A}$. Поэтому

$$F(p) = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_{p'} \cap \mathfrak{A}).$$

С другой стороны, согласно следствию 1.5.7 формация $F(p)$ является q-насыщенной. Следовательно, по теореме 1.2.7 $\mathfrak{N}_q \subseteq F(p)$; противоречие. Итак, формация $F(p)$ не является q-насыщенной.

Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ не может быть 2-кратно ω-насыщенной.

1.6 Решетки n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций

Всякая формация считается 0-*кратно разрешимо* ω-*насыщенной.* При $n \geqslant 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-*кратно разрешимо* ω-*насыщенной* [209], если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n - 1)$-кратно разрешимо ω-насыщенными формациями. Формация $\mathfrak{F}$ называется *тотально разрешимо* ω-*насыщенной* [209], если она n-кратно разрешимо ω-насыщена для всех целых неотрицательных n.

Пусть $c^\tau_{\omega_n}$ — совокупность всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций и $c^\tau_{\omega_\infty}$ — совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций.

Если $\omega = \mathbb{P}$, то вместо $c^\tau_{\mathbb{P}_n}$ мы пишем c^τ_n, обозначая совокупность всех τ-замкнутых n-кратно композиционных формаций, а вместо $c^\tau_{\mathbb{P}_\infty}$ мы пишем c^τ_∞, обозначая совокупность всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций.

Если $n = 0$, то вместо символа $c^\tau_{\omega_0}$ будем использовать символ c^τ_0 для обозначения совокупности всех τ-замкнутых формаций.

Если же τ — тривиальный подгрупповой функтор, то символ τ опускают, причем вместо c_{ω_n} мы пишем c^ω_n, обозначая совокупность всех n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций, а вместо c_{ω_∞} мы пишем c^ω_∞, обозначая совокупность всех тотально разрешимо ω-насыщенных формаций.

При $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ вместо символа $c^\mathbb{P}_n$ будем использовать символ c_n для обозначения совокупности всех n-кратно композиционных формаций, а вместо символа $c^\mathbb{P}_\infty$ — символ c_∞ для совокупности всех тотально композиционных формаций.

В случае $n = 1$ для тривиального подгруппового функтора τ вместо c^ω_1 мы пишем c^ω, обозначая совокупность всех разрешимо ω-насыщенных формаций.

Если $n = 1$ и $\omega = \{p\}$, то для тривиального подгруппового функтора τ вместо символа c_1^p будем использовать символ c^p для совокупности всех p-композиционных формаций.

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ вместо c_1 мы пишем c для совокупности всех композиционных формаций.

1.6.1 Замечание. Ввиду примера 1.2.25 всякая подформация из $\mathrm{E}\mathfrak{L}'$ тотально разрешимо ω-насыщенна. В частности, формации $\varnothing$ и (1) тотально разрешимо ω-насыщенны. Вследствие примера 1.2.29 для пустого множества простых чисел ω каждая формация является тотально разрешимо ω-насыщенной. Кроме того, формации $\varnothing$, (1) наследственны, а значит, τ-замкнуты для любого подгруппового функтора τ. Итак, $\varnothing$, $(1) \in c^{\tau}_{\omega_\infty} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} c^{\tau}_{\omega_n}$.

В дальнейшем, когда $\Theta = c^{\tau}_{\omega_n}$ или $\Theta = c^{\tau}_{\omega_\infty}$, вместо символов $\vee_{c^{\tau}_{\omega_n}}$, $\vee_{c^{\tau}_{\omega_\infty}}$ будем соответственно писать $\vee^{\tau^c}_{\omega_n}$, $\vee^{\tau^c}_{\omega_\infty}$.

Таким образом, для произвольной совокупности τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee^{\tau^c}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big),$$

в частности,

$$\mathfrak{M} \vee^{\tau^c}_{\omega_n} \mathfrak{H} = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность $c^{\tau}_{\omega_n}$-значных функций вида

$$f_i : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$

Тогда через $\vee^{\tau^c}_{\omega_n}(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую функцию f, что

$$f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(\omega')\Big),$$

в частности,

$$\big(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} f_2\big)(\omega') = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(f_1(\omega') \cup f_2(\omega')\big)$$

и при $p \in \omega$ имеет место

$$f(p) = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big),$$

в частности,

$$\big(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} f_2\big)(p) = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(f_1(p) \cup f_2(p)\big),$$

если по крайней мере одна из формаций $f_i(p) \neq \varnothing$. Если же $f_i(p) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагают $f(p) = \varnothing$.

1.6.2 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо ω-насыщенная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $\mathfrak{F}$ имеет τ-значный ω-композиционный спутник, то $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация*;

2) *если $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация, то ее канонический ω-композиционный спутник является τ-значным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где f — внутренний ω-композиционный спутник, все значения которого τ-замкнуты. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута.

Допустим противное. Тогда найдется такая группа $G \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $H \in \tau(G)$, что $H \notin \mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка среди групп с таким свойством. Пусть R — минимальная нормальная в G подгруппа. Покажем, что R — единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Предположим противное. Пусть R и L — две различные минимальные нормальные в G подгруппы. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $G/R \in \mathfrak{F}$. Так как $|G/R| < |G|$, то по выбору группы G для любой группы $\overline{H} \in \tau(G/R)$ следует, что $\overline{H} \in \mathfrak{F}$. Заметим, что при каноническом эпиморфизме $\varphi : G \mapsto G/R$ мы имеем $\varphi(H) = HR/R$. Значит, $HR/R \in \tau(G/R)$. Следовательно,

$$H/R \cap H \cong HR/R \in \mathfrak{F}.$$

Аналогично,

$$H/L \cap H \cong HL/L \in \mathfrak{F}.$$

Но поскольку $(R \cap H) \cap (L \cap H) = 1$, то

$$H \cong H/1 = H/(R \cap H) \cap (L \cap H) \in \mathfrak{F},$$

что противоречит выбору групп G и H. Значит, R — единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Очевидно, $R_\omega(H) = R_\omega(G) \cap H$. Значит,

$$H/R_\omega(H) \cong H/(R_\omega(G) \cap H) \cong HR_\omega(G)/R_\omega(G) \in \tau(G/R_\omega(G)).$$

Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/R_\omega(G) \in f(\omega')$. Следовательно, $H/R_\omega(H) \in f(\omega')$.

Пусть теперь $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(H))$. Заметим, что $C^p(G) = G_{\mathfrak{G}_{cp}}$, где $\mathfrak{G}_{cp}$ — класс всех таких групп, у которых все главные p-факторы центральны. Поскольку мы рассматриваем лишь такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G, то подгруппа H субнормальна в G. Очевидно, $G_{\mathfrak{G}_{cp}} \cap H = H_{\mathfrak{G}_{cp}}$. Следовательно,

$$H/H_{\mathfrak{G}_{cp}} \cong H/(G_{\mathfrak{G}_{cp}} \cap H) \cong HG_{\mathfrak{G}_{cp}}/G_{\mathfrak{G}_{cp}} \in \tau(G/G_{\mathfrak{G}_{cp}}).$$

Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/C^p(G) \cong G/G_{\mathfrak{G}_{cp}} \in f(p)$. Значит,

$$H/C^p(G) \cong H/H_{\mathfrak{G}_{cp}} \in f(p).$$

Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$, что противоречит нашему выбору групп G и H. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ τ -замкнута. Тем самым доказано утверждение 1).

Докажем теперь утверждение 2). Покажем сначала, что если некоторая формация $\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой, то формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ также τ-замкнута.

Предположим противное. Тогда найдется такая группа $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ и подгруппа $H \in \tau(G)$, что $H \notin \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Тогда $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$ и $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$. Поскольку согласно предположению формация $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, то для любой группы $\overline{H} \in \tau(G/G^{\mathfrak{H}})$ имеет место $\overline{H} \in \mathfrak{H}$. Значит, $G^{\mathfrak{H}}H/G^{\mathfrak{H}} \in \tau(G/G^{\mathfrak{H}})$. Следовательно,

$$HG^{\mathfrak{H}}/G^{\mathfrak{H}} \cong H/H \cap G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}.$$

Поскольку $H \cap G^{\mathfrak{H}} \lhd H$ и $H \cap G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа, то $H \cap G^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(H)$. Поэтому $H^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(H)$, т. е. $H^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. Значит, $H \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ τ-замкнута.

Пусть F — канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что формация $F(a)$ является τ-замкнутой.

Если $a = \omega'$, то согласно условию формация $F(\omega') = \mathfrak{F}$ является τ-замкнутой.

Предположим, что $a = p \in \omega$. Пусть группа $G \in F(p)$ и $H \in \tau(G)$. Пусть P — неединичная p-группа и $D = P \wr G = [K]G$, где K — база регулярного сплетения D. Тогда $HK \in \tau(D)$.

Действительно, пусть $\varphi : D \mapsto D/K$ — канонический эпиморфизм группы D на D/K. Тогда $HK/K = H^{\varphi}$ и поэтому $HK/K \in \tau(D/K)$. Так как $HK = (HK/K)^{\varphi^{-1}}$ — полный прообраз подгруппы HK/K при эпиморфизме φ, то $HK \in \tau(D)$.

Поскольку спутник F является внутренним и

$$G \cong D/K \cong D/O_p(D) \in F(p),$$

то по лемме 1.2.35 $D \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута, то $HK \in \in \mathfrak{F}$. Пусть $M = HK$. Тогда

$$M/C^p(M) \in F(p),$$

где $p \in \pi(\mathrm{Com}(M))$. Поскольку p-группа K нормальна в M, то $K \cap \cap O_{p'}(M) = 1$. Значит, $O_{p'}(M) \subseteq C_M(K)$. По свойству регулярных сплетений $C_G(K) \subseteq K$. Следовательно, $O_{p'}(M) = 1$. Значит,

$$O_p(M) = F_p(M) = C^p(M).$$

Так как

$$O_p(M) = O_p(M) \cap M = O_p(M) \cap KH = K(O_p(M) \cap H),$$

и поскольку $O_p(M) \cap H \subseteq O_p(H)$, то

$$O_p(M) = K(O_p(M) \cap H) \subseteq KO_p(H) \subseteq O_p(M).$$

Значит, $KO_p(H) = O_p(M)$. Тогда

$$M/C^p(M) = KH/O_p(M) = KH/KO_p(H) \cong H/O_p(H)(K \cap H) =$$

$$= H/O_p(H) \in F(p) = \mathfrak{N}_p F(p),$$

т. е.

$$H \in (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_p) F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) = F(p).$$

Значит, формация $F(a)$ τ-замкнута. Лемма доказана.

1.6.3 Теорема ([61, теорема 1]). *Совокупность всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций $c^\tau_{\omega_n}$ является полной решеткой формаций, в которой наибольшим элементом является класс всех групп $\mathfrak{G}$, а для произвольного множества τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$*

$$\wedge^\tau_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ — \textit{точная нижняя грань и}}$$

$$\vee^\tau_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \text{ — \textit{точная верхняя грань.}}$$

Доказательство. Совокупность всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций $c^\tau_{\omega_n}$ частично упорядочена относительно включения $\subseteq$. Покажем сначала, что такое частично упорядоченное множество является решеткой.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольное непустое множество τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций и f_i — внутренний ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Проведем индукцию по n.

Пусть $n = 1$. Тогда согласно лемме 1.2.32 $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где f — такой ω-композиционный спутник, что

$$f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a), \quad a \in \omega \cup \{\omega'\}$$

и, тем самым, формация $\mathfrak{F}$ разрешимо ω-насыщенна. По лемме 1.6.2 формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой.

Таким образом, $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая разрешимо ω-насыщенная формация, т. е.

$$\mathfrak{F} = \wedge^{\tau}_{\omega_1}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$$

и, как отмечено выше,

$$\vee^{\tau}_{\omega_1}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c^{\tau}_{\omega_1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\Big).$$

Итак, совокупность всех τ-замкнутых разрешимо ω-насыщенных формаций c^{τ}_{ω} является решеткой.

Пусть теперь $n > 1$ и при $n - 1$ лемма верна. Снова применяя лемму 1.2.32, получаем $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где ω-композиционный спутник f таков, что

$$f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a), \quad a \in \omega \cap \{\omega'\}.$$

По индукции $f(a) \in c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$, т. е. спутник f $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значен. Значит, формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой n-кратно разрешимо ω-насыщенной.

Таким образом, совокупность всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций $c^{\tau}_{\omega_n}$ является решеткой формаций, а для произвольного множества τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ имеем:

$$\wedge^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ — точная нижняя грань}$$

и, как отмечено выше,

$$\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \text{ — точная верхняя грань.}$$

Докажем теперь, что $c^{\tau}_{\omega_n}$ — полная решетка. Для этого достаточно показать, что класс всех групп $\mathfrak{G}$ является наибольшим элементом решетки $c^{\tau}_{\omega_n}$. Докажем сначала, что формация $\mathfrak{G}$ n-кратно разрешимо ω-насыщенна для всех целых неотрицательных n. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. Согласно примеру 1.2.30 $\mathfrak{G} = CF_{\omega}(g)$, где ω-композиционный спутник g таков, что $g(a) = \mathfrak{G}$ для всех $a \in$ $\in \omega \cup \{\omega'\}$. Поэтому формация $\mathfrak{G}$ разрешимо ω-насыщенна.

Пусть $n > 1$ и при $n - 1$ утверждение верно. Согласно примеру 1.2.30 $\mathfrak{G} = CF_{\omega}(g)$, где ω-композиционный спутник g таков, что $g(a) = \mathfrak{G}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. По индукции формация $\mathfrak{G} = g(p)$ $(n-1)$-кратно разрешимо ω-насыщенна. Следовательно, ω-композиционный спутник g c^{ω}_{n-1}-значен. Значит, формация $\mathfrak{G}$ n-кратно разрешимо ω-насыщенна. Кроме того, формация $\mathfrak{G}$ наследственна, а значит, τ-замкнута для любого подгруппового функтора τ.

Итак, $c^{\tau}_{\omega_n}$ — полная решетка формаций, в которой наибольший элемент — формация всех групп $\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

Аналогично теореме 1.6.3 доказывается следующая теорема.

1.6.4 Теорема *Совокупность всех τ-замкнутых тотально разрешимо ω-насыщенных формаций $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ является полной решеткой формаций, в которой наибольшим элементом является класс всех групп $\mathfrak{G}$, а для произвольного множества τ-замкнутых тотально разрешимо ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$*

$$\wedge^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ — \textit{точная нижняя грань и}}$$

$$\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \text{ — \textit{точная верхняя грань.}}$$

1.6.5 Лемма ([54, лемма 2.1]). *Пусть $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(F)$ — τ-замкнутая n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация, $n \geqslant 1$. Тогда спутник F $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значен.*

Доказательство. Согласно лемме 1.2.42 достаточно лишь проверить, что для любого $p \in \mathbb{P}$ и для всякой τ-замкнутой n-кратно разрешимо ω-насыщенной формации $\mathfrak{H}$ $(n \geqslant 0)$ формация $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой n-кратно разрешимо ω-насыщенной.

Заметим, что поскольку для любого $p \in \mathbb{P}$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ τ-замкнута, где $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая формация, то в случае $n = 0$ утверждение верно.

Пусть $n > 0$ и при $n - 1$ утверждение леммы верно. Покажем сначала, что формация $\mathfrak{M}$ n-кратно разрешимо ω-насыщенна. Пусть

$\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, где h — внутренний ω-композиционный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный спутник. Формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой внутренний ω-композиционный спутник f, что

$$f(p) = (1), \quad f(\omega') = (1) \quad \text{и} \quad f(q) = \varnothing$$

для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$. Нетрудно показать, что формация $\mathfrak{M}$ имеет такой спутник m, что

$$m(\omega') = \mathfrak{M}, \quad m(p) = \mathfrak{H} \quad \text{и} \quad m(q) = \varnothing$$

для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$ (см. теорему 2.3.1). Но согласно предположению $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ — $(n-1)$-кратно разрешимо ω-насыщенная формация. Значит, ω-композиционный спутник F c^ω_{n-1}-значен.

Согласно лемме 1.6.2 ω-композиционный спутник F $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значен. Лемма доказана.

Для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

1.6.6 Следствие ([209, теорема 3]). *Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$ — n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация, $n \geqslant 1$. Тогда ω-композиционный спутник F c^ω_{n-1}-значен.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ получаем

1.6.7 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$ — n-кратно разрешимо насыщенная формация, $n \geqslant 1$. Тогда композиционный спутник F c_{n-1}-значен.*

1.6.8 Лемма. *При любом натуральном n справедливо равенство*

$$(c^\tau_{\omega_{n-1}})^{\omega_c} = c^\tau_{\omega_n}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \in (c^\tau_{\omega_{n-1}})^{\omega_c}$. Тогда по определению формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-композиционный спутник f, каждое непустое значение которого принадлежит решетке $c^\tau_{\omega_{n-1}}$. Это означает, что формация $\mathfrak{F}$ n-кратно разрешимо ω-насыщенна. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута. Пусть $H \in \tau(G)$, где $G \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(H))$. Тогда поскольку для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ τ-замкнута, то

$$H/R_\omega(H) \cong H/(R_\omega(G) \cap H) \cong HR_\omega(G)/R_\omega(G) \in f(\omega')$$

и
$$H/C^p(H) \cong H/H_{\mathfrak{G}_{cp}} \cong H/(G_{\mathfrak{G}_{cp}} \cap H) \cong HG_{\mathfrak{G}_{cp}}/G_{\mathfrak{G}_{cp}} \cong$$
$$\cong HC^p(G)/C^p(G) \in f(p).$$

Итак, $H/R_\omega(H) \in f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(H))$ имеет место $H/C^p(H) \in f(p)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута. Значит, $\mathfrak{F} \in c^\tau_{\omega_n}$. Следовательно, $(c^\tau_{\omega_{n-1}})^{\omega_c} \subseteq$ $\subseteq c^\tau_{\omega_n}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \in c^\tau_{\omega_n}$, F — канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Очевидно, $F(\omega') = \mathfrak{F} \in c^\tau_{\omega_{n-1}}$. Заметим, что для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$ имеет место $F(p) \in c^\tau_{\omega_{n-1}}$. Действительно, ввиду леммы 1.6.6 имеет место $F(p) \in c_{\omega_{n-1}}$. Согласно лемме 1.6.2 формация $F(p)$ τ-замкнута, где $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.

Итак, формация $F(a)$ τ-замкнута для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Значит, $F(a) \in c^\tau_{\omega_{n-1}}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \in (c^\tau_{\omega_{n-1}})^{\omega_c}$. Значит, $c^\tau_{\omega_n} \subseteq (c^\tau_{\omega_{n-1}})^{\omega_c}$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 1.6.8 из леммы 1.2.37 вытекает следующий результат.

1.6.9 Лемма ([327, лемма 8]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{F} = c^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $n \geqslant 1$, $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$, и пусть f — минимальный ω-композиционный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ *и спутник* h $c^\tau_{\omega_{n-1}}$*-значен, то для всех* $p \in \pi$ *имеет место*
$$f(p) = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$$
и
$$f(\omega') = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1);$$

5) $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ справедливо

1.6.10 Следствие. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп такая, что $\mathfrak{F} = c^\tau_n\mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $n \geqslant 1$, $\pi = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$, и пусть f — минимальный ω-композиционный c^τ_{n-1}-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(p) = c_{n-1}^{\tau}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

2) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \mathbb{P} \setminus \pi$;

3) *если* $\mathfrak{F} = CF(h)$ *и спутник* h *является* c_{n-1}^{τ}*-значным, то для всех* $p \in \pi$ *имеет место*

$$f(p) = c_{n-1}^{\tau}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1);$$

4) $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$.

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то получаем следующее утверждение.

1.6.11 Следствие ([209, лемма 11]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— непустая совокупность групп такая, что* $\mathfrak{F} = c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{X}$, *где* $n \geqslant 1$, $\pi = \omega \cap \cap\, \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$, *и пусть* f *— минимальный* ω*-композиционный* c_{n-1}^{ω}*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$ *и спутник* h *является* c_{n-1}^{ω}*-значным, то для всех* $p \in \pi$ *имеет место*

$$f(p) = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ \ O_p(G) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\, R_{\omega}(G) = 1);$$

5) $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо такое утверждение.

1.6.12 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— непустая совокупность групп, такая что* $\mathfrak{F} = c_n\mathrm{form}\mathfrak{X}$, *где* $n \geqslant 1$, $\pi = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$, *и пусть* f *— минимальный* ω*-композиционный* c_{n-1}*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $f(p) = c_{n-1}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

2) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \mathbb{P} \setminus \pi$;

3) *если* $\mathfrak{F} = CF(h)$ *и спутник* h *является* c_{n-1}*-значным, то для всех* $p \in \pi$ *имеет место*

$$f(p) = c_{n-1}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1);$$

4) $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$.

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

1.6.13 Следствие ([198, теорема]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп, такая что $\mathfrak{F} = c\mathrm{form}\mathfrak{X}$, $\pi = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$, и пусть f — минимальный композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $f(p) = \mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;
2) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \mathbb{P} \setminus \pi$;
3) *если* $\mathfrak{F} = CF(h)$, *то для всех* $p \in \pi$ *имеет место*

$$f(p) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1);$$

4) $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$.

1.7 Решетки n-кратно ω-локальных классов Фиттинга

Всякий класс Фиттинга считается 0-*кратно* ω-*локальным*. При $n \geqslant 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-*кратно* ω-*локальным* [206], если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где все значения ω-локальной H-функции f являются $(n-1)$-кратно ω-локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *тотально* ω-*локальным* [206], если он n-кратно ω-локален для всех целых неотрицательных n.

Пусть l^n_ω — совокупность всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга и l^∞_ω — совокупность всех тотально ω-локальных классов Фиттинга.

Если $\omega = \mathbb{P}$, то вместо $l^n_{\mathbb{P}}$ мы пишем l^n, обозначая совокупность всех n-кратно локальных классов Фиттинга, а вместо $l^\infty_{\mathbb{P}}$ мы пишем l^∞, обозначая совокупность всех тотально локальных классов Фиттинга.

Если $n = 1$, то вместо символа l^1_ω будем использовать символ l_ω для обозначения совокупности всех ω-локальных классов Фиттинга.

При $\omega = \{p\}$ и $n = 1$ вместо символа l^p_1 будем использовать символ l^p для обозначения совокупности всех p-локальных классов Фиттинга.

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ мы пишем l^1 для совокупности всех локальных классов Фиттинга.

1.7.1 Замечание. Пусть класс Фиттинга $\mathfrak{M}$ содержится в $\mathfrak{G}_{\omega'}$. Тогда ввиду примера 1.3.3 класс $\mathfrak{M}$ тотально ω-локален. В частности, тотально ω-локальны классы $\varnothing$ и (1). Из примера 1.3.4 следует, что класс Фиттинга $\mathfrak{G}_\pi$ тотально ω-локален для любых непустых подмножеств π и ω множества $\mathbb{P}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, фигурирующий в примере 1.3.6. Пусть f — минимальная ω-локальная H-функция класса $\mathfrak{F}$. Тогда $f(\omega') \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'}$ и $f(p) = (1)$ для всех $p \in \omega$ согласно лемме 1.3.9. Следовательно, класс $\mathfrak{F}$ тотально ω-локален. Итак, $\varnothing$, (1), $\mathfrak{G}_\pi$, $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}_\omega \in l_\omega^\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} l_\omega^n$.

Пусть Θ — полная решетка классов Фиттинга. Для произвольной совокупности классов Фиттинга из Θ $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee^\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big),$$

в частности,

$$\mathfrak{M} \vee^\Theta \mathfrak{H} = \Theta\mathrm{fit}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность Θ-значных функций вида

$$f_i : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}.$$

Тогда через $\vee^\Theta(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую функцию f, что

$$f(\omega') = \Theta\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(\omega')\Big),$$

в частности,

$$\big(f_1 \vee^\Theta f_2\big)(\omega') = \Theta\mathrm{fit}\big(f_1(\omega') \cup f_2(\omega')\big)$$

и при $p \in \omega$ имеет место

$$f(p) = \Theta\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big),$$

в частности,

$$\big(f_1 \vee^\Theta f_2\big)(p) = \Theta\mathrm{fit}\big(f_1(p) \cup f_2(p)\big),$$

если по крайней мере один из классов Фиттинга $f_i(p) \neq \varnothing$. Если же $f_i(p) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагают $f(p) = \varnothing$.

В дальнейшем, когда $\Theta = l_\omega^n$ или $\Theta = l_\omega^\infty$, вместо символов $\vee_{l_\omega^n}$, $\vee_{l_\omega^\infty}$ будем соответственно писать $\vee_\omega^n$, $\vee_\omega^\infty$.

Таким образом, для произвольной совокупности n-кратно ω-локальных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee_\omega^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_\omega^n\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big),$$

в частности,

$$\mathfrak{M} \vee_\omega^n \mathfrak{H} = l_\omega^n\mathrm{fit}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность l_ω^n-значных функций вида

$$f_i : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}.$$

Тогда через $\vee_\omega^n(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую функцию f, что

$$f(\omega') = l_\omega^n\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(\omega')\Big),$$

в частности,

$$\big(f_1 \vee_\omega^n f_2\big)(\omega') = l_\omega^n\mathrm{fit}\big(f_1(\omega') \cup f_2(\omega')\big)$$

и при $p \in \omega$ имеет место

$$f(p) = l_\omega^n\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big),$$

в частности,

$$\big(f_1 \vee_\omega^n f_2\big)(p) = l_\omega^n\mathrm{fit}\big(f_1(p) \cup f_2(p)\big),$$

если по крайней мере один из классов Фиттинга $f_i(p) \neq \varnothing$. Если же $f_i(p) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагают $f(p) = \varnothing$.

1.7.2 Теорема *Совокупность всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга l_ω^n является полной решеткой классов Фиттинга, в которой наибольшим элементом является класс всех групп $\mathfrak{G}$, а для произвольного множества n-кратно ω-локальных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$*

$$\wedge_\omega^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i \text{ — \textit{точная нижняя грань и}}$$

$$\vee_\omega^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \text{ — \textit{точная верхняя грань.}}$$

Доказательство. Отметим, что совокупность всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга l_ω^n частично упорядочена относительно включения $\subseteq$. Покажем сначала, что такое частично упорядоченное множество является решеткой.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольное непустое множество n-кратно ω-локальных классов Фиттинга, и f_i — ω-локальная l_ω^{n-1}-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. Тогда по лемме 1.3.8 $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где f — такая ω-локальная H-функция, что

$$f(a) = \bigcap_{i\in I} f_i(a), \quad a \in \omega \cup \{\omega'\}$$

и, тем самым, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ω-локален. Таким образом,

$$\mathfrak{F} = \wedge_\omega^1(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \wedge_\omega(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$$

и, как отмечено выше,

$$\vee_\omega^1(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \vee_\omega(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_\omega^1 \mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right) = l_\omega \mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right).$$

Итак, совокупность всех ω-локальных классов Фиттинга l_ω является решеткой.

Пусть теперь $n > 1$ и при $n - 1$ лемма верна. Снова применяя лемму 1.3.8, получаем $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где ω-локальная H-функция f — такова, что $f(a) = \bigcap_{i\in I} f_i(a)$, $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. По индукции $f(a) \in l_\omega^{n-1}$, т. е. H-функция f l_ω^{n-1}-значна. Значит, согласно определению, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-локальным.

Таким образом, совокупность всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга l_ω^n является решеткой классов Фиттинга, а для произвольного множества n-кратно ω-локальных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in \in I\}$

$$\wedge_\omega^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i \text{ — точная нижняя грань и,}$$

как отмечено выше,

$$\vee_\omega^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_\omega^n \mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right) \text{ — точная верхняя грань.}$$

Докажем теперь, что l_ω^n — полная решетка. Для этого достаточно показать, что класс всех групп $\mathfrak{G}$ является наибольшим элементом решетки l_ω^n. Докажем сначала, что класс Фиттинга $\mathfrak{G}$ n-кратно ω-локален для всех целых неотрицательных n. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. Согласно примеру 1.3.4 $\mathfrak{G} = LR_\omega(g)$, где ω-локальная H-функция g такова, что

$$g(a) = \begin{cases} (1), & \text{если } a = \omega', \\ \mathfrak{G}, & \text{если } a = p \in \omega. \end{cases}$$

Поэтому класс Фиттинга $\mathfrak{G}$ ω-локален.

Пусть $n > 1$ и при $n - 1$ утверждение верно. Согласно примеру 1.3.4 $\mathfrak{G} = LR_\omega(g)$, где ω-локальная H-функция g такова, что

$$g(a) = \begin{cases} (1), & \text{если } a = \omega', \\ \mathfrak{G}, & \text{если } a = p \in \omega. \end{cases}$$

По индукции класс Фиттинга $\mathfrak{G} = g(p)$ $(n-1)$-кратно ω-локален. Следовательно, H-функция g l_ω^{n-1}-значна. Значит, класс Фиттинга $\mathfrak{G}$ n-кратно ω-локален.

Итак, l_ω^n — полная решетка формаций, в которой наибольший элемент — класс всех групп $\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

Аналогично теореме 1.7.2 доказывается следующая теорема.

1.7.3 Теорема *Совокупность всех тотально ω-локальных классов Фиттинга l_ω^∞ является полной решеткой классов Фиттинга, в которой наибольшим элементом является класс всех групп $\mathfrak{G}$, а для произвольного множества тотально ω-локальных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$*

$$\wedge_\omega^\infty(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ — \textit{точная нижняя грань и}}$$

$$\vee_\omega^\infty(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \text{ — \textit{точная верхняя грань.}}$$

1.7.4 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = LR_\omega(F)$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга, $n \geqslant 1$. Тогда H-функция F является l_ω^{n-1}-значной.*

Доказательство. Ввиду леммы 1.3.15 нам достаточно лишь проверить, что для любого числа $p \in \omega$ и всякого n-кратно ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ $(n \geqslant 0)$ класс Фиттинга $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p$ является также n-кратно ω-локальным.

Понятно, что при $n = 0$ утверждение леммы верно. Пусть $n >$ > 0. Предположим, что доказываемое утверждение верно для $n-1$. Пусть f — такая H-функция, что $f(\omega') = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p$ и

$$f(q) = \begin{cases} \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p, & \text{если } q = p, \\ l_\omega^{n-1}\mathrm{fit}(\mathfrak{H}(F^q)), & \text{если } q \in \omega \setminus \{p\}. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{M} = LR_\omega(f)$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p$. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$, т. е. $G/G_\mathfrak{H} \in \mathfrak{N}_p$. Тогда ввиду леммы 1.2.5

$$F^q(G) = F^q(G_\mathfrak{H}) \in f(q)$$

для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$. Кроме20:59 01.04.2013 того,

$$F^p(G) \in f(p) \quad \text{и} \quad G^{\omega d} \in f(\omega').$$

Значит, $G \in \mathfrak{M}$, и, следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$ с комонолитом $R = G_\mathfrak{F}$. Предположим, что G/R — p'-группа. Если G/R — ω'-группа, то

$$G^{\omega d} = G \in \mathfrak{F} = f(\omega').$$

Полученное противоречие показывает, что $\omega \cap \pi(G/R) \neq \varnothing$. Пусть $q \in \omega \cap \pi(G/R)$. Если G/R — неабелева группа, то ввиду леммы 1.3.9 имеют место соотношения

$$F^q(G) = G \in f(q) = l_\omega^{n-1}\mathrm{fit}(\mathfrak{H}(F^q)) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F};$$

противоречие. Таким образом, G/R — q-группа и

$$O^q(G) = F^q(G) \in l_\omega^{n-1}\mathrm{fit}(\mathfrak{H}(F^q)).$$

С другой стороны, из лемм 1.3.9 и 1.3.11 вытекает, что

$$G \in l_\omega^{n-1}\mathrm{fit}(\mathfrak{H}(F^q))\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Полученное вновь противоречие показывает, что $p \in \pi(G/R)$. Если G/R — p-группа, то

$$G \in (\mathfrak{H}\mathfrak{N}_p)\mathfrak{N}_p = \mathfrak{H}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p) = \mathfrak{F}.$$

Значит, G — неабелева группа и, следовательно, $F^p(G) = G$. Поэтому $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, откуда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$.

Согласно предположению, класс $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_p$ является $(n-1)$-кратно локальным, а значит, H-функция f l_ω^{n-1}-значной. Следовательно, $\mathfrak{F} \in \in l_\omega^n$. Лемма доказана.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ получаем

1.7.5 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = LR(F)$ — n-кратно локальный класс Фиттинга, $n \geqslant 1$. Тогда H-функция F является l^{n-1}-значной.*

1.7.6 Лемма. *При любом натуральном n справедливо равенство*

$$(l_\omega^{n-1})^\omega = l_\omega^n.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \in (l_\omega^{n-1})^\omega$. Тогда по определению класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ имеет такую ω-локальную H-функцию f, каждое значение которой принадлежит решетке l_ω^{n-1}. Это означает, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локален, т. е. $\mathfrak{F} \in l_\omega^n$. Следовательно, $(l_\omega^{n-1})^\omega \subseteq l_\omega^n$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \in l_\omega^n$, и F — l_ω^{n-1}-каноническая ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 1.7.4 имеет место $F(a) \in l_\omega^{n-1}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \in (l_\omega^{n-1})^\omega$. Значит, $l_\omega^n \subseteq (l_\omega^{n-1})^\omega$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 1.7.6 из леммы 1.3.9 вытекает следующий результат.

1.7.7 Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{F} = l_\omega^n \mathrm{fit}\mathfrak{X}$, где $n \geqslant 1$, и пусть f — минимальная ω-локальная l_ω^{n-1}-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = l_\omega^{n-1}\mathrm{fit}(G^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;
2) $f(p) = l_\omega^{n-1}\mathrm{fit}\big(\mathfrak{X}(F^p)\big)$ *для всех* $p \in \omega$;
3) $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *для всех* $p \in \omega$;
4) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$.

Если $\omega = \mathbb{P}$, то получаем следующее утверждение.

1.7.8 Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{F} = l^n\mathrm{fit}\mathfrak{X}$, где $n \geqslant 1$, и пусть f — минимальная ω-локальная l^{n-1}-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(p) = l^{n-1}\mathrm{fit}\big(\mathfrak{X}(F^p)\big)$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$;
2) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$.

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ получаем

1.7.9 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— непустая совокупность групп, такая что* $\mathfrak{F} = l^1\mathrm{fit}\mathfrak{X} = l\mathrm{fit}\mathfrak{X}$, *где* $n \geqslant 1$, *и пусть* f *— минимальная локальная* H*-функция класса* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $f(p) = \mathrm{fit}\big(\mathfrak{X}(F^p)\big)$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$;
2) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$.

Глава 2

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФОРМАЦИЙ И КЛАССОВ ФИТТИНГА

2.1 Произведение n-кратно ω-насыщенных формаций

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации. Напомним, что формационным произведением $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}).$$

Везде в дальнейшем вместо записи $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ мы будем использовать также более краткую запись $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, когда из контекста понятно, что задано формационное произведение $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

В работах [226, 227] Л.А. Шеметков описал спутники произведений насыщенных формаций. В данном параграфе некоторые результаты упомянутых работ распространяются на ω-насыщенные формации.

2.1.1 Теорема ([206, теорема 7]). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} = LF_\omega(m)$, $\mathfrak{H} = LF_\omega(h)$ и спутники m и h являются внутренними. Тогда $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация и $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где*

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}), \\ h(p), & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Доказательство. Ввиду теоремы 1.2.7 и леммы 1.2.15 достаточно показать, что соотношения

$$\mathfrak{F}(F_p) \subseteq f(p) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$$

выполняются для всех $p \in \omega$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$, $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $F_p = F_p(G)$. Тогда

$$G^{\mathfrak{H}}F_p/F_p = (G/F_p)^{\mathfrak{H}} \cong G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}} \cap F_p) = G^{\mathfrak{H}}/F_p(G^{\mathfrak{H}}).$$

Предположим, что $p \notin \pi(\mathfrak{M})$. В этом случае $G^{\mathfrak{H}} \subseteq F_p$ и

$$G/F_p \cong (G/G^{\mathfrak{H}})/F_p(G/G^{\mathfrak{H}}) \in h(p) = f(p).$$

Итак, для всех $q \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M})$ имеет место включение $\mathfrak{F}(F_p) \subseteq f(p)$ и, в частности,

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = \mathfrak{N}_p h(p) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$. Тогда $f(p) = m(p)\mathfrak{H}$. Поскольку

$$(G/F_p)^{\mathfrak{H}} \cong G^{\mathfrak{H}}/F_p(G^{\mathfrak{H}}) \in m(p),$$

заключаем, что $G/F_p \in m(p)\mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F}(F_p) \subseteq m(p)\mathfrak{H}$, откуда

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{N}_p(m(p)\mathfrak{H}) = (\mathfrak{N}_p m(p))\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Итак, для всех $p \in \omega$ имеет место включение $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$, т. е. формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной. Заметим, что попутно мы установили включение $\mathfrak{F}(F_p) \subseteq f(p)$ для всех $p \in \omega$.

Предположим, что $m(p)\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для некоторого числа $p \in \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$, и пусть G — группа минимального порядка из $m(p)\mathfrak{H} \setminus \setminus \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$. Легко видеть, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Значит, $\mathfrak{F}(F_p) \neq \varnothing$. Поэтому G — монолитическая группа. Пусть R — монолит группы G. Тогда, очевидно, $R \not\subseteq O_p(G)$. Таким образом, если Z_p — группа порядка p и $A = Z_p \wr G = [K]G$, где K — база сплетения A, то $K = F_p(A)$. Поскольку $G^{\mathfrak{H}} \in m(p)$, получаем

$$G^{\mathfrak{H}}K/K = (A/K)^{\mathfrak{H}} \in m(p).$$

Следовательно,

$$A \in \mathfrak{N}_p(m(p)\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Поэтому

$$G \cong A/F_p(A) \in \mathfrak{F}(F_p).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

2.1.2 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{M} = LF_\omega(M)$, $\mathfrak{H} = LF_\omega(H)$ *и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, *где*

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \textit{если } a = \omega', \\ M(p)\mathfrak{H}, & \textit{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}), \\ H(p), & \textit{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

2.1.3 Следствие ([206, следствие 9]). *Если формации* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *являются* n*-кратно* ω*-насыщенными,* $n \geqslant 0$*, то формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ *также является* n*-кратно* ω*-насыщенной.*

Доказательство. При $n = 0$ утверждение следствия верно. Предположим, что $n > 0$ и утверждение следствия справедливо для $n-1$. Положим $\mathfrak{M} = LF_\omega(M)$ и $\mathfrak{H} = LF_\omega(H)$. Согласно следствию 2.1.2 имеет место равенство $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ M(p)\mathfrak{H}, & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}), \\ H(p), & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

По лемме 1.5.7 для любого числа $p \in \omega$ обе формации $M(p)$ и $H(p)$ являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными. Кроме того, согласно предположению обе формации $\mathfrak{F}$ и $M(p)\mathfrak{H}$ являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными. Следовательно, f — l^ω_{n-1}-значный спутник. Следствие доказано.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 2.1.1 непосредственно вытекает

2.1.4 Следствие ([226, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} = LF(m)$, $\mathfrak{H} = LF(h)$ и спутники m и h являются внутренними. Тогда $\mathfrak{F} = LF(f)$, где*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \textit{если } p \in \pi(\mathfrak{M}), \\ h(p), & \textit{если } p \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{M}), \\ \varnothing, & \textit{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

2.1.5 Пример. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}_q)$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_q$, где $p \neq q$. Тогда ввиду теоремы 2.1.1 формация

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \big(\mathfrak{N}_p(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}_q)\big)\mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$$

насыщена. С другой стороны, согласно теореме 1.2.7 формация $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}_q)$ не является q-насыщенной.

В связи с этим примером интересна следующая

2.1.6 Теорема ([206, теорема 8]). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{M} = LF_p(m)$ для некоторого внутреннего спутника m. Формация $\mathfrak{F}$ является p-насыщенной в том и только том случае, когда выполняется следующее условие: либо $p \in \pi(\mathfrak{M})$, либо* *формация $\mathfrak{H}$ является p-насыщенной. Более того, при выполнении этого условия $\mathfrak{F} = LF_p(f)$, где*

$$f(a) = \begin{cases} m(p')\mathfrak{H}, & \text{если } a = p', \\ m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } a = p \in \pi(\mathfrak{M}), \\ h(p), & \text{если } a = p \notin \pi(\mathfrak{M}), \end{cases}$$

для некоторого внутреннего p-локального спутника h формации $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $p \notin \pi(\mathfrak{M})$. Тогда $\mathfrak{F}(F_p) = \mathfrak{H}(F_p)$ (см. доказательство теоремы 2.1.1). Следовательно, согласно теореме 1.2.7

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}(F_p) \subseteq \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}.$$

Так как при этом $\mathfrak{H}(F_p) \subseteq \mathfrak{H}$ и $p \notin \pi(\mathfrak{M})$, заключаем, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}(F_p) \subseteq$ $\subseteq \mathfrak{H}$. Ввиду теоремы 1.2.7 последнее означает, что формация $\mathfrak{H}$ является p-локальной.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{M}_1 = LF_p(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}_1$. Предположим противное и рассмотрим группу G из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}_1$ минимального порядка. Тогда $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Если $F_p = F_p(G)$ и $p \in \pi(G^{\mathfrak{H}})$, то

$$(G/F_p)^{\mathfrak{H}} \cong G^{\mathfrak{H}}/F_p(G^{\mathfrak{H}}) \in m(p)$$

(см. доказательство теоремы 2.1.1). Таким образом,

$$G/F_p \in m(p)\mathfrak{H} = f(p).$$

Пусть $p \in \pi(G) \setminus \pi(G^{\mathfrak{H}})$. Тогда $G^{\mathfrak{H}} \subseteq F_p$ и $F_p(G/G^{\mathfrak{H}}) = F_p/G^{\mathfrak{H}}$. Отсюда $G/F_p \in \mathfrak{H}(F_p)$. Поэтому

$$G/F_p \in m(p)\mathfrak{H} = f(p)$$

при $p \in \pi(\mathfrak{M})$ и

$$G/F_p(G) \in h(p) = f(p)$$

при $p \notin \pi(\mathfrak{M})$.

Покажем, что $G/G_{pd} \in f(p')$. Если $R = (G^{\mathfrak{H}})_{pd} = 1$, то

$$G^{\mathfrak{H}} \cong G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}})_{pd} \in m(p').$$

Поэтому

$$G \in m(p')\mathfrak{H} = f(p').$$

Пусть $R \neq 1$. Тогда $R \subseteq G_{pd}$. Так как при этом $G_{pd}/R = (G/R)_{pd}$ и в силу выбора группы G имеет место включение $G/R \in \mathfrak{M}_1$, получаем

$$G/G_{pd} \cong (G/R)/(G_{pd}/R) = (G/R)/(G/R)_{pd} \in f(p')$$

и, следовательно, $G \in \mathfrak{M}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что R — p'-группа. Тогда $G_{pd} = 1$. С другой стороны, $G \in LF(f)$, откуда

$$G \cong G/G_{pd} \in f(p') = \mathfrak{F}.$$

Полученное противоречие показывает, что $p \in \pi(R)$. Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Таким образом, $G \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, R — p-группа. Отсюда $F_p(G) = O_p(G)$. Поскольку при этом $G \in LF_p(f)$, заключаем, что

$$G/O_p(G) \in f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{M}), \\ h(p), & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Значит, в первом случае

$$G \in \mathfrak{N}_p(m(p)\mathfrak{H}) = (\mathfrak{N}_p m(p))\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Во втором случае

$$G \in \mathfrak{N}_p h(p) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1$. Теорема доказана.

2.1.7 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{M}$ является n-кратно ω-насыщенной. Формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-насыщенной в том и только том случае, когда формация $\mathfrak{H}$ является n-кратно p-насыщенной для всех $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M})$.*

2.1.8 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{M}$ — насыщена. Формация $\mathfrak{F}$ насыщена тогда и только тогда, когда формация $\mathfrak{H}$ является ω-насыщенной, где $\omega = \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{M})$.*

2.2 Произведения подформаций однопорожденных наследственных формаций

Напомним, что *факторизацией* формации $\mathfrak{F}$ называется представление $\mathfrak{F}$ в виде произведения

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_t \quad (t \geqslant 2) \tag{2.1}$$

некоторых формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$. В дальнейшем нас главным образом будут интересовать *несократимые*, т. е. такие факторизации (2.1) формации $\mathfrak{F}$, где

$$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1} \dots \mathfrak{F}_t$$

при любом $i \in \{1, ..., t\}$.

В 2000 году на Гомельском алгебраическом семинаре А.Н. Скибой была поставлена следующая задача.

2.2.1 Проблема. *Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — формационное произведение $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, и эта факторизация $\mathfrak{R}$ несократима. Предположим, что $\mathfrak{R}$ — подформация некоторой однопорожденной наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Что можно сказать об $\mathfrak{R}$? В частности, верно ли, что $\mathfrak{M}$ разрешима?*

При некоторых дополнительных ограничениях на $\mathfrak{R}$ (например, если $\mathfrak{R}$ насыщенная (А.Н. Скиба [203, 325]); разрешимо насыщенная (Го Вэньбинь, А.Н. Скиба, К.П. Шам [75, 276, 279]); разрешимо ω-насыщенная (Го Вэньбинь, В.М. Селькин, К.П. Шам [280]); $\mathfrak{X}$-насыщенная формация (А. Баллестер-Болинше, К. Кальво, Р. Эстебан-Ромеро [11, 244]) и т. д.) ответ на оба вопроса, сформулированных в проблеме 2.2.1, известен.

В данном параграфе мы дадим положительный ответ на второй из поставленных вопросов. При доказательстве основного результата будем использовать некоторые идеи работ [203, 205].

Символом $l^s\mathrm{form}G$ обозначают пересечение всех наследственных насыщенных формаций, содержащих группу G. Символ $s\mathrm{form}G$ обозначает пересечение всех наследственных формаций, содержащих группу G.

Доказательству теоремы предпошлем следующие леммы.

2.2.2 Лемма ([230, теорема 8.3]). *Пусть $\mathfrak{F} = l^s\mathrm{form}G$ — однопорожденная наследственная насыщенная формация. Тогда $\mathfrak{F} = LF(f)$, где*

1) $f(p) = s\mathrm{form}(G/F_p(G))$ *для всех* $p \in \pi(G)$;

2) $f(p) = \varnothing$, *если* $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(G)$.

2.2.3 Лемма ([203, лемма 3.1.9]). *Пусть* $G = A \wr B = K \rtimes B$, *где* $K = \prod\limits_{b\in B} A_1^b$ *— база регулярного сплетения* G, *а* A_1 *— первая копия группы* A *в* K. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* L *— минимальная нормальная подгруппа группы* G, L_1 *— проекция* L *на* A_1 *и* $L_1 \nsubseteq Z(A_1)$, *то* $L = \prod\limits_{b\in B}(L \cap A_1)^b$;

2) *если* R *— минимальная нормальная подгруппа группы* A_1 *и* $R \nsubseteq Z(A_1)$, *то* $R_1 = \prod\limits_{b\in B} R^b$ *— минимальная нормальная подгруппа группы* G;

3) $\mathrm{Soc}(G) \subseteq \prod\limits_{b\in B} M^b$, *где* $M = \mathrm{Soc}(A_1)$;

4) *если* $L \trianglelefteq G$, $L \subseteq K \trianglelefteq G$ *и* M *— проекция* L *в* A_1, *то сплетение* $(A_1/M) \wr B$ *является гомоморфным образом фактор-группы* G/L.

2.2.4 Лемма ([203, лемма 3.1.5]). *Пусть* $A \in s\mathrm{form}G$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\exp(A) \leqslant \exp(G)$;

2) *порядок любого главного фактора группы* A *не превосходит максимального порядка среди порядков всех главных факторов группы* G;

3) *если* $H \leqslant A$, *то* $c(H/H^{\mathfrak{N}}) \leqslant \max\{c(T/T^{\mathfrak{N}}) \mid T \leqslant G\}$.

2.2.5 Лемма. *Пусть* $\mathfrak{F} = l^s\mathrm{form}G$ *— однопорожденная наследственная насыщенная формация и пусть* $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, *где* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *— неединичные формации. Тогда если* $B \in \mathfrak{H}$ *и существует простое число* p *такое, что* $p^{|G|} \mid \exp(B)$, *то* $|A| = p$ *для всех простых групп* $A \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. По лемме 2.2.2, $\mathfrak{F} = LF(f)$, где

$$f(p) = \begin{cases} s\mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{если } p \in \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(G). \end{cases}$$

Пусть, кроме того, $B = B_1 \times \ldots \times B_{|G|}$, где $B_1 \cong \ldots \cong B_{|G|}$ — неединичные группы из $\mathfrak{H}$.

Пусть $B \in \mathfrak{H}$ и $p^{|G|} \mid \exp(B)$ для некоторого простого p. Предположим, что $|A| = q \neq p$ для некоторой простой группы $A \in \mathfrak{M}$.

Пусть $D = A \wr B = K \leftthreetimes B$, где K — база сплетения D. По предположению $p^{|G|}$ делит экспоненту B. Тогда B обладает собственной циклической подгруппой H и $|H| = p^{|G|}$. Легко видеть, что $KO_q(B) = O_q(D) = F_q(D)$ и $KO_q(B) \cap H = 1$. Поскольку $D \in \mathfrak{F}$, $KO_q(B) \cap H = 1$ и $KO_q(B) = O_q(D) = F_q(D)$, то

$$H \cong H/(KO_q(B) \cap H) \cong (HKO_q(B))/(KO_q(B)) \leqslant$$

$$\leqslant D/(KO_q(B)) = D/O_q(D) = D/F_q(D) \in f(q) = s\mathrm{form}(G/F_q(G)).$$

Так как $H \in s\mathrm{form}(G/F_q(G))$, то по лемме 2.2.4 (1) заключаем, что $\exp(H) \mid \exp(G/F_q(G))$. Значит,

$$\exp(H) \leqslant \exp(G/F_q(G)) \text{ и } p^{|G|} = \exp(H) = |H| \leqslant |G|.$$

Очевидно, $|H| = p^{|G|} > |G|$, противоречие. Следовательно, $q = p$. Лемма доказана.

2.2.6 Лемма ([264, гл. A, лемма 18.2]). *Пусть $W = X \wr G$. Предположим, что $Y \lhd X$. Тогда $W/Y^{\natural} \cong (X/Y) \wr G$.*

2.2.7 Лемма ([264, гл. IV, предложение 1.5]). *Пусть H/K — главный фактор группы G, и пусть $G \in \mathfrak{F}$ для некоторой формации $\mathfrak{F}$. Тогда $(H/K) \leftthreetimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$.*

2.2.8 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — произведение неединичных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Предположим, что каждая простая группа из $\mathfrak{M}$ абелева. Тогда если существует группа $A \in \mathfrak{M}$ и некоторое натуральное число n такое, что для каждой группы $B \in \mathfrak{H}$ ($|B| \geqslant n$) $\mathfrak{H}$-радикал регулярного сплетения $T = A \wr B$ не содержится подпрямо в базе сплетения T, то существует группа Z_p простого порядка p и группа D экспоненты превосходящей p^n такая, что $Z_p \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ и $D \in \mathfrak{H}$.*

Доказательство. Пусть $D_1 \cong \ldots \cong D_n$ — неединичные группы из $\mathfrak{H}$. Пусть $B_1 = D_1 \times \ldots \times D_n$ и $G_1 = A \wr B_1 = K \leftthreetimes B_1$, где K — база регулярного сплетения G_1. Поскольку согласно условию $G_1^{\mathfrak{H}}$ не содержится подпрямо в K, по лемме 2.2.3 (4) существует нормальная подгруппа $M(B_1)$ группы A такая, что $A/M(B_1)$ — простая группа и $B_2 = (A/M(B_1)) \wr B_1$ — гомоморфный образ группы

$G_1/G_1^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$. Аналогично, существует нормальная подгруппа $M(B_2)$ группы A такая, что $A/M(B_2)$ — простая группа, и группа $B_3 = (A/M(B_2)) \wr B_2$ является гомоморфным образом группы $G_2/G_2^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$, где $G_2 = A \wr B_2$ и т. д. Поскольку $A \in \mathfrak{M}$, то все группы последовательности $A/M(B_1)$, $A/M(B_2), \ldots, A/M(B_n), \ldots$ принадлежат формации $\mathfrak{M}$. Ввиду условия теоремы каждая простая группа из $\mathfrak{M}$ абелева. Поскольку $|A| < \infty$ и существует простое число p и бесконечная последовательность индексов $i_1, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ такая, что для всех $j = 1, 2, \ldots$ и порядок группы $A/M(B_{i_j})$ равен p.

Пусть Z_p — группа простого порядка p, и пусть $T_1 = Z_p$, $T_2 = Z_p \wr T_1, \ldots, T_n = Z_p \wr T_{n-1}, \ldots$. Покажем, что для любого i существует индекс j такой, что группа T_i изоморфна некоторой подгруппе группы B_{i_j}. Если $i = 1$, то результат очевиден. Если $i > 1$, то предположим, что j — такой индекс, что группа T_{i-1} изоморфна подгруппе группы B_{i_j}. Но по лемме 2.2.6 известно, что $T_i = Z_p \wr T_{i-1}$ изоморфна подгруппе группы $B_{i_{j+1}} = (A/M(B_{i_j})) \wr B_{i_j}$. Следовательно, для любого натурального i существует натуральное число j такое, что T_i изоморфна подгруппе группы $B_j \in \mathfrak{H}$.

Пусть теперь P — p-группа и l — длина ее композиционного ряда. Проведем индукцию по l. В этом случае по лемме 2.2.6 и в силу индукции по l мы можем заключить, что группа P изоморфна подгруппе некоторой группы $T_i \in \mathfrak{H}$. Значит, существует группа $T \in \mathfrak{H}$ такая, что $\exp(T) \geqslant p^n$. Наконец, поскольку $B_2 = (A/M(B_1)) \wr B_1 \in \mathfrak{H}$ и $Z(B_2) \neq 1$, то по лемме 2.2.7 $Z_p \in \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Применяя рассуждения, используемые при доказательстве [75, теорема 1] (см. также [279, теорема 4.1]), получаем следующее утверждение.

2.2.9 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ для некоторого простого p. Если для каждой простой группы $A \in \mathfrak{M}$ имеет место $|A| = p$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Используя снова соображения, применяемые при доказательстве [75, теорема 1] (см. также [279, теорема 4.1]), можно установить справедливость следующей леммы.

2.2.10 Лемма. *Пусть p — простое число и $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где каждая простая в $\mathfrak{M}$ группа имеет порядок p. Тогда $G = A^{\mathfrak{H}} \wr (A/A^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$ для всех групп $A \in \mathfrak{F}$.*

2.2.11 Лемма ([203, лемма 3.5.20]). *Пусть G — группа и R — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда если R — элементарная абелева p-группа, то $G \in s\mathrm{form}(Z_p \wr (G/R))$.*

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема, которая дает ответ на второй из вопросов проблемы 2.2.1 поставленной А.Н. Скибой в 2000 году на Гомельском алгебраическом семинаре.

2.2.12 Теорема *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденная наследственная насыщенная формация и пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — неединичные формации. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *любая простая группа в $\mathfrak{M}$ абелева;*

2) *если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M}$ разрешима.*

Доказательство. По лемме 2.2.2, $\mathfrak{F} = LF(f)$, где

$$f(p) = \begin{cases} s\mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{если } p \in \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(G). \end{cases}$$

Пусть, кроме того, $B = B_1 \times \ldots \times B_{|G|}$, где $B_1 \cong \ldots \cong B_{|G|}$ — неединичные группы из $\mathfrak{H}$. Проведем доказательство следующим образом.

Пусть A — простая группа из $\mathfrak{M}$ и $D = A \wr B = K \rtimes B$, где K — база регулярного сплетения D. Ясно, что $D \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Следовательно, $D \in \mathfrak{F}$.

Предположим, что A — неабелева группа. Тогда согласно лемме 2.2.3 (2), (3) D — монолитическая группа с монолитом K. Пусть $q \in \pi(K)$. Тогда, очевидно, $F_q(D) = 1$. Поскольку $D \in \mathfrak{F}$, то

$$D/F_q(D) \cong D \in f(q) = s\mathrm{form}(G/F_q(G)),$$

но это невозможно ввиду леммы 2.2.4 (2). Итак, каждая простая группа из $\mathfrak{M}$ абелева.

Предположим, что $\mathfrak{M}$ содержит некоторые неразрешимые группы, и пусть A — неразрешимая группа минимального порядка из $\mathfrak{M}$. Тогда, очевидно, что A обладает единственной минимальной нормальной подгруппой P. Легко видеть, что P неабелева и A/P разрешима. Ввиду леммы 2.2.5 имеет место $P \neq A$.

Докажем теперь следующие утверждения:

(1) *Для каждой группы $B \in \mathfrak{H}$ такой, что $|B| > |G|$, $\mathfrak{H}$-радикал регулярного сплетения $T = A \wr B$ не содержится подпрямо в базе сплетения T.*

Действительно, если $T = A \wr B = K \leftthreetimes B$, где K — база сплетения T, то по лемме 2.2.3 (2) T — монолитическая группа с монолитом $L = P^{\natural} = \prod_{b \in B} P_1^b$, где P_1 — монолит первой копии A_1 группы A в K. Предположим, что $T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Тогда $T \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $F_p(T) = 1$ и поэтому

$$T \cong T/F_p(T) \in f(p) = s\mathrm{form}(G/F_p(G)),$$

но это невозможно ввиду леммы 2.2.4 (2). Значит, $T \notin \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H}$-радикал регулярного сплетения $T = A \wr B$ не содержится подпрямо в базе сплетения T.

(2) *Существует группа Z_p простого порядка p и группа B, экспонента которой превосходит $p^{|G|}$, причем $Z_p \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ и $B \in \mathfrak{H}$.*

Согласно доказанному выше, каждая простая группа из $\mathfrak{M}$ абелева. Пусть теперь B — такая группа из $\mathfrak{H}$, что $|B| > |G|$. Пусть $T = A \wr B = K \leftthreetimes B$, где K — база регулярного сплетения T. Предположим, что $T^{\mathfrak{H}}$ содержится подпрямо в K. Тогда поскольку $A \in \mathfrak{M}$, то $T^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Значит, $T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, что противоречит утверждению (1). Следовательно, $T^{\mathfrak{H}}$ не содержится подпрямо в K. Теперь согласно лемме 2.2.8 и ввиду доказанного утверждения (1) мы заключаем, что утверждение (2) имеет место.

(3) *Для каждой группы $T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ имеет место $T^{\mathfrak{H}} \wr (T/T^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$.*

Действительно, согласно утверждению (2) и лемме 2.2.5, получаем $|H| = p$ для любой простой группы H из $\mathfrak{M}$. Теперь, используя лемму 2.2.10, мы заключаем, что утверждение (3) имеет место.

(4) $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$.

Предположим, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{H}$, и пусть B — группа минимального порядка из $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}$. Пусть $R = B^{\mathfrak{H}}$ — монолит группы B. Тогда, очевидно, что R — абелева p-группа. Значит, согласно лемме 2.2.11 имеем $B \in s\mathrm{form}(Z_p \wr (B/R))$, где Z_p — группа простого порядка p. Поэтому $Z_p \wr (B/R) \notin \mathfrak{H}$. Пусть $T = A \wr (B/R) = K \leftthreetimes (B/R)$, где K — база регулярного сплетения T. Поскольку P — неабелева группа и P — единственная минимальная нормальная подгруппа группы A, то по лемме 2.2.3 (2) мы заключаем, что группа T монолитична и ее монолит $L = P^{\natural} = \prod\limits_{b \in B/R} P_1^b$, где P_1 — монолит первой копии группы A в K. По лемме 2.2.11 и из того, что $A \in \mathfrak{M}$, получаем, что $T^{\mathfrak{H}}$ содержится подпрямо в $K \in \mathfrak{M}$. Значит, $T \in \mathfrak{F}$. Пусть $D = T^{|G|} = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_{|G|}$, где $T_1 \cong T_2 \cong \ldots \cong T_{|G|} \cong T$. Тогда, очевидно, что $D \in \mathfrak{F}$ и поэтому, согласно утверждению (3), имеет место $E = D^{\mathfrak{H}} \wr (D/D^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$. Легко видеть, что $D^{\mathfrak{H}} \subseteq T_1^{\mathfrak{H}} \times T_2^{\mathfrak{H}} \times \ldots \times T_{|G|}^{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $|D/D^{\mathfrak{H}}| \geqslant |T/T^{\mathfrak{H}}|^{|G|}$. Так как $Z_p \in \mathfrak{H}$, то $R \neq B$. Отсюда получаем $|T/T^{\mathfrak{H}}| > 1$ и поэтому $t = |D/D^{\mathfrak{H}}| > |G|$. Очевидно, $T^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Легко видеть, что $\mathrm{Soc}(D) = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_{|G|}$, где L_i — монолит группы T_i.

Покажем теперь, что каждая минимальная нормальная подгруппа группы $D^{\mathfrak{H}}$ неабелева. Действительно, пусть Q — минимальная нормальная подгруппа группы $D^{\mathfrak{H}}$. Предположим, что Q — q-группа. Тогда $O_q(D^{\mathfrak{H}}) \neq 1$. Поскольку $O_q(D^{\mathfrak{H}})$ char $D^{\mathfrak{H}}$ и $D^{\mathfrak{H}} \triangleleft D$, то $O_q(D^{\mathfrak{H}}) \triangleleft D$. Последнее означает, что D обладает такой минимальной нормальной подгруппой N, что $N \subseteq O_q(D^{\mathfrak{H}})$. Противоречие.

Таким образом, каждая минимальная нормальная подгруппа группы $D^{\mathfrak{H}}$ неабелева. Следовательно, по лемме 2.2.3 (3) существует минимальная нормальная подгруппа N группы E такая, что N неабелева и $|N| > t \geqslant |G|$.

Пусть $p \in \pi(N)$. Тогда $F_p(E) \cap N = 1$. Ввиду E-изоморфизма $N \cong NF_p(E)/F_p(E)$ мы заключаем, что $E/F_p(E)$ обладает таким главным фактором $NF_p(E)/F_p(E)$, что $|NF_p(E)/F_p(E)| > t$.

Поскольку $E \in \mathfrak{F}$, то

$$E/F_p(E) \in f(p) = s\mathrm{form}(G/F_p(G)).$$

Имеем $|N| \geqslant |P|^t > |G|$, что невозможно ввиду леммы 2.2.4 (2). Значит, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$, и, следовательно, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Тем самым мы установили справедливость утверждения (4).

Согласно лемме 2.2.9, заключаем, что $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}$ — разрешимая формация. Теорема доказана.

2.2.13 Следствие. *Если $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — несократимое формационное произведение $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, причем $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для некоторой однопорожденной формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ разрешима.*

2.3 Произведение n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций

В работе [226] Л.А. Шеметковым были описаны спутники произведений композиционных формаций. В данном параграфе некоторые результаты работы [226] распространяются на разрешимо ω-насыщенные формации.

2.3.1 Теорема ([209, теорема 6]). *Пусть формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M} = CF_\omega(m)$, $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$ *и спутники* h *и* m *являются внутренними. Тогда если* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, *то* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, *где*

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})), \\ h(p), & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = CF_\omega(f)$, где f — спутник, описанный в условии теоремы. Предположим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{F}_1$, и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}_1}$. Если $R \not\subseteq R_\omega(G)$, то $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(R)) = \varnothing$, т. е. $R_\omega(G) = 1$. Значит,

$$G \cong G/1 = G/R_\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega').$$

Кроме того, согласно лемме 1.2.24 для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))$ имеет место $C^p(G/R) = C^p(G)/R$. Поскольку согласно нашему допущению $G/R \in \mathfrak{F}_1$, то

$$(G/R)/C^p(G/R) = (G/R)/(C^p(G)/R) \cong G/C^p(G) \in f(p)$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))$. Значит, $G \in \mathfrak{F}_1$, противоречие. Следовательно, $R \subseteq R_\omega(G)$ и R — p-группа, где $p \in \omega$. Тогда согласно лемме 1.2.43 имеет место $G/C^p(G) \notin f(p)$.

Если $G \in \mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, то

$$G/C^p(G) \in h(p) \subseteq m(p)\mathfrak{H} \cup h(p).$$

Значит, $G/C^p(G) \in f(p)$, противоречие. Следовательно, $G \notin \mathfrak{H}$. Поэтому $R \subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M} = CF_\omega(m)$. Согласно лемме 1.2.24 имеем $C^p(G) \cap G^{\mathfrak{H}} = C^p(G^{\mathfrak{H}})$. Значит,

$$(G/C^p(G))^{\mathfrak{H}} = C^p(G)G^{\mathfrak{H}}/C^p(G) \cong$$

$$\cong G^{\mathfrak{H}}/(C^p(G) \cap G^{\mathfrak{H}}) = G^{\mathfrak{H}}/C^p(G^{\mathfrak{H}}) \in m(p).$$

Отметим, что $m(p) \neq \varnothing$, поскольку $R \subseteq G^{\mathfrak{H}}$ и R — p-группа, где $p \in \omega$. Отсюда

$$G/C^p(G) \in m(p)\mathfrak{H} = f(p),$$

противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{F}$, и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, то G не входит в $\mathfrak{H}$, т. е. $G^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Поскольку монолит R является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G, то $R \subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Так как $G/R \in \mathfrak{F}$ и $(G/R)^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}/R$, то $G^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}$.

Пусть $R_\omega(G) = 1$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_1$, то

$$G \cong G/1 = G/R_\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Последнее противоречит тому, что G не входит в $\mathfrak{F}$.

Следовательно, $R_\omega(G) \neq 1$. Тогда R — p-группа для некоторого $p \in \omega$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G/C^p(G) \in f(p) = m(p)\mathfrak{H}$. Согласно лемме 1.2.24 имеем $C^p(G) \cap G^{\mathfrak{H}} = C^p(G^{\mathfrak{H}})$. Следовательно,

$$(G/C^p(G))^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}C^p(G)/C^p(G) \cong$$

$$\cong G^{\mathfrak{H}}/(C^p(G) \cap G^{\mathfrak{H}}) = G^{\mathfrak{H}}/C^p(G^{\mathfrak{H}}) \in m(p).$$

Кроме того, так как $G^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M} = CF_\omega(m)$ и по лемме 1.2.24 $C^q(G^{\mathfrak{H}}/R) = C^q(G^{\mathfrak{H}})/R$, где $q \notin \pi(\mathrm{Com}(R))$, то

$$(G^{\mathfrak{H}}/R)/C^q(G^{\mathfrak{H}}/R) = (G^{\mathfrak{H}}/R)/(C^q(G^{\mathfrak{H}})/R) \cong G^{\mathfrak{H}}/C^q(G^{\mathfrak{H}}) \in m(q)$$

для всех $q \in (\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G^{\mathfrak{H}}))) \setminus \pi(\mathrm{Com}(R))$ и

$$(G^{\mathfrak{H}}/R)/R_\omega(G^{\mathfrak{H}}/R) = (G^{\mathfrak{H}}/R)/(R_\omega(G^{\mathfrak{H}}/R)) \cong G^{\mathfrak{H}}/R_\omega(G^{\mathfrak{H}}) \in m(\omega').$$

Итак,

$$G^{\mathfrak{H}}/R_\omega(G^{\mathfrak{H}}) \in m(\omega') \quad \text{и} \quad G^{\mathfrak{H}}/C^r(G^{\mathfrak{H}}) \in m(r)$$

для всех $r \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G^{\mathfrak{H}}))$.
Следовательно, $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$, т. е. $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$. Теорема доказана.

2.3.2 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{M} = CF_\omega(M)$, $\mathfrak{H} = CF_\omega(H)$ *— формации и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и*

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ M(p)\mathfrak{H}, & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})), \\ H(p), & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})). \end{cases}$$

2.3.3 Следствие ([209, следствие 4]). *Если формации* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *n-кратно разрешимо ω-насыщенны* ($n \geqslant 0$) *и* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, *то n-кратно разрешимо ω-насыщенной является и формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$.

Доказательство. При $n = 0$ следствие верно. Пусть $n > 0$ и при $n - 1$ следствие верно. Пусть $\mathfrak{M} = CF_\omega(M)$ и $\mathfrak{H} = CF_\omega(H)$. Согласно следствию 2.3.2 $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ M(p)\mathfrak{H}, & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})), \\ H(p), & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})). \end{cases}$$

Согласно следствию 1.6.6 обе формации $M(a)$ и $H(a)$ являются $(n-$ $-1)$-кратно разрешимо ω-насыщенными для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Кроме того, согласно нашему предположению формации $\mathfrak{F}$ и $M(a)\mathfrak{H}$ являются $(n-1)$-кратно разрешимо ω-насыщенными для всех $a \in \omega \cup$ $\cup \{\omega'\}$. Значит, спутник f c^ω_{n-1}-значен. Следствие доказано.

2.3.4 Следствие. *Произведение любых двух наследственных n-кратно разрешимо насыщенных формаций является n-кратно разрешимо насыщенной формацией.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 2.3.1 непосредственно вытекает

2.3.5 Следствие ([226, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} =$ $= CF(m)$, $\mathfrak{H} = CF(h)$ и спутники m и h являются внутренними. И пусть $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F} = CF(f)$, где*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \textit{если } p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})), \\ h(p), & \textit{если } p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \setminus \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})), \\ \varnothing, & \textit{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})). \end{cases}$$

2.4 Произведение n-кратно ω-локальных классов Фиттинга

Общие закономерности построения произведений насыщенных формаций описаны Л.А. Шеметковым [225–227] (см. также [230, § 7]). Один из наиболее ярких результатов в этом направлении, ставший уже классическим, — теорема о том, что произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ любых двух насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ само является насыщенной формацией. В разрешимом случае это утверждение было доказано В. Гашюцом [271], в произвольном — Л.А. Шеметковым [226] с явным описанием локальных спутников произведения $\mathfrak{MH}$ насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, а также Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой [230] с явным описанием композиционных спутников произведения $\mathfrak{MH}$ композиционных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Позднее А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым этот результат был распространен на n-кратно ω-насыщенные [206] и n-кратно разрешимо ω-насыщенные [209] формации.

Данный параграф посвящен изложению результатов в точности двойственных приведенным в параграфах 2.1 и 2.3, полученных Н.Т. Воробьевым [69] и, независимо, О.В. Сыромолотовой (Камозиной) [215] в теории классов Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга. Напомним, что фиттинговым произведением $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп

$$\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} = (G \mid G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}).$$

Везде в дальнейшем вместо записи $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ мы будем использовать также более краткую запись $\mathfrak{FH}$, когда из контекста понятно, что задано фиттингово произведение $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

2.4.1 Теорема ([215, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — ω-локальные классы Фиттинга, m и h — внутренние ω-локальные H-функции классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{MH}$ — ω-локальный класс Фиттинга с ω-локальной H-функцией f такой, что*

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ \mathfrak{M}h(p), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}), \\ m(p), & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где f — ω-локальная H-функция, описанная в формулировке леммы. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$.

Докажем сначала, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $\omega \cap \pi(G) = \varnothing$. Тогда $G^{\omega d} = G \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Кроме того, поскольку $p \in \omega \cap \pi(G) = \varnothing$, то $F^p(G) \in f(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$.

Пусть теперь $\omega \cap \pi(G) \neq \varnothing$ и пусть $p \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, по лемме 1.2.5

$$F^p(G)/(F^p(G))_{\mathfrak{M}} = F^p(G)/(F^p(G) \cap G_{\mathfrak{M}}) \cong$$

$$\cong F^p(G)G_{\mathfrak{M}}/G_{\mathfrak{M}} = F^p(G/G_{\mathfrak{M}}).$$

Так как $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{MH}$, то $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H} = LR_\omega(h)$. Значит, $F^p(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(p)$. Поэтому $F^p(G)/(F^p(G))_{\mathfrak{M}} \in h(p)$. Отсюда

$F^p(G) \in \mathfrak{M}h(p)$. Так как $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$ и $p \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}})$, то $p \in \omega \cap \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$. Поэтому $F^p(G) \in \mathfrak{M}h(p) = f(p)$. Значит, $G \in \mathfrak{F}_1$.

Пусть $p \in (\omega \cap \pi(G)) \setminus \pi(G/G_{\mathfrak{M}})$, т. е. $G/G_{\mathfrak{M}}$ является p'-группой. Тогда по лемме 1.2.5 $F^p(G) = F^p(G_{\mathfrak{M}})$. Так как $G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M} = LR_\omega(m)$, то $F^p(G_{\mathfrak{M}}) \in m(p)$. Значит, $F^p(G) \in m(p)$.

Существует две возможности: либо $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$, либо $p \in \omega \setminus \setminus \pi(\mathfrak{H})$.

Если $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$, то

$$F^p(G) \in m(p) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}h(p) = f(p).$$

Если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$, то

$$F^p(G) \in m(p) = f(p).$$

Итак, $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Кроме того, так как $G \in \in \mathfrak{F}$ и $G^{\omega d} \lhd G$, то $G^{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Отсюда $G \in \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$, G — группа минимального порядка. Тогда G — комонолитическая группа с комонолитом $R = G_{\mathfrak{F}}$.

Поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, то $G \notin \mathfrak{M}$. Значит, $G_{\mathfrak{M}} \neq G$. Ввиду комонолитичности группы G имеем $G_{\mathfrak{M}} \subseteq R$. Поэтому $G_{\mathfrak{M}} = R_{\mathfrak{M}}$. Так как $R \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $R/G_{\mathfrak{M}} = R/R_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$.

Предположим, что $\omega \cap \pi(G/R) = \varnothing$. Тогда $G^{\omega d} = G$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_1 = LR_\omega(f)$, то $G = G^{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}$, противоречие.

Следовательно, $\omega \cap \pi(G/R) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/R)$. Если G/R — неабелева группа, то

$$G = F^p(G) \in f(p) \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F},$$

противоречие.

Значит, G/R — p-группа. Существует две возможности: либо $p \in \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$, либо $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_1 = LR_\omega(f)$, то

$$F^p(G) \in f(p) = \mathfrak{M}h(p).$$

Значит, $F^p(G)/(F^p(G))_{\mathfrak{M}} \in h(p)$. По доказанному выше

$$F^p(G/G_{\mathfrak{M}}) \cong F^p(G)/(F^p(G))_{\mathfrak{M}}.$$

Поэтому $F^p(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(p)$. Аналогично можно заключить, что $F^q(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}}) \cap \pi(\mathfrak{H})$. Поскольку

$\pi(G/R) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$ и $\pi(R/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, то $\pi(G/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Следовательно, $F^q(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}})$. Кроме того, по лемме 1.2.5

$$(G/G_{\mathfrak{M}})^{\omega d} = G^{\omega d}G_{\mathfrak{M}}/G_{\mathfrak{M}} \cong G^{\omega d}/(G^{\omega d} \cap G_{\mathfrak{M}}) = G^{\omega d}/(G^{\omega d})_{\mathfrak{M}}.$$

Поскольку $G^{\omega d} \lhd R \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $G^{\omega d} \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Значит,

$$(G/G_{\mathfrak{M}})^{\omega d} \cong G^{\omega d}/(G^{\omega d})_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H} = h(\omega').$$

Отсюда $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H} = LR_\omega(h)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$. Тогда $O^p(G) = F^p(G) \in f(p) = m(p)$. Поскольку $R/O^p(G) \lhd G/O^p(G) \in \mathfrak{N}_p$, то $R/O^p(G) \in \mathfrak{N}_p$. Значит, $R/O^p(G)$ является q'-группой для любого $q \in \omega \cap \pi(G)$, $q \neq p$. Тогда по лемме 1.2.5 $F^q(R) = F^q(O^p(G))$. Поскольку $O^p(G) \in m(p) \subseteq \mathfrak{M} = LR_\omega(m)$, то $F^q(O^p(G)) \in m(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(O^p(G))$, $q \neq p$. Поскольку $R/O^p(G)$ — q'-группа, то по лемме 1.2.5

$$F^q(R) = F^q(O^p(G)) \in m(q)$$

для любого $q \in \omega \cap \pi(R)$, $q \neq p$.

Аналогично, поскольку G/R — p-группа, где $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$, т. е. G/R — q'-группа, $q \neq p$, то по лемме 1.2.5

$$F^q(R) = F^q(G) \in m(q)$$

для любого $q \in \omega \cap \pi(G)$, $q \neq p$.

Таким образом, $F^r(G) \in m(r)$ для всех $r \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $p \in \omega$, то $R/O^p(G) \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{G}_{\omega d}$. Следовательно, по лемме 1.2.5 $R^{\omega d} = (O^p(G))^{\omega d}$. Так как $O^p(G) \in \mathfrak{M} = LR_\omega(m)$, то $(O^p(G))^{\omega d} \in m(\omega')$.

Аналогично, поскольку $G/R \in \mathfrak{G}_{\omega d}$, то $R^{\omega d} = G^{\omega d} \in m(\omega')$.

Таким образом,

$$G^{\omega d} \in m(\omega') \text{ и } F^r(G) \in m(r)$$

для всех $r \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in LR_\omega(m) = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

2.4.2 Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — n-кратно ω-локальные классы Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является n-кратно ω-локальным классом Фиттинга.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. При $n = 0$ утверждение верно в силу теоремы 1.1.8. При $n = 1$ справедливость следствия 2.4.2 вытекает из леммы 1.3.7 и теоремы 2.4.1.

Пусть $n > 1$ и утверждение следствия 2.4.2 выполняется для любых натуральных чисел меньших n. Пусть $\mathfrak{M} = LR_\omega(m)$ и $\mathfrak{H} = LR_\omega(h)$. Отметим, что все непустые значения ω-локальных H-функций m и h являются $(n-1)$-кратно ω-локальными классами Фиттинга. Согласно лемме 1.3.7 мы можем считать ω-локальные H-функции m и h внутренними. Тогда по теореме 2.4.1 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — ω-локальный класс Фиттинга с ω-локальной H-функцией f такой, что

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ \mathfrak{M}h(p), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}), \\ m(p), & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Так как n-кратно ω-локальные классы Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ являются также $(n-1)$-кратно ω-локальными, то согласно определению $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-локальным классом Фиттинга. Следствие доказано.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 2.1.1 непосредственно вытекает

2.4.3 Следствие ([69, следствие 4]). *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — локальные классы Фиттинга, m и h — внутренние локальные H-функции классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — локальный класс Фиттинга с локальной H-функцией f такой, что*

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{M}h(p), & \textit{если } p \in \pi(\mathfrak{H}), \\ m(p), & \textit{если } p \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Глава 3

РЕШЕТКИ КЛАССОВ ФИТТИНГА

3.1 Необходимые сведения из теории классов Фиттинга

3.1.1 Лемма ([73, лемма 1.4.10]). *Если* $\mathfrak{F} = LR(f)$, *то* $\mathfrak{F} = LR(f^*) = LR(f_*)$.

3.1.2 Лемма ([264, гл. X, предложение 2.1 a)]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— класс Локетта и* G *— конечная группа. Тогда для любых конечных групп* H *и* $G \notin \mathfrak{F}$ *имеет место* $(G \wr H)_{\mathfrak{F}} = K$, *где* K *— база регулярного сплетения* $G_{\mathfrak{F}} \wr H$.

3.1.3 Лемма ([203, лемма 4.1.2]).*Пусть* f_i *— минимальный* Θ*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. *Тогда* $\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)$ *— минимальный* Θ*-значный спутник формации* $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

3.1.4 Лемма ([24, лемма 4]). *Пусть классы* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *таковы, что* $\mathcal{K}(\mathfrak{F}_1) \cap \mathcal{K}(\mathfrak{F}_2) = \varnothing$ *и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$. *Тогда класс* $\mathfrak{F}$ *является* U*-замкнутым, где* $\mathrm{U} \in \{\mathrm{Q}, \mathrm{N}_0, \mathrm{S}_n\}$, *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *являются* U*-замкнутыми.*

3.1.5 Лемма ([264, гл. B, следствие 10.7]). *Если абелевы минимальные нормальные подгруппы группы* G *попарно неизоморфны как* G*-модули, то* G *обладает точным неприводимым представлением над любым полем, чья характеристика либо ноль, либо не делит* $|F(G)|$.

3.1.6 Лемма ([72, теорема]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустой класс Фиттинга. Тогда* $\mathfrak{F}$ *тотально локален в том и только в том случае, когда* $\mathfrak{F}$ *наследственен.*

Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{X}$ и N — нормальная подгруппа группы G всегда следует $G/N \in \mathfrak{X}$. Если гомоморф $\mathfrak{X}$ таков, что условие $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$ влечет $G \in \mathfrak{X}$, то его называют *насыщенным.*

3.1.7 Лемма ([68, лемма 3]). *Если* $\mathfrak{F}$ *— некоторый класс Фиттинга и* $\mathfrak{X}$ *— насыщенный радикальный гомоморф, то* $(\mathfrak{F}\mathfrak{X})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{X}$.

3.1.8 Лемма ([264, гл. X; теорема 1.15]). *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, то $\mathfrak{X}^* \subseteq \mathfrak{Y}^*$ и $\mathfrak{X}_* \subseteq \mathfrak{Y}_*$;*

2) $(\mathfrak{X}_*)_* = \mathfrak{X}_* = (\mathfrak{X}^*)_* \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^* = (\mathfrak{X}_*)^* = (\mathfrak{X}^*)^*$;

3) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_*\mathfrak{A}$;

4) *если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество непустых классов Фиттинга, то $\left(\bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right)^* = \bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{F}_i{}^*$.*

3.1.9 Лемма ([264, гл. IX; лемма 1.7]). *Пусть G — группа, которая обладает композиционным фактором простого порядка p. Тогда $\mathrm{S}_n\mathrm{N}_0\mathrm{S}_n(G)$ содержит циклическую группу порядка p. Кроме того, если $\mathfrak{F}$ — разрешимый класс Фиттинга, то $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$.*

3.1.10 Лемма ([268, следствие 4.11]). *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Если существует класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ такой, что $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{G}_p = \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}$.*

3.1.11 Лемма ([268, замечание 4.8 c)]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда если существует класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ такой, что $\mathfrak{Y}\mathfrak{G}_p \subseteq$ $\subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}$ для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.*

3.1.12 Лемма ([264]). *Пусть p и q — различные простые числа. Тогда*

$$\mathfrak{S}_q\mathfrak{S}_p \not\subseteq \mathfrak{S}_*.$$

3.2 Булевы подрешетки классов Фиттинга

Прямые разложения

3.2.1 Определение. *Совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ непустых классов групп $\mathfrak{F}_i$ называется* ортогональной *(А.Н. Скиба [203]), если:*

1) *либо $|I| = 1$, либо $|I| > 1$ и*

2) $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ *для всех $i, j \in I$, $i \neq j$.*

Отметим, что всякая ортогональная система классов Фиттинга (формаций) является ортогональной системой элементов решетки всех классов Фиттинга (решетки всех формаций соответственно) в обычном смысле [129, с. 238].

Следуя [203], для произвольной ортогональной системы классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ через $\underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ (в частности, пишем $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t$, если $I = \{1, 2, \ldots, t\}$) мы обозначаем совокупность всех групп изоморфных группам вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in$ $\in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$.

3.2.2 Определение. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустой класс групп. Говорят, что* $\mathfrak{F}$ *является* прямым произведением *классов* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, *если совокупность* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *является ортогональной системой классов, и* $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$.

Пусть L — решетка классов групп и $\mathfrak{F} \in L$. Будем говорить, что класс $\mathfrak{F}$ *прямо разложим* в решетке L, если $\mathfrak{F}$ является прямым произведением некоторых неединичных классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} \subseteq L$. В противном случае $\mathfrak{F}$ называется *прямо неразложимым* в решетке L.

3.2.3 Пример. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех p-разложимых групп. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{G}_{p'}$, т. е. $\mathfrak{F}$ прямо разложим в решетке всех классов Фиттинга и в решетке всех формаций.

3.2.4 Пример. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп. Тогда $\mathfrak{F} = \underset{p\in\mathbb{P}}{\otimes} \mathfrak{N}_p$, т. е. $\mathfrak{F}$ прямо разложим в решетке всех классов Фиттинга и в решетке всех формаций.

3.2.5 Пример. Пусть $\mathfrak{F}_1$ — класс всех абелевых p-групп и $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{G}_{p'}$. Тогда согласно [203, следствие 4.3.6] класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$ является формацией. Поэтому класс $\mathfrak{F}$ прямо разложим в решетке всех формаций. С другой стороны, $\mathfrak{F}$ не является классом Фиттинга. Значит, $\mathfrak{F}$ прямо неразложим в решетке всех классов Фиттинга.

3.2.6 Пример. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп. Тогда $\mathfrak{F}$ прямо неразложим в решетке всех классов Фиттинга. Действительно, если $\mathfrak{M}$ является собственным подклассом Фиттинга класса $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} =$ $= (1)$ согласно [137].

Покажем теперь, что $\mathfrak{F}$ прямо неразложим в решетке всех формаций. Предположим, что это неверно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$ для некоторых неединичных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ и поэтому всякая группа порядка p принадлежит $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$, противоречие.

Прямые разложения классов групп оказались полезными при решении некоторых открытых вопросов теории классов групп и при построении классов Фиттинга (формаций) с различными заданными свойствами. Здесь мы лишь коротко отметим замечательные работы [21, 240], где на основе условия ортогональности классов групп было дано решение известной проблемы Кегеля–Шеметкова об описании всех насыщенных наследственных формаций, для которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует решетку в каждой конечной группе и книгу А.Н. Скибы [203], в которой прямые разложения классов групп нашли применение при решении многих открытых вопросов теории классов.

Первой целью данного параграфа является дальнейшее изучение прямых разложений классов групп.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{X}$ называется D_0-замкнутым, если прямое произведение любого набора групп из $\mathfrak{X}$ снова принадлежит $\mathfrak{X}$.

3.2.7 Лемма. *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}$ *— непустой* D_0*-замкнутый подкласс класса групп* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{M} = \underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то найдутся такие $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Ввиду того, что класс $\mathfrak{M}$ является D_0-замкнутым $A_1 \in \mathfrak{M}$, $A_2 \in \mathfrak{M}, \ldots, A_t \in \mathfrak{M}$. Следовательно,

$$G \in (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_1}) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_2}) \otimes \ldots \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_t}) \subseteq \underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i).$$

Значит,

$$\mathfrak{M} \subseteq \underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i).$$

Обратно. Пусть $G \in \underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$. Тогда найдутся такие $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in$ $\in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_t}$. Так как класс $\mathfrak{M}$ D_0-замкнут, получаем $G \in \mathfrak{M}$. Значит, $\underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i) \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M} = \underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$.

Лемма доказана.

3.2.8 Следствие ([43, лемма 1]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}$ *— непустой подкласс Фиттинга в* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{M} = \underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$.

3.2.9 Лемма. *Пусть* $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ *— произвольная ортогональная совокупность классов групп, где* $I = \bigcup\limits_{j\in J} I_j$ *— разбиение множества* I *(для любых* $j_1, j_2 \in J$, *где* $j_1 \neq j_2$, *имеет место* $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \varnothing$). *Тогда, если* $\mathfrak{F}_j = \underset{i\in I_j}{\otimes} \mathfrak{H}_i$, $j \in J$ *и* $\mathfrak{F} = \underset{j\in J}{\otimes} \mathfrak{F}_j$, *то* $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{H}_i$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие $j_1, j_2, \ldots$ $\ldots, j_k \in J$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{j_2}, \ldots$ $\ldots, A_k \in \mathfrak{F}_{j_k}$. Следовательно, найдутся такие $i_1^1, i_2^1, \ldots, i_1^k \in I$, что $A_1 = B_1^1 \times B_2^1 \times \ldots \times B_l^1$, где $B_1^1 \in \mathfrak{H}_{i_1^1}$, $B_2^1 \in \mathfrak{H}_{i_2^1}, \ldots, B_l^1 \in \mathfrak{H}_{i_l^1}; \ldots$ $\ldots; A_k = B_1^k \times B_2^k \times \ldots \times B_m^k$, где $B_1^k \in \mathfrak{H}_{i_1^k}$, $B_2^k \in \mathfrak{H}_{i_2^k}, \ldots, B_m^k \in \mathfrak{H}_{i_m^k}$. Значит, $G = B_1^1 \times B_2^1 \times \ldots \times B_l^1 \times \ldots \times B_1^k \times B_1^2 \times \ldots \times B_m^k$. Поэтому $G \in \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{H}_i$ и $\mathfrak{F} \subseteq \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{H}_i$.

Обратно. Пусть $G \in \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{H}_i$. Тогда найдутся такие $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{H}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{H}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{H}_{i_t}$. Значит, найдутся такие $j_1, j_2, \ldots, j_s \in J$, что $\mathfrak{H}_{i_1} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1}$, $\mathfrak{H}_{i_2} \subseteq \mathfrak{F}_{j_2}, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{H}_{i_t} \subseteq \mathfrak{F}_{j_s}$. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{F}_{j_1} \otimes \mathfrak{F}_{j_2} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_{j_s} \subseteq \bigotimes_{j\in J} \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}.$$

Лемма доказана.

3.2.10 Лемма. *Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ — некоторые D_0-замкнутые классы, и группа A имеет вид $A = A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, то подгруппы A_1, A_2 характеристичны в A.*

Доказательство. Пусть α — произвольный автоморфизм группы A. Допустим, что $A_1 \neq A_1^\alpha$. Тогда $A_1 \subset A_1 \times A_1^\alpha$ и

$$|A| = \frac{|A_1 \times A_1^\alpha||A_2|}{|A_1 \times A_1^\alpha \cap A_2|}.$$

Ясно, что $|A_1 \times A_1^\alpha||A_2| > |A_1||A_2| = |A|$. Поэтому $|A_1 \times A_1^\alpha \cap A_2| \neq 1$. Но $A_1 \times A_1^\alpha \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$. Следовательно,

$$A_1 \times A_1^\alpha \cap A_2 \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1).$$

Противоречие.

Лемма доказана.

3.2.11 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$ — ортогональная совокупность C-замкнутых классов, где $\mathrm{C} \in \{\mathrm{S}_n, \mathrm{N}_0, \mathrm{Q}, \mathrm{R}_0, \mathrm{D}_0\}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t$ — C-замкнутый класс.*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{C} = \mathrm{D}_0$. Пусть $A_1 \in \mathfrak{F}$, $A_2 \in \mathfrak{F}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие $i_1^1, i_2^1, \ldots, i_t^1; \ldots$ $\ldots; i_1^t, i_2^t, \ldots, i_t^t \in I$, что $A_1 = B_1^1 \times B_2^1 \times \ldots \times B_t^1$, где $B_1^1 \in \mathfrak{F}_1$, $B_2^1 \in \mathfrak{F}_2, \ldots, B_t^1 \in \mathfrak{F}_t; \ldots; A_t = B_1^t \times B_2^t \times \ldots \times B_t^t$, где $B_1^t \in \mathfrak{F}_1$, $B_2^t \in \mathfrak{F}_2, \ldots, B_t^t \in \mathfrak{F}_t$. Тогда

$$G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t =$$

$$= B_1^1 \times B_2^1 \times \ldots \times B_t^1 \times \ldots \times B_1^t \times B_2^t \ldots \times B_t^t \cong$$

$$\cong (B_1^1 \times B_1^2 \times \ldots \times B_1^t) \times (B_2^1 \times B_2^2 \times \ldots \times B_2^t) \times \ldots \times (B_t^1 \times B_t^2 \ldots \times B_t^t),$$

где, ввиду D_0-замкнутости классов $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$ имеем

$$B_1^1 \times B_1^2 \times \ldots \times B_1^t \in \mathfrak{F}_1, \quad B_2^1 \times B_2^2 \times \ldots \times B_2^t \in \mathfrak{F}_2, \ldots$$

$$\ldots, B_t^1 \times B_t^2 \ldots \times B_t^t \in \mathfrak{F}_t.$$

Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

В случае $\mathrm{C} = \mathrm{Q}$ и $\mathrm{C} = \mathrm{R}_0$ см. доказательство [203, теорема 4.3.2], а в случае $\mathrm{C} = \mathrm{S}_n$ и $\mathrm{C} = \mathrm{N}_0$ см. доказательство [43, лемма 4].

Лемма доказана.

3.2.12 Следствие ([43, лемма 4]). *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$ — ортогональная система классов Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t$ — класс Фиттинга.*

Заметим, что лемма 3.2.11 при $t = 2$ в разрешимом случае вытекает из работы В.А. Ведерникова [24, лемма 4].

3.2.13 Лемма. *Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t$, где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$ — некоторые D_0-замкнутые классы, и группа A имеет вид $A = A_1 \times \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_1, A_2 \in \mathfrak{F}_2, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_t$, то подгруппы $A_1, A_2, \ldots, A_t$ характеристичны в A.*

Доказательство. При $t = 2$ лемма верна в силу леммы 3.2.10. Пусть $t > 2$. По лемме 3.2.7

$$(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 \otimes \mathfrak{F}_3 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t) = (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) \otimes (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3) \otimes \ldots \otimes (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_t) =$$

$$= (1) \otimes (1) \otimes \ldots \otimes (1) = (1).$$

Таким образом, совокупность $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \otimes \mathfrak{F}_3 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t$ ортогональна. Поэтому, ввиду леммы 3.2.10, A_1 — характеристическая подгруппа группы $A = A_1 \times (A_2 \times \ldots \times A_t)$.

Лемма доказана.

3.2.14 Теорема ([62, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — класс Фиттинга. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локален в том и только в том случае, когда n-кратно ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_i$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга для любого $i \in I$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

Рассмотрим прежде случай, когда $n = 0$. Пусть H — нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие индексы $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_t \in I$, что

$$G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t,$$

где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Следовательно, ввиду лемм 3.2.9 и 3.2.11

$$H \in \mathfrak{F}_{i_1} \otimes (\mathfrak{F}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_{i_t}) = \mathfrak{F}_{i_1} \otimes \mathfrak{F}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_{i_t} \subseteq \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}.$$

Итак, класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп.

Пусть $G = AB$, где A, B — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Тогда найдутся такие индексы $i_1, i_2, \ldots, i_t; j_1, j_2, \ldots, j_a \in I$, что

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t \quad \text{и} \quad B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_a,$$

где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}; B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, B_2 \in \mathfrak{F}_{j_2}, \ldots, B_a \in$ $\in \mathfrak{F}_{j_a}$. Ввиду леммы 3.2.13 подгруппы $A_1, A_2, \ldots, A_t; B_1, B_2, \ldots, B_a$ нормальны в G. Следовательно,

$$G = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_b,$$

где каждый сомножитель C_i удовлетворяет одному из следующих условий:

1) C_i совпадает с A_{i_l} для некоторого индекса $i_l \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_a\}$;
2) $C_i = B_{jl}$ для некоторого индекса $j_l \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$;
3) $C_i = A_{i_l} B_{j_k}$ для некоторого индекса $i_l = j_k$.

Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $n > 0$, и f_i — минимальная l_ω^{n-1}-значная H-функция n-кратно ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ для каждого $i \in I$. Пусть $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$. Тогда если $i \neq j$, то по условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Значит, $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$. Построим ω-локальную H-функцию f таким образом, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$,

$$f(p) = \begin{cases} f_i(p), & \text{если } p \in \pi_i \text{ для некоторого } i \in I, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \omega \setminus \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$.

Пусть $LR_\omega(f) \not\subseteq \mathfrak{F}$, и G — группа минимального порядка из $LR_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая группа и $M = G_{\mathfrak{F}}$ — ее комонолит. Поскольку $G \in LR_\omega(f)$, то $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in$ $\in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то по построению ω-локальной H-функции f найдется такое $i \in I$, что $f(p) = f_i(p) \neq$ $\neq \varnothing$. Последнее означает, что $p \in \pi_i$. Значит,

$$\omega \cap \pi(G) \subseteq \bigcup_{i \in I} \pi_i.$$

Предположим, что $\omega \cap \pi(G/M) = \varnothing$. Тогда $G^{\omega d} = G$. Так как при этом $G \in LR_\omega(f)$, то

$$G = G^{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие.

Следовательно, $\omega \cap \pi(G/M) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/M)$. Если G/M — неабелева группа, то $F^p(G) = G$. Поэтому

$$G = F^p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие.
Пусть G/M — p-группа. Тогда

$$F^p(G) = O^p(G) \in f(p) = f_i(p).$$

Отсюда по лемме 1.3.11 $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие.
Таким образом, справедливо включение $LR_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LR_\omega(f)$. Тогда G — комонолитическая группа. Следовательно, найдется такое $i \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_i = LR_\omega(f_i)$. Значит, $F^p(G) \in f_i(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Кроме того, из $G \in \mathfrak{F}$ и из того, что $G^{\omega d}$ нормальна в G, получаем $G^{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Поэтому $G \in LR_\omega(f)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} \subseteq LR_\omega(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

Пусть теперь класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локален, и f — его минимальная l_ω^{n-1}-значная H-функция. Пусть $i \in I$ и f_i — такая ω-локальная H-функция, что $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$,

$$f_i(p) = \begin{cases} f(p), & \text{если } p \in \pi_i, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \omega \setminus \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F}_i = LR_\omega(f_i)$.

Предположим, что $\mathfrak{F}_i$ не входит в $LR_\omega(f_i)$, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus LR_\omega(f_i)$. Тогда G — комонолитическая группа и $M = G_{LR_\omega(f_i)}$ — ее комонолит. Поскольку $G \notin LR_\omega(f_i)$, то по лемме 1.3.16 либо $G^{\omega d} \nsubseteq G_{LR_\omega(f_i)}$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \cap\, \pi(G/G^{\omega d})$, что $F^p(G) \notin f_i(p)$. Но $G \in \mathfrak{F}_i$ и $G^{\omega d}$ нормальна в G. Значит,

$$G^{\omega d} \in \mathfrak{F}_i = f_i(\omega').$$

Кроме того, из $G \in \mathfrak{F}$ для всех $q \in \omega \cap \pi(G)$ получаем

$$F^q(G) \in f(q) = f_i(q).$$

Следовательно, $G \in LR_\omega(f_i)$. Противоречие. Значит, имеет место включение $\mathfrak{F}_i \subseteq LR_\omega(f_i)$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G — группа минимального порядка из $LR_\omega(f_i) \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда группа G комонолитична с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}_i}$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/M) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Тогда из $G \in LR_\omega(f_i)$ следует, что $F^p(G) \in f_i(p)$. Значит, $f_i(p) \neq \varnothing$ и по построению ω-локальной H-функции f_i получаем $p \in \pi_i$. Поэтому

$$\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_i.$$

Кроме того, $f_i \leqslant f$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Ввиду комонолитичности группы G найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда

$$\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_j.$$

Поэтому

$$\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \varnothing.$$

Значит, $i = j$, т. е. $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Следовательно, $LR_\omega(f_i) \subseteq \subseteq \mathfrak{F}_i$. Таким образом, $\mathfrak{F}_i = LR_\omega(f_i)$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

Теорема доказана.

Из теоремы 3.2.14 непосредственно вытекает

3.2.15 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда в том и только том случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тотально ω-локален, когда тотально ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

Если $\omega = \mathbb{P}$, то, учитывая следствие 3.2.15, получаем

3.2.16 Следствие ([43, следствие 2]). *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — класс Фиттинга для всех $i \in I$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тотально локален в том и только в том случае, когда тотально локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

При $n = 1$ из теоремы 3.2.14 непосредственно вытекает

3.2.17 Следствие ([41, теорема 2]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых классов Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда в том и только том случае класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ ω*-локален, когда* ω*-локален каждый класс Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$.

Если в теореме 3.2.14 положить $\omega = \mathbb{P}$, то получим

3.2.18 Следствие ([43, теорема 1]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых классов Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда в том и только том случае класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ n*-кратно локален, когда* n*-кратно локален каждый класс Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$.

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 3.2.14 непосредственно вытекает

3.2.19 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых классов Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда в том и только том случае класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *локален, когда локален каждый класс Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$.

Пусть C — операция на классах групп. Будем говорить, что непустой класс групп $\mathfrak{F}$ *прямо* C*-разложим*, если $\mathfrak{F}$ является прямым произведением некоторых неединичных C-замкнутых классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$. В противном случае $\mathfrak{F}$ называется *прямо* C*-неразложимым*.

Следующая теорема является аналогом теоремы Ремака–Шмидта.

3.2.20 Теорема ([62, теорема 2]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i = \underset{j \in J}{\otimes} \mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ C*-замкнутые неединичные классы* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо* C*-неразложимы, где* $\mathrm{D}_0 \leqslant \mathrm{C}$. *Тогда* $|I| = |J|$ *и для некоторой биекции* $\varphi : I \to J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

Доказательство. Пусть $i \in I$. Тогда по лемме 3.2.7 имеет место равенство $\mathfrak{F}_i = \underset{j \in J}{\otimes} (\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}_j)$. Понятно, что пересечение любых двух C-замкнутых классов снова является C-замкнутым классом. Значит, поскольку класс $\mathfrak{F}_i$ по условию прямо C-неразложим, то для некоторого $j \in J$ справедливо равенство $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}_j$, т. е. $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$.

Заметим, что если найдутся таких два различных индекса $j_1, j_2 \in J$, что $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_{j_1}$ и $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_{j_2}$, то $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_{j_1} \cap \mathfrak{M}_{j_2} = (1)$, т. е. $\mathfrak{F}_i = (1)$, что противоречит условию. Следовательно, индекс $j = \varphi(i)$ такой, что $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$ однозначно определен.

Покажем теперь, что если $j = \varphi(i)$, т. е. $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$, то $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_j$. По лемме 3.2.7 получаем $\mathfrak{M}_j = \underset{k\in I}{\otimes}(\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{M}_j)$. Значит, $\mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k$ для некоторого $k \in I$. В свою очередь, $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{M}_{\varphi(k)}$. Значит,

$$\mathfrak{M}_j = \mathfrak{F}_k = \mathfrak{M}_{\varphi(k)}$$

и поэтому $\varphi(j) = k$, т. е. отображение φ сюръективно и $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ для любого $i \in I$.

Покажем теперь, что отображение φ инъективно. Предположим, что для $i_1 \neq i_2$ и i_1, $i_2 \in I$ имеет место $\varphi(i_1) = \varphi(i_2) = j$. Тогда, по определению отображения φ, $\mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{M}_j$ и $\mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{M}_j$. Кроме того, по доказанному выше, найдется такой индекс k, что $\mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k$. Значит,

$$\mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k \quad \text{и} \quad \mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k.$$

Поэтому

$$\mathfrak{F}_{i_1} = \mathfrak{F}_{i_2} = \mathfrak{F}_k.$$

Следовательно, $i_1 = i_2$. Противоречие. Значит, отображение φ инъективно. Поэтому $|I| = |J|$.

Теорема доказана.

3.2.21 Следствие (А.Н. Скиба [203]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i = \underset{j\in J}{\otimes}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ *формации* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо неразложимы в решетке всех формаций. Тогда* $|I| = |J|$ *и для некоторой биекции* $\varphi\ : I \to J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

3.2.22 Следствие ([43, теорема 2]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i = \underset{j\in J}{\otimes}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ *классы Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо неразложимы в решетке всех классов Фиттинга. Тогда* $|I| = |J|$ *и для некоторой биекции* $\varphi : I \to J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

3.2.23 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i = \underset{j\in J}{\otimes}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in \in I$, $j \in J$ *разрешимые классы Шунка* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо неразложимы в решетке всех классов Шунка. Тогда* $|I| = |J|$ *и для некоторой биекции* $\varphi : I \to J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

Отметим, наконец, что в серии работ В.А. Ведерникова и его учеников (см., например, [26, 28, 102, 184]) аналогичные вопросы исследовались в рамках оригинальных теорий расслоенных формаций и биканонических классов Фиттинга.

Подрешеточная структура. В работе [199] были описаны n-кратно насыщенные формации с булевой решеткой n-кратно насыщенных подформаций. Аналог этого результа для n-кратно локальных классов Фиттинга был получен в [43]. В настоящей работе, развивая последний результат и давая ответ на вопрос 23 работы [206], мы описываем n-кратно ω-локальные классы Фиттинга, у которых решетка всех n-кратно ω-локальных подклассов Фиттинга является булевой.

Символом l_ω^n обозначается [206] совокупность всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга, а символом $\mathcal{K}(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают через $l_\omega^n\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ и называют *n-кратно ω-локальным классом Фиттинга, порожденным* $\mathfrak{X}$ [206]. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $l_\omega^n\mathrm{fit}\{G\}$ пишут $l_\omega^n\mathrm{fit}G$. Всякий класс Фиттинга такого вида называется *однопорожденным n-кратно ω-локальным классом Фиттинга* [206].

3.2.24 Лемма. *Пусть простая группа $A \in l_\omega^n\mathrm{fit}\mathfrak{X}$. Тогда если $n = 0$, то $A \cong H/K$, где $H/K \in \mathcal{K}(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$, а при $n > 0$ справедливы следующие утверждения*:

1) *если A — группа порядка p ($p \in \omega$), то $A \cong H \leqslant G$ для некоторой подгруппы H группы $G \in \mathfrak{X}$;*

2) *если A — ω'-группа либо неабелева ωd-группа, то $A \cong H/K$, где $H/K \in \mathcal{K}(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $n = 0$. Класс $l_\omega^0\mathrm{fit}\mathfrak{X} = \mathrm{fit}\mathfrak{X}$, очевидно, состоит из всех групп, получаемых в результате конечного числа применений операций S_n и N_0 к группам из $\mathfrak{X}$. Понятно, что если N — нормальная подгруппа группы $A \in \mathrm{fit}\mathfrak{X}$, то $\mathcal{K}(N) \subseteq \mathcal{K}(A)$. А если $G = LP$, где L, P — нормальные подгруппы группы G и $L, P \in \mathrm{fit}\mathfrak{X}$, то $\mathcal{K}(G) = \mathcal{K}(L) \cup \mathcal{K}(P)$. Отсюда следует, что $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) = \mathcal{K}(\mathrm{fit}\mathfrak{X})$.

Пусть $n > 0$ и при $n-1$ лемма верна. Пусть $\mathfrak{F} = l_\omega^n\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ и f — минимальная l_ω^{n-1}-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\omega \cap \pi(A) = \varnothing$. Тогда

$$A = A^{\omega d} \in f(\omega') = l_\omega^{n-1}\mathrm{fit}(L^{\omega d} \mid L \in \mathfrak{X}).$$

Следовательно, по индукции $A \cong H/K$, где $H/K \in \mathcal{K}(G)$ для некоторой группы $G \in \big(L^{\omega d} \mid L \in \mathfrak{X}\big)$. По доказанному выше

$$\mathcal{K}\big(\mathrm{fit}(L^{\omega d} \mid L \in \mathfrak{X})\big) \subseteq \mathcal{K}(\mathrm{fit}\mathfrak{X}) = \mathcal{K}(\mathfrak{X}).$$

Отсюда $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$.

Пусть теперь $\omega \cap \pi(A) \neq \varnothing$ и $p \in \omega \cap \pi(A)$. Если A — неабелева группа, то $F^p(A) = A$. Следовательно,

$$A = F^p(A) \in f(p) = l_\omega^{n-1}\mathrm{fit}\big(\mathfrak{X}(F^p)\big) = l_\omega^{n-1}\mathrm{fit}\big(\mathrm{fit}(F^p(A) \mid A \in \mathfrak{X})\big).$$

Значит, по индукции $A \cong H/K$, где $H/K \in \mathcal{K}(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}(F^p)$. Но, по доказанному выше $\mathcal{K}\big(\mathfrak{X}(F^p)\big) \subseteq \mathcal{K}(\mathrm{fit}\mathfrak{X}) = \mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Отсюда снова $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$.

Если A — группа простого порядка p, то $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Значит, $A \cong H \leqslant G$ для некоторой подгруппы H группы $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

При $\omega = \mathbb{P}$ из леммы 3.2.24 непосредственно вытекает

3.2.25 Следствие. *Пусть простая группа A принадлежит $l^n\mathrm{fit}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — класс групп. Тогда если $n = 0$, то $A \cong H/K$, где $H/K \in \mathcal{K}(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$, а при $n > 0$ справедливы следующие утверждения*:

1) *если A — неабелева группа, то $A \cong H/K$, где $H/K \in \mathcal{K}(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$;*

2) *если $A = Z_p$ — группа порядка p, то $Z_p \cong H \leqslant G$ для некоторой подгруппы H группы $G \in \mathfrak{X}$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Тогда через $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ обозначим решетку всех его n-кратно ω-локальных подклассов Фиттинга.

3.2.26 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = l_\omega^n\mathrm{fit}G$ — однопорожденный n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Тогда решетка $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ имеет лишь конечное число атомов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l_\omega^n\mathrm{fit}A$, где A — простая группа из $\mathfrak{M}$. Если A — ω'-группа либо неабелева ωd-группа, то, согласно лемме 3.2.24, имеем $A \cong H/K$, где $H/K \in \mathcal{K}(G)$. Так как группа G конечна, то у нее существует конечное число композиционных факторов. Следовательно, в решетке $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ содержится конечное число неразрешимых атомов.

Пусть A — группа простого порядка p. Поскольку p делит $|G|$, то в решетке $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число разрешимых атомов. Лемма доказана.

Если $\omega = \mathbb{P}$, то получим

3.2.27 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F} = l^n\mathrm{fit}G$ *— однопорожденный* n*-кратно локальный класс Фиттинга. Тогда решетка* $L^n(\mathfrak{F})$ *имеет лишь конечное число атомов.*

3.2.28 Лемма. *Пусть* $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ *— некоторый набор атомов решетки* l^n_ω *и* $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{M}_i$. *Тогда класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *принадлежит решетке* l^n_ω *и если* $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ *— произвольный неединичный* n*-кратно* ω*-локальный подкласс Фиттинга в* $\mathfrak{F}$, *то во множестве* $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ *найдется такое подмножество* $\{\mathfrak{M}_j \mid j \in J\}$, *что* $\mathfrak{M} = \underset{j\in J}{\otimes}\mathfrak{M}_j$.

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из теоремы 3.2.14.

Согласно лемме 3.2.7 $\mathfrak{M} = \underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M})$. Ввиду того, что $\mathfrak{M}_i$ — атом решетки l^n_ω, получаем $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M} = \{(1), \mathfrak{M}_i\}$. Пусть J — такое подмножество в I, что $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_j$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{M} = \underset{j\in J}{\otimes}\mathfrak{M}_j$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ — n-кратно ω-локальные классы Фиттинга. Тогда через $\mathfrak{M} \vee^n_\omega \mathfrak{H}$ обозначается (см. [203]) верхняя грань для $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ в решетке l^n_ω.

3.2.29 Теорема ([46, теорема]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— неединичный* n*-кратно* ω*-локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *решетка* $L^n_\omega(\mathfrak{F})$ *булева;*

2) $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i$, *где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— набор всех атомов решетки* $L^n_\omega(\mathfrak{F})$;

3) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняем каждый подкласс Фиттинга, который является атомом решетки* $L^n_\omega(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Покажем, что из 3) вытекает 2). Заметим прежде, что условие 3) выполняется для любого неединичного n-кратно ω-локального подкласса $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. Действительно, если $\mathfrak{M}$ — произвольный атом решетки $L^n_\omega(\mathfrak{F}_1)$, то, согласно условию 3), в $\mathfrak{F}$ найдется такой подкласс Фиттинга $\mathfrak{H}$, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^0_\omega \mathfrak{H} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Значит, по лемме 3.2.11 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$. Следовательно, ввиду леммы 3.2.7, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \otimes (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_1)$, т. е. $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_1$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}_1$.

Покажем теперь выполнимость условия 2) для любого неединичного n-кратно ω-локального подкласса $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ с конечным числом m атомов решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F}_1)$. Проведем индукцию по m. Пусть $\mathfrak{L}$ — атом решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F}_1)$. Тогда, как замечено выше, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{K}$ для некоторого подкласса Фиттинга $\mathfrak{K}$ из $\mathfrak{F}_1$. Ввиду теоремы 3.2.14 $\mathfrak{K}$ – n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Если $m = 1$, то $\mathfrak{K} = (1)$. Значит, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{L}$ и утверждение 2) относительно $\mathfrak{F}_1$ выполняется тривиальным образом. Пусть $m > 1$ и предположим, что утверждение 2) верно для всякого такого неединичного n-кратно ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{F}$, у которого число атомов решетки $L_\omega^n(\mathfrak{R})$ не превосходит $m-1$. Заметим, что поскольку $m > 1$, то $\mathfrak{K} \neq (1)$. Ясно, что для n-кратно ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{K}$ число атомов в решетке $L_\omega^n(\mathfrak{K})$ меньше, чем m. Отсюда, ввиду нашего предположения,

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{M}_t,$$

где $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $L^n(\mathfrak{K})$. Используя теперь леммы 3.2.7 и 3.2.9, заключаем, что

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{M}_t,$$

где $\{\mathfrak{L}, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_t\}$ — набор всех атомов решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F}_1)$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{H} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Тогда по лемме 3.2.28 $\mathfrak{H}$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Допустим, $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H}$ и $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Согласно лемме 3.2.26, в $\mathfrak{F}_2 = l_\omega^n \mathrm{fit} G$ имеется лишь конечное число подклассов, являющихся атомами решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F}_2)$. Значит, по доказанному выше

$$\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{M}_a,$$

где $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_a$ — набор всех атомов решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F}_2)$. Значит, $G \in \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть теперь имеет место 2). Покажем выполнимость условия 1). Сначала установим, что $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ является решеткой с дополнениями. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный n-кратно ω-локальный подкласс Фиттинга из $\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3.2.28 существует такой набор $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I_1\}$ подклассов Фиттинга из $\mathfrak{M}$, которые являются атомами решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F})$, что $\mathfrak{M} = \bigotimes_{i \in I_1} \mathfrak{F}_i$. Пусть $I_2 = I \setminus I_1$, $\mathfrak{H} = \bigotimes_{i \in I_2} \mathfrak{F}_i$. Покажем, что $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $L_\omega^n(\mathfrak{F})$. Очевидно, $\mathfrak{M} \vee_\omega^n \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \neq (1)$ и $\mathfrak{R}$ — подкласс Фиттинга из $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, являющийся атомом решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F})$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}_i$. Но $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Следовательно, по лемме 3.2.28 $\mathfrak{R}$ входит в один из классов Фиттинга $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, $L_{\omega}^{n}(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями.

Теперь покажем, что $L_{\omega}^{n}(\mathfrak{F})$ — дистрибутивная решетка. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{R}$ — произвольные n-кратно ω-локальные подклассы Фиттинга из $\mathfrak{F}$. Включение

$$(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}) \vee_{\omega}^{n} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{R} \vee_{\omega}^{n} \mathfrak{H})$$

очевидно.

Предположим, что обратное включение неверно, и A — группа минимального порядка из

$$\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{R} \vee_{\omega}^{n} \mathfrak{H}) \setminus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}) \vee_{\omega}^{n} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}).$$

Тогда A — комонолитическая группа. Следовательно, найдется такое $i \in I$, что $A \in \mathfrak{F}_i$. Так как $\mathfrak{F}_i$ — атом решетки $L_{\omega}^{n}(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}_i = l_{\omega}^{n}\mathrm{fit}A \subseteq \mathfrak{R} \vee_{\omega}^{n} \mathfrak{H}$. Отсюда в силу условия 2) и леммы 3.2.28 получаем, что либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{R}$, либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}$. В обоих случаях приходим к тому, что решетка $L_{\omega}^{n}(\mathfrak{F})$ дистрибутивна. Итак, решетка $L_{\omega}^{n}(\mathfrak{F})$ булева.

Предположим, что выполняется условие 1). Покажем, что из него вытекает 3). При $n = 0$ это очевидно. Пусть $n \geqslant 1$ и $\mathfrak{M}$ — атом решетки $L_{\omega}^{n}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l_{\omega}^{n}\mathrm{fit}A$, где A — простая группа из $\mathfrak{M}$. Ввиду того, что $L_{\omega}^{n}(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями, найдется такой n-кратно ω-локальный подкласс Фиттинга $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\omega}^{n} \mathfrak{H} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Пусть $\mathfrak{W} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 3.2.11 имеет место равенство $\mathfrak{W} = \mathfrak{M} \vee_{\omega}^{0} \mathfrak{H}$. Очевидно, $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно теореме 3.2.14

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\omega}^{n} \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H} = \mathfrak{W}.$$

Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{W}$, т. е. атом $\mathfrak{M}$ дополняем в решетке $L_{\omega}^{n}(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

3.3 Свойство стоуновости

При обозрении большинства наиболее известных конкретных классов Фиттинга легко обнаруживается, что они могут быть заданы при помощи функций, все непустые значения которых сами являются локальными классами Фиттинга. Последнее обстоятельство привело к возникновению следующей естественной конструкции [192]: согласно определению, всякий класс Фиттинга считается

0-кратно локальным, а при $n \geqslant 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно локальным, если $\mathfrak{F} = LR(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n-1)$-кратно локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга называется тотально локальным, если он n-кратно локален для всех натуральных n. Кратно насыщенные и тотально насыщенные формации определяются аналогично. Нетрудно показать, что класс всех разрешимых тотально насыщенных формаций совпадает с классом всех так называемых примитивных насыщенных формаций, введенных Хоуксом в работе [283] (см. также монографию Дерка и Хоукса [264, глава VII]). Отметим также, что класс всех тотально насыщенных формаций введен Дерком в работе [263]. Более того, понятие n-кратно локального класса фактически возникло в этой работе. Теория кратно локальных классов представляет самостоятельный интерес и, помимо этого, служит весьма полезным инструментом при изучении многих вопросов теории классов и ее различных приложений (см., например, [72, 73, 107, 181, 182] и монографии [203, 230]).

Являясь предельным случаем, тотально локальные классы обладают рядом специфических свойств. Отметим, в частности, что при любом целом неотрицательном n решетки всех n-кратно насыщенных формаций, n-кратно насыщенных наследственных формаций, n-кратно насыщенных нормально наследственных формаций и т. д. являются модулярными, но все они не дистрибутивны даже в классе всех разрешимых групп $\mathfrak{S}$ (см. [230, глава 2] и [203, глава 4]). Более того, как отмечено в работе [194] (см. также [203, 230]), для любых целых неотрицательных n и m системы всех тождеств решетки всех n-кратно насыщенных и решетки всех m-кратно насыщенных формаций совпадают. Вместе с тем, решетка всех разрешимых тотально насыщенных формаций дистрибутивна [230] и, как показано в дальнейшем в работе [311], это справедливо даже в общем случае.

В то же время мы не обладаем какой-либо существенной информацией о решетке классов Фиттинга. В частности, в настоящее время неизвестно, модулярна ли решетка таких классов хотя бы в классе всех разрешимых групп (см. [115, вопрос 14.47]) и дистрибутивна или хотя бы модулярна ли решетка всех тотально локальных классов Фиттинга. Вместе с тем, справедливы следующие две теоремы, доказательство которых является целью данного параграфа.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Подкласс Фиттинга $\mathfrak{M}$ класса $\mathfrak{F}$ называется *дополняемым в* $\mathfrak{F}$, если для него существует дополнение в решетке всех подклассов Фиттинга класса $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно локальный (тотально локальный) класс Фиттинга. Тогда символом

$L^n(\mathfrak{F})$ ($L^\infty(\mathfrak{F})$) обозначается решетка всех его n-кратно локальных подклассов Фиттинга (решетка всех его тотально локальных подклассов Фиттинга соответственно).

3.3.1 Теорема ([326, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда решетка $L^n(\mathfrak{F})$ стоунова, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

3.3.2 Теорема ([326, теорема 2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда решетка $L^\infty(\mathfrak{F})$ стоунова, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство теоремы 3.3.1

3.3.3 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно локальный класс Фиттинга. Тогда если класс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L^n(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — n-кратно локальный подкласс Фиттинга класса $\mathfrak{F}$. Покажем, что если $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$, то подкласс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L^n(\mathfrak{M})$. Действительно, пусть $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^n(\mathfrak{F})$. Согласно следствиям 3.2.12 и 3.2.18,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee {}^n\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$$

и поэтому по следствию 3.2.8

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) =$$

$$= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee {}^n(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}),$$

где $\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1)$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^n(\mathfrak{M})$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{F}$ — однопорожденный n-кратно локальный класс Фиттинга.

Заметим, что в этом случае, согласно следствию 3.2.27 мы можем использовать индукцию по числу атомов в решетке $L^n(\mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^n(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому по индукции $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Лемма доказана.

Пусть L — решетка с 0. Тогда элемент a^* называется *псевдодополнением* элемента $a(\in L)$, если из $a \wedge a^* = 0$ и $a \wedge x = 0$ следует $x \leqslant a^*$. Решетка с 0 называется *решеткой с псевдодополнениями*, если каждый ее элемент обладает псевдодополнением. Дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, каждый элемент которой удовлетворяет тождеству

$$a^* \vee (a^*)^* = 1$$

называется *стоуновой решеткой.*

Доказательство теоремы 3.3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно локальный класс Фиттинга. Допустим, что $L^n(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка и пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.

Заметим, что для каждого n-кратно локального подкласса Фиттинга $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^n(\mathfrak{F})$, где $\pi = \pi(\mathfrak{M})$. Действительно, для n-кратно локального класса Фиттинга $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ равенство $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ имеет место в том и только в том случае, если $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ и поэтому $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^n(\mathfrak{F})$.

Таким образом, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^n(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{N}_p$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ в решетке $L^n(\mathfrak{F})$. Вместе с тем, по индукции $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee^n (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'})$. Следовательно, для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ класс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L^n(\mathfrak{F})$ и поэтому по лемме 3.3.3 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{M} \in L^n(\mathfrak{F})$, $\pi_1 = \pi(\mathfrak{M})$ и $\pi_2 = \pi(\mathfrak{F}) \setminus \setminus \pi(\mathfrak{M})$. Если $\pi_1 = \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и (1) — дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^n(\mathfrak{F})$. В противном случае $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ — дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^n(\mathfrak{F})$. Поэтому $L^n(\mathfrak{F})$ — булева решетка. Следовательно, $L^n(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.3.2

Следующая лемма очевидна.

3.3.4 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально локальный класс Фиттинга. Тогда если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.*

3.3.5 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга. Тогда решетка $L^\infty(\mathfrak{F})$ имеет лишь конечное число атомов.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$. Покажем, что $\mathfrak{N}_p$ — атом решетки $L^\infty(\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $L^\infty(\mathfrak{F})$. Тогда по лемме 3.3.4 $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$. Но $\mathfrak{M}$ — атом. Поэтому $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$.

Поскольку G — конечная группа, то существует конечное число атомов в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

3.3.6 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально локальный класс Фиттинга. Тогда если класс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — тотально локальный подкласс Фиттинга класса $\mathfrak{F}$. Покажем, что если $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$, то подкласс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L^\infty(\mathfrak{M})$. Действительно, пусть $\mathfrak{H}$ — дополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$. Согласно следствиям 3.2.12 и 3.2.16,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee^\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$$

и поэтому по следствию 3.2.8

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) =$$

$$= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee^\infty (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}),$$

где $\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1)$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — дополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{M})$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{F}$ — однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга.

Заметим, что в этом случае ввиду леммы 3.3.5 мы можем использовать индукцию по числу атомов в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — дополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому по индукции $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \subseteq \mathfrak{N}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.3.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально локальный класс Фиттинга. Допустим, что $L^\infty(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка и пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Заметим, что для каждого тотально локального подкласса Фиттинга $\mathfrak{M}$ класса $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$, где $\pi = \pi(\mathfrak{M})$. Действительно, для тотально локального класса Фиттинга $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ равенство $\mathfrak{M} \cap \cap \mathfrak{H} = (1)$ имеет место в том и только в том случае, если $\pi(\mathfrak{M}) \cap \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ и поэтому $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$.

Таким образом, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{N}_p$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$. Вместе с тем, согласно предположению, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee^\infty (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'})$. Следовательно, для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ класс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$ и поэтому по лемме 3.3.6, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{M} \in L^\infty(\mathfrak{F})$, $\pi_1 = \pi(\mathfrak{M})$ и $\pi_2 = \pi(\mathfrak{F}) \setminus \setminus \pi(\mathfrak{M})$. Если $\pi_1 = \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и (1) — дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$. В противном случае $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ — дополнение элемента

$\mathfrak{M}$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{F})$. Кроме того, решетка $L^\infty(\mathfrak{F})$ дистрибутивна. Следовательно, решетка $L^\infty(\mathfrak{F})$ булева. Поэтому $L^\infty(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка. Теорема доказана.

3.3.7 Следствие. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален и $L^1(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка.*
2. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ — n-кратно локален и $L^n(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка.*
3. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ — тотально локален и $L^\infty(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка.*
4. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

3.4 Дистрибутивные решетки

Элемент $\mathfrak{F}$ полной решетки классов Θ называется *компактным*, если для любого подмножества $\eta \subseteq \Theta$ из неравенства $\mathfrak{F} \leqslant \sup_\Theta \eta$ вытекает существование такого конечного подмножества $\eta_0 \subseteq \eta$, что $\mathfrak{F} \leqslant \sup_\Theta \eta_0$. Полная решетка классов называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов.

В данном параграфе мы доказываем, что решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга является алгебраической и дистрибутивной, в которой любой элемент отличный от (1) и $\mathfrak{S}$ не дополняем. В ходе получения этого результата установлены такие фундаментальные свойства решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга, как индуктивность и $\mathfrak{S}$-отделимость. Помимо этого выявлены новые широкие серии индуктивных решеток формаций и классов Фиттинга. С другой стороны, в качестве одного из следствий мы даем здесь полное доказательство дистрибутивности решетки всех разрешимых тотально насыщенных формаций, другая схема которого обсуждалась в монографии [203].

Индуктивность и отделимость. Пусть Θ — полная решетка формаций. Тогда верхняя грань произвольной совокупности $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ элементов из Θ^l обозначается [203] через $\vee_{\Theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Решетка Θ называется *индуктивной* [203], если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i = LF(f_i) \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^l$ и для всякого такого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ Θ-значных спутников f_i, что f_i — некоторый внутренний спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big),$$

где символ $\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$ обозначает такой спутник f, что $f(p)$ является верхней гранью для $\{f_i(p) \mid i \in I\}$ в Θ, если $\bigcup\limits_{i\in I} f_i(p) \neq$ $\neq \varnothing$, и $f(p) = \varnothing$ в противном случае. Аналогично определяются индуктивные решетки классов Фиттинга.

Заметим, что индуктивность решетки Θ по существу означает, что исследование операции $\vee_{\Theta^l}$ на множестве Θ можно редуцировать к исследованию более простой операции $\vee_\Theta$ на множестве Θ. Первой задачей данного параграфа является изучение индуктивных решеток формаций и классов Фиттинга.

Полная решетка формаций (классов Фиттинга) Θ называется *частичной алгеброй формаций* (*классов Фиттинга*) (см. [203]), если для любого простого числа p и для любой формации (любого класса Фиттинга) $\mathfrak{F} \in \Theta$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \in \Theta$ (соответственно $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \in \Theta$).

Основным результатом этого раздела является

3.4.1 Теорема ([45, теорема]). *Всякая частичная алгебра формаций и всякая частичная алгебра классов Фиттинга, содержащая все классы Локетта, являются индуктивными решетками.*

Прежде чем доказать эту теорему, нам необходимо установить справедливость следующих лемм.

3.4.2 Лемма. *Пусть f_i — минимальная Θ-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$ — минимальная Θ-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Доказательство. Пусть $\pi = \pi\Big(\bigcup\limits_{i\in I} \mathfrak{F}_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I} \pi(\mathfrak{F}_i) = \pi(\mathfrak{F})$, $f =$ $= \vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$ и h — минимальная Θ-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Покажем, что $h = f$.

Пусть $p \in \mathbb{P} \setminus \pi$. Тогда для любого $i \in I$ имеет место $h(p) = \varnothing$ и $f_i(p) = \varnothing$. Значит, $f(p) = \varnothing$.

Пусть $p \in \pi$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $f_i(p) \neq \varnothing$. По лемме 1.3.9 имеет место

$$h(p) = \Theta\mathrm{fit}\Big(F^p(G) \mid G \in \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\Big) = \Theta\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I} \Theta\mathrm{fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)\Big) =$$

$$\Theta\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big) = \big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big)(p) = f(p).$$

Итак, $h = f$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.4.1. Пусть Θ — частичная алгебра классов Фиттинга, содержащая все классы Локетта. И пусть $\{\mathfrak{F}_i = LR(f_i) \mid i \in I\}$ — произвольный набор классов Фиттинга из Θ^l, где f_i — некоторая внутренняя Θ-значная H-функция. Пусть $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, $\mathfrak{M} = LR\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big)$ и h_i — минимальная Θ-значная H-функция класса $\mathfrak{F}_i$.

Тогда по лемме 3.4.2 $h = \vee_\Theta(h_i \mid i \in I)$ — минимальная Θ-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$.

Поскольку $h_i \leqslant f_i$, то для всех $p \in \mathbb{P}$ имеет место включение

$$\Theta\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I} h_i(p)\right) \subseteq \Theta\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\right).$$

Отсюда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем теперь обратное включение. Пусть t_i — такая H-функция класса $\mathfrak{F}_i$, что $t_i(p) = h_i(p)\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Тогда по лемме 3.1.1 t_i^* — H-функция класса $\mathfrak{F}_i$. Заметим, что поскольку Θ — частичная алгебра классов Фиттинга, то H-функции t_i и t_i^* Θ-значны. Покажем, что $f_i \leqslant t_i^*$.

Допустим, что $f_i \nleqslant t_i^*$. Тогда найдется такое простое число p, что $f_i(p) \nsubseteq \big(t_i(p)\big)^*$. Пусть G — группа из $f_i(p) \setminus \big(t_i(p)\big)^*$. Пусть $\Gamma = G \wr Z_p = [K]Z_p$, где Z_p — группа порядка p, K — база регулярного сплетения Γ. Так как $G \notin (t_i(p))^*$, то согласно лемме 3.1.2 $\Gamma_{(t_i(p))^*} = K_1$, где K_1 — база регулярного сплетения $\Gamma_1 = G_{(t_i(p))^*} \wr Z_p$. Ввиду свойств сплетений (см., например, 18.2 d) главы A книги [264])

$$\Gamma/\Gamma_{(t_i(p))^*} = \Gamma/K_1 \cong \big(G/G_{(t_i(p))^*}\big) \wr Z_p.$$

Следовательно, p делит порядок $\Gamma/\Gamma_{(t_i(p))^*}$.

Так как $G \in f_i(p)$, то $K \in f_i(p)$. Поэтому $K \subseteq \Gamma_{f_i(p)}$. Поскольку $\Gamma/K \cong Z_p \in \mathfrak{N}_p$, то

$$\Gamma/K/\Gamma_{f_i(p)}/K \cong \Gamma/\Gamma_{f_i(p)} \in \mathfrak{N}_p.$$

Значит, по лемме 1.3.11

$$\Gamma \in f_i(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}_i = LR(f_i) = LR(t_i^*)$$

и поэтому

$$\Gamma \in \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \left(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})} \big(t_i(p)\big)^*\mathfrak{G}_{p'}\right),$$

т. е. $\Gamma \in \big(t_i(p)\big)^*\mathfrak{G}_{p'}$, где $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\Gamma/\Gamma_{(t_i(p))^*} \in \mathfrak{G}_{p'}$. Противоречие. Итак, $f_i \leqslant t_i^*$. Значит,

$$f = \vee_\Theta(f_i \mid i \in I) \leqslant \vee_\Theta(t_i^* \mid i \in I),$$

т. е. для любого $p \in \mathbb{P}$ имеет место включение

$$f(p) = \vee_\Theta\big(f_i(p) \mid i \in I\big) \subseteq$$

$$\subseteq \vee_\Theta\big((t_i(p))^* \mid i \in I\big) = \vee_\Theta\big((h_i(p))^*\mathfrak{N}_p \mid i \in I\big).$$

Поскольку

$$\big(h_i(p)\big)^*\mathfrak{N}_p \subseteq \big(\vee_\Theta((h_i(p))^* \mid i \in I)\big)\mathfrak{N}_p,$$

то

$$\Theta\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I}\big(h_i(p)\big)^*\mathfrak{N}_p\Big) \subseteq \Theta\mathrm{fit}\Big(\Big(\vee_\Theta\big((h_i(p))^* \mid i \in I\big)\Big)\mathfrak{N}_p\Big) =$$

$$= \Big(\vee_\Theta\big((h_i(p))^* \mid i \in I\big)\Big)\mathfrak{N}_p.$$

Таким образом,

$$f(p) \subseteq \vee_\Theta\Big(\big(h_i(p)\big)^*\mathfrak{N}_p \mid i \in I\Big) \subseteq \Big(\vee_\Theta\big((h_i(p))^* \mid i \in I\big)\Big)\mathfrak{N}_p.$$

Кроме того, понятно, что

$$\big(h_i(p)\big)^* \subseteq \big(\vee_\Theta(h_i(p) \mid i \in I)\big)^*.$$

Значит,

$$\vee_\Theta\Big(\big(h_i(p)\big)^* \mid i \in I\Big) = \Theta\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I}\Big(h_i(p)\Big)^*\Big) \subseteq$$

$$\subseteq \Theta\mathrm{fit}\Big(\Big(\Theta\mathrm{fit}\big(\bigcup_{i\in I} h_i(p)\big)\Big)^*\Big) = \Big(\Theta\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i\in I} h_i(p)\Big)\Big)^*.$$

Поэтому

$$\Big(\vee_\Theta\big((h_i(p))^* \mid i \in I\big)\Big)\mathfrak{N}_p \subseteq \Big(\vee_\Theta\big(h_i(p) \mid i \in I\big)\Big)^*\mathfrak{N}_p$$

для всех $p \in \mathbb{P}$. Но $\mathfrak{F} = LR(t)$, где t — такая Θ-значная H-функция, что

$$t(p) = \big(\vee_\Theta(h_i(p) \mid i \in I)\big)\mathfrak{N}_p$$

для всех $p \in \mathbb{P}$. Тогда по лемме 3.1.1 $\mathfrak{F} = LR(t^*)$. Итак, $f \leqslant t^*$. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Этим самым мы завершили доказательство первого утверждения теоремы.

Пусть теперь Θ — частичная алгебра формаций. И пусть $\{\mathfrak{F}_i = LF(f_i) \mid i \in I\}$ — произвольный набор формаций из Θ^l, где f_i — некоторый внутренний Θ-значный спутник. Пусть $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, $\mathfrak{M} = LF\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big)$ и h_i — минимальный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$.

Тогда по лемме 3.1.3 $h = \vee_\Theta(h_i \mid i \in I)$ — минимальный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Поскольку $h_i \leqslant f_i$, то для всех $p \in \mathbb{P}$ имеет место включение

$$\Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} h_i(p)\Big) \subseteq \Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big).$$

Значит, $h \leqslant f = \vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$. Отсюда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно замечанию 1.2.18 формация $\mathfrak{F}_i$ обладает таким Θ-значным спутником F_i, что

$$F_i(p) = \mathfrak{N}_p h_i(p)$$

для любого $p \in \mathbb{P}$. Покажем, что $f_i \leqslant F_i$. Действительно, если $L \in f_i(p)$, то $L/O_p(L) \in f_i(p)$ и $O_p\,(L/O_p(L)) = 1$. Тогда согласно лемме 1.2.15

$$L/O_p(L) \in h_i(p) = \Theta\mathrm{form}(A \mid A \in f_i(p),\, O_p(A) = 1).$$

Поэтому $L \in \mathfrak{N}_p h_i(p) = F_i(p)$. Следовательно, $f \leqslant \vee_\Theta(F_i \mid i \in I)$, т. е.

$$f(p) = \vee_\Theta\,(f_i(p) \mid i \in I) \subseteq \vee_\Theta\,(F_i(p) \mid i \in I) = \vee_\Theta\,(\mathfrak{N}_p h_i(p) \mid i \in I)$$

для всех $p \in \mathbb{P}$. Ввиду того, что

$$\mathfrak{N}_p h_i(p) \subseteq \mathfrak{N}_p\big(\vee_\Theta(h_i(p) \mid i \in I)\big)$$

и, учитывая следствие 2.1.4, имеем

$$\Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{N}_p h_i(p)\Big) \subseteq \Theta\mathrm{form}\Big(\mathfrak{N}_p\Big(\vee_\Theta\big(h_i(p) \mid i \in I\big)\Big)\Big) =$$

$$= \mathfrak{N}_p\big(\vee_\Theta(h_i(p) \mid i \in I)\big),$$

т. е.

$$f(p) \subseteq \vee_\Theta\big(\mathfrak{N}_p h_i(p) \mid i \in I\big) \subseteq \mathfrak{N}_p\big(\vee_\Theta(h_i(p) \mid i \in I)\big).$$

Но ввиду замечания 1.2.18 $\mathfrak{F} = LF(F)$, где F — такой Θ-значный спутник, что

$$F(p) = \mathfrak{N}_p\Big(\vee_\Theta\big(h_i(p) \mid i \in I\big)\Big)$$

для всех $p \in \mathbb{P}$. Таким образом, $f \leqslant F$, т. е. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Итак, частичная алгебра формаций Θ индуктивна. Теорема доказана.

Теорема 3.4.1, в частности, дает положительный ответ на вопрос 4.1.8 монографии А.Н. Скибы [203].

3.4.3 Следствие (А.Н. Скиба [203, теорема 4.1.1]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций индуктивна.*

3.4.4 Следствие (А.Н. Скиба [203, теорема 4.1.7]). *Решетка разрешимых тотально насыщенных формаций индуктивна.*

3.4.5 Следствие. *Решетка l^n индуктивна.*

3.4.6 Следствие. *Решетка l^∞ индуктивна.*

3.4.7 Следствие ([42, теорема]). *Решетка всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций индуктивна.*

Напомним, что множество всех локальных спутников (H-функций) частично упорядочено отношением $\leqslant$, где $f \leqslant h$ тогда и только тогда, когда $f(p) \subseteq h(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

3.4.8 Следствие. *Пусть Θ — частичная алгебра формаций, $\mathfrak{F} \in \Theta^l$. Тогда частично упорядоченное множество всех внутренних Θ-значных спутников формации $\mathfrak{F}$ является полной решеткой.*

3.4.9 Следствие. *Пусть Θ — такая же частичная алгебра классов Фиттинга, как и в теореме, $\mathfrak{F} \in \Theta^l$. Тогда частично упорядоченное множество всех внутренних Θ-значных H-функций класса $\mathfrak{F}$ является полной решеткой.*

Все рассматриваемые далее в настоящем параграфе группы конечны и разрешимы. Важным понятием в современной теории классов конечных групп является следующая конструкция, введенная в монографии А.Н. Скибы [203]. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полная решетка классов Локетта Θ называется *$\mathfrak{X}$-отделимой*, если для любого терма $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых классов Локетта $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ из Θ и любой группы

$$A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$$

найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что

$$A \in \xi(\Theta \operatorname{fit} A_1, \ldots, \Theta \operatorname{fit} A_m).$$

Здесь $\vee_\Theta$ — оператор объединения в решетке Θ. Свойство отделимости оказалось одним из основных инструментов при изучении решеток классов конечных групп [192], в частности, это понятие сыграло ключевую роль в исследовании тождеств решеток таких классов [44, 76, 230].

В работе [44] было доказано, что решетка разрешимых тотально локальных классов Фиттинга является $\mathfrak{S}$-отделимой, что позволило установить дистрибутивность такой решетки.

Второй целью данного параграфа является доказательство $\mathfrak{S}$-отделимости решетки разрешимых тотально ω-локальных классов Локетта.

Со всяким классом Фиттинга $\mathfrak{F}$ можно сопоставить наименьший (по включению) класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ [264], содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Локетта*, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Символы $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{S}_{p'}$ и $\mathfrak{S}_{\omega d}$ обозначают, соответственно, классы всех разрешимых групп, p-групп, разрешимых p'-групп и класс разрешимых групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой.

Вторым основным результатом данного параграфа является следующая

3.4.10 Теорема ([51, теорема]). *Решетка всех тотально ω-локальных классов Локетта $\mathfrak{S}$-отделима.*

Доказательство. Индукцией по числу r вхождений символов $\{\cap, \vee_\omega^\infty\}$ в терм ξ покажем, что найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, что $A \in \xi(l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_1, \ldots, l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_m)$.

При $r = 0$, очевидно, $A \in l_\omega^\infty \operatorname{fit} A$. Индукцией по нильпотентной длине группы A докажем, что утверждение верно при $r = 1$.

Пусть $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_\omega^\infty \mathfrak{F}_2 = l_\omega^\infty \operatorname{fit}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ и $\pi(A) = \{p_1, \ldots, p_t\}$. При $l(A) = 1$ имеет место $A = P_1 \times \ldots \times P_t$, где P_i — силовские p_i-подгруппы группы $A\,(i = 1, \ldots, t)$. Ясно, что

$$\pi(A) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_1) \cup \pi(\mathfrak{F}_2).$$

Пусть

$$p_1, \ldots, p_j \in \pi(\mathfrak{F}_1), p_{j+1}, \ldots, p_t \in \pi(\mathfrak{F}_2).$$

Тогда

$$A_1 = P_1 \times \ldots \times P_j \in \mathfrak{F}_1, \quad A_2 = P_{j+1} \times \ldots \times P_t \in \mathfrak{F}_2.$$

Понятно, что

$$A = A_1 \times A_2 \in (l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_1) \vee_\omega^\infty (l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_2).$$

Пусть теперь $l(A) > 1$. Допустим, что для разрешимых групп, нильпотентная длина которых меньше нильпотентной длины группы A, доказываемое нами утверждение верно. Ввиду лемм 1.3.9 и 3.4.2 для произвольного $p_i \in \omega \cap \pi(A)$

$$F^{p_i}(A) \in f_1(p_i) \vee_\omega^\infty f_2(p_i) =$$

$$= \big(l_\omega^\infty \operatorname{fit} (F^{p_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1)\big) \vee_\omega^\infty \big(l_\omega^\infty \operatorname{fit} (F^{p_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)\big),$$

где f_j — минимальная ω-локальная l_ω^∞-значная H-функция класса Локетта $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$.

Поскольку $l(F^{p_i}(A)) < l(A)$, то по индукции найдутся такие группы

$$A_{i_1} \in f_1(p_i), A_{i_2} \in f_2(p_i), \text{ что } F^{p_i}(A) \in \big(l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_{i_1}\big) \vee_\omega^\infty \big(l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_{i_2}\big).$$

Пусть $B_{i_1} = A_{i_1} \wr Z_{p_i}$, $B_{i_2} = A_{i_2} \wr Z_{p_i}$, где Z_{p_i} — циклическая группа порядка p_i. Так как $A_{i_1} \in f_1(p_i)$, то согласно лемме 1.3.11, имеет место $B_{i_1} \in f_1(p_i)\mathfrak{N}_{p_i} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Аналогично $B_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$. Отсюда $A_1 = B_{1_1} \times \ldots \times B_{t_1} \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 = B_{1_2} \times \ldots \times B_{t_2} \in \mathfrak{F}_2$.

Покажем, что

$$A \in \mathfrak{F} = \big(l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_1\big) \vee_\omega^\infty \big(l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_2\big).$$

Пусть h — минимальная l_ω^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$, и f — такая l_ω^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$, что $f(p) = h(p)\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \omega$. Пусть $i \in \{1, \ldots, t\}$. Покажем, что $F^{p_i}(A) \in f(p_i)$. Сначала установим, что $A_{i_1}, A_{i_2} \in f(p_i)$. Допустим, что $A_{i_1} \notin f(p_i)$. Тогда поскольку $f(p_i)$ — класс Локетта (см. [68]), то согласно лемме 3.1.2 $(B_{i_1})_{f(p_i)} = K_1$, где K_1 — база регулярного сплетения $(A_{i_1})_{f(p_i)} \wr Z_{p_i}$. Ввиду свойств сплетений (см., например, [264, гл. A, лемма 18.2 d)])

$$B_{i_1}/(B_{i_1})_{f(p_i)} = B_{i_1}/K_1 \cong \big(A_{i_1}/(A_{i_1})_{f(p_i)}\big) \wr Z_{p_i}.$$

Значит, p_i делит порядок $B_{i_1}/(B_{i_1})_{f(p_i)}$.

С другой стороны, так как $B_{i_1} \in \mathfrak{F}$, то, согласно работе [206],

$$B_{i_1} \in \left(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{S}_{p'}\right) \cap \left(\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{S}_{p'}\right) \cap f(\omega)\mathfrak{S}_{\omega d},$$

где $\pi_1 = \omega \cap \mathrm{Supp}(f)$, $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$; и, в частности, $B_{i_1} \in f(p_i)\mathfrak{S}_{p_i'}$. Следовательно, $B_{i_1}/(B_{i_1})_{f(p_i)} \in \mathfrak{S}_{p_i'}$. Противоречие. Значит, $A_{i_1} \in$ $\in f(p_i)$. Аналогично, $A_{i_2} \in f(p_i)$. Поэтому $l_\omega^\infty \operatorname{fit}(A_{i_1}, A_{i_2}) \subseteq f(p_i)$. Очевидно,

$$l_\omega^\infty \operatorname{fit}(A_{i_1},\, A_{i_2}) = (l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_{i_1}) \vee_\omega^\infty (l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_{i_2}).$$

Следовательно, $F^{p_i}(A) \in f(p_i)$.

Покажем, что $A^{\omega d} \in f(\omega')$. Имеем

$$A^{\omega d} \in f_1(\omega') \vee_\omega^\infty f_2(\omega') = \mathfrak{F}_1 \vee_\omega^\infty \mathfrak{F}_2 = f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Итак, $A \in \mathfrak{F}$.

Если же $A \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, то $A \in (l_\omega^\infty \operatorname{fit} A) \cap (l_\omega^\infty \operatorname{fit} A)$. Таким образом, мы завершили доказательство теоремы при $r = 1$.

Пусть терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee_\omega^\infty\}$ и для термов с меньшим числом вхождений теорема верна. Пусть ξ имеет вид

$$\xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) \vartriangle \xi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}),$$

где $\vartriangle \in \{\cap, \vee_\omega^\infty\}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Через $\mathfrak{H}_1$ обозначим класс Фиттинга $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a})$, а через $\mathfrak{H}_2$ — класс Фиттинга $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда, по доказанному выше, найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$, что

$$A \in (l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_1) \vartriangle (l_\omega^\infty \operatorname{fit} A_2).$$

Поскольку число операций в терме ξ_1 меньше r, то по индукции найдутся такие группы $B_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, B_a \in \mathfrak{F}_{i_a}$, что

$$A_1 \in \xi_1(l_\omega^\infty \operatorname{fit} B_1, \ldots, l_\omega^\infty \operatorname{fit} B_a).$$

Аналогично, найдутся такие группы $C_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, C_b \in \mathfrak{F}_{j_b}$, что

$$A_2 \in \xi_2(l_\omega^\infty \operatorname{fit} C_1, \ldots, l_\omega^\infty \operatorname{fit} C_b).$$

Пусть $x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_a} \in \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\}$ и, вместе с тем,

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\} \cap \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \varnothing.$$

Пусть

$$D_{i_k} = \begin{cases} B_k, & \text{если } k < t+1, \\ B_k \times C_q, & \text{если } x_{i_k} = x_{j_q}, \\ & \text{для некоторого } q \in \{1, \ldots, b\} \\ & \text{при всех } k \geqslant t+1. \end{cases}$$

Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_a}\}$. Через $\mathfrak{M}_p$ обозначим класс $l_\omega^\infty \operatorname{fit} D_{i_p}$, где $p = 1, \ldots, a$; через $\mathfrak{X}_c$ — класс $l_\omega^\infty \operatorname{fit} D_{j_c}$, где $c = 1, \ldots, b$.

Итак,

$$A_1 \in \xi_1(l_\omega^\infty \operatorname{fit} B_1, \ldots, l_\omega^\infty \operatorname{fit} B_a) \subseteq$$
$$\subseteq \xi_1(\operatorname{fit} D_{i_1}, \ldots, \operatorname{fit} D_{i_a}) = \xi_1(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_a),$$
$$A_2 \in \xi_2(l_\omega^\infty \operatorname{fit} C_1, \ldots, l_\omega^\infty \operatorname{fit} C_b) \subseteq$$
$$\subseteq \xi_2(\operatorname{fit} D_{j_1}, \ldots, \operatorname{fit} D_{j_b}) = \xi_2(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_b).$$

Значит, найдутся такие классы Фиттинга $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_m$, что

$$\xi_1(\mathfrak{R}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{R}_{i_a}) \triangle \xi_2(\mathfrak{R}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{R}_{j_b}) = \xi(\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_m),$$

где $\mathfrak{R}_i = l_\omega^\infty \operatorname{fit} K_i$, где $K_i \in \mathfrak{F}_i$. Теорема доказана.

3.4.11 Следствие ([44, лемма 6]). *Решетка всех тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{S}$-отделима.*

Теорема о дистрибутивности. Третьей целью данного параграфа является доказательство дистрибутивности решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга. Тем самым найдено положительное решение проблемы 21, поставленной А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в работе [206].

3.4.12 Теорема ([44, теорема]). *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга алгебраична, дистрибутивна и каждый ее элемент отличный от* (1) *и* $\mathfrak{S}$ *не дополняем в ней.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

3.4.13 Лемма. *Пусть $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ — терм сигнатуры $\{\cap, \vee^\infty\}$, f_i — внутренняя l^∞-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда*

$$\xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m) = LR\big(\xi(f_1, \ldots, f_m)\big).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee^\infty\}$ в терм ξ. Пусть

$$\xi(x_1, \ldots, x_m) = \xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) \triangle \xi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}),$$

где $\triangle \in \{\cap, \vee^\infty\}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Допустим, что для термов ξ_1 и ξ_2 лемма верна. Тогда

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = LR\big(\xi_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})\big),$$

$$\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = LR\big(\xi_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\big).$$

Понятно, что $\xi_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})$ и $\xi_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})$ — внутренние l^∞-значные H-функции классов Фиттинга $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a})$ и $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b})$ соответственно. Значит, по индукции

$$\xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m) = \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) \triangle \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) =$$

$$= LR\big(\xi_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a}) \triangle \xi_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\big) = LR\big(\xi(f_1, \ldots, f_m)\big).$$

Лемма доказана.

3.4.14 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = l^\infty \mathrm{fit} G$, где группа G разрешима. Тогда $\mathfrak{F}$ является компактным элементом в решетке l^∞.*

Доказательство. Индукцией по нильпотентной длине группы G покажем, что $\mathfrak{F}$ является компактным элементом в l^∞. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} = \vee^\infty(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, где $\mathfrak{F}_i$ — тотально локальный класс Фиттинга.

Если $l(G) = 1$, то $G = P_1 \times \ldots \times P_k$, где P_i — силовская p_i-подгруппа группы G. Значит, найдутся такие индексы $j_1, \ldots, j_k \in I$, что $p_i \in \pi(\mathfrak{F}_{j_i})$, т. е. $P_i \in \mathfrak{F}_{j_i}$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_{j_1} \vee^\infty \ldots \vee^\infty \mathfrak{F}_{j_k}$. Следовательно,

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1} \vee^\infty \ldots \vee^\infty \mathfrak{F}_{j_k}.$$

Пусть $l(G) > 1$ и все тотально локальные классы Фиттинга вида $l^\infty \mathrm{fit} A$, где A — разрешимая группа и $l(A) < l(G)$, являются компактными элементами в решетке l^∞. Пусть f_i — минимальная

l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}_i$, f — минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$ и m — минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{M}$. Тогда по лемме 1.3.9 $f(p) = l^\infty\mathrm{fit}\big(F^p(G)\big)$ при всех $p \in \in \pi(G)$ и $f(p) = \varnothing$ при всех $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(G)$. Кроме того, по лемме 1.3.9 получаем $f \leqslant m$. Согласно лемме 3.4.2 $m = \vee^\infty(f_i \mid i \in I)$. Поскольку $l\big(F^p(G)\big) < l(G)$, то по индукции для каждого $p \in \pi(G)$ найдутся такие индексы $i_1, \ldots, i_t \in I$, что

$$F^p(G) \in f_{i_1}(p) \vee^\infty \ldots \vee^\infty f_{i_t}(p).$$

Поскольку $|\pi(G)| < \infty$, то из последнего вытекает, что найдутся такие индексы $j_1, \ldots, j_k \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_{j_1} \vee^\infty \ldots \vee^\infty \mathfrak{F}_{j_k}$. Таким образом,

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1} \vee^\infty \ldots \vee^\infty \mathfrak{F}_{j_k}.$$

Значит, $\mathfrak{F}$ — компактный элемент в решетке l^∞. Лемма доказана.

3.4.15 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально локальный класс Фиттинга. Тогда при любом натуральном $k \geqslant 2$ решетки $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^{k-1})$ и $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^k)$ порождают одно и то же многообразие решеток.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое тождество

$$\xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) = \xi(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}) \tag{3.1}$$

сигнатуры $\{\cap, \vee^\infty\}$.

Если тождество (3.1) выполняется в решетке $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^k)$, то оно выполняется и в любой подрешетке решетки $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^k)$. Поэтому тождество (3.1) справедливо в решетке $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^{k-1})$.

Пусть теперь тождество (3.1) справедливо в решетке $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^{k-1})$ и пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}$ — произвольные классы Фиттинга из $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^k)$. Пусть f_{i_c} — минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}_{i_c}$, $c = 1, \ldots, a$; и пусть f_{j_d} — минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}_{j_d}$, $d = 1, \ldots, b$. По лемме 3.4.13

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = LR\big(\xi_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})\big),$$

$$\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = LR\big(\xi_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\big).$$

Заметим, что для любого $p \in \mathbb{P}$ классы

$$f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p), f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)$$

принадлежат решетке $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^{k-1})$. Следовательно,

$$\xi_1\big(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a}\big)(p) = \xi_1\big(f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p)\big) =$$

$$= \xi_2\big(f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)\big) = \xi_2\big(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b}\big)(p).$$

Поэтому $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Таким образом, тождество (3.1) справедливо в решетке $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^k)$. Лемма доказана.

3.4.16 Лемма. *Пусть η — такая подрешетка решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга, которая со всяким своим классом Фиттинга $\mathfrak{F}$ содержит и все его однопорожденные тотально локальные подклассы Фиттинга. Тогда тождество $\xi_1 = \xi_2$ сигнатуры $\{\cap, \vee^\infty\}$ истинно в η, если оно выполняется для всех однопорожденных тотально локальных классов Фиттинга из η.*

Доказательство. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}$ — переменные, входящие в терм ξ_1; $x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}$ — переменные, входящие в терм ξ_2 и

$$\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b} \in \eta.$$

Покажем, что

$$\mathfrak{F} = \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) \subseteq \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \mathfrak{M}.$$

Пусть $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\}$, но $\{x_{j_{t+1}}, \ldots, x_{j_b}\} \cap \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} = \varnothing$. Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда по теореме 3.4.10 найдутся такие группы $A_{i_1}, \ldots, A_{i_a}$, что $A_{i_k} \in \mathfrak{F}_{i_k}$ для всех $k \in \{1, \ldots, a\}$ и

$$A \in \mathfrak{S} \cap \xi_1(l^\infty \mathrm{fit} A_{i_1}, \ldots, l^\infty \mathrm{fit} A_{i_a}).$$

Пусть $\mathfrak{H}_{i_k} = l^\infty \mathrm{fit} A_{i_k}$ и

$$\mathfrak{H}_{j_k} = \begin{cases} \mathfrak{H}_{i_c}, & \text{где } x_{j_k} = x_{i_c} \text{ для некоторого } c \in \{1, \ldots, a\} \\ & \text{при всех } k \in \{1, \ldots, t\}; \\ l^\infty \mathrm{fit} B_{j_k} & \text{для некоторой группы } B_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k} \text{ при } k > t. \end{cases}$$

По условию

$$\xi_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{j_b}) \subseteq \mathfrak{M}.$$

Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Итак, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Аналогично доказывается обратное включение. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.4.12. Покажем сначала, что решетка $L^\infty(\mathfrak{S})$ алгебраична. Очевидно, любой тотально локальный класс Фиттинга есть объединение всех своих однопорожденных тотально локальных подклассов Фиттинга в решетке l^∞. Пусть $\mathfrak{F} = l^\infty\mathrm{fit}G$, где группа G разрешима. По лемме 3.4.14 $\mathfrak{F}$ — компактный элемент в решетке l^∞. Значит, $\mathfrak{F}$ будет компактным элементом и в подрешетке $L^\infty(\mathfrak{S})$ решетки l^∞. Следовательно, решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга алгебраична и ее компактными элементами являются однопорожденные тотально локальные классы Фиттинга.

Докажем теперь, что решетка $L^\infty(\mathfrak{S})$ дистрибутивна. Но прежде индукцией по r покажем дистрибутивность решетки $L^\infty(\mathfrak{N}^r)$. Решетка $L^\infty(\mathfrak{N})$, очевидно, дистрибутивна. Пусть $r > 1$ и решетка $L^\infty(\mathfrak{N}^{r-1})$ дистрибутивна. Тогда по лемме 3.4.15 решетка $L^\infty(\mathfrak{N}^r)$ также дистрибутивна.

Пусть теперь $\mathfrak{F} = l^\infty\mathrm{fit}G$, где $l(G) = r$. Тогда $G \in \mathfrak{N}^r$ и поэтому $L^\infty(l^\infty\mathrm{fit}G) \subseteq L^\infty(\mathfrak{N}^r)$. Следовательно, решетка $L^\infty(l^\infty\mathrm{fit}G)$ дистрибутивна. Значит, ввиду леммы 3.4.16 решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга дистрибутивна.

Докажем теперь, что каждый разрешимый тотально локальный класс Фиттинга, отличный от (1) и $\mathfrak{S}$, не дополняем в решетке $L^\infty(\mathfrak{S})$. Пусть $\mathfrak{M} \neq (1)$ и $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{S}$ — разрешимый тотально локальный класс Фиттинга и пусть $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{S})$. Тогда

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{M} \vee^\infty \mathfrak{H} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Покажем, что $\mathfrak{M} \vee^\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{H}$. Рассмотрим класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$, то $\mathcal{K}(\mathfrak{M}) \cap \mathcal{K}(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Следовательно, по лемме 3.1.4 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$. Покажем, что класс $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$ тотально локален. Пусть m и h — минимальные l^∞-значные H-функции классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Пусть f — такая H-функция, что

$$f(p) = \begin{cases} m(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{M}), \\ h(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{H}), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus (\pi(\mathfrak{M}) \cup \pi(\mathfrak{H})). \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = LR(f)$. Пусть G — группа минимального порядка из $LR(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая группа и ее комонолит $M = G_\mathfrak{F}$. Поскольку $G \in LR(f)$, то $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \pi(G)$, то по построению H-функции f либо $f(p) = m(p) \neq \varnothing$, либо $f(p) = h(p) \neq \varnothing$. Значит,

$$\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{M}) \cup \pi(\mathfrak{H}).$$

Пусть $p \in \pi(G/M)$. Тогда $p \in \pi(\mathfrak{M}) \cup \pi(\mathfrak{H})$. Пусть теперь $p \in \pi(\mathfrak{M})$. Следовательно, G/M — p-группа и

$$F^p(G) = O^p(G) \in f(p) = m(p).$$

Значит, по лемме 1.3.11 $G \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие.
Таким образом, $LR(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LR(f)$. Тогда G — комонолитическая группа. Поэтому либо $G \in \mathfrak{M}$, либо $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{M} = LR(m)$. Значит,

$$F^p(G) \in m(p) = f(p)$$

для всех $p \in \pi(G)$. Следовательно, $G \in LR(f)$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq LR(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LR(f)$ — тотально локальный класс Фиттинга. Но $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит,

$$\mathfrak{M} \vee {}^{\infty}\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{H}.$$

Следовательно, для любой комонолитической группы $G \in \mathfrak{S}$ имеет место одно из двух $G \in \mathfrak{M}$ или $G \in \mathfrak{H}$.

Пусть Z_p и Z_q — некоторые группы порядков p и q, соответственно, где $p \in \pi(\mathfrak{M})$, $q \in \pi(\mathfrak{H})$. Пусть $r \in \mathbb{P} \setminus \{p, q\}$. Тогда ввиду леммы 3.1.5 группа $A = Z_p \times Z_q$ обладает простым точным модулем P над полем из r элементов $\mathbb{F}_r$. Пусть $B = [P]A$. Тогда $B \in \mathfrak{S}$ и, вместе с тем, $B \notin \mathfrak{M}$, поскольку $q \notin \pi(\mathfrak{M})$ и $B \notin \mathfrak{H}$, поскольку $p \notin \pi(\mathfrak{H})$. Но группа B комонолитична и, значит, либо $B \in \mathfrak{M}$, либо $B \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Итак, каждый ненулевой и неединичный элемент решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга не дополняем в ней. Теорема доказана.

Согласно следствию 2 теоремы 1 монографии [80, гл. II, § 6, с. 151] из доказанной теоремы вытекает

3.4.17 Следствие. *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга является решеткой с псевдодополнениями.*

Напомним, что представление элемента a в виде $x_0 \vee \ldots \vee x_{n-1}$ называется *сократимым* [80], если

$$a = x_0 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_{n-1}$$

для некоторого $0 \leqslant i < n$; в противном случае оно называется *несократимым.*

Тотально локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *l^∞-неприводимым* [206], если класс $\mathfrak{F}$ нельзя представить в виде $\mathfrak{F} = \vee^\infty(\mathfrak{F}_i \mid i \in \in I)$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех собственных тотально локальных подклассов Фиттинга из $\mathfrak{F}$.

3.4.18 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = l^\infty \mathrm{fit} G$ — разрешимый однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным представлением в виде несократимого объединения*

$$\mathfrak{F}_1 \vee^\infty \ldots \vee^\infty \mathfrak{F}_t$$

некоторых своих тотально локальных l^∞-неприводимых подклассов Фиттинга $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_t$.

Доказательство. Ввиду следствия 13 теоремы 9 монографии [80, гл. II, § 1] для доказательства данного следствия достаточно лишь установить, что решетка $L^\infty(\mathfrak{F})$ всех тотально локальных подклассов Фиттинга произвольного разрешимого однопорожденного тотально локального класса Фиттинга $\mathfrak{F} = l^\infty \mathrm{fit} G$ конечна. Проведем индукцию по нильпотентной длине группы G.

Если $l(G) = 1$, то каждый неединичный тотально локальный подкласс Фиттинга из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{N}_\pi$, где $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество тотально локальных подклассов Фиттинга.

Пусть $l(G) > 1$ и для всех тотально локальных классов Фиттинга вида $l^\infty \mathrm{fit} A$, где $l(A) < l(G)$, решетка $L^\infty(l^\infty \mathrm{fit} A)$ конечна. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный тотально локальный подкласс Фиттинга из $\mathfrak{F}$ и пусть m и f — минимальные l^∞-значные H-функции классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Тогда из леммы 1.3.9 вытекает, что $m \leqslant f$. Кроме того, ввиду этой же леммы, при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место равенство

$$f(p) = l^\infty \mathrm{fit}\big(\mathfrak{F}(F^p)\big).$$

Поскольку $l\big(F^p(G)\big) < l(G)$, то по индукции решетка $L^\infty\big(f(p)\big)$ конечна. Так как при этом конечно и множество $\pi(\mathfrak{F})$, то в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество тотально локальных подклассов Фиттинга. Следствие доказано.

Для любых двух тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ решетка всех тотально локальных классов Фиттинга, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, обозначается (см. [203]) символом $\mathfrak{H}/^\infty\mathfrak{M}$. Так как всякая дистрибутивная решетка является модулярной, то из доказанной теоремы вытекает

3.4.19 Следствие. *Для любых двух разрешимых тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ справедлив решеточный изоморфизм:*

$$\mathfrak{M} \vee^{\infty} \mathfrak{H}/^{\infty}\mathfrak{M} \cong \mathfrak{H}/^{\infty}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}.$$

3.4.20 Следствие (А.Н. Скиба [203, теорема 4.2.12]). *Решетка всех разрешимых тотально насыщенных формаций дистрибутивна.*

Доказательство. Покажем, что каждый разрешимый тотально локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ наследственен. Не теряя общности, мы можем предполагать, что $\mathfrak{F} = l^{\infty}\mathrm{fit}G$ для некоторой разрешимой группы G. Если G — нильпотентная группа, то утверждение очевидно. Пусть нильпотентная длина t группы G больше 1. Тогда если f — минимальная l^{∞}-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$, то поскольку $l\big(F^p(G)\big) < t$, то, ввиду соображений индукции, для любого $p \in \in \pi(G)$ класс Фиттинга $f(p) = l^{\infty}\mathrm{fit}\big(F^p(G)\big)$ наследственен. Значит, класс $\mathfrak{F}$ наследственен и поэтому, ввиду результатов работы [256], класс $\mathfrak{F}$ является тотально насыщенной формацией. Следовательно, каждый разрешимый тотально локальный класс Фиттинга является тотально насыщенной формацией.

Рассуждая аналогичным образом, легко убедиться, что каждая разрешимая тотально насыщенная формация является наследственным классом Фиттинга. Но по лемме 3.1.6 каждый разрешимый наследственный класс Фиттинга является тотально локальным классом Фиттинга. Значит, каждая разрешимая тотально насыщенная формация является тотально локальным классом Фиттинга.

Таким образом, решетки $L^{\infty}(\mathfrak{S})$ и $L_{\infty}(\mathfrak{S})$ совпадают. Поэтому, ввиду доказанной теоремы, решетка всех разрешимых тотально насыщенных формаций дистрибутивна. Следствие доказано.

3.5 Решетки нормальных классов Фиттинга со свойством полноты

При описании структуры классов Фиттинга конечных разрешимых групп и их классификации основополагающим результатом является теорема Блессеноля–Гашюца [254]: пересечение любого множества нееединичных нормальных классов Фиттинга снова является неединичным нормальным классом Фиттинга. Непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *нормальным*, если для любой группы G ее $\mathfrak{F}$-

радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является максимальной из подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$ (см. [264]).

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *нормальным в классе* конечных групп $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{X}$-*нормальным* [295], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $G_{\mathfrak{F}}$ — максимальная из подгрупп группы G принадлежащих $\mathfrak{F}$, для всех групп $G \in \mathfrak{X}$. В случае, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп), $\mathfrak{S}$-нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется просто нормальным.

В настоящем параграфе мы развиваем и расширяем вышеуказанный результат Блессеноля–Гашюца в двух направлениях.

С одной стороны, доказывается аналог теоремы Блессеноля–Гашюца для $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга, где $\mathfrak{X}$ — класс Фишера (в частности, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$).

С другой стороны, условие разрешимости для групп из класса $\mathfrak{X}$ заменяется условием частичной разрешимости.

Некоторые обозначения и леммы. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-*инъектором* группы G, если $V \cap N$ является максимальной подгруппой группы N среди подгрупп, входящих в $\mathfrak{F}$ для любой субнормальной подгруппы N группы G. Известная теорема Гашюца–Фишера–Хартли [267] о том, что каждая группа $G \in \mathfrak{S}$ обладает единственным классом сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов, является синтезом знаменитых теорем Силова и Холла.

Отметим, что $\mathfrak{F}\mathfrak{S}$ — это класс всех таких групп G, у которых фактор-группа по $\mathfrak{F}$-радикалу группы G разрешима.

Следующая лемма является обобщением теоремы Гашюца–Фишера–Хартли.

3.5.1 Лемма (В.Г. Сементовский [180]). *Если $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}$, то*

1) *G обладает единственным классом сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов;*

2) *если V — $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и $V \subseteq H \subseteq G$, то V также является $\mathfrak{F}$-инъектором группы H.*

Будем использовать определение $\mathfrak{X}$-нормального класса Фиттинга, эквивалентное вышеприведенному определению Лауэ [295].

3.5.2 Определение. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — такие классы Фиттинга, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют $\mathfrak{X}$-*нормальным *или* нормальным в классе $\mathfrak{X}$ *и обозначают $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-инъектор является нормальной подгруппой группы G.*

Следующий пример демонстрирует процедуру построения широкого семейства $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга.

3.5.3 Пример. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп. Тогда для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-инъектор $V = G_{\mathfrak{F}}$.

Действительно, так как группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ нильпотентна, то $V/G_{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{F}}$. Поэтому V субнормальна в G и $V = G_{\mathfrak{F}}$.

Нам понадобится следующий результат Дж. Титса.

3.5.4 Лемма ([264, гл. A, лемма 1.2]). *Пусть U, V и W — подгруппы группы G. Тогда следующие условия равносильны:*
1) $U \cap VW = (U \cap V)(U \cap W)$;
2) $U \cap UW = U(V \cap W)$.

Основной результат. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера*, если из того, что $G \in \mathfrak{F}$, $K \triangleleft G$, $K \subseteq H \subseteq G$ и H/K — p-группа (p — простое число), следует $H \in \mathfrak{F}$.

3.5.5 Теорема ([324, теорема 2.1]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фишера и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга. Тогда если $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{X}$-нормальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Будем использовать индукцию по порядку групп из $\mathfrak{X}$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{X}$, для которой теорема неверна. Так как по условию группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ разрешима, то согласно лемме 3.5.1 в группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы. Пусть V — такой $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, который не нормален в G. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in I$, то $G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}_i}$ и, ввиду изоморфизма

$$(G/G_{\mathfrak{F}})/(G_{\mathfrak{F}_i}/G_{\mathfrak{F}}) \cong G/G_{\mathfrak{F}_i},$$

группа $G/G_{\mathfrak{F}_i}$ разрешима.

Следовательно, согласно лемме 3.5.1 в группе G существует $\mathfrak{F}_i$-инъектор V_i. По условию $V_i \triangleleft G$ для всех $i \in I$. Поэтому $\bigcap\limits_{i \in I} V_i \triangleleft G$. Кроме того, $\bigcap\limits_{i \in I} V_i \in \mathfrak{F}$. Значит, $\bigcap\limits_{i \in I} V_i \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

С другой стороны, для каждого $i \in I$ справедливо включение

$$G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}_i} = V_i.$$

Следовательно, $G_{\mathfrak{F}} = \bigcap\limits_{i \in I} V_i$ и $\bigcap\limits_{i \in I} V_i \subset V$.

Пусть M — произвольная максимальная нормальная подгруппа группы G. Так как V — $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, то подгруппа $V \cap M$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы M. Тогда из того, что $M \in \mathfrak{X}$, по индукции следует, что $V \cap M \triangleleft M$. Отсюда получаем, что

$$V \cap M = M_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap M.$$

Следовательно, для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G справедливо равенство

$$V \cap M = \Big(\bigcap_{i \in I} V_i\Big) \cap M. \tag{3.2}$$

Заметим, что V не содержится ни в какой субнормальной подгруппе N группы G.

Действительно, если $V \subseteq N \triangleleft\triangleleft G$, то в N существует $\mathfrak{F}$-инъектор и по лемме 3.5.1 подгруппа V является $\mathfrak{F}$-инъектором N. Но тогда по индукции $V \triangleleft N$. Поэтому $V \triangleleft\triangleleft G$ и $V = G_{\mathfrak{F}}$. Последнее противоречит тому, что V не является нормальной подгруппой группы G.

Покажем, что $RV = G$ для любой нормальной подгруппы R группы G такой, что G/R — нильпотентная группа. Пусть $RV \neq G$. Тогда подгруппа RV/R субнормальна в G/R. Значит, RV субнормальна в G. Следовательно, V содержится в подгруппе $H = RV$ и $H \triangleleft\triangleleft G$, что невозможно.

Докажем теперь, что группа G комонолитична. Предположим, что это не так. Пусть M_1 и M_2 — максимальные нормальные подгруппы группы G. Без ограничения общности мы можем считать, что $M_1 \supseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $M_2 \not\supseteq G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $G = M_2 G_{\mathfrak{F}}$. Кроме того, $M_1 \supseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}$. Следовательно, G/M_1 нильпотентна. Но тогда, ввиду доказанного выше, $G = VM_1$. Следовательно, ввиду изоморфизмов

$$G/M_1 \cong V/(V \cap M_1) \text{ и } G/M_2 \cong V/(V \cap M_2),$$

подгруппы $V \cap M_1$ и $V \cap M_2$ являются максимальными нормальными подгруппами группы V.

Предположим, что $V \cap M_1 \neq V \cap M_2$. Тогда $V = (V \cap M_1)(V \cap M_2)$. Следовательно, ввиду (3.2)

$$V = \bigg(\Big(\bigcap_{i \in I} V_i\Big) \cap M_1\bigg)\bigg(\Big(\bigcap_{i \in I} V_i\Big) \cap M_2\bigg),$$

и $V \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Значит, $V = G_{\mathfrak{F}}$. Последнее противоречит тому, что подгруппа V не нормальна в G. Итак, $V \cap M_1 = V \cap M_2$. Но тогда

$$G/M_1 \cong V/V \cap M_1 = V/V \cap M_2 \cong G/M_2$$

и $G/M_2 \in \mathfrak{N}$. Таким образом, мы показали, что группа $G/(M_1 \cap \cap M_2)$ нильпотентна. Следовательно, ввиду доказанного выше, $G = = V(M_1 \cap M_2)$. С другой стороны, $G = VM_1 \cap VM_2$. Следовательно,

$$V(M_1 \cap M_2) = VM_1 \cap VM_2.$$

По лемме 3.5.4 справедливо равенство

$$V = (V \cap M_1)(V \cap M_2) = V \cap M_1.$$

Следовательно, $V \subseteq M_1$, что противоречит тому, что V не содержится ни в какой субнормальной подгруппе группы G. Итак, $M_1 = = M_2 = M$ и группа G комонолитична. Отсюда вытекает, что для каждого $i \in I$ подгруппа $V_i \subseteq M$. Следовательно, ввиду равенства (3.2)

$$V \cap M = \bigcap_{i \in I} V_i. \tag{3.3}$$

Но тогда, учитывая изоморфизм

$$G/M \cong V/\left(\bigcap_{i \in I} V_i\right),$$

заключаем, что $V/\left(\bigcap_{i \in I} V_i\right)$ — циклическая группа простого порядка p.

Покажем теперь, что $V_iV \neq G$ для некоторого $i \in I$. Предположим, что для любого $i \in I$ имеет место равенство $V_iV = G$. Если для всех $j \in I$ справедливо $V_j = G$, то $G \in \mathfrak{F}$ и G является $\mathfrak{F}$-инъектором для самой себя. Значит, $G = V \lhd G$ и получаем противоречие с тем, что подгруппа V не нормальна в G. Следовательно, $V_j \neq G$ для некоторого $j \in I$. Так как по условию $V_j \lhd G$, то

$$G/V_j \cong V/V \cap V_j.$$

Но ввиду равенства (3.3)

$$V \cap V_j \subseteq V \cap M = \bigcap_{i \in I} V_i \subseteq V_j \cap V.$$

Тогда $V_j \cap V = \bigcap_{i \in I} V_i$. Следовательно, из того, что $V/\left(\bigcap_{i \in I} V_i\right) \cong G/V_j$, заключаем, что G/V_j — циклическая группа простого порядка p. Следовательно, V_j — максимальная нормальная подгруппа группы G. Значит, $V_j = M$.

Нетрудно заметить, что $V_j \in \mathfrak{F} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Действительно, если для $i \neq j$ $(i \in I)$ имеет место $V_i \neq G$, то как и ранее мы заключаем, что $V_i = M = V_j$ и $V_j \in \mathfrak{F}_i$. Если же $V_i = G$, то $V_j \lhd V_i \in \mathfrak{F}_i$ и $V_j \in \mathfrak{F}_i$. Следовательно, $V_j \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \neq j$. Поэтому $V_j \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $V_j \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$. Но тогда ввиду предположения $V_jV = G$ мы получаем, что $V = G$ и $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что V не нормальна в G.

Итак, существует $i \in I$ такое, что $V_iV \neq G$. Чтобы применить индукцию для группы V_iV, покажем, что $V_iV \in \mathfrak{X}$. Действительно, так как группа $\overline{V} = V/\Bigl(\bigcap\limits_{i \in I} V_i\Bigr)$ простая, то ее нормальная подгруппа $(V \cap V_i)/\Bigl(\bigcap\limits_{i \in I} V_i\Bigr)$ либо совпадает с $\overline{V}$, либо является единичной группой. В первом случае мы имеем $V = V \cap V_i \subseteq V_i$. Последнее противоречит тому, что V не содержится ни в какой субнормальной подгруппе группы G. Итак, остается признать, что $V \cap V_i = \bigcap\limits_{i \in I} V_i$. Но тогда, ввиду изоморфизма

$$V_iV/V_i \cong V/V \cap V_i,$$

заключаем, что V_iV/V_i — p-группа.

Следовательно, из того, что $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — класс Фишера, вытекает $V_iV \in \mathfrak{X}$. Теперь имеем $|V_iV| < |G|$ и по лемме 3.5.1 V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы V_iV. Следовательно, по индукции $V \lhd V_iV$. Отсюда, ввиду того, что $V \in \mathfrak{F}_i$, следует $V \subseteq (V_iV)_{\mathfrak{F}_i}$. Но по лемме 3.5.1 подгруппа V_i является $\mathfrak{F}_i$-инъектором группы V_iV. Следовательно, $(V_iV)_{\mathfrak{F}_i} = V_i$. Таким образом, $V \subseteq V_i$. Последнее противоречит тому, что V не содержится ни в какой из субнормальных подгрупп группы G. Полученное противоречие завершает доказательство того, что $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга. Теорема доказана.

Заметим, что согласно [254, теорема 5.1] каждый неединичный $\mathfrak{S}$-нормальный класс Фиттинга содержит класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$. Поэтому в случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ из теоремы вытекает результат Блессеноля–Гашюца.

3.5.6 Следствие ([254, теорема 6.2]). *Во множестве всех неединичных нормальных классов Фиттинга существует единственный минимальный по включению элемент.*

3.6 Классы Фиттинга с заданными свойствами решеточных объединений

В данном параграфе все рассматриваемые группы конечны и π-разрешимы. В работе Кусака [261] в универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп введена операция „$\vee$" решеточного объединения классов Фиттинга, а также определены условия модулярности решетки таких классов. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, то

$$\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} \ = \ \mathrm{fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}),$$

где $\mathrm{fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$ — наименьший класс Фиттинга, содержащий классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

В настоящем параграфе мы используем операцию „$\vee$" для определения нового достаточно широкого семейства классов Фиттинга, которое, в частности, содержит все локальные классы Фиттинга. Более того, для таких классов нами подтверждена гипотеза Локетта о том, что каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется как пересечение классов $\mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{X}$. При этом $\mathfrak{F}^*$ — наименьший класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что $\mathfrak{F}^*$-радикал прямого произведения любых групп G и H равен прямому произведению $\mathfrak{F}^*$-радикалов этих групп и $\mathfrak{X}$ — некоторый нормальный класс Фиттинга. В работе [257] Брайсом и Косси доказано, что каждый разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в том и только в том случае, если справедливо равенство: $\mathfrak{F}_* \ = \ \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{F}_*$ — пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* \ = \ \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_*$ — наименьший нормальный класс Фиттинга.

Дерком и Хоуксом [264, гл. X, предложение 6.1] (см. также [257]) была предложена следующая общая версия гипотезы Локетта, которая известна как

Обобщенная гипотеза Локетта. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет гипотезе Локетта в* $\mathfrak{H}$, если справедливо равенство: $\mathfrak{F}_* \ = \ \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_*$.

Субнормальным вложением подгруппы S в группу G называется такой мономорфизм $\alpha : \ S \to G$, что $\alpha(S) \trianglelefteq \trianglelefteq G$. Символом $\mathrm{Snemb}(S \to G)$ обозначают множество всех субнормальных вложений S в G. Если G — некоторая группа, то подгруппа $N(G)$ определяется следующим образом (см. [268]):

$$N(G) \ = \ \langle x^{-1}x^{\alpha} \ \mid \ x \in \ S \trianglelefteq \trianglelefteq G \ \text{ и } \ \alpha \in \mathrm{Snemb}(S \to G) \rangle.$$

Для доказательства основного результата мы используем известные свойства подгруппы $N(G)$, которые приведем в виде двух лемм.

3.6.1 Лемма ([268, замечание 3.1; лемма 3.2]). *Если G — группа и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то справедливы следующие утверждения:*
1) *$N(G)$ — характеристическая подгруппа группы G;*
2) *$G' \leqslant [G, \mathrm{Aut}(G)] \leqslant N(G)$;*
3) *$N(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}_*}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$.*

3.6.2 Лемма ([268, предложение 4.1]). *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{X}$ — классы Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*
1) *$\mathfrak{F}_* \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$;*
2) *$N(G) \cap G_{\mathfrak{H}} \leqslant G_{\mathfrak{X}}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$.*

Символом $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ обозначают множество всех холловых π-подгрупп группы G. Взаимосвязь подгруппы $N(G)$ и холловой π-подгруппы группы G устанавливает

3.6.3 Лемма ([66, лемма 3]). *Пусть G — группа, $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, $H \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда $H \cap N(G) \subseteq N(HG_{\mathfrak{F}})$.*

Доказательство. Пусть

$$H_0 = \langle x^{-1}x^{\alpha} \mid x \in S \trianglelefteq \trianglelefteq G, \alpha \in \mathrm{Snemb}(S \to G) \quad \text{и} \quad x, x^{\alpha} \in H\rangle.$$

Докажем сначала, что $H \cap N(G) = H_0$. Согласно определению подгруппы $N(G)$, каждый элемент, порождающий $N(G)$, имеет вид $g^{-1}g^{\alpha}$, где $g \in S \trianglelefteq \trianglelefteq G$ и $\alpha \in \mathrm{Snemb}(S \to G)$. Пусть $g = xy$, где x, $y \in \langle g\rangle \leqslant S$ таковы, что x является π-элементом и y является π'-элементом. Поскольку $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, то в группе G найдутся такие элементы a и b, что $x^a \in H$ и $(x^{\alpha})^b \in H$. Легко видеть, что

$$g^{-1}g^{\alpha}O^{\pi}(G)G' = x^{-1}x^{\alpha}O^{\pi}(G)G' = (x^a)^{-1}(x^{\alpha})^bO^{\pi}(G)G'.$$

Заметим, что $S^a \trianglelefteq \trianglelefteq G$, $(S^{\alpha})^b \trianglelefteq \trianglelefteq G$ и существует изоморфизм S^a на $(S^{\alpha})^b$, переводящий элемент x^{α} в $(x^{\alpha})^b$. Значит, $(x^a)^{-1}(x^{\alpha})^b \in H_0$ и поэтому $g^{-1}g^{\alpha} \in H_0O^{\pi}(G)G'$. Так как подгруппа $N(G)$ порождается элементами $g^{-1}g^{\alpha}$, то $N(G) \leqslant H_0O^{\pi}(G)G'$. Следовательно, $H \cap N(G) \leqslant H_0(H \cap O^{\pi}(G)G')$. Поскольку $O^{\pi}(G)G'/G'$ — π'-группа, то $H \cap O^{\pi}(G)G' = H \cap G'$. Согласно [12, 21.3(2)] $H \cap G' \subseteq H_0$. Значит, $H \cap N(G) \leqslant H_0$. С другой стороны, очевидно, $H_0 \leqslant H \cap$ $\cap N(G)$. Поэтому $H \cap N(G) = H_0$. Последнее означает, что группа $H \cap N(G)$ порождается элементами вида $x^{-1}x^{\alpha}$, где $x \in S \trianglelefteq \trianglelefteq G$,

$\alpha \in \mathrm{Snemb}(S \to G)$ и x, $x^\alpha \in H$. Заметим, что подгруппа $\langle x\rangle S_{\mathfrak{F}} = \langle x\rangle(S \cap G_{\mathfrak{F}}) = S \cap \langle x\rangle G_{\mathfrak{F}}$ субнормальна в $HG_{\mathfrak{F}}$. Аналогично, подгруппа $(\langle x\rangle S_{\mathfrak{F}})^\alpha = \langle x^\alpha\rangle S_{\mathfrak{F}}^\alpha$ субнормальна в $HG_{\mathfrak{F}}$. Поэтому $x^{-1}x^\alpha \in N(HG_{\mathfrak{F}})$ и $H \cap N(G) \leqslant N(HG_{\mathfrak{F}})$. Лемма доказана.

Согласно [261], определим множество групп $\mathfrak{T}$:

3.6.4 Определение. Пусть $\mathfrak{T}$ — непустое множество групп такое, что выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{T}$ и N — характеристическая подгруппа группы G, то $N \in \mathfrak{T}$;

2) если $H,\ K \in \mathfrak{T}$, то существует $M \in \mathfrak{T}$ такая, что $H,\ K \trianglelefteq M = HK$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. При помощи множества $\mathfrak{T}$ построим множество групп:

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} = \{G \mid \text{существует такая группа } K \in \mathfrak{T},\ \text{что}$$

$$(G \times K)_{\mathfrak{F}} \text{ входит подпрямо в } G \times K\}.$$

Для любых двух классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ через $L(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ обозначают решетку классов Фиттинга, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Некоторые важные свойства класса $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$ описывает

3.6.5 Предложение ([66, предложение 1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$ *— класс Фиттинга;*

2) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} = \mathfrak{F} \vee \mathrm{fit}(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{F}^*) \in L(\mathfrak{F}_*, \mathfrak{F}^*)$.

Доказательство. Предположим, что $G \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$ и $N \trianglelefteq G$. Так как $G \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$, то по определению существует группа $K \in \mathfrak{T}$ такая, что $(G \times K)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $G \times K$. Пусть

$$L = \{k \in K \mid \text{существует такое } n \in N,\ \text{что } (n,k) \in (G \times K)_{\mathfrak{F}}\}.$$

Если k_1, $k_2 \in L$, то существуют такие n_1, $n_2 \in N$, что

$$(n_1, k_1),\ (n_2, k_2) \in (G \times K)_{\mathfrak{F}}.$$

Следовательно, $(n_1 n_2^{-1}, k_1 k_2^{-1}) \in (G \times K)_{\mathfrak{F}}$ и $k_1 k_2^{-1} \in L$. Значит, L — подгруппа группы K. Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$. Обозначим через α' элемент $(1, \alpha)$ из $\mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(K)$. Заметим, что $\alpha' \in \mathrm{Aut}(G \times K)$.

Если $n \in N$, $k \in K$ и $(n,k) \in (G \times K)_{\mathfrak{F}}$, то $(n,k)^{\alpha} = (n,k)^{\alpha'} \in \in ((G \times K)_{\mathfrak{F}})^{\alpha'}$. Так как $(G \times K)_{\mathfrak{F}}$ — характеристическая подгруппа группы $G \times K$, то $((G \times K)_{\mathfrak{F}})^{\alpha'} = G \times K$. Следовательно, если $k \in \in L$, то $k^{\alpha} \in L$ и L — характеристическая подгруппа группы K. Ввиду построения множества $\mathfrak{T}$ получаем, что $L \in \mathfrak{T}$. Так как $(G \times \times K)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $G \times K$, то для каждого $n \in N$ существует такое $k \in K$, что $(n,k) \in (G \times K)_{\mathfrak{F}}$. Кроме того, для каждого $k \in \in L$ существует некоторое $n \in N$, что $(n,k) \in (G \times K)_{\mathfrak{F}}$. Учитывая построение подгруппы L получаем

$$(N \times L)_{\mathfrak{F}} = (N \times L) \cap (G \times K)_{\mathfrak{F}}.$$

Последнее означает, что $(N \times L)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $N \times L$ и $N \in \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$.

Пусть теперь $G = N_1N_2$, где N_1, $N_2 \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$ и N_1, $N_2 \trianglelefteq G$. По определению множества $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$ существуют такие группы H, $K \in \mathfrak{T}$, что $(N_1 \times H)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $N_1 \times H$ и $(N_2 \times K)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $N_2 \times K$. Кроме того, из определения $\mathfrak{T}$ следует, что существует группа $M \in \mathfrak{T}$ такая, что H, $K \trianglelefteq M = HK$. Каждый элемент $g \in \in G$ можно представить в виде $g = n_1n_2$, где $n_1 \in N_1$ и $n_2 \in N_2$. Поскольку $(N_1 \times H)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $N_1 \times H$ и $(N_2 \times K)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $N_2 \times K$, то существуют некоторые $h \in H$ и $k \in K$ такие, что $(n_1,h) \in (N_1 \times H)_{\mathfrak{F}}$ и $(n_2,k) \in (N_2 \times K)_{\mathfrak{F}}$. Заметим, что если $m \in M$, то $m = hk$ и $(g,m) = (n_1n_2, hk) = (n_1,h)(n_2,k)$. Ввиду того, что $G = N_1N_2$ и $M = HK$ получаем, что $(n_1,h)(n_2,k) \in (G \times M)_{\mathfrak{F}}$. Значит, для каждого $m \in M$ существует $g \in G$ такое, что $(g,m) \in \in (G \times M)_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $(G \times M)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $G \times M$ и $G \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$. Таким образом, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$ — класс Фиттинга.

Предположим теперь, что $K \in \mathfrak{T}$ и для некоторой группы G радикал $(G \times K)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $G \times K$. По построению класса $\mathfrak{F}^*$ следует, что $(G \times K)_{\mathfrak{F}^*}$ входит подпрямо в $G \times K$. Следовательно, G, $K \in \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Учитывая, что $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{F}^*$ содержатся в $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$, получаем

$$\mathfrak{F} \vee \mathrm{fit}(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{F}^*) \subseteq \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} \subseteq \mathfrak{F}^*.$$

Значит, ввиду леммы 3.1.8

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} \subseteq \mathrm{Locksec}(\mathfrak{F}).$$

Итак,

$$G \cong (G \times 1) \trianglelefteq (G \times K)_{\mathfrak{F}}(K \times 1).$$

Так как $(G \times K) \in \mathfrak{F}$ и $(K \times 1) \cong K \in \mathfrak{T} \cap \mathfrak{F}^*$, то $(G \times K)_{\mathfrak{F}}(K \times 1) \in \in \mathfrak{F} \vee \mathrm{fit}(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{F}^*)$ и $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} = \mathfrak{F} \vee \mathrm{fit}(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{F}^*)$. Предложение доказано.

3.6.6 Следствие ([237]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *— классы Фиттинга. Тогда*

$$\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{F}^* \cap \ \mathfrak{H}) \ = \ \{G \ \mid \ \text{существует такая группа } K \ \in \mathfrak{H}, \text{ что}$$

$$(G \ \times \ K)_{\mathfrak{F}} \text{ входит подпрямо в } G \ \times \ K\}$$

и $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{F}^* \cap \ \mathfrak{H}) \ = \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} \in L(\mathfrak{F}_*, \mathfrak{F}^*)$. *В частности,* $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, то $\mathrm{fit}(\mathfrak{F}^* \cap \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}$. Ввиду предложения 3.6.5 получаем $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} = \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{F}^* \cap \cap \mathfrak{H}) \in L(\mathfrak{F}_*, \mathfrak{F}^*)$. Следствие доказано.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Тогда

$$\mathrm{s}_n\mathfrak{X} \ = \ (G \mid \ G \trianglelefteq \trianglelefteq H \text{ для некоторой группы } H \ \in \mathfrak{X}).$$

3.6.7 Предложение ([66, предложение 2]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *— такие классы Фиттинга, что*

$$\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} \ = \ \mathrm{s}_n\{G \mid G \ = \ G_{\mathfrak{F}}G_{\mathfrak{H}}\}.$$

Тогда если $\mathfrak{X}$ *— класс Фиттинга, причем* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, *то*

$$\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}) \ = \ (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X}.$$

Доказательство. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то

$$\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}) \subseteq (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X}.$$

Пусть теперь $K \in (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X}$. Согласно условию, существует группа $G = G_{\mathfrak{F}}G_{\mathfrak{H}}$ и изоморфизм α такой, что $K \cong \alpha(K) \trianglelefteq \trianglelefteq G$. Тогда $K \trianglelefteq \trianglelefteq G_{\mathfrak{X}} = G \cap G_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{F}}G_{\mathfrak{H}} \cap G_{\mathfrak{X}}$. Согласно тождеству Дедекинда (см., например, [264, гл. A, лемма 1.2]),

$$G_{\mathfrak{F}}(G_{\mathfrak{H}} \cap G_{\mathfrak{X}}) = G_{\mathfrak{F}}G_{\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}}.$$

Следовательно, $K \trianglelefteq \trianglelefteq G_{\mathfrak{F}}G_{\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}}$, $K \in \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X})$. Поэтому

$$(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}).$$

Значит, $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}) = (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X}$. Предложение доказано.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга с условием Локетта в классе Фиттинга* $\mathfrak{X}$ [136], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}_* \ = \ \mathfrak{F} \ \cap \ \mathfrak{X}_*$. Очевидно, что если $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, то $\mathfrak{F}$ является классом с условием Локетта в $\mathfrak{X}$ в точности тогда, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{S}$ — класс всех конечных разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ является классом с условием Локетта в $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда для $\mathfrak{F}$ справедлива гипотеза Локетта.

Пусть π — непустое множество простых чисел и I — такое непустое множество, что выполняются следующие условия:

1) $\pi = \bigcup\limits_{i \in I} \pi(i)$;

2) $\pi(i) \neq \varnothing$ для всех $i \in I$;

3) $\pi(i) \cap \pi(j) = \varnothing$ для $i \neq j$ и $i, j \in I$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. *Характеристику класса* $\mathfrak{X}$ определяют следующим образом:

$$\mathrm{Char}(\mathfrak{X}) = \{p \mid p \in \mathbb{P} \text{ и } Z_p \in \mathfrak{X}\}.$$

Посредством операции „$\vee$" определим следующее семейство классов Фиттинга.

3.6.8 Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $\pi = \mathrm{Char}(\mathfrak{X})$. Тогда:

1) *класс* $\mathfrak{X}$ *удовлетворяет условию* (α_i) для $i \in I$, если существует класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ такой, что $(\mathfrak{X}_* \mathfrak{G}_{\pi'(i)} \cap \mathfrak{X}) \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{G}_{\pi(i)} = \mathfrak{X}$.

2) *класс* $\mathfrak{X}$ *удовлетворяет условию* (α), если $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию (α_i) для всех $i \in I$.

Заметим, что уже в случае $I = \mathbb{P}$ и $\pi(p) = \{p\}$ обширность семейства таких классов подтверждает следующая

3.6.9 Теорема ([66, теорема 1]). *Каждый* ω*-локальный класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *такой, что* $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ *удовлетворяет условию* (α).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Фиттинга. Согласно теореме 1.3.2 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает наибольшей приведенной функцией Хартли F такой, что

$$F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$$

для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$. Заметим, что ввиду леммы 3.1.8

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p.$$

Следовательно, для всех $G \in \mathfrak{F}$ заключаем, что $|G : G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{p'}}|$ — p-число, а $|G : G_{F(p)\mathfrak{S}_p}|$ — p'-число. Значит,

$$(\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{S}_p = \mathfrak{F}$$

и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (α). Теорема доказана.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 3.6.9 получаем

3.6.10 Следствие. *Каждый локальный класс Фиттинга удовлетворяет условию* (α).

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга характеристики π и в дальнейшем класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ таков, что каждая группа из $\mathfrak{H}$ имеет нильпотентную холлову π-подгруппу. Семейство классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ с условием Локетта в классе $\mathfrak{H}$ описывает

3.6.11 Теорема ([66, теорема 2]). *Каждый класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$, *удовлетворяющий условию* (α) *и содержащийся в классе Фиттинга* $\mathfrak{H}$, *является классом Фиттинга с условием Локетта в классе* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть $\pi = \pi(i)$ для $i \in I$. Покажем вначале, что из равенства

$$(\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}) \vee \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{F}$$

для некоторого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ следует включение

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'}.$$

Для этого установим справедливость включения

$$\mathfrak{H}_* \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \subseteq (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'}.$$

С учетом леммы 3.6.2 достаточно показать, что

$$N(G) \cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi} \in (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'}$$

для всех групп $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{H}$ и G_π — холлова π-подгруппа группы G. Для класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi$ справедливо включение

$$\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}.$$

Заметим также, что $G_\pi G_\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi$ и $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi} \in \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$. По лемме 3.6.3

$$G_\pi \cap N(G) \cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi} \subseteq N(G_\pi G_\mathfrak{X}) \cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi}.$$

Значит, по лемме 3.6.1

$$N(G_\pi G_\mathfrak{X}) \cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi} \subseteq (G_\pi G_\mathfrak{X} \cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi})_{(\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*}.$$

Поэтому
$$G_\pi \cap N(G) \cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi} \subseteq G_{(\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*}.$$
Следовательно,
$$G_\pi \cap N(G) \cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi} \subseteq (N(G) \cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi})_{(\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*}.$$
Отсюда
$$N(G) \cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi} \in (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'}$$
для всех групп $G \in \mathfrak{H}$.

Покажем теперь, что из включения
$$\mathfrak{H}_* \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \subseteq (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'}$$
следует равенство
$$\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} = (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi.$$
Действительно, так как
$$\mathfrak{H}_* \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \subseteq (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'},$$
то
$$\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'}.$$
Но тогда справедливо включение
$$\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \subseteq (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi.$$
Значит,
$$\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \subseteq (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi.$$
С другой стороны, по лемме 3.1.8 справедливо включение $(\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_* \subseteq$ $\subseteq \mathfrak{H}_*$. Отсюда $(\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'}$. Значит,
$$(\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi.$$
Таким образом,
$$\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi = (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi.$$
Заметим, что с учетом лемм 3.1.8 и 3.1.7
$$(\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F})^* = \mathfrak{F}^*.$$
Применяя лемму 3.1.8 получаем
$$((\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi) \subseteq (\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}) \subseteq (\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{H}).$$

Так как $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \subseteq (\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F})^*$ и $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}) \subseteq (\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{H})$, то согласно предложению 3.6.5 и предложению 3.6.7 следует

$$\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap ((\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}) \vee \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi) = (\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}) \vee (\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi).$$

Учитывая, что

$$\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi = (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi$$

и

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F},$$

получаем

$$\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}.$$

Значит,

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'}.$$

Покажем, наконец, что если $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'}$, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = \mathfrak{F}_*$ для всех $\pi \subseteq \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 3.1.8 справедливо включение $\mathfrak{F}_* \subseteq$ $\subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$. Пусть $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$ и G — группа минимального порядка из класса $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*) \setminus \mathfrak{F}_*$. Тогда группа G обладает единственной максимальной нормальной подгруппой $M = G_{\mathfrak{F}_*}$. Так как $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$, то $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Ввиду того, что $G \in \mathfrak{F}$, по лемме 3.1.8 $G/M \in \mathfrak{A}$. Так как M — максимальная нормальная подгруппа группы G, то G/M — композиционный фактор группы G порядка p. Следовательно, $G/M \in \mathfrak{N}_p$ и $G/M \cong Z_p$. Таким образом, $p \mid |G|$ и $G \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по лемме 3.1.9 $Z_p \in \mathfrak{F}$, и поэтому $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$. Отсюда следует, что существует такое $j \in I$, что $p \in \pi(j) \subseteq \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$. Значит, $G/M \in \mathfrak{S}_{\pi(j)}$.

С другой стороны, по условию для всех таких $i \in I$, что $\pi(i) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$, справедливо включение

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'(i)}.$$

Значит, $G/M \in \mathfrak{S}_{\pi'(j)}$. Следовательно, $G/M \in \mathfrak{S}_{\pi(j)} \cap \mathfrak{S}_{\pi'(j)} = (1)$. Поэтому $G = M \in \mathfrak{F}_*$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = \mathfrak{F}_*$. Теорема доказана.

Классом Локетта называют такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} =$ $= \mathfrak{F}^*$.

3.6.12 Следствие. *Каждый класс Локетта $\mathfrak{F}$ с условием (α) в классе Фиттинга $\mathfrak{H}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.*

Приведем также два следствия из теоремы 3.6.11 в универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп.

3.6.13 Следствие. *Каждый ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ такой, что* $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, *содержащийся в классе Фиттинга $\mathfrak{H}$, удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.*

3.6.14 Следствие ([68, теорема]). *Каждый локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта.*

3.7 Решеточная структура класса Фиттинга и гипотеза Локетта

Множества всех классов Фиттинга и формаций являются полными решетками по включению „$\subseteq$".

Применение решеточных методов в теории формаций групп впервые осуществлено в работе А.Н. Скибы [192], в которой было доказано, что решетка всех (локальных) формаций модулярна. Вместе с тем, мы не обладаем достаточной информацией о решетках классов Фиттинга. Так, например, относительно решетки всех (хотя бы разрешимых) классов Фиттинга в настоящее время неизвестно, является ли она модулярной и поэтому ряд исследований был связан с поиском модулярных решеток классов Фиттинга (см. [114, проблема 14.47]). Лаушем в работе [296] была доказана модулярность решетки всех разрешимых нормальных классов Фиттинга. Позднее этот результат был расширен Брайсом и Косси [257], которые доказали модулярность и атомарность решетки классов Фиттинга из секции Локетта.

Напомним, что *секцией Локетта* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, обозначаемой $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ [299], называют совокупность всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{H}$, для которых $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H}^*$, где класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$.

Следуя [264], для пары классов Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ определим отображение

$$\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}^* \qquad (3.4)$$

из $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{H})$ в $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$. Для $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных разрешимых и класс всех конечных групп соответственно, отображение (3.4) является сюръективным (см. [264, гл. X, предложение 6.1]); другими словами, секция Локетта $\mathfrak{S}$ определяется секцией Локетта $\mathfrak{G}$. В работе [299] Локетт поставил проблему: верно ли, что отображение (3.4) сюръективно всегда, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$. Впоследствии эта проблема стала известна как „гипотеза Локетта" [299].

Примечателен тот факт, что первоначально были построены сюръективные отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной следующими отдельными случаями локального класса Фиттинга: наследственного (Брайс, Косси; 1975, [257]), классов вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$ (Бейдлеман, Хаук; 1979, [250]), классов с постоянной H-функцией, т. е. классов вида $\mathfrak{X}\Big(\bigcap\limits_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi'_i}\Big)$ (Дерк, Хоукс; 1992, [264, гл. X, предложение 6.10]). Для произвольных локальных классов Фиттинга указанное отображение было построено в 1988 году Н.Т. Воробьевым [68].

В связи с этим актуальна задача отыскания нелокальных классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, т. е. таких нелокальных классов Фиттинга, в решетку секции Локетта которых сюръективно отображается решетка всех нормальных классов Фиттинга. В данном параграфе такая задача решена для p-локальных классов Фиттинга.

Вместе с тем, Бергер и Косси [251] построили пример нелокального класса Фиттинга, который не удовлетворяет гипотезе Локетта (см., например, [264, гл. X, теорема 6.16]). Кроме примера Бергера–Косси [251] до настоящего времени не известен ни один из классов Фиттинга, для которого гипотеза Локетта была бы неверна. Заметим также, что Бейдлеманом и Хауком [250] поставлена проблема отыскания других примеров классов Фиттинга, не удовлетворяющих гипотезе Локетта: существуют ли другие несюръективные отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классами Фиттинга?

В данном параграфе найдены новые примеры несюръективных отображений решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классами Фиттинга.

Напомним, что оригинальный вопрос Локетта был расширен Дерком и Хоуксом [264, гл. X, предложение 6.1] следующим образом:

Обобщенная гипотеза Локетта ([264, гл. X,предложение 6.1]). Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$, если отображение (3.4) из $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{H})$ в $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ сюръективно.

В этом случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ мы будем называть $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}$-*классом.*

Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, то $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}$-класс назовем просто *$\mathcal{L}$-классом.* Если же класс $\mathfrak{F}$ не является $\mathcal{L}$-классом, то мы будем называть его *$\overline{\mathcal{L}}$-классом.*

Ввиду результата Брайса и Косси [257], необходимым и достаточным условием для справедливости обобщенной гипотезы Локетта является выполнимость следующего равенства

$$\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_* \tag{3.5}$$

(см., например, [264, гл. X, предложение 6.1]), где класс $\mathfrak{F}_*$ — пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$.

В 1996 году Галледжи [268] было построено сюръективное отображение решетки Locksec($\mathfrak{G}$) в решетку секции Локетта, порожденной произвольными локальными классами Фиттинга.

Нами доказано, что отображение решетки Locksec($\mathfrak{X}$) произвольного класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в решетку Locksec($\mathfrak{F}$) ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где Char($\mathfrak{F}$) $\subseteq \omega$, сюръективно и тем самым подтверждена обобщенная гипотеза Локетта для ω-локальных классов Фиттинга заданной характеристики.

В работе [29] профессором В.А. Ведерниковым предложен следующий подход к определению ω-локального класса Фиттинга. Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \backslash \omega$ и пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}. \tag{3.6}$$

Функции f сопоставляют класс групп

$$LR_\omega\langle f\rangle = (G \mid O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p)$$

$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G)),$$

где $O^\omega(G) = G^{\mathfrak{G}_\omega}$, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'}}$ и $\mathfrak{G}_\omega$ — класс всех ω-групп.

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\omega\langle f\rangle$ для некоторой функции f вида (3.6), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-локальным классом Фиттинга с ω-локальной H-функцией f* [206].

Если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где f — ω-локальная H-функция, то согласно результатам А.Н. Скибы [206] и В.А. Ведерникова [29] справедлива формула:

$$\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{G}_{p'}\right) \cap \left(\bigcap_{p \in \pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}\right) \cap f(\omega')\mathfrak{G}_\omega, \tag{3.7}$$

где $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$, $\pi_1 = \omega \cap \mathrm{Supp}(f)$ и $\mathrm{Supp}(f) = \{a \in \omega \cup \{\omega'\} \mid f(a) \neq = \varnothing\}$.

Заметим, что в случае, когда $\omega = \{p\}$, класс Фиттинга называется *p-локальным.*

Напомним, если $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп и p — некоторое простое число, то

$$\mathfrak{X}(F^p) = \begin{cases} \mathrm{fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & p \in \pi(\mathfrak{X}); \\ \varnothing, & p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

3.7.1 Лемма. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — классы Фиттинга, то*

$$(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*.$$

Доказательство. Докажем включение

$$(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_* \subseteq (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*.$$

Так как по лемме 3.1.8 2) $\mathfrak{X}_* \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F}$, то

$$\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{X} \text{ и } \mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F}.$$

Из этого следует, что $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$. Следовательно, ввиду леммы 3.1.8 1) имеем

$$(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_* \subseteq (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*.$$

Докажем обратное включение. Очевидно, что

$$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \text{ и } \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Следовательно, ввиду леммы 3.1.8 1)

$$(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_* \subseteq \mathfrak{X}_* \text{ и } (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_* \subseteq \mathfrak{F}_*.$$

Поэтому $(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_* \subseteq \mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*$. Следовательно, получаем

$$((\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*)_* \subseteq (\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_*.$$

Ввиду леммы 3.1.8 2) получаем $((\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*)_* = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*$.

Итак, $(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*$. Лемма доказана.

В дальнейшем в данном параграфе все рассматриваемые группы конечны и разрешимы.

3.7.2 Лемма. *Пусть классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ таковы, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}$, сюръективно, а $\mathfrak{Y}$ — насыщенная радикальная формация. Тогда если отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y}$, сюръективно, то и отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y}$, сюръективно.*

Доказательство. Ввиду [264, гл. X, определение 1.19; гл. X, предложение 6.1] сюръективность отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})$ равносильна тому, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, т. е. справедливо равенство

$$(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* = (\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})^* \cap \mathfrak{S}_*.$$

Так как $\mathfrak{Y}$ — насыщенный радикальный гомоморф, то по лемме 3.1.7 имеем

$$(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})^* = (\mathfrak{X}^*)^*\mathfrak{Y}.$$

Ввиду леммы 3.1.8 2) $(\mathfrak{X}^*)^* = \mathfrak{X}^*$. Следовательно,

$$(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* = \mathfrak{X}^*\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_*. \tag{3.8}$$

По лемме 3.1.8 2) $(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* = ((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_*)_*$ и поэтому

$$((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_*)_* = ((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* \cap \mathfrak{S}_*)_*.$$

Докажем, что $\mathfrak{S}_* = (\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_*$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_* \subseteq \mathfrak{S}_*\mathfrak{Y}$. Значит, по лемме 3.1.8 1)

$$(\mathfrak{S}_*)_* = \mathfrak{S}_* \subseteq (\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_*.$$

С другой стороны, так как $\mathfrak{Y}$ — разрешимый класс Фиттинга и $\mathfrak{S}_* \subseteq \mathfrak{S}$ ввиду леммы 3.1.8 2), то

$$\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}.$$

Следовательно, по лемме 3.1.8 1)

$$(\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_* \subseteq \mathfrak{S}_*.$$

Поэтому

$$((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_*)_* = ((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* \cap \mathfrak{S}_*)_* = ((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* \cap (\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_*)_*.$$

По лемме 3.7.1

$$((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* \cap (\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_*)_* = (\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_*.$$

Ввиду того, что $\mathfrak{Y}$ — радикальная формация, получаем

$$\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{Y} = (\mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{Y}.$$

Итак,

$$(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* = ((\mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{Y})_*. \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что

$$((\mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{Y})_* = \mathfrak{X}^*\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_*.$$

Ввиду того, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}$, сюръективно, имеем

$$\mathfrak{X}_* = \mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_*.$$

Из этого следует, что

$$(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})_* = ((\mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{Y})_*.$$

Поэтому

$$(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})_* = \mathfrak{X}^*\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_*.$$

Рассмотрим класс Фиттинга $(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})^*$. Так как $\mathfrak{Y}$ — насыщенный радикальный гомоморф, то по лемме 3.1.7

$$(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})^* = (\mathfrak{X}_*)^*\mathfrak{Y}.$$

Ввиду леммы 3.1.8 2) $(\mathfrak{X}_*)^* = \mathfrak{X}^*$. Следовательно,

$$(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})^* = \mathfrak{X}^*\mathfrak{Y}.$$

Итак, получаем

$$(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})_* = (\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})^* \cap \mathfrak{S}_*.$$

Это означает, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y}$, сюръективно. Лемма доказана.

***p*-локальные $\mathcal{L}$-классы.** В следующей теореме доказана сюръективность отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной p-локальными классами Фиттинга, что подтверждает существование p-локальных $\mathcal{L}$-классов, которые не являются классами Локетта.

3.7.3 Теорема ([101, теорема 1]). *Пусть* $\mathfrak{Y} = (\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p$. *Тогда* $\mathfrak{Y}$ *— p-локальный класс Фиттинга, который не является классом Локетта, и отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку* $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{Y})$ *сюръективно.*

Доказательство. Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ — p-локален. Действительно, ясно, что $\mathfrak{Y}(F^p) \subseteq (\mathfrak{S}_{p'})_*$ и, следовательно,

$$\mathfrak{Y}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p = \mathfrak{Y}.$$

Ввиду теоремы 1.3.2 последнее означает, что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ является p-локальным.

Для того чтобы доказать сюръективность отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{Y})$, достаточно доказать, ввиду [264, гл. X, определение 1.19; гл. X, предложение 6.1], что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ является $\mathcal{L}$-классом.

Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ является $\mathcal{L}$-классом. Так как отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p)$ сюръективно, а $\mathfrak{S}_{p'}$ — класс Локетта, то и отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}((\mathfrak{S}_{p'})^*\mathfrak{N}_p)$ сюръективно. Следовательно, по лемме 3.7.2, ввиду того, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{S}_{p'})$ сюръективно и $\mathfrak{N}_p$ — насыщенная радикальная формация, получаем, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{Y})$ сюръективно.

Покажем, что класс $\mathfrak{Y}$ не является классом Локетта. Предположим от противного, что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ является классом Локетта, т. е.

$$((\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p)^* = (\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p.$$

Ввиду того, что $\mathfrak{N}_p$ — насыщенный радикальный гомоморф, имеем

$$((\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p)^* = ((\mathfrak{S}_{p'})_*)^*\mathfrak{N}_p = (\mathfrak{S}_{p'})^*\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p.$$

Получаем, что

$$\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p = (\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p.$$

Так как $\mathfrak{S}_{p'}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, то

$$(\mathfrak{S}_{p'})_* = \mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_*.$$

Следовательно,

$$(\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p.$$

Ввиду того, что $\mathfrak{N}_p$ — насыщенная радикальная формация, получаем

$$(\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p.$$

Значит,

$$\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p.$$

Поэтому $\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p$.

Очевидно, что $\mathfrak{S}_{p'} \subseteq \mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p$. Из этого следует, что справедливо включение

$$\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{S}_{p'} \subseteq \mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{S}_{p'}.$$

Ясно, что

$$\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{S}_{p'},$$

а

$$\mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{S}_*(\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{S}_*.$$

Следовательно, $\mathfrak{S}_{p'} \subseteq \mathfrak{S}_*$. Ввиду леммы 3.1.12 получаем противоречие.

Итак, класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ не является классом Локетта. Теорема доказана.

$\overline{\mathcal{L}}$-классы. Заметим, что в общем случае отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной частично локальными классами Фиттинга, не является сюръективным. Для построения такого отображения мы будем использовать класс Бергера–Косси $\mathfrak{B}$ [251]. Напомним основные этапы его построения.

Пусть R — экстраспециальная группа порядка 27 и экспоненты 3 и W — точный неприводимый R-модуль над полем $GF(7)$ размерности 3. И пусть $Y = WR$. Обозначим через A группу автоморфизмов группы R. Пусть $B = C_A(Z(R))$, Q — подгруппа кватернионов группы B и $X = Z(Q)Y$.

Согласно [251], определим класс $\mathfrak{M}$ следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \big(G \mid O_2(G/O_{\{2,3\}}(G)) \in \mathrm{S}_n\mathrm{D}_0(X)\big),$$

где $\mathrm{D}_0(X)$ — класс всех конечных прямых произведений изоморфных копий группы X. В работе [251] установлено,что класс $\mathfrak{B} = \mathfrak{M} \cap \cap \mathfrak{S}_7\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_2$ является классом Локетта. Кроме того, отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ не сюръективно (см., например, [264, гл. X, предложение 6.1]).

3.7.4 Теорема ([101, теорема 2]). *Существует такое простое p, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной p-локальным классом Фиттинга $\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p$, не является сюръективным.*

Доказательство. Предположим, что для каждого простого p отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку

$\mathrm{Locksec}(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)$ сюръективно. Ввиду [264, гл. X, предложение 6.1], это равносильно тому, что выполняется равенство

$$(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_* = (\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)^* \cap \mathfrak{S}_*$$

для каждого простого p. Так как $\mathfrak{N}_p$ — насыщенный радикальный гомоморф, то по леммам 3.1.7 и 3.1.8

$$\bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_* = \bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\mathfrak{B}^*\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*).$$

Но

$$\bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\mathfrak{B}^*\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*) = \bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\mathfrak{B}^*\mathfrak{N}_p) \cap \mathfrak{S}_* = \mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{S}_*.$$

Докажем теперь, что

$$\bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_* = \mathfrak{B}_*.$$

Ввиду утверждения 2 леммы 3.1.8

$$(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_* \subseteq \mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p$$

для каждого $p \in \mathbb{P}$. Следовательно,

$$\bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_* \subseteq \bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p) = \mathfrak{B}_*.$$

С другой стороны, $\mathfrak{B}_* \subseteq \mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p$ для каждого $p \in \mathbb{P}$. Но по лемме 3.1.8 1)

$$(\mathfrak{B}_*)_* = \mathfrak{B}_* \subseteq (\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_*$$

для каждого $p \in \mathbb{P}$. Следовательно,

$$\mathfrak{B}_* \subseteq \bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_*.$$

Значит,

$$\mathfrak{B}_* = \bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_*.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{B}_* = \mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{S}_*.$$

А это противоречит тому, что класс Фиттинга $\mathfrak{B}$ является $\overline{\mathcal{L}}$-классом. Итак, существует такое простое p, что класс $\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p$ является

$\overline{\mathcal{L}}$-классом. Ввиду [264, гл. X, определение 1.19] это означает, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)$ не сюръективно. Теорема доказана.

ω-локальные $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}$-классы. Следующая теорема определяет достаточное условие для того, чтобы отображение решетки секции Локетта, порожденной произвольными классами Фиттинга, в решетку секции Локетта, порожденной ω-локальными классами Фиттинга, было сюръективно. Этот результат мы докажем в классе всех конечных групп.

3.7.5 Теорема ([101, теорема 3]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторый класс Фиттинга. Если $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то отображение решетки $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{X})$ в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ сюръективно.*

Доказательство. Ввиду [264, гл. X, определение 1.19; гл. X, предложение 6.1], для того, чтобы доказать сюръективность отображения решетки $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{X})$ в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$, достаточно доказать, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.

Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}}$-классом. Необходимым и достаточным условием для этого, ввиду результата Брайса–Косси [257], является справедливость равенства (3.5) :

$$\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}_*.$$

Так как $\mathfrak{F}$ ω-локален, то по теореме 1.3.2 имеем $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$, и, значит, для каждого $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$.

Ввиду ω-локальности класс $\mathfrak{F}$ определяется с помощью ω-локальной H-функции f следующим образом:

$$\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{G}_{p'}\right) \cap \left(\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}\right) \cap f(\omega')\mathfrak{G}_{\omega},$$

где $\pi_1 = \omega \cap \mathrm{Supp}(f)$, $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$.
Следовательно,

$$\mathfrak{F} \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$$

для всех $p \in \pi_1$. Но по теореме 1.3.2 имеем $f(p) = \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$ и мы получаем, что

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$$

для всех $p \in \omega \cap \mathrm{Supp}(f)$. При этом

$$\mathfrak{F}(F^p) = \begin{cases} \mathrm{fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & p \notin \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Ввиду того, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, для каждого $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ справедливы включения

$$\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}.$$

Следовательно, по лемме 3.1.11 получаем, что $\mathfrak{F}$ — класс Локетта. Значит, ввиду [74, теорема 1] класс $\mathfrak{F}$ определяется наибольшей приведенной ω-локальной H-функцией F, причем $F(p)\mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$.

Рассуждая аналогично, мы заключаем, что для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ справедливы включения

$$F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}.$$

Покажем теперь, что

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p.$$

Так как $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ — насыщенная формация Фиттинга, то по лемме 3.1.7 имеем

$$(\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p)^* = (\mathfrak{F}_*)^*\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p.$$

Но по утверждению 2 леммы 3.1.8 $(\mathfrak{F}_*)^* = \mathfrak{F}^*$. Следовательно,

$$(\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p)^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p.$$

Так как классы $\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ являются локальными (см. [68, следствие 1]), то ввиду [68, лемма 5] они являются классами Локетта. Следовательно,

$$\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$$

и поэтому

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p.$$

Отсюда следует, что $G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}} \in \mathfrak{N}_p$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$. Кроме того, из включения $\mathfrak{F} \subseteq F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$ вытекает, что $G/G_{F(p)\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{G}_{p'}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Докажем теперь, что

$$\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}$$

для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$. Для этого установим первоначально, что

$$(\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}.$$

Включение

$$(\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$$

очевидно.

Докажем обратное включение. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}} \in \mathfrak{N}_p$ и $G/G_{F(p)\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{G}_{p'}$.

Отсюда следует, что

$$G/G_{F(p)\mathfrak{N}_p}G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}} \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{G}_{p'} = (1).$$

Значит,

$$G = G_{F(p)\mathfrak{N}_p}G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}}.$$

Но

$$G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}} = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}} \cap G = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}} \cap G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}\cap\mathfrak{F}}.$$

Итак, если $G \in \mathfrak{F}$, то

$$G = G_{F(p)\mathfrak{N}_p}G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}\cap\mathfrak{F}}.$$

Отсюда следует, что

$$G \in (\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p.$$

Таким образом, мы установили, что

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p.$$

Значит, по лемме 3.1.10 имеем

$$\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}$$

для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$.

Остается выяснить, что если

$$\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}$$

для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_*$.
Очевидно, что

$$\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}.$$

Пусть G — группа наименьшего порядка из класса $(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{F}_*$. Тогда G имеет единственную максимальную нормальную подгруппу $M = G_{\mathfrak{F}_*}$. Составим фактор-группу G/M и пусть p — простой делитель порядка $|G/M|$. Ввиду того, что $G \in \mathfrak{F}$, по утверждению 3 леммы 3.1.8 получаем, что $G/G_{\mathfrak{F}_*}$ — абелева группа. Следовательно,

G/M — композиционный фактор порядка p, т. е. $G/M \cong Z_p \in \mathfrak{N}_p$. Отсюда $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$. Но $G \in \mathfrak{F}_*\mathfrak{G}_{p'}$, и поэтому $G/M \in \mathfrak{G}_{p'}$.

Итак,

$$G/M \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{G}_{p'} = (1) \quad \text{и} \quad G = M \in \mathfrak{F}_*,$$

что противоречит предположению о том, что $G \notin \mathfrak{F}_*$. Таким образом, $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*$. Следовательно, $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_*$. Учитывая лемму 3.1.11 имеем $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$, и поэтому $\mathfrak{F}$ является $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}}$-классом, т. е. отображение решетки $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{X})$ в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ сюръективно. Теорема доказана.

Заметим, что в случае, когда $\omega = \mathbb{P}$ — множеству всех простых чисел, ω-локальный класс Фиттинга является локальным. Однако не каждый ω-локальный класс Фиттинга является локальным (например, класс Фиттинга $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{F}$ — произвольный нетривиальный нормальный класс Фиттинга, является ω-локальным классом Фиттинга для $\omega = \{p\}$, но не является локальным). Легко видеть, что разрешимый ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ локален. Кроме того, ввиду [68, лемма 5] каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта. В связи с этим возникает вопрос о существовании в классе $\mathfrak{G}$ всех конечных групп ω-локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, которые нелокальны. Положительным решением этого вопроса является следующий

3.7.6 Пример. Пусть E — простая неабелева группа, $\mathfrak{X} = \mathrm{fit}E$ — класс Фиттинга, порожденный E, $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$ и $\omega = \{p\}$, где p — простое число. Тогда $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Локетта с $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq$ $\subseteq \omega$, который ненормален и нелокален.

Действительно, так как $\mathfrak{F}(F^p) \subseteq \mathfrak{X}$ и, следовательно,

$$\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F},$$

то по теореме 1.3.2 получаем, что $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Фиттинга для $\omega = \{p\}$.

Так как $\mathfrak{X}$ состоит лишь из единичных групп и конечных прямых произведений групп, изоморфных E, то $\mathfrak{X}$ — формация Фиттинга, а значит, и $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$ является формацией Фиттинга и каждая группа из $\mathfrak{F}$ является либо p-группой (возможно единичной), либо расширением конечного прямого произведения групп, изоморфных E, с помощью p-группы (возможно единичной). Отсюда следует, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \{p\}$, а по [264, гл. X, предложение 1.25] $\mathfrak{F}$ — класс Локетта.

Докажем теперь, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нелокален. Предположим, что $\mathfrak{F} = LR(f)$, где f — полная приведенная H-функция. Тогда

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}\right),$$

где $\pi = \mathrm{Supp}(f)$.
Тогда ввиду [268, предложение 4.9 b)] имеем $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$. Так как в данном случае $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \{p\}$, а $|\pi(\mathfrak{F})| \geqslant 2$, то получаем противоречие с тем, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ нелокален.

Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ненормален. Действительно, если $\mathfrak{F}$ — нормальный класс Фиттинга, то ввиду [264, гл. X, лемма 3.2] $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Последнее противоречит тому, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \{p\}$.

Следовательно, если $\omega = \{p\}$, где $p \in \mathbb{P}$, то $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Локетта с $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, который не является нормальным и нелокален.

Таким образом, в случае $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 3.7.5 вытекает результат Галледжи [268], который мы приведем в качестве следствия.

3.7.7 Следствие ([268, предложение 4.9]). *Любой локальный класс Фиттинга является $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}$-классом.*

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, из теоремы 3.7.5 получаем

3.7.8 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — ω-локальные классы Фиттинга, такие, что* $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ *и* $\mathrm{Char}(\mathfrak{H}) \subseteq \omega$. *Тогда*

$$(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{S}_*.$$

Доказательство. Так как $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то по теореме 3.7.5 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathcal{L}$-классом. Аналогично, класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ является $\mathcal{L}$-классом.

Ввиду леммы 1.3.8 пересечение ω-локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является ω-локальным классом Фиттинга, причем $\mathrm{Char}(\mathfrak{F} \cap \cap \mathfrak{H}) \subseteq \omega$. Следовательно, по теореме 3.7.5 ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является $\mathcal{L}$-классом, т. е.

$$(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^* \cap \mathfrak{S}_*.$$

Так как ввиду теоремы 3.7.5 классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ являются классами Локетта, то по лемме 3.1.8 4) $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — класс Локетта, поэтому

$$(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{S}_*.$$

Следствие доказано.

Заметим, что следствие 3.7.8 дает утвердительный ответ на вопрос Лауша (см. [114, проблема 8.30]) для случая ω-локальных классов Фиттинга, характеристика которых является подмножеством множества ω.

Глава 4

РЕШЕТКИ ФОРМАЦИЙ

4.1 Некоторые известные утверждения

4.1.1 Лемма ([219, лемма 1]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— непустая совокупность групп. Если* $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{X}$, *где* $n \geqslant 1$ *и* f *— минимальный* $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$*-значный* ω*-локальный* V*-спутник формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/O_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
2) $f(p) = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{X}(F_p)\big)$ *для всех* $p \in \omega$;
3) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}\langle g\rangle$, *где* $g(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $g(p) = f(p)$ *всех* $p \in \omega$.

4.1.2 Лемма ([218, лемма 2.2]). *Если* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}\langle F\rangle$ *и* $G/O_p(G) \in$ $\in f(p) \cap \mathfrak{F}$ *для некоторого* $p \in \omega$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

4.1.3 Лемма ([218, лемма 2.1]). *Если* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}\langle f\rangle$, *где* f *—* τ*-значный* ω*-локальный* V*-спутник, то* $\mathfrak{F}$ *—* τ*-замкнутая формация.*

4.1.4 Лемма ([218, лемма 2.8]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* n*-кратно* ω*-насыщенная формация и* F *— канонический* l^{ω}_{n-1}*-значный* ω*-локальный* V*-спутник. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F)$;
2) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}\langle F\rangle$.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\mathrm{S}_{\tau}\mathfrak{X}$ обозначают (см. [203]) множество всех таких групп H, что $H \in \tau(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$.

4.1.5 Лемма ([203, лемма 1.2.21]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* τ*-замкнутая полуформация, порожденная совокупностью групп* $\mathfrak{X}$. *Тогда*

$$\mathfrak{F} = \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X}).$$

4.1.6 Лемма ([203, следствие 4.3.6]). *Пусть* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— такая совокупность* τ*-замкнутых подформаций формации* $\mathfrak{F}$, *что*

$$\mathfrak{F} = \vee^{\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \tau\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big)$$

и $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ *для любых различных* i *и* j *из* I. *Тогда* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i$.

4.1.7 Лемма ([203, лемма 4.3.4]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}$ *— непустая подформация в* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{M} = \underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})$.

4.1.8 Лемма ([203, теорема 4.3.2]). *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— непустая подформация формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда если* $\mathfrak{H}$ *— дополнение к* $\mathfrak{M}$ *в* $\mathfrak{F}$, *то* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$.

4.1.9 Лемма ([159, лемма 12]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустая* τ*-замкнутая тотально насыщенная формация,* π *— такое множество простых чисел, что* $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. *Тогда произведение* $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ *является* τ*-замкнутой тотально насыщенной формацией.*

4.1.10 Лемма ([203, лемма 1.2.22]). *Для любой совокупности групп* $\mathfrak{X}$ *справедливо равенство*

$$\tau\mathrm{form}\mathfrak{X} = \mathrm{QR_0S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X}).$$

4.1.11 Лемма ([224, лемма 2.4]). *Справедливо равенство* $\mathrm{QR_0Q} = \mathrm{QR_0}$.

4.1.12 Лемма ([203, лемма 1.2.23]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— произвольная совокупность групп,* $\mathfrak{M} = \mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})$. *Тогда*

$$\tau\mathrm{form}\mathfrak{M} = \mathrm{form}\mathfrak{M}.$$

4.1.13 Лемма ([203, следствие 1.2.24]). *Для любой совокупности* τ*-замкнутых формаций* $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ *имеет место*

$$\tau\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\Big) = \mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\Big).$$

4.1.14 Лемма ([203, следствие 4.2.8]). *Решетка всех* τ*-замкнутых* n*-кратно насыщенных формаций* l_n^τ *модулярна, но не дистрибутивна.*

4.1.15 Лемма ([203, лемма 4.1.3]). *Пусть* $N_1 \times \ldots \times N_t = \mathrm{Soc}(G)$, *где* N_i *— минимальная нормальная подгруппа группы* G $(i = 1, \ldots, t)$, $t > 1$, *и* $O_p(G) = 1$. *Пусть* M_i *— наибольшая нормальная в* G *подгруппа, содержащая* $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_t$, *но не содержащая* N_i, $i = 1, \ldots, t$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого* $i \in \{1, \ldots, t\}$ *фактор-группа* G/M_i *монолитична и ее монолит* N_iM_i/M_i G*-изоморфен* N_i *и* $O_p(G/M_i) = 1$;

2) $M_1 \cap \ldots \cap M_t = 1$.

4.1.16 Лемма ([264, гл. X; теорема 1.9]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$;

2) $(G \times H)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \times H_{\mathfrak{F}}$ *для любых групп G и H.*

4.1.17 Лемма ([203, лемма 3.4.3]). *Отображение* fin, *сопоставляющее всякому многообразию групп $\mathfrak{M}$ класс* fin$\mathfrak{M}$, *является вложением решетки и полугруппы локально конечных многообразий в алгебру всех формаций.*

4.2 Булевы подрешетки формаций

Прямые разложения формаций. В работе А.Н. Скибы [201] было начато изучение прямых разложений n-кратно насыщенных формаций. В частности, там было доказано, что всякая формация, представимая в виде прямого разложения некоторых формаций, n-кратно насыщена тогда и только тогда, когда n-кратно насыщена каждая компонента этого разложения. Впоследствии этот результат был распространен на n-кратно локальные классы Фиттинга [43] и на n-кратно ω-локальные классы Фиттинга [46]. Аналог этого результата справедлив для ω-насыщенных формаций (см. [41]).

Целью данного раздела является изучение прямых разложений n-кратно ω-насыщенных формаций.

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \tag{4.1}$$

Следуя [206], сопоставим функции f класс групп

$$LF_\omega(f) = (G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p)$$

$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (4.1), то говорят, что она ω-насыщена, а f — ω-локальный спутник этой формации [206].

4.2.1 Теорема ([56, теорема]). *Пусть $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$, для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ($n \geqslant 1$) ω-насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно ω-насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$ n-кратно ω-насыщена. По лемме 1.2.15 формация $\mathfrak{F}_i$ обладает минимальным l_{n-1}^{ω}-значным ω-локальным спутником f_i. Пусть $\pi_i = \omega \cap \cap\, \pi(\mathfrak{F}_i)$. Тогда если $i \neq j$, то по условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Значит, $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$. Построим ω-локальный спутник f таким образом, что

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ f_i(a), & \text{если } a = p \in \pi_i \text{ для некоторого } i \in I, \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$. Пусть $LF_\omega(f) \not\subseteq \mathfrak{F}$, и G — группа минимального порядка из $LF_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G \in LF_\omega(f)$, то $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то $G/F_p(G) \in \in f(p) \neq \varnothing$. Значит, найдется такое $i \in I$, что $p \in \pi_i$. Отсюда $\omega \cap \cap\, \pi(G) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i$. Если R — ω'-группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) = \varnothing$, то $G_{\omega d} = 1$. Значит,

$$G \cong G/G_{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Значит, R — pd-группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$. Тогда $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$. Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \cong G/F_p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Пусть R — p-группа. Значит, $R = C_G(R) = F_p(G) = = O_p(G)$. Но тогда

$$G/F_p(G) = G/R = G/O_p(G) \in f(p) = f_i(p).$$

Значит, по лемме 1.2.14 $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $LF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LF_\omega(f)$. Тогда G — монолитическая группа. Поэтому найдется такое $i \in I$, что

$$G \in \mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i).$$

Значит,

$$G/F_p(G) \in f_i(p) = f(p)$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и из $G \in \mathfrak{F}$ получаем

$$G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega').$$

Следовательно, $G \in LF_\omega(f)$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq LF_\omega(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где f — l_{n-1}^ω-значный ω-локальный спутник. Поэтому $\mathfrak{F}$ — n-кратно ω-насыщенная формация.

Необходимость. Пусть теперь формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-насыщена. По лемме 1.2.15 формация $\mathfrak{F}$ обладает минимальным l_{n-1}^ω-значным ω-локальным спутником f. Пусть $i \in I$ и f_i — такой ω-локальный спутник, что

$$f_i(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}_i, & \text{если } a = \omega', \\ f(a), & \text{если } a = p \in \pi_i, \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$. Предположим, что $\mathfrak{F}_i \not\subseteq LF_\omega(f_i)$, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus LF_\omega(f_i)$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{LF_\omega(f_i)}$. Поскольку $G \notin LF_\omega(f_i)$, то согласно лемме 1.2.21 либо $G^{LF_\omega(f_i)} \not\subseteq G_{\omega d}$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{LF_\omega(f_i)})$, что $G/F_p(G) \notin f_i(p)$. С другой стороны, так как $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, то $G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F}_i = f(\omega')$ и для всех $q \in \omega \cap \pi(G)$ имеет место

$$G/F_q(G) \in f(q) = f_i(q).$$

Противоречие. Итак, $\mathfrak{F}_i \subseteq LF_\omega(f_i)$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G — группа минимального порядка из $LF_\omega(f_i) \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(R) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Тогда из $G \in LF_\omega(f_i)$ следует, что $G/F_p(G) \in f_i(p)$. Значит, $f_i(p) \neq \varnothing$ и по построению ω-локального спутника f_i имеем $p \in \pi_i$. Итак, $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i$.

Кроме того, по построению ω-локального спутника f_i справедливо $f_i \leqslant f$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому ввиду монолитичности группы G найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i$. Следовательно,

$$\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \varnothing.$$

Тем самым установлено, что $i = j$, т. е. $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Следовательно, $LF_\omega(f_i) \subseteq \mathfrak{F}_i$. Таким образом, $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$, где f_i — l_{n-1}^ω-значный ω-локальный спутник. Поэтому $\mathfrak{F}_i$ — n-кратно ω-насыщенная формация. Теорема доказана.

Отметим некоторые следствия, получаемые из теоремы 4.2.1.

4.2.2 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ тотально ω-насыщена в том и только в том случае, когда тотально ω-насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Если в следствии 4.2.2 положить $\omega = \mathbb{P}$, то получим

4.2.3 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *тотально насыщена в том и только в том случае, когда тотально насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

При $n = 1$ из теоремы 4.2.1 вытекает

4.2.4 Следствие ([41, теорема 1]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ ω*-насыщена в том и только в том случае, когда* ω*-насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ получим

4.2.5 Следствие ([203, теорема 4.3.8]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ n*-кратно насыщена в том и только в том случае, когда* n*-кратно насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

При $\omega = \{p\}$ справедливо

4.2.6 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ n*-кратно* p*-насыщена в том и только в том случае, когда* n*-кратно* p*-насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

Если $n = 1$ и $\omega = \{p\}$, то справедливо

4.2.7 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ p*-насыщена в том и только в том случае, когда* p*-насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

В различных приложениях теории классов групп часто приходится использовать формации, замкнутые относительно той или иной системы подгрупп. Понятие подгруппового функтора (в терминологии А.Н. Скибы) охватывает все рассматриваемые при этом системы подгрупп. Это позволяет использовать подгрупповые функторы как аппарат исследования классов групп.

Пусть со всякой группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — *подгрупповой функтор* [203], если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi \ : A \mapsto B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Если $\tau(G) = \{G\}$, то подгрупповой функтор называется тривиальным. Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G из $\mathfrak{F}$.

Как показывает пример работы [203, замечание 4.3.10] в общем случае из того, что формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$ является τ-замкнутой, не следует, что каждая из формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ также является τ-замкнутой. В данном параграфе доказан аналог теоремы А.Н. Скибы [201] для τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.

Для доказательства основного результата нам необходим подход к определению ω-насыщенных формаций, предложенный профессором В.А. Ведерниковым [29].

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \tag{4.2}$$

Функции f сопоставим класс групп

$$LF_\omega\langle f\rangle = \big(G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p)$$

$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\big).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$ для некоторой функции f, вида (4.2), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной формацией* с *ω-локальным V-спутником* f [29, 218].

Пусть $\mathfrak{X}$ — совокупность групп. Символом $\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Следуя [206], полагают

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$, где $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$. Если же $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle F\rangle$, то спутник F называется каноническим ω-локальным V-спутником формации $\mathfrak{F}$ [218].

4.2.8 Лемма ([59, лемма 4]). *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда либо $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq O_\omega(G)$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{\mathfrak{F}})$, что $G/F_p(G) \notin f(p)$.*

Доказательство. Пусть $G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_\omega(G)$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G^{\mathfrak{F}})$. Первое влечет

$$G/O_\omega(G) \cong (G/G^{\mathfrak{F}})/(O_\omega(G)/G^{\mathfrak{F}}) = (G/G^{\mathfrak{F}})/O_\omega(G/G^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F} = f(\omega').$$

Пусть $p \in (\omega \cap \pi(G)) \setminus \pi(G^{\mathfrak{F}})$. Тогда

$$G^{\mathfrak{F}} \subseteq F_p(G) \text{ и } F_p(G/G^{\mathfrak{F}}) = F_p(G)/G^{\mathfrak{F}}.$$

Значит, для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеет место

$$G/F_p(G) \cong (G/G^{\mathfrak{F}})/(F_p(G)/G^{\mathfrak{F}}) = (G/G^{\mathfrak{F}})/F_p(G/G^{\mathfrak{F}}) \in f(p),$$

так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Лемма доказана.

4.2.9 Теорема ([59, теорема]). *Пусть $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$ таких, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех различных i, $j \in I$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута n-кратно ω-насыщена в том и только в том случае, когда τ-замкнута n-кратно ω-насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$ τ-замкнута n-кратно ω-насыщена. По лемме 4.1.1 формация $\mathfrak{F}_i$ обладает минимальным $l^\tau_{\omega_{n-1}}$-значным ω-локальным V-спутником f_i. Пусть $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$. Построим ω-локальный V-спутник f таким образом, что

$$f(a) = \begin{cases} f_i(a), & \text{если } a \in \pi_i \cup \ \{\omega'\} \ \text{ для некоторого } \ i \in I, \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \setminus \bigcup\limits_{i\in I} \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$ — τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Пусть $LF_\omega\langle f\rangle \not\subseteq \mathfrak{F}$, и G — группа минимального порядка из $LF_\omega\langle f\rangle \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — монолитическая группа, и ее монолит $R = G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G \in LF_\omega\langle f\rangle$, то $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то $G/F_p(G) \in f(p) \neq \varnothing$. Значит, найдется такое $i \in I$, что $p \in \pi_i$. Отсюда $\omega \cap \pi(G) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \pi_i$. Если R — ω'-группа, т. е. $\omega\cap\pi(R) = \varnothing$, то $O_\omega(G) = 1$. Поэтому

$$G \cong G/O_\omega(G) \in f(\omega') = f_i(\omega') \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Значит, R — pd-группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega\cap\pi(R)$. Тогда $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$. Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \cong G/F_p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Пусть R — p-группа. Значит, $R = C_G(R) = F_p(G) = = O_p(G)$. Но тогда

$$G/F_p(G) = G/R = G/O_p(G) \in f(p) = f_i(p)$$

и по лемме 4.1.2 $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $LF_\omega\langle f\rangle \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LF_\omega\langle f\rangle$. Тогда G — монолитическая группа. Поэтому найдется такое $i \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_i = LF_\omega\langle f_i\rangle$. Значит,

$$G/O_\omega(G) \in f_i(\omega') = f(\omega')$$

и

$$G/F_p(G) \in f_i(p) = f(p)$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in LF_\omega\langle f\rangle$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq LF_\omega\langle f\rangle$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$. Ввиду леммы 4.1.4 и леммы 4.1.3 $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация.

Необходимость. Пусть теперь формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута n-кратно ω-насыщена. По лемме 4.1.1 формация $\mathfrak{F}$ обладает минимальным $l^\tau_{\omega_{n-1}}$-значным ω-локальным V-спутником f. Пусть $i \in I$ и f_i — такой ω-локальный V-спутник, что

$$f_i(a) = \begin{cases} f(a), & \text{если } a \in \pi_i \cup \ \{\omega'\}, \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \setminus \pi_i. \end{cases}$$

где $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$. Покажем, что $\mathfrak{F}_i = LF_\omega\langle f_i\rangle$ — τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Предположим, что $\mathfrak{F}_i \not\subseteq LF_\omega\langle f_i\rangle$, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus LF_\omega\langle f_i\rangle$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{LF_\omega\langle f_i\rangle}$. Поскольку $G \notin LF_\omega\langle f_i\rangle$, то согласно лемме 4.2.8 либо $G^{LF_\omega\langle f_i\rangle} \not\subseteq O_\omega(G)$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{LF_\omega\langle f_i\rangle})$, что $G/F_p(G) \notin f_i(p)$. С другой стороны, так как $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, то

$$G/O_\omega(G) \in f(\omega') = f_i(\omega')$$

и для всех $q \in \omega \cap \pi(G)$ имеет место

$$G/F_q(G) \in f(q) = f_i(q).$$

Противоречие. Итак, $\mathfrak{F}_i \subseteq LF_\omega\langle f_i\rangle$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G — группа минимального порядка из $LF_\omega\langle f_i\rangle \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}_i}$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(R) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Тогда из $G \in LF_\omega\langle f_i \rangle$ следует, что $G/F_p(G) \in f_i(p)$. Значит, $f_i(p) \neq \varnothing$ и по построению ω-локального V-спутника f_i имеем $p \in \pi_i$. Итак, $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i$. Кроме того, по построению ω-локального V-спутника f_i справедливо $f_i \leqslant f$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому ввиду монолитичности группы G найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_j$, где $\pi_j = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_j)$. Поэтому

$$\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \varnothing.$$

Тем самым установлено, что $i = j$, т. е. $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Следовательно, $LF_\omega\langle f_i \rangle \subseteq \mathfrak{F}_i$. Таким образом, $\mathfrak{F}_i = LF_\omega\langle f_i \rangle$. Ввиду леммы 4.1.4 и леммы 4.1.3 $\mathfrak{F}_i$ — τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Теорема доказана.

Отметим несколько следствий из теоремы 4.2.9. Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то получим

4.2.10 Следствие ([56, теорема]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *n-кратно ω-насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно ω-насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

4.2.11 Следствие ([203, теорема 4.3.8], [201, теорема]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *n-кратно насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

4.2.12 Следствие ([56, следствие 3.1]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *тотально ω-насыщена в том и только в том случае, когда тотально ω-насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

Если в следствие 4.2.12 положить $\omega = \mathbb{P}$, то получим

4.2.13 Следствие ([203, следствие 4.3.9]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *тотально насыщена в том и только в том случае, когда тотально насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

В случае $n = 1$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

4.2.14 Следствие ([41, теорема 1]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ ω*-насыщена в том и только в том случае, когда* ω*-насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

При $\omega = \{p\}$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

4.2.15 Следствие ([56, следствие 3.5]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ n*-кратно* p*-насыщена в том и только в том случае, когда* n*-кратно* p*-насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

Если $n = 1$ и $\omega = \{p\}$, то для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

4.2.16 Следствие ([56, следствие 3.6]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ p*-насыщена в том и только в том случае, когда* p*-насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

Описание подрешеточной структуры формаций. Напомним, что непустая совокупность формаций Θ называется полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и во множестве Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$. Формации, принадлежащие Θ, называют Θ*-формациями* (см. [203, 206]). Один из методов исследования Θ-формаций $\mathfrak{F}$ состоит в изучении свойств решетки выделенной системы Θ-подформаций, входящих в $\mathfrak{F}$. В частности, рядом авторов исследовались Θ-формации, у которых решетка Θ-подформаций является булевой или решеткой с дополнениями для различных полных решеток формаций Θ [88, 89, 184, 199, 274, 277, 312].

Понятие дополняемой подформации введено в работе А.Н. Скибы [187], где были описаны разрешимые формации групп, у которых все их подформации дополняемы. Напомним, что подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называется *дополняемой в* $\mathfrak{F}$, если для нее существует дополнение в решетке всех подформаций формации $\mathfrak{F}$. В последующем в работах М.И. Эйдинова [238] и В.А. Ведерникова [25] были описаны формации, состоящие из произвольных конечных групп, у которых все подформации дополняемы. В связи с этим В.А. Ведерниковым в работе [25] была поставлена задача описания насыщенных формаций, у которых все насыщенные подформации дополняемы. Эта задача была решена независимо А.Н. Скибой [199] и Го

Вэньбинем [274]. Оказалось, что насыщенные формации, у которых все насыщенные подформации дополняемы, имеют булеву решетку насыщенных подформаций [199, 274] (см. также главу 4 монографии [203]). Отметим также, что в работе А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [197] были описаны формации конечных алгебр с булевой решеткой подформаций, содержащихся в некотором мальцевском многообразии.

В теории классов Фиттинга Н.Н. Воробьевым и А.Н. Скибой [43] получено описание n-кратно локальных классов Фиттинга с булевой решеткой n-кратно локальных подклассов Фиттинга (см. также работу [46]). Заметим, что при изучении булевых решеток классов Фиттинга [43, 46] использован ряд новых наблюдений о прямых разложениях классов групп, восходящих идейно к вышеупомянутой монографии [203].

Дополняя результаты [25, 88, 89, 184, 187, 197, 199, 238, 274, 277, 312], в данной работе дается описание τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций с булевой решеткой τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных подформаций.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — подформации формации $\mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{H}$ — *τ-дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$*, если $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая подформация. Здесь символом $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ обозначается пересечение всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, содержащих формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Подформация формации $\mathfrak{F}$ называется *τ-дополняемой в $\mathfrak{F}$* [203], если к ней имеется τ-дополнение в $\mathfrak{F}$.

Для произвольной τ-замкнутой n-кратно ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ будем обозначать решетку всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Используя конструкцию прямого разложения класса групп, нами доказана следующая

4.2.17 Теорема ([55, теорема]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *решетка $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ булева;*

2) *$\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$;*

3) *в $\mathfrak{F}$ τ-дополняема каждая подформация, являющаяся атомом решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$.*

4.2.18 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}G$ — однопорожденная τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Тогда решетка $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ имеет лишь конечное число атомов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A$, где A — простая группа. Если A — неабелева группа, то согласно лемме 4.4.3, $A \in \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая полуформация, порожденная группой G. Но ввиду леммы 4.1.5 $\mathfrak{H} = \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}(G)$. Это означает, что в $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

Пусть A — группа простого порядка p. Поскольку p делит $|G|$ и группа G конечна, то в решетке $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число разрешимых атомов. Лемма доказана.

4.2.19 Лемма. *Пусть $\Sigma = \{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ — некоторый набор атомов решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$, $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{M}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ принадлежит решетке $l^{\tau}_{\omega_n}$ и если $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ — произвольная неединичная τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$, то во множестве $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ найдется такое подмножество $\{\mathfrak{M}_j \mid j \in J\}$, что $\mathfrak{M} = \underset{j\in J}{\otimes} \mathfrak{M}_j$.*

Доказательство. Для любых двух различных i, $j \in I$ имеет место равенство $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j = (1)$. Значит, ввиду леммы 4.1.6 $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{M}_i = \vee^{\tau}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I)$ — τ-замкнутая формация, а ввиду теоремы 4.2.1 формация $\mathfrak{F}$ — n-кратно ω-насыщена. Итак, $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_n}$.

Согласно лемме 4.1.7, $\mathfrak{M} = \underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M})$. Так как $\mathfrak{M}_i$ — атом решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$, то $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M} \in \{(1), \mathfrak{M}_i\}$. Пусть J — такое подмножество в I, что $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_j$. Поэтому, очевидно, $\mathfrak{M} = \underset{j\in J}{\otimes} \mathfrak{M}_j$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.2.17. Покажем, что из 3) вытекает 2). Прежде докажем, что условие 2) выполняется относительно любой однопорожденной $l^{\tau}_{\omega_n}$-подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 4.2.18 в $\mathfrak{F}_1$ имеется лишь конечное число подформаций, являющихся атомами решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_1)$. Пусть $\mathfrak{M}$ — один из таких атомов. Тогда по условию в $\mathfrak{F}$ найдется такая τ-замкнутая подформация $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee{}^{\tau} \mathfrak{H}$. Значит, по лемме 4.1.6 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$. А согласно теореме 4.2.1 последнее означает, что $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Так как у $\mathfrak{H}$ число подформаций, являющихся атомами решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_1)$, меньше, чем у $\mathfrak{F}_1$, то по индукции $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{M}_t$, где $\mathfrak{M}_i$ — атом решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_1)$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Значит, согласно лемме 3.2.9 $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{M}_t$.

Пусть теперь $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{H} = \underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$. По лемме 4.2.19 $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда, согласно уже доказанному, $\mathfrak{F}_1 = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}G = \mathfrak{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{M}_t$ для некоторого набора атомов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_t$ решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$. Значит, $G \in \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть имеет место условие 2). Покажем, что тогда выполняется и условие 1). Прежде установим, что решетка $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ является решеткой с дополнениями. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I_1\}$ — набор всех тех подформаций из $\mathfrak{M}$, которые являются атомами решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$. Ввиду леммы 4.2.19 $\mathfrak{M} = \underset{i\in I_1}{\otimes} \mathfrak{F}_i$. Пусть $I_2 = I \setminus I_1$, $\mathfrak{H} = \underset{i\in I_2}{\otimes} \mathfrak{F}_i$. Покажем, что $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$. Ясно, что $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \neq (1)$ и $\mathfrak{R}$ — подформация в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, являющаяся атомом решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}_i$. Но $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Значит, согласно лемме 4.2.19, $\mathfrak{R}$ не входит в одну из формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$. Противоречие. Итак, $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями.

Для доказательства дистрибутивности решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ рассмотрим три произвольные τ-замкнутые n-кратно ω-насыщенные подформации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{R}$ из $\mathfrak{F}$. Ясно, что

$$(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{R} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}).$$

Предположим, что обратное включение неверно. Пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{R} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}) \setminus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Тогда A — монолитическая группа. Следовательно, найдется такое $i \in I$, что $A \in \mathfrak{F}_i$. Так как при этом $\mathfrak{F}_i$ — атом решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}_i = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A \subseteq \mathfrak{R} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}$.

Отсюда, в силу условия 2) и леммы 4.2.19 получаем, что либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{R}$, либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}$. В любом из этих случаев оказывается, что $A \in (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Полученное противоречие показывает, что решетка $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ дистрибутивна. Итак, если выполняется условие 2), то $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.

Предположим, что выполняется условие 1). Покажем, что из него вытекает условие 3). При $n = 0$ это очевидно. Пусть $n \geqslant 1$ и пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A$, где A — простая группа из $\mathfrak{M}$. Ввиду того, что $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями, найдется такая τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Пусть $\mathfrak{W} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 4.1.6 имеет место равенство $\mathfrak{W} = \mathfrak{M} \vee^{\tau} \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_0} \mathfrak{H}$. Очевидно, $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно теореме 4.2.1

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H} = \mathfrak{W}.$$

Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{W}$, т. е. атом $\mathfrak{M}$ дополняем в решетке $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

При $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы вытекает

4.2.20 Следствие ([203, теорема 4.3.13]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *решетка $L^{\tau}_{n}(\mathfrak{F})$ булева;*

2) *$\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $L^{\tau}_{n}(\mathfrak{F})$;*

3) *в $\mathfrak{F}$ τ-дополняема каждая подформация, являющаяся атомом решетки $L^{\tau}_{n}(\mathfrak{F})$.*

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то мы получаем

4.2.21 Следствие ([199, теорема]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно насыщенная формация, $n \geqslant 0$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *решетка n-кратно насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ булева;*

2) *$\mathfrak{F} = l_n\mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторое множество простых групп, причем при $n \geqslant 61$ все группы из $\mathfrak{X}$ абелевы;*

3) *в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая подформация, являющаяся атомом решетки n-кратно насыщенных формаций.*

При $n = 1$ и $\omega = \{p\}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем

4.2.22 Следствие ([89, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *$\mathfrak{F}$ есть прямое произведение своих минимальных p-насыщенных подформаций;*

2) *решетка p-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ булева;*

3) *в $\mathfrak{F}$ дополняемы все минимальные p-насыщенные подформации.*

Если $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ, получим

4.2.23 Следствие ([25, 199]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная насыщенная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *решетка насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ булева;*

2) *формация $\mathfrak{F}$ нильпотентна;*

3) *в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая подформация вида $\mathfrak{N}_p$, где p — некоторое простое число.*

При $n = 0$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем

4.2.24 Следствие ([199]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *решетка подформаций формации $\mathfrak{F}$ булева;*

2) *каждая неединичная $\mathfrak{F}$-группа является прямым произведением некоторого конечного числа простых групп;*

3) *в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая подформация вида* $\mathrm{form}A$, *где A — некоторая простая группа.*

Если $n = 0$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ, имеем также

4.2.25 Следствие ([25, 238]). *Тогда и только тогда каждая подформация формации $\mathfrak{F}$ дополняема в $\mathfrak{F}$, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — набор простых групп.*

4.3 Стоуновы решетки

В 1986 году А.Н. Скибой [192] начато изучение решеток формаций групп. В частности, была установлена модулярность решетки всех (насыщенных) формаций. В дальнейшем целая серия работ различных авторов посвящена поиску модулярных и дистрибутивных решеток формаций. В монографии [203] было доказано, что решетка l_n^τ всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций модулярна, но не дистрибутивна. В то же время решетка l_∞^τ всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций дистрибутивна [159].

Отмеченные результаты наталкивают на мысль изучать насыщенные формации в зависимости от свойств решеток их подформаций.

Целью данного параграфа является описание τ-замкнутых n-кратно насыщенных (тотально насыщенных) формаций со стоуновой решеткой τ-замкнутых n-кратно насыщенных (тотально насыщенных) подформаций.

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \mathbb{P} \to \{\text{формации групп}\}. \qquad (4.3)$$

Следуя [203, 264], сопоставим функции f класс групп

$$LF(f) = \big(G \mid G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\big).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF(f)$ для некоторой функции f вида (4.3), то $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной формацией* с *локальным спутником* f. Если $\mathfrak{F} = LF(f)$ и $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \pi(G)$, то f называется *внутренним спутником* формации $\mathfrak{F}$.

При обозрении большинства наиболее известных конкретных классов групп легко обнаруживается, что они могут быть заданы при помощи функций, все непустые значения которых сами являются локальными классами. Последнее обстоятельство привело к возникновению следующей естественной конструкции:
всякая формация считается 0-*кратно насыщенной*, а при $n \geqslant 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно насыщенной* [193], если $\mathfrak{F} = LF(f)$, где все непустые значения локального спутника f являются $(n - -1)$-кратно насыщенными формациями. Если формация $\mathfrak{F}$ n-кратно насыщена для всех натуральных n, то $\mathfrak{F}$ называется *тотально насыщенной*.

Напомним, что элемент a решетки с нулем L называется *атомом*, если для любого $x \in L$ из $0 < x \leqslant a$ следует, что $x = a$ (т. е. если a *покрывает* наименьший элемент 0).

Для произвольной совокупности τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ положим

$$\vee_n^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_n^\tau \mathrm{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right),$$

в частности,

$$\mathfrak{M} \vee_n^\tau \mathfrak{H} = l_n^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Символами l_n^τ и l_∞^τ обозначаются решетки всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных и τ-замкнутых тотально насыщенных формаций соответственно.

Для произвольной τ-замкнутой n-кратно насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Если же τ-замкнутая формация $\mathfrak{F}$ тотально насыщена, то через $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех ее τ-замкнутых тотально насыщенных подформаций.

4.3.1 Лемма ([63, лемма 4]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация. Тогда если формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Понятно, что любая τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация есть объединение (в решетке l_n^τ) своих однопорожденных τ-замкнутых n-кратно насыщенных подформаций (см.

[203, с. 179]), т. е.

$$\mathfrak{F} = l_n^\tau \mathrm{form}\Big(\bigcup_{G\in\mathfrak{F}} l_n^\tau \mathrm{form} G\Big).$$

Значит, для доказательства леммы достаточно показать, что она справедлива для любой однопорожденной τ-замкнутой n-кратно насыщенной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$.

Пусть m — внутренний спутник формации $\mathfrak{M}$. Тогда если $p \in \in \pi(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p m(p) = M(p) \subseteq \mathfrak{M}$. Покажем прежде, что подформация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{M})$. Нулем этой решетки является формация (1), единицей — формация $\mathfrak{M}$. По условию леммы в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ найдется дополнение $\mathfrak{H}$ к $\mathfrak{N}_p$. Нулем решетки $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ является формация (1), единицей — формация $\mathfrak{F}$. Тогда

$$\mathfrak{F} = l_n^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee_n^\tau \mathfrak{H} \quad \text{и} \quad \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Согласно лемме 4.1.8 и теореме 4.2.9,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$$

и формации $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{H}$ являются τ-замкнутыми n-кратно насыщенными. Поэтому по лемме 4.1.7

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) =$$
$$= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) =$$
$$= \mathfrak{N}_p \vee_n^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}).$$

Поскольку $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1)$, то

$$\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1).$$

Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в $\mathfrak{M}$, т. е. формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{M})$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Согласно лемме 4.2.18 в $\mathfrak{M}$ имеется лишь конечное число подформаций, являющихся атомами решетки $L_n^\tau(\mathfrak{M})$. Пусть число атомов решетки $L_n^\tau(\mathfrak{M})$ равно k. Проведем индукцию по k. Согласно лемме 4.1.8 и теореме 4.2.9

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$$

и формация $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ является τ-замкнутой n-кратно насыщенной. Заметим, что поскольку один из атомов $\mathfrak{N}_p$ решетки $L_n^\tau(\mathfrak{M})$ не содержится в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, то в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ число атомов меньше, чем k.

Если $k = 1$, то в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{M})$ имеется лишь один атом. Но в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ атомов меньше $k = 1$, т. е. в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ нет атомов. Последнее возможно лишь в случае, когда $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p$. Следовательно, любая группа из $\mathfrak{M}$ нильпотентна, т. е. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

Предположим теперь, что $k > 1$ и утверждение леммы верно для всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций, у которых решетка τ-замкнутых n-кратно насыщенных подформаций имеет число атомов меньше, чем k. В этом случае утверждение для формации $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ верно по индукции. Но $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Поэтому каждая группа G из $\mathfrak{M}$ имеет вид:

$$G = A \times B,$$

где $A \in \mathfrak{N}_p$, $B \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Значит, утверждение леммы выполняется для однопорожденной формации $\mathfrak{M}$. Итак, утверждение леммы выполняется и для формации $\mathfrak{F} = l_n^\tau \mathrm{form}\Big(\bigcup_{G \in \mathfrak{F}} l_n^\tau \mathrm{form} G\Big)$, т. е. $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Лемма доказана.

Пусть L — решетка с нулем. Тогда элемент a^* называется *псевдодополнением* элемента a $(\in L)$, если из $a \wedge a^* = 0$ и $a \wedge x = 0$ следует, что $x \leqslant a^*$. В частности, псевдодополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ будем обозначать через $\mathfrak{N}_p^*$. Решетка с нулем называется *решеткой с псевдодополнениями*, если каждый ее элемент обладает псевдодополнением. Дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, каждый элемент которой удовлетворяет тождеству

$$a^* \vee (a^*)^* = 1,$$

называется *стоуновой решеткой*.

4.3.2 Теорема ([63, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация. Тогда решетка $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация. Заметим, что для каждой τ-замкнутой n-кратно насыщенной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$ формация $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{F})$, где $\pi = \pi(\mathfrak{M})$. Действительно, поскольку $\pi \cap \pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}) = \varnothing$, то $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}) = (1)$, и если $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая n-кратно насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Последнее означает, что $\mathfrak{H}$ — формация групп, порядки которых не делятся на простые числа из π, т. е. $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_{\pi'}$. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$. Поэтому $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{F})$.

Допустим, что $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка. Если f — внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$ и $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. По доказаному выше $\mathfrak{N}_p^* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{F})$. Заметим, что $(\mathfrak{N}_p^*)^* = \mathfrak{N}_p$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{F})$. Действительно, поскольку $\{p\} \cap \cap p' = \varnothing$, то $\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}) = (1)$. Если $\mathfrak{H}_1$ — τ-замкнутая n-кратно насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}_1 \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}) = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi(\mathfrak{H}_1) \cap p' = \varnothing$. Последнее означает, что $\mathfrak{H}_1$ — формация групп, порядки которых не делятся на простые числа из p', т. е. $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}_p$. Вместе с тем, согласно нашему допущению $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p^* \vee \vee_n^\tau (\mathfrak{N}_p^*)^* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}) \vee_n^\tau \mathfrak{N}_p$. Следовательно, для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в $L_n^\tau(\mathfrak{F})$. Применяя теперь лемму 4.3.1, видим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ — τ-замкнутая n-кратно насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\pi_1 = \pi(\mathfrak{M})$ и $\pi_2 = \pi \setminus \pi_1$. Если $\pi_1 = \pi$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Действительно, включение $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{M}$, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда группа G монолитична с монолитом $R = = G^{\mathfrak{M}}$. Так как подгруппа нильпотентной группы нильпотентна, то $R \subseteq \mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{N}_{\pi_1}$. Если $p \in \pi(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{N}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{M}$ для всех $p \in \pi_1$. Последнее означает, что $G \in \mathfrak{N}_{\pi_1}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Итак, остается заключить, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Легко видеть, что (1) — дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{F})$. Если же $\pi_1 \subset \pi$, то $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ — дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_n^\tau(\mathfrak{F})$. Действительно, поскольку $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\pi_2} = = (1)$. Предположим, что $\mathfrak{K} = l_n^\tau\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\pi_2}) = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}_{\pi_2} \neq \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_{\pi_2} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\pi_2} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{K} = = l_n^\tau\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\pi_2}) \subseteq l_n^\tau\mathrm{form}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{K}$. Тогда группа G монолитична и нильпотентна. Значит, она примарна. Поэтому либо $G \in \mathfrak{N}_{\pi_2}$, либо $G \in \mathfrak{N}_{\pi_1} \subseteq \subseteq \mathfrak{M}$. Это означает, что $G \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\pi_2} \subseteq \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}_{\pi_2} = \mathfrak{K}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{K} = \mathfrak{F}$.

Итак, $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями. Покажем, что дополнение $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{N}_{\pi_2}$ является псевдодополнением к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$. Так как $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\pi_2} = (1)$. Если $\mathfrak{H}_1$ — τ-замкнутая n-кратно насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{M} = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi(\mathfrak{H}_1) \cap \pi_1 = \varnothing$. Последнее означает, что $\mathfrak{H}_1$ — формация групп, порядки которых не делятся на простые числа из π_1, т. е. $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{\pi_2}$. Отметим, что $(\mathfrak{M}^*)^* = \mathfrak{M}$ является псевдодополнением к $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ в $\mathfrak{F}$. Действительно, так как $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\pi_2} = (1)$. Если $\mathfrak{H}_2$ — τ-замкнутая n-кратно насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{N}_{\pi_2} = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi(\mathfrak{H}_2) \cap \pi_2 = \varnothing$. Последнее означает, что $\mathfrak{H}_2$ — формация групп, порядки которых не делятся на простые числа из π_2, т. е. $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{M}$. Более того,

$$\mathfrak{M}^* \vee_n^\tau (\mathfrak{M}^*)^* = \mathfrak{N}_{\pi_2} \vee_n^\tau \mathfrak{M} = \mathfrak{F}.$$

Кроме того, решетка $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ дистрибутивна (см. [203, с. 176]). Следовательно, $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка. Теорема доказана.

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то получаем следующее утверждение.

4.3.3 Следствие ([52, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно насыщенная формация. Тогда решетка $L_n(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

4.3.4 Лемма ([63, теорема 3]). *Пусть $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form} G$ — однопорожденная τ-замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда решетка $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ имеет лишь конечное число атомов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l_\infty^\tau \mathrm{form} A$ для некоторой простой группы A. Пусть A — неабелева группа и $\pi = \pi(G)$. В силу леммы 4.1.9 $\mathfrak{S}_\pi l_0^\tau \mathrm{form} G \in l_\infty^\tau$. Следовательно, имеет место включение

$$\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form} G \subseteq \mathfrak{S}_\pi l_0^\tau \mathrm{form} G.$$

Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $A \in \mathfrak{F}$. Значит, $A \in \mathfrak{S}_\pi l_0^\tau \mathrm{form} G$. Поскольку A — простая группа, то A — монолитическая группа с неабелевым монолитом $A = \mathrm{Soc}(A)$. Значит, $A \in l_0^\tau \mathrm{form} G$. По лемме 4.1.10

$$l_0^\tau \mathrm{form} G = \tau \mathrm{form} G = \mathrm{QR_0S_{\overline{\tau}}}(G).$$

Отсюда $A \in \mathrm{QR_0S_{\overline{\tau}}}(G)$. В силу леммы 4.1.11

$$\mathrm{QR_0S_{\overline{\tau}}}(G) = \mathrm{QR_0QS_{\overline{\tau}}}(G) = \mathrm{Q}(\mathrm{R_0QS_{\overline{\tau}}}(G)) =$$

$$= \mathrm{Q}(\mathrm{R_0}(\mathrm{QS_{\overline{\tau}}}(G))) = \mathrm{Q}(\mathrm{R_0}\mathfrak{H}) = \mathrm{QR_0}\mathfrak{H},$$

где согласно лемме 4.1.5 $\mathfrak{H} = \mathrm{QS_{\overline{\tau}}} G$ — τ-замкнутая полуформация, порожденная группой G. По леммам 4.1.10 и 4.1.12

$$\mathrm{QR_0}\mathfrak{H} = \mathrm{form}\mathfrak{H} = \tau \mathrm{form}\mathfrak{H} = l_0^\tau \mathrm{form}\mathfrak{H}.$$

Итак, $A \in l_0^\tau \mathrm{form}\mathfrak{H}$. Но тогда по лемме 4.4.3 $A \in \mathfrak{H} = \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}G$. Это означает, что в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

Пусть $|A| = p$ — простое число, $\pi = \pi(G)$. Класс всех π-групп $\mathfrak{G}_\pi$ — τ-замкнутая тотально насыщенная формация (см. [230, с. 24]). Поэтому из $A \in \mathfrak{G}_\pi$ следует

$$\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form} A \subseteq \mathfrak{G}_\pi.$$

Но π — конечное множество. Поэтому в $\mathfrak{G}_\pi$ имеется лишь конечное число τ-замкнутых тотально насыщенных подформаций, порожденных простой группой A порядка $p \in \pi = \pi(G)$. Это означает, что в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число разрешимых атомов. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 4.2.9 следует

4.3.5 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$ таких, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех различных $i, j \in I$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута тотально насыщена в том и только в том случае, когда τ-замкнута тотально насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

4.3.6 Лемма ([63, лемма 5]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда если формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Понятно, что любая τ-замкнутая тотально насыщенная формация есть объединение (в решетке l_∞^τ) своих однопорожденных τ-замкнутых тотально насыщенных подформаций (см. [158]), т. е.

$$\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form}\Big(\bigcup_{G\in\mathfrak{F}} l_\infty^\tau \mathrm{form} G\Big).$$

Значит, для доказательства леммы достаточно показать, что она справедлива для любой однопорожденной τ-замкнутой тотально насыщенной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$.

Пусть m — внутренний спутник формации $\mathfrak{M}$. Тогда если $p \in \in \pi(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p m(p) = M(p) \subseteq \mathfrak{M}$. Покажем прежде, что подформация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{M})$. Нулем этой решетки является формация (1), единицей — формация $\mathfrak{M}$. По условию леммы в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ найдется дополнение $\mathfrak{H}$ к $\mathfrak{N}_p$. Нулем решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ является формация (1), единицей — формация $\mathfrak{F}$. Тогда

$$\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee_\infty^\tau \mathfrak{H} \quad \text{и} \quad \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Согласно леммам 4.1.8 и 4.3.5,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$$

и формации $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{H}$ являются τ-замкнутыми тотально насыщенными. Поэтому по лемме 4.1.7

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) =$$

$$= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) =$$
$$= \mathfrak{N}_p \vee_{\infty}^{\tau} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}).$$

Поскольку $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1)$, то

$$\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1).$$

Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в $\mathfrak{M}$, т. е. формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{M})$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Согласно лемме 4.3.4 в $\mathfrak{M}$ имеется лишь конечное число подформаций, являющихся атомами решетки $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{M})$. Пусть число атомов решетки $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{M})$ равно k. Проведем индукцию по k. Согласно леммам 4.1.8 и 4.3.5,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$$

и формация $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально насыщенной. Заметим, что поскольку один из атомов $\mathfrak{N}_p$ решетки $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{M})$ не содержится в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, то в решетке $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ число атомов меньше, чем k.

Если $k = 1$, то в решетке $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{M})$ имеется лишь один атом. Но в решетке $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ атомов меньше $k = 1$, т. е. в решетке $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ нет атомов. Последнее возможно лишь в случае, когда $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p$. Следовательно, любая группа из $\mathfrak{M}$ нильпотентна, т. е. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

Предположим теперь, что $k > 1$ и утверждение леммы верно для всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций, у которых решетка τ-замкнутых тотально насыщенных подформаций имеет число атомов меньше k. В этом случае утверждение для формации $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ верно по индукции. Но $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Поэтому каждая группа G из $\mathfrak{M}$ имеет вид:

$$G = A \times B,$$

где $A \in \mathfrak{N}_p$, $B \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Значит, утверждение леммы выполняется для однопорожденной формации $\mathfrak{M}$. Итак, утверждение леммы выполняется и для формации $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form}\Big(\bigcup\limits_{G \in \mathfrak{F}} l_\infty^\tau \mathrm{form} G\Big)$, т. е. $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Лемма доказана.

4.3.7 Теорема ([63, теорема 2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда решетка $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая тотально насыщенная формация. Заметим, что для каждой τ-замкнутой тотально насыщенной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$ формация $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$, где $\pi = \pi(\mathfrak{M})$. Действительно, поскольку $\pi \cap \pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}) = \varnothing$, то $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}) = (1)$, и если $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Последнее означает, что $\mathfrak{H}$ — формация групп, порядки которых не делятся на простые числа из $\pi(\mathfrak{M})$, т. е. $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_{\pi'}$. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap$ $\cap\, \mathfrak{G}_{\pi'}$. Поэтому $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$.

Допустим, что $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка. Если f — внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$ и $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. По доказанному выше $\mathfrak{N}_p^* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$. Заметим, что $(\mathfrak{N}_p^*)^* = \mathfrak{N}_p$ — псевдодополнение элемента $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$. Действительно, поскольку $\{p\} \cap$ $\cap\, p' = \varnothing$, то $\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}) = (1)$. Если $\mathfrak{H}_1$ — τ-замкнутая тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}_1 \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}) = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi(\mathfrak{H}_1) \cap p' = \varnothing$. Последнее означает, что $\mathfrak{H}_1$ — формация групп, порядки которых не делятся на простые числа из p', т. е. $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}_p$. Вместе с тем, согласно нашему допущению, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p^* \vee_\infty^\tau (\mathfrak{N}_p^*)^* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}) \vee_\infty^\tau \mathfrak{N}_p$. Следовательно, для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$. Применяя лемму 4.3.6 видим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ — τ-замкнутая тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\pi_1 = \pi(\mathfrak{M})$ и $\pi_2 = \pi \setminus \pi_1$. Если $\pi_1 = \pi$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Действительно, включение $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{M}$, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда группа G монолитична с монолитом $R =$ $= G^{\mathfrak{M}}$. Так как подгруппа нильпотентной группы нильпотентна, то $R \subseteq \mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{N}_{\pi_1}$. Если $p \in \pi(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{N}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{M}$ для всех $p \in \pi_1$. Последнее означает, что $G \in \mathfrak{N}_{\pi_1}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Итак, остается заключить, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Легко видеть, что (1) — дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$. Если же $\pi_1 \subset \pi$, то $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ — дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$. Действительно, поскольку $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, то $\mathfrak{M} \cap \cap \mathfrak{N}_{\pi_2} = (1)$. Предположим, что $\mathfrak{K} = l_\infty^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\pi_2}) = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}_{\pi_2} \neq = \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_{\pi_2} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\pi_2} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{K} = l_\infty^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\pi_2}) \subseteq l_\infty^\tau \mathrm{form}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{K}$. Тогда группа G монолитична и нильпотентна. Значит, она примарна. Поэтому либо $G \in \mathfrak{N}_{\pi_2}$, либо $G \in \mathfrak{N}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{M}$. Это означает, что $G \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\pi_2} \subseteq \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}_{\pi_2} = \mathfrak{K}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{K} = \mathfrak{F}$.

Итак, $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями. Покажем, что дополнение $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{N}_{\pi_2}$ является псевдодополнением к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$. Так как $\pi_2 \cap \pi_1 = \varnothing$, то $\mathfrak{N}_{\pi_2} \cap \mathfrak{M} = (1)$. Если $\mathfrak{H}_1$ — τ-замкнутая тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{M} = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi(\mathfrak{H}_1) \cap \pi_1 = \varnothing$. Последнее означает, что $\mathfrak{H}_1$ — формация групп, порядки которых не делятся на простые числа из π_1, т. е. $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{\pi_2}$.

Отметим, что $(\mathfrak{M}^*)^* = \mathfrak{M}$ является псевдодополнением к $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ в $\mathfrak{F}$. Действительно, так как $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\pi_2} = (1)$. Если $\mathfrak{H}_2$ — τ-замкнутая тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{N}_{\pi_2} = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi(\mathfrak{H}_2) \cap \pi_2 = \varnothing$. Последнее означает, что $\mathfrak{H}_2$ — формация групп, порядки которых не делятся на простые числа из π_2, т. е. $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{M}$. Более того,

$$\mathfrak{M}^* \vee_\infty^\tau (\mathfrak{M}^*)^* = \mathfrak{N}_{\pi_2} \vee_\infty^\tau \mathfrak{M} = \mathfrak{F}.$$

Кроме того, решетка $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ дистрибутивна [313]. Следовательно, $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ — стоунова решетка. Теорема доказана.

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то получаем следующее утверждение.

4.3.8 Следствие ([52, теорема 2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. Тогда решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

4.4 Тождества решеток насыщенных формаций

В монографии [230] и в недавно вышедших книгах [246, 275] показано, что конструкции и результаты общей теории решеток являются полезным инструментом для изучения групп и классов групп. В частности, доказано, что решетка всех насыщенных формаций модулярна [230]. В дальнейшем этот результат был развит в различных направлениях. В книге [203] была установлена модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций для каждого подгруппового функтора τ; в работе [241] А. Баллестером-Болинше и Л.А. Шеметковым показано, что решетка всех p-насыщенных формаций модулярна; А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков доказали [206, 209] модулярность решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций и решетки всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, соответственно; И.П. Шабалина доказала [219] модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.

Ввиду модулярности решетки всех формаций [192] следующая теорема 4.4.1 показывает, что все вышеназванные результаты являются проявлением лишь одной закономерности.

4.4.1 Теорема ([53, 320, теорема 1]). *Пусть $n > 0$. Тогда всякое тождество решетки всех τ-замкнутых формаций справедливо в решетке всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.*

Вторая теорема дает дальнейшую информацию о решетке всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.

4.4.2 Теорема ([53, теорема 3]; [320, теорема 2]). *Пусть $n > 0$. Тогда если ω — бесконечное множество, то системы тождеств решетки всех τ-замкнутых формаций и решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций совпадают.*

Свойство отделимости. Для доказательства этих теорем нам потребуется доказать несколько вспомогательных утверждений.

Напомним, что *полуформацией* [230] называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов.

4.4.3 Лемма. *Пусть A — монолитическая группа с неабелевым монолитом R, $\mathfrak{M}$ — некоторая полуформация и $A \in l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. Тогда

$$A \in l^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}\mathfrak{M} = \tau\mathrm{form}\mathfrak{M}.$$

Пусть $A \notin \mathfrak{M}$. Тогда согласно лемме 1.4.16, в $\tau\mathrm{form}\mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами N, M, $N_1, \ldots, N_t$; $M_1, \ldots$ $\ldots, M_t (t \geqslant 2)$, что выполняются следующие утверждения:

1) $A \cong H/N$ и $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;

2) H/N_i — монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом M_i/N_i, который H-изоморфен M/N.

Понятно, что $C_H(M/N) = N$. Значит, $N_i \subseteq N$. Поэтому $A \cong$ $\cong H/N \in \mathfrak{M}$. Противоречие. Итак, утверждение леммы при $n = 0$ верно.

Пусть $n > 0$ и при $n - 1$ лемма верна.

Обозначим через f минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}$.

Если $\omega \cap \pi(R) = \varnothing$, то $A_{\omega d} = 1$ и поэтому по лемме 1.2.15

$$A \cong A/A_{\omega d} \in f(\omega') \subseteq l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\mathfrak{M}.$$

Следовательно, $A \in \mathfrak{M}$. Пусть $\omega \cap \pi(R) \neq \varnothing$ и $p \in \omega \cap \pi(R)$. Тогда $F_p(A) = 1$ и поэтому по лемме 1.2.15

$$A \cong A/F_p(A) \in f(p) \subseteq l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\mathfrak{M}.$$

Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

4.4.4 Лемма. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *полуформация и* $A \in l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. *Тогда справедливы следующие условия*:

1) *если* $O_p(A) = 1$ *и* $p \in \omega$, *то* $A \in l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$, *где* $\mathfrak{M}_1 =$ $= \{G/O_p(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$;

2) *если* $A_{\omega d} = 1$, *то* $A \in l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}_2$, *где* $\mathfrak{M}_2 = \{G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M}\}$.

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{M}$, то утверждение леммы очевидно. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $A \notin \mathfrak{M}$.

Сначала предположим, что A — монолитическая группа с монолитом R. Пусть $n = 0$. Тогда $A \in l^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}\mathfrak{M} = \tau\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Значит, согласно лемме 1.4.16, в формации $\tau\mathrm{form}\mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами N, M, $N_1, \ldots, N_t$; $M_1, \ldots$ $\ldots, M_t (t \geqslant 2)$, что выполняются следующие условия: 1) $H/N \cong A$, $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$; 2) $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$; 3) H/N_i — монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом M_i/N_i, который H-изоморфен M/N. Значит, ввиду того, что $O_p(A) = 1$, и из условий 2) и 3) следует, что

$$A \in \mathrm{QR}_0\{H/N_1, \ldots, H/N_t\} \subseteq \mathrm{form}\mathfrak{M}_1.$$

Пусть $n > 0$. Предположим сначала, что $O_p(A) = 1$. Если R — неабелева группа, то, согласно лемме 4.4.3, $A \in \mathfrak{M}$, что противоречит нашему первоначальному соглашению относительно группы A. Значит, R — q-группа, где $q \in \omega \setminus \{p\}$. Следовательно, $F_q(A) =$ $= O_q(A)$. Поскольку для любой группы G имеет место

$$G/G_{\omega d} \cong (G/O_p(G))/(G_{\omega d}/O_p(G)) = (G/O_p(G))/(G/O_p(G))_{\omega d},$$

то по лемме 1.2.15 $f(\omega') = h(\omega')$, где f и h — минимальные $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значные ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$ соответственно. Значит, если $q \notin \omega$, то $A_{\omega d} = 1$ и поэтому

$$A \cong A/A_{\omega d} \in f(\omega') = h(\omega') \subseteq \mathfrak{H}.$$

Пусть $q \in \omega$. Тогда поскольку для любой группы G имеет место

$$G/F_q(G) \cong (G/O_p(G))/(F_q(G)/O_p(G)) =$$

$$= (G/O_p(G))/F_q(G/O_p(G)),$$

то по лемме 1.2.15 $f(q) = h(q)$. Значит, $A/O_q(A) \in \mathfrak{H}$ и, следовательно,

$$A/F_r(A) \cong (A/O_q(A))/(F_r(A)/O_q(A)) =$$

$$= (A/O_q(A))/F_r(A/O_q(A)) \in h(r),$$

для всех $r \in \omega \cap \pi(A)$. Значит, $A \in \mathfrak{H}$. Аналогично доказывается, что $A \in l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_2 = \{G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M}\}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathrm{Soc}(A) = N_1 \times \ldots \times N_t$, где $t > 1$. Пусть M_i — наибольшая нормальная в A подгруппа, содержащая $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_t$, но не содержащая N_i, $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда согласно лемме 4.1.15, $A \in \mathrm{R}_0(A/M_1, \ldots, A/M_t)$, где A/M_i — монолитическая группа с монолитом N_iM_i/M_i и $O_p(A/M_i) = 1$. Понятно, что $A/M_i \in l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Значит, согласно уже доказанному, $A/M_i \in l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$. Следовательно, $A \in \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Для произвольной совокупности τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ положим

$$\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i\Big),$$

в частности,

$$\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Функция $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$ называется $l^{\tau}_{\omega_n}$-*значной*, если все ее значения принадлежат решетке $l^{\tau}_{\omega_n}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность $l^{\tau}_{\omega_n}$-значных функций вида

$$f_i : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$

Тогда через $\vee^{\tau}_{\omega_n}(f_i \mid i \in I)$ мы обозначаем такую функцию f, что $f(\omega') = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i \in I} f_i(\omega')\Big)$, в частности,

$$\big(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} f_2\big)(\omega') = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(f_1(\omega') \cup f_2(\omega')\big)$$

и при $p \in \omega$ имеет место $f(p) = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} f_i(p)\Big)$, в частности,

$$\big(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} f_2\big)(p) = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(f_1(p) \cup f_2(p)\big),$$

если по крайней мере одна из формаций $f_i(p) \neq \varnothing$. Если же $f_i(p) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагаем $f(p) = \varnothing$.

4.4.5 Лемма. *Пусть f_i — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник τ-замкнутой n-кратно ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}_i$, где $i \in I$. Тогда $\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$ — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\pi\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right) = \bigcup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i) = \pi(\mathfrak{F}).$$

Пусть $f = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$, а h — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$, то для любого $i \in I$ имеет место $f_i(p) = \varnothing$. Значит, $f(p) = \varnothing$. Понятно также, что $h(p) = \varnothing$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $f_i(p) \neq \varnothing$. Значит, согласно лемме 1.2.15, имеет место

$$h(p) = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(G/F_p(G) \mid G \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)\right) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\right) = \big(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)\big)(p).$$

Кроме того, по лемме 1.2.15, имеем

$$h(\omega') = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(G/G_{\omega d} \mid G \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{F}_i\big)\right) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} f_i(\omega')\right) = \big(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)\big)(\omega').$$

Итак, $\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$ — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Лемма доказана.

4.4.6 Лемма. *Для произвольного набора $\{\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i) \mid i \in I\}$ τ-замкнутых ω-насыщенных формаций $\mathfrak{F}_i$, где f_i — некоторый внутренний $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник $\mathfrak{F}_i$, справедливо равенство*

$$\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_\omega\big(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)\big).$$

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций и f_i — некоторый внутренний $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Пусть

$$\mathfrak{F} = \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I), \quad \mathfrak{M} = LF_\omega\big(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)\big)$$

и h_i — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Тогда ввиду леммы 4.4.5 $h = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(h_i \mid i \in I)$ — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник τ-замкнутой формации $\mathfrak{F}$ и, очевидно, $h \leqslant f = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Предположим, что обратное включение неверно. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Обозначим через R монолит группы G. Тогда $R = G^{\mathfrak{F}}$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$.

Предположим, что R — неабелева группа. Тогда $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \cong G/F_p(G) \in \big(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)\big)(p) = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big).$$

Значит, согласно лемме 4.4.3

$$G \in \bigcup_{i\in I} f_i(p) \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, R — p-группа. Тогда $O_p(G) = F_p(G)$. Но

$$G \in \mathfrak{M} = LF_\omega\big(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)\big).$$

Значит, $G/O_p(G) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} f_i(p)\Big)$. Поскольку при этом имеет место $O_p(G/O_p(G)) = 1$, то согласно лемме 4.4.4 и лемме 1.2.15

$$G/O_p(G) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\Big(A/O_p(A) \mid A \in \bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(A/O_p(A) \mid A \in f_i(p)\big)\Big) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} h_i(p)\Big) = \big(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(h_i \mid i \in I)\big)(p) = h(p).$$

Значит, согласно лемме 1.2.14, $G \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $\omega \cap \pi(R) = \varnothing$ и поэтому $G_{\omega d} = 1$. Снова применяя лемму 4.4.4 и лемму 1.2.15, имеем

$$G \cong G/G_{\omega d} \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\Big(A/A_{\omega d} \mid A \in \bigcup_{i\in I} f_i(\omega')\Big) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(A/A_{\omega d} \mid A \in f_i(\omega')\big)\Big) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} h_i(\omega')\Big) = \big(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(h_i \mid i \in I)\big)(\omega') = h(\omega').$$

Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Подгрупповой функтор τ называется *замкнутым* [203], если $H \in \tau(G)$ всегда влечет $\tau(H) \subseteq \tau(G)$. Если τ — подгрупповой функтор, то символом $\overline{\tau}$ обозначают пересечение всех таких замкнутых функторов τ_i, что $\tau \leqslant \tau_i$.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\mathrm{S}_{\tau}\mathfrak{X}$ обозначают множество всех таких групп H, что $H \in \tau(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$ (см. [203]).

Пересечение всех τ-замкнутых полуформаций, содержащих данную совокупность групп $\mathfrak{X}$, называется *τ-замкнутой полуформацией, порожденной* $\mathfrak{X}$ [203].

Напомним, что совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций* [203], если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ, и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой другой формации $\mathfrak{M}$ из Θ. Формации, принадлежащие Θ, называются *Θ-формациями.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полная решетка формаций Θ называется *$\mathfrak{X}$-отделимой* (см. [203]), если для любого терма $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_{\Theta}\}$, любых Θ-формаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \xi(\Theta\mathrm{form}A_1, \ldots, \Theta\mathrm{form}A_m)$.

4.4.7 Лемма. *Решетка* $l_{\omega_n}^{\tau}$ $\mathfrak{G}$*-отделима.*

Доказательство. Пусть $\xi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — произвольный терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$, $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ — произвольные формации из $l_{\omega_n}^{\tau}$ и $A \in \xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$. Индукцией по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$ в терм ξ покажем, что найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, что $A \in \xi(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_m)$, где $\mathfrak{M}_i = l_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}A_i$. При $r = 0$ это очевидно. Индукцией по n докажем, что данное утверждение верно при $r = 1$. Пусть $n = 0$, т. е. либо $A \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, либо

$$A \in \mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_0}^{\tau} \mathfrak{F}_2 = l_{\omega_0}^{\tau}\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

В первом случае $A \in \mathrm{form}A \cap \mathrm{form}A$. Во втором случае, по лемме 4.1.10 $A \cong H/N$, где

$$H \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Понятно, что $H^{\mathfrak{F}_1} \cap H^{\mathfrak{F}_2} = 1$. Значит,

$$A \in \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_1},\ H/H^{\mathfrak{F}_2}) =$$

$$= \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_1}) \vee \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_2}) \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_0}^{\tau} \mathfrak{F}_2.$$

Пусть $n > 0$, $\{p_1, \ldots, p_t\} = \pi(A)$ и $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F}_2$. Тогда ввиду леммы 1.2.15 и леммы 4.4.5

$$A/F_{p_i}(A) \in f_1(p_i) \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau} f_2(p_i), \quad A/A_{\omega d} \in f_1(\omega') \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau} f_2(\omega'),$$

где f_j — минимальный $l_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_j$, где $j = 1, 2$. По индукции найдутся такие группы $A_{i_1} \in f_1(p_i)$, $A_{i_2} \in f_2(p_i)$, $T_1 \in f_1(\omega')$, $T_2 \in f_2(\omega')$, что

$$A/F_{p_i}(A) \in (l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}A_{i_1}) \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau} (l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}A_{i_2}),$$

$$A/A_{\omega d} \in (l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}\, T_1) \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau} (l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}\, T_2).$$

Ясно, что

$$(l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}A_{i_1}) \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau} (l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}A_{i_2}) = l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A_{i_1},\, A_{i_2}),$$

$$(l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}\, T_1) \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau} (l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}\, T_2) = l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(T_1,\, T_2).$$

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — полуформация, порожденная группой A_{i_1}, $\mathfrak{M}_2$ — полуформация, порожденная группой A_{i_2}. По лемме 4.1.5 $\mathfrak{M}_1 = (A_1, \ldots, A_t)$ и $\mathfrak{M}_2 = (B_1, \ldots, B_r)$, где $A_1, \ldots, A_t \in \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}(A_{i_1})$ и

$B_1, \ldots, B_r \in \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}(A_{i_2})$. Понятно, что $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ — τ-замкнутая полуформация и

$$A/F_{p_i}(A) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A_{i_1},\, A_{i_2}) = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2).$$

Значит, ввиду леммы 4.4.4 мы можем считать, что

$$|O_{p_i}(A_k)| = 1 = |O_{p_i}(B_l)|$$

для всех $k = 1, \ldots, t$ и $l = 1, \ldots, r$.

Применяя лемму 4.4.4 и аналогичные соображения, мы можем считать, что $(T_i)_{\omega d} = 1$, $i = 1,\, 2$.

Пусть $D_{i_1} = A_1 \times \ldots \times A_t$ и $D_{i_2} = B_1 \times \ldots \times B_r$. Тогда

$$|O_{p_i}(D_{i_1})| = 1 = |O_{p_i}(D_{i_2})|.$$

Кроме того, понятно, что

$$A/F_{p_i}(A) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(D_{i_1},\, D_{i_2}) \subseteq l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A_{i_1},\, A_{i_2}).$$

Пусть Z_i — группа порядка p_i, $B_{i_1} = Z_i \wr D_{i_1}$, $B_{i_2} = Z_i \wr D_{i_2}$. Ввиду леммы 1.2.14 $B_{i_1} \in \mathfrak{F}_1$, $B_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$. Значит,

$$A_1 = B_{1_1} \times B_{2_1} \times \ldots \times B_{t_1} \times T_1 \in \mathfrak{F}_1,\ \ A_2 = B_{1_2} \times B_{2_2} \times \ldots \times B_{t_2} \times T_2 \in \mathfrak{F}_2.$$

Покажем, что

$$A \in \mathfrak{F} = (l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A_1) \vee^{\tau}_{\omega_n} (l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A_2).$$

Для этого достаточно установить, что $A/A_{\omega d} \in f(\omega')$ и $A/F_{p_i}(A) \in$ $\in f(p_i)$, где f — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Понятно, что $B_{i_1} \in \mathfrak{F}$. Значит, $B_{i_1}/F_{p_i}(B_{i_1}) \in f(p_i)$. Но поскольку $O_{p_i}(D_{i_1}) = 1$, то $B_{i_1}/F_{p_i}(B_{i_1}) \cong D_{i_1}$, т. е. $D_{i_1} \in f(p_i)$. Аналогично убеждаемся, что $D_{i_2} \in f(p_i)$. Следовательно,

$$A/F_{p_i}(A) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(D_{i_1}, D_{i_2}) \subseteq f(p_i).$$

Понятно, что $T_1, T_2 \in \mathfrak{F}$. Значит, по лемме 1.2.15

$$T_i \cong T_i/(T_i)_{\omega d} \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{F}) = f(\omega').$$

Следовательно, $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(T_1,\, T_2) \subseteq f(\omega')$. Поэтому $A/A_{\omega d} \in f(\omega')$. Этим самым доказано утверждение леммы при $r = 1$.

Пусть теперь терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$ и для термов с меньшим числом вхождений лемма верна. Пусть ξ имеет вид

$$\xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) \triangle \xi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}),$$

где $\triangle \in \{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$, и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ формацию $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a})$, а через $\mathfrak{H}_2$ — формацию $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда, согласно доказанному выше, найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$, что

$$A \in l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A_1 \triangle l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A_2.$$

С другой стороны, поскольку число операций в терме ξ_1 меньше r, по индукции найдутся такие группы $B_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, B_a \in \mathfrak{F}_{i_a}$, что $A_1 \in \in \xi_1(l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}B_1, \ldots, l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}B_a)$. Аналогично, найдутся такие группы $C_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, C_b \in \mathfrak{F}_{j_b}$, что $A_2 \in \xi_2(l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}C_1, \ldots, l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}C_b)$.

Пусть $x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_a} \in \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\}$ и пусть $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\} \cap \{x_{j_1}, \ldots \ldots, x_{j_b}\} = \varnothing$. Пусть

$$D_{i_k} = \begin{cases} B_k, & \text{если } k < t+1, \\ B_k \times C_q, & \text{если } x_{i_k} = x_{j_q} \text{ для некоторого } q \in \{1, \ldots, b\} \\ & \text{при всех } k \geqslant t+1. \end{cases}$$

Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_a}\}$. Обозначим через $\mathfrak{R}_p$ формацию $l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}D_{i_p}$, где $p = 1, \ldots, a$, а через $\mathfrak{X}_c$ — формацию $l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}D_{j_c}$, где $c = 1, \ldots, b$.
Таким образом,

$$A_1 \in \xi_1(l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}B_1, \ldots, l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}B_a) \subseteq$$
$$\subseteq \xi_1(l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}D_{i_1}, \ldots, l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}D_{i_a}) = \xi_1(\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_a),$$
$$A_2 \in \xi_2(l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}C_1, \ldots, l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}C_b) \subseteq$$
$$\subseteq \xi_2(l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}D_{j_1}, \ldots, l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}D_{j_b}) = \xi_2(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_b).$$

Следовательно, найдутся такие формации $\mathfrak{K}_1 = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}K_1, \ldots, \mathfrak{K}_m = = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}K_m$, что

$$A \in \xi_1(\mathfrak{K}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{K}_{i_a}) \triangle \xi_2(\mathfrak{K}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{K}_{j_b}) = \xi(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m),$$

где $K_i \in \mathfrak{F}_i$, $\quad i = 1, \ldots, m$. Таким образом, решетка $l^{\tau}_{\omega_n}$ является $\mathfrak{G}$-отделимой. Лемма доказана.

Описание тождеств решеток. Для всякого терма ξ сигнатуры $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$ через $\overline{\xi}$ мы обозначаем терм сигнатуры $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}\}$, получаемый из терма ξ заменой каждого вхождения символа $\vee^{\tau}_{\omega_n}$ на символ $\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}$.

4.4.8 Лемма. *Пусть* $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ *— терм сигнатуры* $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$, f_i *— внутренний* $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$*-значный* ω*-локальный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, *где* $i = 1, \ldots, m$; $n \geqslant 1$. *Тогда*

$$\xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m) = LF_{\omega}\big(\overline{\xi}(f_1, \ldots, f_m)\big).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу r вхождений в терм ξ символов из $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$.

Основание индукции (случай $r = 1$) вытекает из лемм 4.4.6 и 1.2.12.

Предположим теперь, что терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$. Пусть терм ξ имеет вид

$$\xi(x_1, \ldots, x_m) = \xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) \bigtriangleup \xi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}),$$

где $\bigtriangleup \in \{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$,

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \{x_1, \ldots, x_m\}$$

и лемма для термов ξ_1 и ξ_2 выполняется. Тогда

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = LF_{\omega}\big(\overline{\xi}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})\big),$$

$$\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = LF_{\omega}\big(\overline{\xi}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\big).$$

Понятно, что $\overline{\xi}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})$ и $\overline{\xi}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})$ — внутренние $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значные ω-локальные спутники формаций $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a})$ и $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{F}_{j_b})$ соответственно. Значит, по индукции

$$\xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m) = \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) \bigtriangleup \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) =$$

$$= LF_{\omega}\big(\overline{\xi}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})\ \overline{\bigtriangleup}\ \overline{\xi}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\big) = LF_{\omega}\big(\overline{\xi}(f_1, \ldots, f_m)\big),$$

где $\overline{\bigtriangleup} = \cap$, если $\bigtriangleup = \cap$, и $\overline{\bigtriangleup} = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}$, если $\bigtriangleup = \vee^{\tau}_{\omega_n}$. Лемма доказана.

4.4.9 Лемма. *Пусть* Θ *—* $\mathfrak{X}$*-отделимая решетка формаций,* η *— такая ее подрешетка, которая со всякой своей формацией* $\mathfrak{F}$ *содержит и все ее однопорожденные* Θ*-подформации вида* $\Theta\mathrm{form}A$, *где* $A \in \mathfrak{X}$. *Тогда тождество* $\xi_1 = \xi_2$ *сигнатуры* $\{\cap, \vee_{\Theta}\}$ *истинно в* η, *если оно выполняется для всех однопорожденных* Θ*-формаций из* η.

Доказательство. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}$ — переменные, входящие в терм ξ_1; $x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}$ — переменные, входящие в терм ξ_2; и пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}; \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b} \in \eta$. Покажем, что

$$\mathfrak{F} = \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) \subseteq \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \mathfrak{M}.$$

Не теряя общности, мы можем считать, что

$$x_{j_1}, \ldots, x_{j_t} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\},$$

но

$$\{x_{j_{t+1}}, \ldots, x_{j_b}\} \cap \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} = \varnothing.$$

Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда по условию найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_{i_1}, \ldots$ $\ldots, A_{i_a}$, что $A_{i_k} \in \mathfrak{F}_{i_k}$ (где $k = 1, \ldots, a$) и $A \in \xi_1(\Theta\mathrm{form} A_{i_1}, \ldots$ $\ldots, \Theta\mathrm{form} A_{i_a})$.

Пусть $\mathfrak{H}_{i_k} = \Theta\mathrm{form} A_{i_k}$, и пусть

$$\mathfrak{H}_{j_k} = \begin{cases} \mathfrak{H}_{i_c}, & \text{где } x_{j_k} = x_{i_c}, \text{ для некоторого } c \in \{1, \ldots, a\} \\ & \text{для всех } k \in \{1, \ldots, t\}, \\ \Theta\mathrm{form} B_{j_k} & \text{для некоторой группы } B_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k} \\ & \text{для каждого } k > t. \end{cases}$$

По условию $\xi_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{j_b})$, но $\xi_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{j_b}) \subseteq$ $\subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Аналогично доказывается обратное включение. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.4.1. Зафиксируем некоторое тождество

$$\xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) = \xi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}) \tag{4.4}$$

сигнатуры $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$. Пусть

$$\overline{\xi}_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) = \overline{\xi}_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}) \tag{4.5}$$

— то же самое тождество, но уже в сигнатуре $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}\}$.

Предположим, что тождество (4.5) выполняется в решетке $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Пусть

$$\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}; \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}$$

— произвольные τ-замкнутые n-кратно ω-насыщенные формации. Докажем, что

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Пусть f_{i_c} — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_{i_c}$ (где $c = 1, \ldots, a$), f_{j_d} — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_{j_d}$ (где $d = 1, \ldots, b$). Тогда по лемме 4.4.8

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = LF_\omega\big(\overline{\xi}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})\big),$$
$$\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = LF_\omega\big(\overline{\xi}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\big).$$

Кроме того, формации

$$f_{i_1}(\omega'), \ldots, f_{i_a}(\omega');\ f_{j_1}(\omega'), \ldots, f_{j_b}(\omega')$$

и формации

$$f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p);\ f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)$$

для произвольного простого числа $p \in \omega$ принадлежат решетке $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Значит, по индукции

$$\overline{\xi}_1\big(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a}\big)(p) = \overline{\xi}_1\big(f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p)\big) =$$
$$= \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)\big) = \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b}\big)(p)$$

и

$$\overline{\xi}_1\big(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a}\big)(\omega') = \overline{\xi}_1\big(f_{i_1}(\omega'), \ldots, f_{i_a}(\omega')\big) =$$
$$= \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}(\omega'), \ldots, f_{j_b}(\omega')\big) = \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b}\big)(\omega').$$

Следовательно,

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Таким образом, тождество (4.4) выполняется в решетке $l^{\tau}_{\omega_n}$. Отсюда вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

Отметим основные следствия из теоремы 4.4.1.

4.4.10 Следствие (А.Н. Скиба [192]). *Решетка всех насыщенных формаций является модулярной.*

4.4.11 Следствие (Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба [230]). *Решетка всех n-кратно насыщенных формаций является модулярной.*

4.4.12 Следствие (Баллестер-Болинше, Л.А. Шеметков [241]). *Решетка всех p-насыщенных формаций является модулярной.*

4.4.13 Следствие (А.Н. Скиба [203]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является модулярной.*

4.4.14 Следствие (Баллестер-Болинше, Л.А. Шеметков [241]). *Решетка всех p-насыщенных формаций является модулярной.*

4.4.15 Следствие (И.П. Шабалина [219]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций является модулярной.*

Доказательство теоремы 4.4.2. Зафиксируем некоторое тождество

$$\xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) = \xi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}) \tag{4.6}$$

сигнатуры $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$. Пусть

$$\overline{\xi}_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) = \overline{\xi}_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}) \tag{4.7}$$

— то же самое тождество, но уже в сигнатуре $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}\}$.

Предположим, что тождество (4.6) выполняется в решетке $l^{\tau}_{\omega_n}$. Покажем, что тождество (4.7) выполняется в решетке $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Для этого ввиду лемм 4.4.7 и 4.4.9 достаточно установить, что если $\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{F}_{i_a}$; $\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}$ — произвольные однопорожденные τ-замкнутые $(n-1)$-кратно ω-насыщенные формации, то

$$\overline{\xi}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \overline{\xi}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Пусть

$$\mathfrak{F}_{i_1} = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}A_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a} = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}A_{i_a};$$
$$\mathfrak{F}_{j_1} = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}A_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b} = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}A_{j_b}.$$

Выберем такое простое число $p \in \omega$, что $p \notin \pi(A_{i_1}, \ldots, A_{i_a}; A_{j_1}, \ldots$ $\ldots, A_{j_b})$. Пусть

$$B_{i_1} = Z_p \wr A_{i_1}, \ldots, B_{i_a} = Z_p \wr A_{i_a};$$

$$B_{j_1} = Z_p \wr A_{j_1}, \ldots, B_{j_b} = Z_p \wr A_{j_b},$$

где Z_p — группа простого порядка p.
Поскольку формации

$$\mathfrak{M}_{i_1} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}B_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_a} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}B_{i_a};$$

$$\mathfrak{M}_{j_1} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}B_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_b} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}B_{j_b}$$

принадлежат решетке $l^{\tau}_{\omega_n}$, то

$$\mathfrak{F} = \xi_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_b}) = \mathfrak{M}.$$

Пусть f_{i_c} — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{M}_{i_c}$ (где $c = 1, \dots, a$); f_{j_d} — минимальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{M}_{j_d}$ (где $d = 1, \dots, b$). Тогда ввиду леммы 4.4.8

$$\xi_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_a}) = LF_{\omega}\big(\overline{\xi}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})\big),$$

$$\xi_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_b}) = LF_{\omega}\big(\overline{\xi}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})\big).$$

Пусть f и m — минимальные $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значные ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Тогда по лемме 1.2.15 3) и лемме 4.4.5

$$\overline{\xi}_1\big(f_{i_1}, \dots, f_{i_a}\big)(p) = \overline{\xi}_1\big(f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p)\big) = f(p)$$

и

$$\overline{\xi}_2\big(f_{j_1}, \dots, f_{j_b}\big)(p) = \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)\big) = m(p).$$

Значит,

$$\overline{\xi}_1\big(f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p)\big) = \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)\big).$$

Так как $O_p(A_{i_c}) = 1$, то, ввиду леммы 1.2.15 3), $f_{i_c}(p) = \mathfrak{F}_{i_c}$, где $c = 1, \dots, a$. Аналогично, $f_{j_d}(p) = \mathfrak{F}_{j_d}$, где $d = 1, \dots, b$.

Следовательно,

$$\overline{\xi}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \overline{\xi}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}),$$

т. е. тождество (4.7) истинно в решетке $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Таким образом, каждое тождество решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$ выполняется в решетке $l^{\tau}_{\omega_0}$. Отсюда ввиду теоремы 4.4.1 вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

4.4.16 Следствие (А.Н. Скиба [203]). *При любых целых неотрицательных n и m решетки l^{τ}_n и l^{τ}_m имеют одну и ту же систему тождеств.*

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то мы получаем следующий результат.

4.4.17 Следствие (Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба [230]). *При любых целых неотрицательных n и m решетки l_n и l_m имеют одну и ту же систему тождеств.*

4.5 Решетки кратно насыщенных формаций

В монографии [230] и в недавно вышедших книгах [246, 275] показано, что конструкции и результаты теории модулярных решеток весьма полезны для изучения групп и классов групп. В связи с этим многими авторами найдены серии модулярных решеток формаций групп. В частности, А.Н. Скиба доказал, что решетка всех насыщенных формаций модулярна [230]. В дальнейшем этот результат получил развитие в различных направлениях. В книге [203] была установлена модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций для каждого подгруппового функтора τ; в [241] А. Баллестером-Болинше и Л.А. Шеметковым показано, что решетка всех p-насыщенных формаций модулярна; А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым доказана модулярность решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций и решетки всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, соответственно [206, 209]; И.П. Шабалина доказала модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций [219].

Поскольку решетка всех τ-замкнутых формаций модулярна для любого подгруппового функтора τ, то возникает следующий естественный вопрос: *является ли решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций подрешеткой решетки всех τ-замкнутых формаций?*

В данном параграфе мы доказываем следующую теорему.

4.5.1 Теорема ([321, теорема]). *Пусть ω — множество простых чисел, $m > n \geqslant 0$, где m и n — целые числа и $|\omega| > 1$. Тогда решетка всех τ-замкнутых m-кратно ω-насыщенных формаций не является подрешеткой решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.*

Таким образом, ответ на вышеуказанный вопрос отрицателен.

Предварительные леммы

4.5.2 Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}$ — непустая формация и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{M}$ — n-кратно ω-насыщенная формация. Тогда $\mathfrak{F} = LF_\omega(m)$, где m — такой ω-локальный спутник, что $m(a) = \mathfrak{M}$ для любого $a \in \omega \cup$ $\cup \{\omega'\}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K} = LF_\omega(m)$. Покажем, что $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{K} \not\subseteq \mathfrak{F}$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Если R — ω'-группа, то $G_{\omega d} = 1$. Значит,

$$G \cong G/G_{\omega d} \in m(\omega') = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{M} = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, R — ωd-группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$. Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \cong G/F_p(G) \in m(p) = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{M} = \mathfrak{F},$$

что противоречит выбору группы G. Значит, R — абелева p-группа. Поскольку, согласно условию и ввиду теоремы 2.1.6, формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной, то $R \not\subseteq \Phi(G)$. Поэтому $R = C_G(R) = F_p(G) = F(G) = O_p(G)$ и, следовательно,

$$G/R = G/O_p(G) = G/F_p(G) \in m(p) = \mathfrak{M}.$$

Значит, $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$. Пусть $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{K}$ и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{K}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{K}}$. Предположим, что R — ω'-группа. Тогда $G_{\omega d} = 1$. Следовательно,

$$G \cong G/G_{\omega d} \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}.$$

Противоречие. Значит, R — ωd-группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$. Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Следовательно,

$$G \cong G/F_p(G) \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}.$$

Противоречие. Значит, R — абелева p-группа. Поскольку формация $\mathfrak{K} = LF_\omega(m)$ является ω-насыщенной, то $R \not\subseteq \Phi(G)$. Поэтому $R = C_G(R) = F_p(G) = F(G) = O_p(G)$. Следовательно,

$$G/R = G/O_p(G) = G/F_p(G) \in \mathfrak{M} = m(p).$$

Значит, по лемме 1.2.14 имеем $G \in \mathfrak{K}$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{K}$. Лемма доказана.

Согласно теореме 1.2.7 всякая ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ обладает таким ω-локальным спутником f, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник называется *каноническим спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Тогда символом Θ^{ω} обозначают [206] совокупность всех формаций, которые обладают ω-локальным Θ-значным спутником.

4.5.3 Лемма. *При любом натуральном n справедливо равенство*

$$(l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega} = l^{\tau}_{\omega_n}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \in (l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega}$. Тогда по определению $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-локальный спутник f, каждое непустое значение которого принадлежит решетке $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Это означает, что формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-насыщена. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута. Пусть $H \in \tau(G)$, где $G \in \mathfrak{F}$. И пусть $p \in \omega \cap \pi(H)$, $F_p = F_p(G)$. Тогда поскольку для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ τ-замкнута, то

$$H/H_{\omega d} = H/(G_{\omega d} \cap H) \cong HG_{\omega d}/G_{\omega d} \in f(\omega')$$

и

$$H/F_p(H) = H/(F_p \cap H) \cong HF_p/F_p \in f(p).$$

Итак, $H/H_{\omega d} \in f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$ имеет место $H/F_p(H) \in f(p)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута, а значит, $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_n}$. Следовательно, $(l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega} \subseteq l^{\tau}_{\omega_n}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_n}$ и F — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Очевидно, $F(\omega') = \mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Покажем, что для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ имеет место $F(p) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Прежде заметим, что ввиду леммы 1.5.7 имеет место $F(p) \in l_{\omega_{n-1}}$. Покажем, что формация $F(p)$ τ-замкнута. Пусть $H \in \tau(G)$, где $G \in F(p)$. Индукцией по $|G|$ покажем, что $H \in F(p)$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда, очевидно, $HR/R \in \tau(G/R)$. Значит, по индукции $H/(R \cap H) \cong HR/R \in F(p)$. Поэтому если $O_p(G) \neq 1$, то $H \in F(p) = \mathfrak{N}_p F(p)$. Кроме того, если в G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы R и N, то

$$H \cong H/1 = H/(R \cap N \cap H) \in F(p).$$

Пусть $O_p(G) = 1$ и R — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда существует простой точный $\mathbb{F}_p G$-модуль P. Пусть $T = [P]G$. Тогда поскольку ω-локальный спутник F является внутренним и $G \in F(p)$, то согласно лемме 1.2.14, $T \in \mathfrak{F}$. Если $\varphi : T \to G$ — естественный эпиморфизм группы T на G, то, очевидно, $H^{\varphi^{-1}} = PH$. Значит, $PH \in \tau(T)$. Поэтому $PH \in \mathfrak{F}$. Следовательно, если $F_p = F_p(PH)$, то $PH/F_p \in F(p)$. Так как при этом

$C_T(P) = P$, то

$$F_p = O_p(PH) = O_p(PH) \cap PH = P(O_p(PH) \cap H) = PO_p(H).$$

Значит,

$$PH/F_p = PH/PO_p(H) \cong H/O_p(H)(P \cap H) = H/O_p(H) \in F(p).$$

Следовательно, $H \in F(p)$. Поэтому формация $F(p)$ τ-замкнута, где $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.

Итак, формация $F(a)$ τ-замкнута для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Значит, $F(a) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \in (l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega}$. Значит, $l^{\tau}_{\omega_n} \subseteq (l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega}$. Лемма доказана.

4.5.4 Лемма. *Для любых τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ имеет место*

$$\big(\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{M}\big) \vee^{\tau}_{\omega_{n+1}} \big(\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{H}\big) = \mathfrak{N}_\omega\big(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}\big).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\omega(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H})$. Ввиду теоремы 2.1.1 эти формации обладают такими внутренними $l^{\tau}_{\omega_n}$-значными ω-локальными спутниками m, h и f соответственно, что для всякого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ имеет место $m(a) = \mathfrak{M}$, $h(a) = \mathfrak{H}$ и $f(a) = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}$.

С другой стороны, согласно [320, лемма 5],

$$\big(\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{M}\big) \vee^{\tau}_{\omega_{n+1}} \big(\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{H}\big) = LF_\omega\big(m \vee^{\tau}_{\omega_n} h\big),$$

где для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ имеет место

$$\big(m \vee^{\tau}_{\omega_n} h\big)(a) = m(a) \vee^{\tau}_{\omega_n} h(a) = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(m(a) \cup h(a)\big) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H} = f(a).$$

Значит, $m \vee^{\tau}_{\omega_n} h = f$. Поэтому

$$\big(\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{M}\big) \vee^{\tau}_{\omega_{n+1}} \big(\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{H}\big) = LF_\omega\big(m \vee^{\tau}_{\omega_n} h\big) = LF_\omega(f) = \mathfrak{N}_\omega\big(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}\big).$$

Лемма доказана.

4.5.5 Лемма. *Пусть $|\omega| > 1$ и $\mathfrak{H}$ — непустая формация. Тогда если формация $\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{H}$ является n-кратно ω-насыщенной ($n \geqslant 1$), то формация $\mathfrak{H}$ является $(n-1)$-кратно ω-насыщенной.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Поскольку всякая формация по определению является 0-кратно ω-насыщенной, то при $n = 1$ лемма верна.

Пусть $n > 1$ и при $n-1$ утверждение леммы верно. Согласно лемме 4.5.2 формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{H}$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник f, что $f(a) = \mathfrak{H}$ при любом $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Значит, согласно замечанию 1.2.17, канонический ω-локальный спутник F формации $\mathfrak{F}$ таков, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ для всех $p \in \omega$. Согласно условию и лемме 4.5.3, формация $\mathfrak{F}$ имеет $l_{\omega_{n-1}}$-значный ω-локальный спутник h. Тогда канонический ω-локальный спутник F формации $\mathfrak{F}$ имеет вид $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p\big(h(p) \cap \mathfrak{F}\big) \in l_{\omega_{n-1}}$ для всех $p \in \omega$. Но, как мы уже знаем, $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Поэтому при любом $p \in \omega$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является $(n-1)$-кратно ω-насыщенной.

Покажем, что при всех $p \in \omega$ имеет место

$$\mathfrak{N}_p l^\tau_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Так как формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ $(n-1)$-кратно ω-насыщена, то, ввиду теоремы 4.6.3, при любом $p \in \omega$ имеет место

$$\mathfrak{N}_p l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}\big) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}.$$

Пусть $p \in \omega$ и пусть $q \in \omega \setminus \{p\}$. Для всякой группы $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ имеет место $G^\mathfrak{H} \subseteq O_{q'}(G)$. Это влечет $F_q(G/G^\mathfrak{H}) = F_q(G)/G^\mathfrak{H}$ и поэтому

$$G/F_q(G) \cong (G/G^\mathfrak{H})\,/\,(F_q(G)/G^\mathfrak{H}) =$$
$$= (G/G^\mathfrak{H})\,/\,F_q(G/G^\mathfrak{H}) \in l^\tau_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_q(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big).$$

Следовательно,

$$l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_q(G) \mid G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}\big) = l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_q(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big).$$

Это влечет

$$\mathfrak{N}_q l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_q(G) \mid G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}\big) =$$
$$= \mathfrak{N}_q l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_q(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \qquad (4.8)$$

Покажем теперь, что

$$\mathfrak{N}_q l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_q(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big) \subseteq \mathfrak{H}. \qquad (4.9)$$

Предположим противное и рассмотрим группу A из

$$\mathfrak{N}_q l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_q(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big) \setminus \mathfrak{H}$$

минимального порядка с монолитом $R = A^{\mathfrak{H}}$. Ввиду (4.8) имеет место $A \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Значит, $R \subseteq O_p(A)$. Вместе с тем

$$A^{l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}(G/F_q(G)|G\in\mathfrak{H})} \subseteq O_q(A).$$

Поэтому $A^{l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}(G/F_q(G)|G\in\mathfrak{H})} = 1$. Следовательно,

$$A \in l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_q(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big).$$

Заметим, что

$$l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_q(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Действительно, так как, по доказанному выше, формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ $(n-$ $-1)$-кратно ω-насыщена, а значит, $(n-2)$-кратно ω-насыщена, то по индукции формация $\mathfrak{H}$ $(n-2)$-кратно ω-насыщена. Следовательно,

$$l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_q(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Это влечет $A \in \mathfrak{H}$. Полученное противоречие доказывает справедливость включения (4.9).

Поскольку формация $\mathfrak{N}_q\mathfrak{H}$ также является $(n-1)$-кратно ω-насыщенной, то аналогично получаем

$$\mathfrak{N}_p l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Итак, для всех $p \in \omega$ выполняется включение

$$\mathfrak{N}_p l_{\omega_{n-2}}\mathrm{form}\big(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{H}\big) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Значит, по теореме 4.6.3 формация $\mathfrak{H}$ является $(n-1)$-кратно ω-насыщенной. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.5.1. Поскольку для любых формаций $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in l^{\tau}_{\omega_n}$ имеет место

$$\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_{n+1}} \mathfrak{H} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_m} \mathfrak{H},$$

то для доказательства теоремы достаточно ограничиться случаем, когда $m = n + 1$.

Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \vee \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$, где $p \in \omega$, причем p, r и q — попарно различные простые числа. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ не является насыщенной. Предположим, что это неверно и f — минимальный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Легко видеть, что $f(p) = \mathfrak{N}_{\{r,q\}}$. Пусть Z_r и

Z_q — некоторые группы порядков r и q соответственно. Ввиду [264, гл. B, следствие 10.7] группа $B = Z_r \times Z_q$ обладает над полем $\mathbb{F}_p$ простым точным модулем P. Пусть $G = [P]B$. Тогда ввиду леммы 1.2.14 имеем $G \in \mathfrak{F}$. Понятно, что при этом $G \notin \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \cup \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$. Значит, согласно лемме 1.4.16 в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, M, N_1, \ldots, N_t$; $M_1, \ldots, M_t$ $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие утверждения: 1) $H/N \cong G$, $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$; 2) $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$; 3) H/N_i — монолитическая $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \cup \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q)$-группа с монолитом M_i/N_i, который H-изоморфен M/N. Пусть $H/N_1 \in \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r$. Поскольку $C_G(P) = P$, то $M = C_H(M/N)$. Значит, $M_1 \subseteq \subseteq M$. Следовательно, $B = Z_r \times Z_q \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r$. Полученное противоречие показывает, что формация $\mathfrak{F}$ не является ω-насыщенной. Поскольку формации $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{N}_r$, $\mathfrak{N}_q$ S-замкнуты и ω-насыщены, то обе формации $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ τ-замкнуты и ω-насыщены. Согласно лемме 4.1.13,

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \vee^{\tau}_{\omega_1} \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q = l^{\tau}_{\omega_1}\mathrm{form}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \cup \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q) =$$
$$= \mathrm{form}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \cup \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \vee \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q.$$

Следовательно, решетка $l^{\tau}_{\omega_1}$ не является подрешеткой в $l^{\tau}_{\omega_0}$.

Пусть теперь $n > 1$ и при $n-1$ теорема верна. Тогда найдутся такие τ-замкнутые n-кратно ω-насыщенные формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \mathfrak{H} \notin l^{\tau}_{\omega_n}$. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{H}$. Согласно теореме 2.1.1, формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_1$ обладают такими внутренними $l^{\tau}_{\omega_n}$-значными спутниками m и h соответственно, что для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ имеет место $m(a) = \mathfrak{M}$, $h(a) = \mathfrak{H}$. Значит, обе формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_1$ принадлежат решетке $l^{\tau}_{\omega_{n+1}}$. Предположим, что $\mathfrak{M}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}_1 \in l^{\tau}_{\omega_{n+1}}$. Согласно лемме 4.5.4,

$$\mathfrak{M}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{N}_\omega\big(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \mathfrak{H}\big),$$

и

$$\mathfrak{M}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}_1 = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{H}_1) = l^{\tau}_{\omega_{n+1}}\mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{H}_1) = \mathfrak{M}_1 \vee^{\tau}_{\omega_{n+1}} \mathfrak{H}_1.$$

Следовательно, по лемме 4.5.5 формация $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \mathfrak{H}$ n-кратно ω-насыщена. Значит, $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \mathfrak{H} \in l^{\tau}_{\omega_n}$, что противоречит выбору формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Таким образом, решетка $l^{\tau}_{\omega_{n+1}}$ не является подрешеткой в $l^{\tau}_{\omega_n}$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.5.1 вытекает

4.5.6 Следствие (А.Н. Скиба [203]). *Для любых целых неотрицательных чисел m и n, где $m > n$, решетка l_m^τ не является подрешеткой в l_n^τ.*

4.5.7 Следствие. *Для любых целых неотрицательных чисел m и n, где $m > n$, решетка l_m не является подрешеткой в l_n.*

4.6 Модулярность решетки разрешимо насыщенных формаций

В работе [192] было установлено, что решетка всех (насыщенных) формаций модулярна. В дальнейшем этот результат получил развитие в различных направлениях. В монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [230] доказана модулярность решетки всех n-кратно насыщенных формаций; в работе А. Баллестера-Болинше и Л.А. Шеметкова — модулярность решетки всех p-насыщенных формаций [241]. Модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций установлена А.Н. Скибой [203]. В последующем А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым [206, 209] доказана модулярность решеток n-кратно ω-насыщенных формаций и n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций соответственно. Позднее И.П. Шабалиной установлена модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций [219], а М.В. Задорожнюк — модулярность решетки всех τ-замкнутых разрешимо ω-насыщенных формаций [100]. Модулярность решетки всех тотально насыщенных формаций, а также решетки всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций доказана В.Г. Сафоновым [153, 310]. В данном параграфе, используя функторный подход, мы развиваем методы теории модулярных решеток частично композиционных формаций: доказано, что решетка всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций алгебраична и модулярна.

Минимальные спутники

4.6.1 Лемма ([54, лемма 2.1]). *Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$ — τ-замкнутая n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация, $n \geqslant 1$. Тогда спутник F $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значен.*

Доказательство. Согласно лемме 1.2.42, достаточно лишь проверить, что для любого $p \in \mathbb{P}$ и для всякой τ-замкнутой n-кратно разрешимо ω-насыщенной формации $\mathfrak{H}$ $(n \geqslant 0)$ формация $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой n-кратно разрешимо ω-насыщеной.

Заметим, что поскольку для любого $p \in \mathbb{P}$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ τ-замкнута, где $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая формация, то в случае $n = 0$ утверждение верно.

Пусть $n > 0$ и при $n - 1$ утверждение леммы верно. Покажем сначала, что формация $\mathfrak{M}$ n-кратно разрешимо ω-насыщена. Пусть $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, где h — внутренний ω-композиционный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный спутник. Формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой внутренний ω-композиционный спутник f, что $f(p) = (1)$, $f(\omega') = (1)$ и $f(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$. Нетрудно показать, что формация $\mathfrak{M}$ имеет такой спутник m, что $m(p) = \mathfrak{H}$, $m(\omega') = \mathfrak{M}$ и $m(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$ (см. теорему 2.3.1). Но согласно предположению $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ — $(n-1)$-кратно разрешимо ω-насыщенная формация. Значит, $\mathfrak{M}$ — n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация.

Докажем теперь, что формация $\mathfrak{M}$ τ-замкнута. Предположим противное. Тогда найдется такая группа $G \in \mathfrak{M}$ и подгруппа $H \in \tau(G)$, что $H \notin \mathfrak{M}$. Так как $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$ и $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$. Поскольку формация $\mathfrak{H}$ по предположению τ-замкнута, то для любой группы $\overline{H} \in \tau(G/G^{\mathfrak{H}})$ имеет место $\overline{H} \in \mathfrak{H}$. Но $HG^{\mathfrak{H}}/G^{\mathfrak{H}} \in \tau(G/G^{\mathfrak{H}})$. Следовательно,

$$HG^{\mathfrak{H}}/G^{\mathfrak{H}} \cong H/H \cap G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}.$$

Вместе с тем, $H \cap G^{\mathfrak{H}} \triangleleft H$ и $H \cap G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа. Поэтому $H \cap G^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(H)$. Значит, $H^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(H)$, т. е. $H^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. Отсюда $H \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$. Противоречие. Следовательно, формация $\mathfrak{M}$ τ-замкнута.

Пусть F — канонический ω-композиционный c^ω_{n-1}-значный спутник τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что формация $F(a)$ является τ-замкнутой. Если $a = \omega'$, то формация $F(\omega') = \mathfrak{F}$ τ-замкнута согласно нашему допущению.

Предположим, что $a = p \in \omega$. Рассмотрим группу $G \in F(p)$ и $H \in \tau(G)$. Пусть P — неединичная группа и $D = P \wr G = [K]G$, где K — база регулярного сплетения D. Тогда $HK \in \tau(D)$. Действительно, пусть $\varphi : D \to D/K$ — канонический эпиморфизм группы D на D/K. Тогда $HK/K = H^\varphi$. Поэтому $HK/K \in \tau(D/K)$. А так как $HK = (HK/K)^{\varphi^{-1}}$ — полный прообраз подгрупп HK/K при эпиморфизме φ, то $HK \in \tau(D)$.

Поскольку спутник F является внутренним и

$$G \cong D/K \cong D/O_p(D) \in F(p),$$

то по лемме 1.2.35 $D \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута, то $HK \in \mathfrak{F}$. Пусть $M = HK$. Тогда $M/C^p(M) \in F(p)$, где $p \in \pi(\mathrm{Com}(M))$. Поскольку K — нормальная p-подгруппа группы M, то $K \cap O_{p'}(M) = 1$. Значит, $O_{p'}(M) \subseteq C_M(K)$. По свойству регулярных сплетений $C_G(K) \subseteq K$. Следовательно, $O_{p'}(M) = 1$. Значит, $O_p(M) = F_p(M) = C^p(M)$.

Так как

$$O_p(M) = O_p(M) \cap M = O_p(M) \cap KH = K(O_p(M) \cap H)$$

и поскольку $O_p(M) \cap H \subseteq O_p(H)$, то

$$O_p(M) = K(O_p(M) \cap H) \subseteq KO_p(H) \subseteq O_p(M).$$

Значит, $KO_p(H) = O_p(M)$. Тогда

$$M/C^p(M) = KH/O_p(M) = KH/KO_p(H) \cong H/O_p(H)(K \cap H) =$$

$$= H/O_p(H) \in F(p) = \mathfrak{N}_p F(p),$$

т. е. $H \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p F(p)) = (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_p) F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$. Следовательно, формация $F(p)$ τ-замкнута. Лемма доказана.

4.6.2 Лемма ([54, лемма 3.1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация. Если $\mathfrak{F}$ имеет внутренний ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник, то $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация с внутренним ω-композиционным $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным спутником f. Покажем, что $\mathfrak{F}$ τ-замкнута.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $H \in \tau(G)$. Поскольку для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ τ-замкнута, то

$$H/R_\omega(H) = H/(R_\omega(G) \cap H) \cong HR_\omega(G)/R_\omega(G) \in \tau(G/R_\omega(G)).$$

Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/R_\omega(G) \in f(\omega')$. Следовательно, $H/R_\omega(H) \in f(\omega')$.

Пусть теперь $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(H))$. Тогда $C^p(G) = G_{\mathfrak{G}_{cp}}$. Ввиду ограничения на подгрупповой функтор τ, $H \triangleleft \triangleleft G$. Тогда $H_{\mathfrak{G}_{cp}} = G_{\mathfrak{G}_{cp}} \cap H$. Следовательно,

$$H/H_{\mathfrak{G}_{cp}} = H/(G_{\mathfrak{G}_{cp}} \cap H) \cong HG_{\mathfrak{G}_{cp}}/G_{\mathfrak{G}_{cp}} \in \tau(G/G_{\mathfrak{G}_{cp}}) = \tau(G/C^p(G)).$$

Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/C^p(G) \in f(p)$. Значит, $H/C^p(H) = H/H_{\mathfrak{G}_{cp}} \in f(p)$. Итак, $H/R_\omega(H) \in f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(H))$

имеет место $H/C^p(H) \in f(p)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$, т. е. формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута. Лемма доказана.

Из лемм 4.6.1 и 4.6.2 непосредственно вытекает следующая лемма.

4.6.3 Лемма. *При любом натуральном n справедливо равенство*

$$(c^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega_c} = c^{\tau}_{\omega_n}.$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех ω-композиционных $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.2.32 $f = \bigcap_{i \in I} f_i$ — ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, называемый *минимальным.* Следующая теорема дает способ построения минимального $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значного спутника формации $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{X}$.

4.6.4 Теорема ([327, лемма 8]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $n \geqslant 1$, $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$ и f — минимальный ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ *и спутник* h $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$*-значен, то для всех* $p \in \pi$ *имеет место*

$$f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\ R_\omega(G) = 1);$$

5) $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$.

Доказательство. Докажем утверждения 1) – 3). Пусть m — такой ω-композиционный спутник, что

$$m(a) = \begin{cases} c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } a = \omega'; \\ c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } a = p \in \pi; \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \setminus \pi. \end{cases}$$

Докажем, что $m = f$. Пусть $\mathfrak{M} = CF_\omega(m)$. Сначала покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. По лемме 4.6.3 $\mathfrak{M}$ — τ-замкнутая n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация.

Если $A \in \mathfrak{X}$, то

$$A/R_\omega(A) \in \big(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big) \subseteq$$

$$\subseteq c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) = m(\omega')$$

и

$$A/C^p(A) \in \big(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big) \subseteq$$

$$\subseteq c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}) = m(p)$$

для всех $p \in \pi$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Значит,

$$\mathfrak{F} = c^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{X} \subseteq c^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}.$$

Докажем обратное включение. Пусть f_1 — ω-композиционный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Сначала докажем, что $m \leqslant f_1$. Пусть

$$A \in \mathfrak{X} \subseteq c^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{X} = \mathfrak{F} = CF_\omega(f_1).$$

Тогда

$$A/R_\omega(A) \in \big(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big) \subseteq f_1(\omega').$$

Следовательно,

$$m(\omega') = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq$$

$$\subseteq c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}f_1(\omega') = f_1(\omega').$$

Поскольку $A \in \mathfrak{X}$, то

$$A/C^p(A) \in \big(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big) \subseteq f_1(p)$$

для любого $p \in \pi$. Следовательно,

$$m(p) = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq$$

$$\subseteq c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}f_1(p) = f_1(p)$$

для всех $p \in \pi$. Итак, $m \leqslant f_1$. Тогда

$$\mathfrak{M} = CF_\omega(m) \subseteq CF_\omega(f_1) = \mathfrak{F}.$$

Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Теперь покажем, что $m = f$. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех ω-композиционных $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. По определению $f = \bigcap\limits_{i\in I} f_i$. Аналогично, $m \leqslant f_i$ для всех $i \in I \setminus \{1\}$. Следовательно, $m \leqslant \bigcap\limits_{i\in I} f_i = f$. Таким образом, $m = f$.

Докажем 4). Пусть t — такой ω-композиционный спутник, что

$$t(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\ R_\omega(G) = 1)$$

и

$$t(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1)$$

для всех $p \in \pi$. Покажем, что $t = f$. Пусть

$$A \in \mathfrak{X} \subseteq c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{X} = \mathfrak{F} = CF_\omega(h).$$

Тогда $A/R_\omega(A) \in \mathfrak{F}$ и $A/R_\omega(A) \in h(\omega')$. Следовательно,

$$A/R_\omega(A) \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}.$$

Поскольку $R_\omega(A/R_\omega(A)) = 1$, то

$$A/R_\omega(A) \in \big(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big) \subseteq \big(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\ R_\omega(G) = 1\big).$$

Следовательно,

$$f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq$$

$$\subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\ R_\omega(G) = 1) = t(\omega').$$

Так как $A \in \mathfrak{X}$, то

$$A/C^p(A) \in \mathfrak{F} \text{ и } A/C^p(A) \in h(p)$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A))$.

Значит,

$$A/C^p(A) \in h(p) \cap \mathfrak{F}.$$

Поскольку $O_p(A/C^p(A)) = 1$, то

$$A/C^p(A) \in \big(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big) \subseteq \big(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1\big)$$

для всех $p \in \pi$. Следовательно,

$$f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq$$

$$\subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1) = t(p).$$

Значит, $f \leqslant t$.

Теперь докажем, что $t \leqslant f$. Пусть

$$A \in \big(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\ R_\omega(G) = 1\big).$$

Тогда $A \cong A/R_\omega(A) \in f(\omega')$. Следовательно,

$$\big(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\, R_\omega(G) = 1\big) \subseteq f(\omega').$$

А значит,

$$t(\omega') = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1) \subseteq$$
$$\subseteq c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form} f(\omega') = f(\omega').$$

Теперь предположим, что

$$A \in \big(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1\big)$$

для всех $p \in \pi$.

Пусть $T = Z_p \wr A = [K]A$, где K — база сплетения T. Согласно лемме 1.2.34 $C^p(T) = K$. Ввиду свойств регулярных сплетений

$$T/O_p(T) = T/K = T/C^p(T) \in h(p) \cap \mathfrak{F}.$$

Значит, по лемме 1.2.35 $T \in \mathfrak{F}$. Поэтому $A \cong T/O_p(T) \in f(p)$. Следовательно,

$$\big(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1\big) \subseteq f(p).$$

Отсюда

$$t(p) = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1) \subseteq$$
$$\subseteq c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form} f(p) = f(p).$$

Следовательно, $t \leqslant f$.

Таким образом,

$$f(\omega') = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\, R_\omega(G) = 1)$$

и

$$f(p) = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(G) = 1)$$

для всех $p \in \pi$.

Докажем 5). Пусть $\pi = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$. Рассмотрим $\mathfrak{G}_{(\pi)}$ — класс всех групп, у которых все абелевы композиционные факторы имеют порядки, принадлежащие π. Тогда $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}_{(\pi)}$. Кроме того, $\mathfrak{G}_{(\pi)}$ — S-замкнутая разрешимо насыщенная формация. Поэтому $\mathfrak{G}_{(\pi)}$ — τ-замкнутая n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация. Поскольку в $\mathfrak{G}_{(\pi)}$ все абелевы композиционные факторы только из π, то и в

$\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ все абелевы композиционные факторы только из π, так как $\mathfrak{G}_{(\pi)}$ — одна из пересекаемых формаций. Поэтому

$$\pi = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{G}_{(\pi)})).$$

Следовательно,

$$\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})).$$

Теорема доказана.

4.6.5 Следствие. *Пусть f_1 и f_2 — минимальные ω-композиционные $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

Свойство индуктивности. Напомним определение индуктивной решетки формаций. Пусть Θ — полная решетка формаций. Для произвольной совокупности формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из Θ полагают

$$\vee_{\Theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность Θ-значных спутников. Тогда через $\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой спутник f, что $f(a) = \Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(a)\Big)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Следуя [203], полную решетку формаций Θ^{ω_c} будем называть *индуктивной*, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных ω-композиционных спутников f_i, где f_i — ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_{\omega}\big(\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)\big).$$

В данном разделе мы докажем свойство индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, которое лежит в основе доказательства алгебраичности и модулярности указанной решетки.

В случае, когда $\Theta = c^{\tau}_{\omega_n}$, символ $\vee_{c^{\tau}_{\omega_n}}$ будем обозначать как $\vee^{\tau}_{\omega_n}$.

4.6.6 Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — непустые совокупности групп, Θ — полная решетка формаций. Тогда*

$$\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}) = \Theta\mathrm{form}(\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X} \cup \Theta\mathrm{form}\mathfrak{Y}).$$

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{X} \subseteq \Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \Theta\mathrm{form}\mathfrak{Y}$. Значит, $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y} \subseteq \Theta\mathrm{form}\mathfrak{X} \cup \Theta\mathrm{form}\mathfrak{Y}$. Следовательно,

$$\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}) \subseteq \Theta\mathrm{form}(\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X} \cup \Theta\mathrm{form}\mathfrak{Y}).$$

Докажем обратное включение. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$, то

$$\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X} \subseteq \Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}) \qquad \text{и} \qquad \Theta\mathrm{form}\mathfrak{Y} \subseteq \Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}).$$

Тогда $\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X} \cup \Theta\mathrm{form}\mathfrak{Y} \subseteq \Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})$. Следовательно,

$$\Theta\mathrm{form}(\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X} \cup \Theta\mathrm{form}\mathfrak{Y}) \subseteq \Theta\mathrm{form}(\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})) =$$

$$= \Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}).$$

Лемма доказана.

Описание спутника решеточного объединения двух τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций представляет следующая лемма.

4.6.7 Лемма ([54, лемма 2.2]). *Пусть* $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$, *где* f_i — *внутренний* ω-*композиционный* $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-*значный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, *причем* $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. *Тогда если* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee^\tau_{\omega_n} \mathfrak{F}_2$, *то* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, *где* $f = f_1 \vee^\tau_{\omega_{n-1}} f_2$.

Доказательство. Пусть h_i — минимальный ω-композиционный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$, $i = 1, 2$. Пусть

$$p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)).$$

Ввиду леммы 4.6.1 и замечания 1.2.39 выполняется включение

$$h_i(p) \subseteq f_i(p) \subseteq \mathfrak{N}_p h_i(p) = F_i(p) \in c^\tau_{\omega_{n-1}},$$

где F_i — канонический ω-композиционный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$.

Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$, где F — канонический ω-композиционный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$ и h — минимальный ω-композиционный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. По лемме 1.2.12

$$h(p) = c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big((\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)(C^p)\big) =$$

$$= c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)\big) =$$
$$= c^\tau_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

По лемме 4.6.6

$$h(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big((G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \cup (G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)\big) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \cup \mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)\big) =$$
$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}_1(C^p) \cup \mathfrak{F}_2(C^p)\big).$$

Таким образом,

$$h(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}_1(C^p) \cup \mathfrak{F}_2(C^p)\big).$$

Поскольку

$$\mathfrak{F}_i(C^p) = \mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i) \subseteq$$
$$\subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i) = h_i(p),$$

$i = 1,\ 2$, то $\mathfrak{F}_1(C^p) \cup \mathfrak{F}_2(C^p) \subseteq h_1(p) \cup h_2(p)$. Значит,

$$h(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}_1(C^p) \cup \mathfrak{F}_2(C^p)\big) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big).$$

Докажем обратное включение. Так как

$$h_i(p) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}_1(C^p) \cup \mathfrak{F}_2(C^p)\big),$$

$i = 1,\ 2$, то

$$h_1(p) \cup h_2(p) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}_1(C^p) \cup \mathfrak{F}_2(C^p)\big).$$

Значит,

$$c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}_1(C^p) \cup \mathfrak{F}_2(C^p)\big) = h(p).$$

Итак,

$$h(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}_1(C^p) \cup \mathfrak{F}_2(C^p)\big) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big).$$

Отсюда

$$h(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big) \subseteq f(p) \subseteq \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big).$$

Действительно,

$$h_i(p) \subseteq f_i(p) \subseteq \big(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_2\big)(p) = f(p),$$

$i = 1,\ 2$. Значит, $h_1(p) \cup h_2(p) \subseteq f(p)$. Тогда

$$h(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(f(p)\big) = f(p).$$

Покажем теперь, что

$$f(p) \subseteq \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big).$$

Поскольку $f_1(p) \subseteq \mathfrak{N}_p h_1(p)$ и $f_2(p) \subseteq \mathfrak{N}_p h_2(p)$, то

$$f_1(p) \cup f_2(p) \subseteq \mathfrak{N}_p h_1(p) \cup \mathfrak{N}_p h_2(p).$$

Следовательно, $f(p) = f_1(p) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_2(p) \subseteq \mathfrak{N}_p h_1(p) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \mathfrak{N}_p h_2(p)$. Так как $h_i(p) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big)$, $i = 1, 2$, то

$$\mathfrak{N}_p h_i(p) \subseteq \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big).$$

Значит, $\mathfrak{N}_p h_1(p) \cup \mathfrak{N}_p h_2(p) \subseteq \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big)$. Следовательно,

$$\mathfrak{N}_p h_1(p) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \mathfrak{N}_p h_2(p) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(h_1(p) \cup h_2(p))\big).$$

Так как $h(p) = h_1(p) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} h_2(p) \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$, т. е. h — внутренний ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, то ввиду замечания 1.2.40

$$F(p) = \mathfrak{N}_p\big(h_1(p) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} h_2(p)\big) = \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big),$$

где F — канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. По лемме 4.6.1 спутник F $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значен. Следовательно,

$$c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(\mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(h_1(p) \cup h_2(p))\big) = \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big).$$

Значит,

$$h(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big) \subseteq f(p) \subseteq$$
$$\subseteq \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big(h_1(p) \cup h_2(p)\big) = F(p).$$

Таким образом, нами доказано включение $h(p) \subseteq f(p) \subseteq F(p)$ для всех $p \in \omega$. Очевидно, $h(\omega') \subseteq f(\omega') \subseteq F(\omega')$. Значит, $h(a) \subseteq \subseteq f(a) \subseteq F(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Итак, $h \leqslant f \leqslant F$ и поэтому $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$. Лемма доказана.

4.6.8 Теорема ([54, теорема 2.1]; [327, теорема]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций индуктивна.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций и f_i —

некоторый внутренний ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Индукцией по i докажем, что справедливо равенство

$$\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_{\omega}\big(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)\big).$$

Если $i = 2$, то теорема верна в силу леммы 4.6.7.

Пусть $i > 2$ и для $i = r - 1$ утверждение теоремы выполняется. Тогда справедливо равенство

$$\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_{r-1} = CF_{\omega}(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_{r-1}).$$

Но по лемме 4.6.7

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_r = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\big((\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_{r-1}) \cup \mathfrak{F}_r\big) = CF_{\omega}(f),$$

где

$$f(a) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\big((f_1(a) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_{r-1}(a)) \cup f_r(a)\big) =$$
$$= f_1(a) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_r(a) = \big(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_r\big)(a)$$

при любом $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Поэтому

$$f = f_1 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_r.$$

Ввиду произвольности выбора r теорема доказана.

Отметим несколько следствий этой теоремы. Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то, учитывая [209, замечание 3], мы получаем

4.6.9 Следствие. *Решетка всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций индуктивна.*

При $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ получаем

4.6.10 Следствие. *Решетка всех n-кратно композиционных формаций индуктивна.*

Теорема о модулярности. Напомним определение модулярной решетки формаций. Решетка формаций Θ называется *модулярной*, если для любых формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ из Θ таких, что $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$, имеет место

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee_{\Theta} \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee_{\Theta} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Основной целью данного параграфа является доказательство модулярности решетки всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций. Для доказательства этого результата нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

4.6.11 Лемма ([54, лемма 3.2]). *Решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ является полной подрешеткой решетки c^{ω}_{n}.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций. Согласно лемме 4.1.13 имеем

$$c^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\Big) = \tau\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\Big) =$$

$$= \mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\Big) = c^{\omega}_{0}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\Big).$$

Следовательно, при $n = 0$ лемма верна.

Пусть $n > 0$ и при $n-1$ утверждение верно. Пусть m_i — минимальный ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{M}_i$. Возьмем в теореме 4.6.8 в качестве τ тривиальный подгрупповой функтор. Тогда

$$\vee^{\omega}_{n}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I) = CF_{\omega}\big(\vee^{\omega}_{n-1}(m_i \mid i \in I)\big).$$

Но в силу предположения при любом $p \in \omega \cap \pi\Big(\mathrm{Com}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\big)\Big)$ формации

$$\big(\vee^{\omega}_{n-1}(m_i \mid i \in I)\big)(p) \text{ и } \big(\vee^{\omega}_{n-1}(m_i \mid i \in I)\big)(\omega')$$

τ-замкнуты. Следовательно, по лемме 4.6.2 формация $\vee^{\omega}_{n}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I)$ является τ-замкнутой. Лемма доказана.

Напомним, полная решетка называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов.

4.6.12 Теорема ([54, теорема 3.1]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций алгебраична и модулярна.*

Доказательство. Сначала покажем, что решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ алгебраична. Заметим, что любая τ-замкнутая n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация есть объединение своих однопорожденных τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных подформаций в решетке $c^{\tau}_{\omega_n}$. Индукцией по n покажем, что каждая однопорожденная τ-замкнутая n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ является компактным элементом в решетке $c^{\tau}_{\omega_n}$. Пусть

$$\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}G \subseteq \mathfrak{M} = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big),$$

где $\mathfrak{F}_i$ — τ-замкнутая n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация. Пусть $n = 0$. Тогда ввиду лемм 4.1.13 и 4.1.10

$$G \in c^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big) = \mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big) = \mathrm{QR}_0\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big).$$

Следовательно, $G \cong T/N$ для некоторой группы $T \in \mathrm{R}_0\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big)$. Значит, найдутся такие индексы $i_1, \ldots, i_k \in I$, что $T \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots$ $\ldots \cup \mathfrak{F}_{i_k})$. Поэтому $G \in \mathrm{form}(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_k})$. Следовательно, ввиду леммы 4.1.13

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{form}(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_k}) = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_k}).$$

Пусть теперь $n > 0$ и однопорожденные формации из $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$ являются компактными элементами в решетке $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Пусть f_i — минимальный ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, f — минимальный ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$ и m — минимальный ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{M}$. По теореме 4.6.4

$$f(a) = \begin{cases} c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/C^a(G)), & \text{если } a \in \pi; \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \setminus \pi; \\ c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(G/R_\omega(G)), & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))$.

Согласно следствию 4.6.5, $f \leqslant m$. Ввиду теоремы 4.6.8 имеет место равенство $m = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$. Значит, для каждого $p \in \omega \cap$ $\cap\, \pi(\mathrm{Com}(G))$ найдутся такие индексы $i_1, \ldots, i_r \in I$, что

$$G/C^p(G) \in f_{i_1}(p) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_{i_r}(p).$$

Так как $\pi(\mathrm{Com}(G))$ — конечное множество, то найдутся такие индексы $j_1, \ldots, j_s \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_{j_1} \vee^{\tau}_{\omega_n} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_{j_s}$. Поэтому

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1} \vee^{\tau}_{\omega_n} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_{j_s}.$$

Итак, решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ алгебраична, и ее компактными элементами являются однопорожденные τ-замкнутые n-кратно разрешимо ω-насыщенные формации.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Индукцией по n покажем, что для любых τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ таких, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$ выполняется тождество $\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}) = \mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})$.

Ввиду модулярности решетки всех формаций (см. лемму 4.1.14) при $n = 0$ утверждение теоремы верно для тривиального подгруппового функтора τ. Значит, решетка $c_0^\omega = c_0$ модулярна. Согласно лемме 4.6.11, решетка $c_{\omega_0}^\tau$ является подрешеткой в c_0^ω. Следовательно, решетка $c_{\omega_0}^\tau$ модулярна.

Пусть $n > 0$ и второе утверждение теоремы верно при $n-1$. Пусть $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(F_i)$ — τ-замкнутая n-кратно разрешимо ω-насыщенная формация, $i = 1, 2, 3$. Пусть $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$. Покажем, что

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee_{\omega_n}^\tau (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Пусть f_i — такой ω-композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, что $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i = F_i(\omega')$ и $f_i(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\big(\mathfrak{F}_i(C^p)\big)$ при всех $p \in \omega$. В силу определения кратно разрешимо ω-насыщенной формации имеет место равенство $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$. Пусть $r_1 = f_2 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_3$. По теореме 4.6.8

$$\mathfrak{F}_2 \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{F}_3 = CF_\omega(f_2 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_3) = CF_\omega(r_1).$$

По лемме 1.2.32 $h_1 = f_2 \cap r_1$ — внутренний ω-композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{F}_3)$.

Понятно, что $f_2(a) \subseteq f_1(a)$ при всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Значит, согласно предположению, при всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$

$$f_1(a) \cap \big(f_2(a) \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_3(a)\big) = f_2(a) \vee_{\omega_{n-1}}^\tau \big(f_1(a) \cap f_3(a)\big).$$

Следовательно, $h_1 = f_2 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau (f_1 \cap f_3)$. Но $f_1 \cap f_3$ — внутренний ω-композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3$. Значит, согласно теореме 4.6.8, $\mathfrak{F}_2 \vee_{\omega_n}^\tau (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3) = CF_\omega(h_1)$. Таким образом, при любых целых неотрицательных n решетка $c_{\omega_n}^\tau$ модулярна. Теорема доказана.

В случае $n = 1$ получаем

4.6.13 Следствие ([100, М.В. Задорожнюк]). *Решетка всех τ-замкнутых разрешимо ω-насыщенных формаций алгебраична и модулярна.*

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то, учитывая [209, замечание 3], мы получаем

4.6.14 Следствие ([209, А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков]). *Решетка всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций алгебраична и модулярна.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем

4.6.15 Следствие. *Решетка всех n-кратно разрешимо насыщенных формаций алгебраична и модулярна.*

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ получим

4.6.16 Следствие. *Решетка всех разрешимо насыщенных формаций алгебраична и модулярна.*

4.7 Тождества решеток разрешимо насыщенных формаций

В монографии [203] А.Н. Скиба доказал, что при любых натуральных m и n у решетки всех τ-замкнутых m-кратно насыщенных формаций и у решетки всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций системы тождеств совпадают. Позднее Го Вэньбинь и А.Н. Скиба [76] показали, что для любого бесконечного множества простых чисел ω и при любых различных натуральных m и n системы тождеств решетки всех m-кратно ω-насыщенных формаций и решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций совпадают, а в работе Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы и Н.Н. Воробьева [320] этот результат был распространен на решетки функторно замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций. Среди открытых задач в данном направлении напомним следующий вопрос, поставленный на с. 796 в работе [209, проблема 3]:
верно ли, что для любых целых неотрицательных m, n и произвольного непустого множества простых чисел ω у решеток c_m^ω и c_n^ω системы тождеств совпадают?
В данном параграфе такая задача решена в случае бесконечного множества простых чисел ω. Важным этапом в достижении этой цели является установление $\mathfrak{G}$-отделимости решетки всех n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полная решетка формаций Θ называется $\mathfrak{X}$-*отделимой* [203], если для любого терма $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых формаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ из Θ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \xi(\Theta\mathrm{form} A_1, \ldots, \Theta\mathrm{form} A_m)$.

В данном разделе мы докажем свойство $\mathfrak{G}$-отделимости решетки всех n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций.

4.7.1 Лемма ([57, лемма 3]; [58, лемма 12]). *Пусть A — монолитическая группа с неабелевым монолитом R, $\mathfrak{M}$ — некоторая полуформация и $A \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}$, $n \geqslant 0$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. Тогда

$$A \in c_0^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M} = \mathrm{form}\mathfrak{M}.$$

Пусть $A \notin \mathfrak{M}$. Тогда по лемме 1.4.16 в $\mathrm{form}\mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, N_1, \ldots, N_t$; $M, M_1, \ldots, M_t$ $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие утверждения:

1) $H/N \cong A$, $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;

2) H/N_i — монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом M_i/N_i, причем $M_i/N_i \overset{H}{\cong} M/N$, $i = 1, \ldots, t$.

Поскольку монолит $R \cong M/N$ неабелев, то $C_H(M/N) = N$. Кроме того, $M_i/N_i \overset{H}{\cong} M/N$. Значит, $N_i \subseteq N$. Поэтому $A \cong H/N \in \mathfrak{M}$. Противоречие. Итак, утверждение леммы при $n = 0$ верно.

Пусть теперь $n > 0$ и при $n - 1$ лемма верна. Пусть f — минимальный ω-композиционный c_{n-1}^{ω}-значный спутник формации $\mathfrak{F} = c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Так как R — неабелева группа, то $\pi(\mathrm{Com}(R)) = \varnothing$. Значит, $R_{\omega}(A) = 1$. Следовательно, по следствию 1.6.11

$$A \cong A/1 = A/R_{\omega}(A) \in f(\omega') = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{M}).$$

Отсюда

$$A \in c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{M}) \subseteq c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}.$$

Значит, по индукции $A \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

4.7.2 Лемма ([57, лемма 4]; [58, лемма 13]). *Пусть $\mathfrak{M}$ — полуформация и $A \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}$, $n \geqslant 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $O_p(A) = 1$ и $p \in \omega$, то $A \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = (G/O_p(G) \mid G \in \mathfrak{M})$;*

2) *если $R_{\omega}(A) = 1$, то $A \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_2 = (G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{M})$.*

Доказательство. При $A \in \mathfrak{M}$ утверждения очевидны. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $A \notin \mathfrak{M}$.

Предположим, что A — монолитическая группа с монолитом R. Проведем индукцию по n.

Пусть $n = 0$. Тогда поскольку $A \notin \mathfrak{M}$ и

$$A \in c_0^\omega \mathrm{form}\mathfrak{M} = \mathrm{form}\mathfrak{M},$$

то согласно лемме 1.4.16 в формации $\mathrm{form}\mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами N, N_1, $\ldots$, N_t; M, M_1, $\ldots$, M_t $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие утверждения:

1) $H/N \cong A$, $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;

2) $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$;

3) H/N_i — монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом M_i/N_i, который H-изоморфен M/N.

Так как $O_p(A) = 1$ и $R_\omega(A) = 1$, то по лемме 1.4.16 получаем

$$H \in \mathrm{R}_0(H/N_1, \ldots, H/N_t) \subseteq \mathrm{R}_0\mathfrak{M}_j,$$

где $j = 1$, 2. Отсюда ввиду условия 1) леммы 1.4.16 и леммы 4.1.10

$$A \cong H/N \in \mathrm{QR}_0(H/N_1, \ldots, H/N_t) =$$

$$= \mathrm{form}(H/N_1, \ldots, H/N_t) \subseteq \mathrm{form}\mathfrak{M}_j,$$

где $j = 1$, 2.

Пусть $n > 0$. Предположим сначала, что $O_p(A) = 1$ и $p \in \omega$. Если R — неабелева группа, то по лемме 4.7.1 $A \in \mathfrak{M}$. Противоречие. Значит, R — q-группа, где $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$.

Пусть $\mathfrak{F} = c_n^\omega \mathrm{form}\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}_j = c_n^\omega \mathrm{form}\mathfrak{M}_j$, где $j = 1$, 2. Пусть f и h_j $(j = 1,\ 2)$ — минимальные ω-композиционные c_{n-1}^ω-значные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}_j$ соответственно. Согласно следствию 1.6.11

$$f(\omega') = c_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}),$$

$$f(s) = c_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/C^s(G) \mid G \in \mathfrak{M})$$

для всех $s \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$;

$$h_j(\omega') = c_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}_j),$$

$$h_j(s) = c_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/C^s(G) \mid G \in \mathfrak{M}_j)$$

для всех $s \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}_j))$, $j = 1$, 2.
Для любой группы G имеет место

$$G/R_\omega(G) \cong (G/O_p(G))/(R_\omega(G)/O_p(G)) \text{ и}$$

$$(G/O_p(G))/(R_\omega(G)/O_p(G)) = (G/O_p(G))/R_\omega(G/O_p(G)).$$

Последнее означает, что $f(\omega') = h_j(\omega')$, $j = 1, 2$.

Существует две возможности: либо $q \in \omega$, либо $q \notin \omega$. Если $q \notin \omega$, то $R_\omega(A) = 1$. Поэтому

$$A \cong A/1 = A/R_\omega(A) \in f(\omega') = h_1(\omega') \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Пусть $q \in \omega$. Покажем, что $A/R \in \mathfrak{H}_1$. Так как $A \in \mathfrak{F}$, то

$$A/R_\omega(A) \in f(\omega') = h_1(\omega') \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Рассмотрим случай, когда $O_p(A/R) = 1$. Так как $|A/R| < |A|$, то в силу соображений индукции $A/R \in \mathfrak{H}_1$.

Пусть $O_p(A/R) \neq 1$. Пусть $R \subseteq \Phi(A)$ и $D/R = O_p(A/R)$. Тогда группа D нильпотентна. Значит, $D = D_p \times D_q$, где D_p — силовская p-подгруппа группы D; D_q — силовская q-подгруппа группы D. Следовательно, $D_p = O_p(A) = 1$. Противоречие. Значит, $R \not\subseteq \Phi(A)$. Следовательно, $R = C_A(R) = C^q(A)$.

Предположим, что $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A/R)) = \varnothing$. Тогда $R_\omega(A/R) = 1$. Как показано выше, $f(\omega') = h_1(\omega')$. Значит,

$$A/R \cong (A/R)/1 = (A/R)/R_\omega(A/R) \in f(\omega') = h_1(\omega') \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Следовательно, $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A/R)) \neq \varnothing$.
Пусть $q \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A/R))$. Для любой группы G имеет место

$$G/C^q(G) \cong (G/O_p(G))/(C^q(G)/O_p(G)) = (G/O_p(G))/C^q(G/O_p(G)).$$

Последнее означает, что $f(q) = h_1(q)$. Так как по условию $A \in \mathfrak{F}$, то

$$A/R = A/C^q(A) \in f(q) = h_1(q) \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Итак, в любом из возможных случаев имеет место $A/R \in \mathfrak{H}_1$. Значит,

$$A/C^r(A) \cong (A/R)/(C^r(A)/R) = (A/R)/C^r(A/R) \in h_1(r)$$

для всех $r \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A/R)) \setminus \{q\}$. Следовательно, $A/C^r(A) \in h_1(r)$ для всех $r \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A))$. Кроме того, так как $A \in \mathfrak{F}$, то

$$A/R_\omega(A) \in f(\omega') = h_1(\omega').$$

Значит, $A \in \mathfrak{H}_1$. Этим доказано утверждение 1).

Докажем теперь утверждение 2). По условию $A \in \mathfrak{F}$. Поскольку $R_\omega(A) = 1$, то

$$A \cong A/1 = A/R_\omega(A) \in f(\omega') =$$

$$= h_2(\omega') = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}_2) \subseteq c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_2.$$

Таким образом, $A \in \mathfrak{H}_2$.

Рассмотрим случай, когда A не является монолитической группой, т. е. когда $\mathrm{Soc}(A) = N_1 \times \ldots \times N_t$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа группы A и $t > 1$. Пусть M_i — наибольшая нормальная в A подгруппа, содержащая $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_t$, но не содержащая N_i, где $i = 1, \ldots, t$. Согласно лемме 4.1.15

$$A \in \mathrm{R}_0(A/M_1, \ldots, A/M_t).$$

По условию $A \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Следовательно, $A/M_i \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Значит, согласно уже доказанному $A/M_i \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$. Следовательно, $A \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$.

Рассматривая теперь доказательство леммы 4.1.15 и заменяя условие $O_p(A) = 1$ условием $R_\omega(A) = 1$, можно заключить, что для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ фактор-группа A/M_i монолитична с монолитом N_iM_i/M_i и $R_\omega(A/M_i) = 1$. Следовательно, по доказанному выше $A/M_i \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}_2$. Значит,

$$A \cong A/1 = A/(M_1 \cap \ldots \cap M_t) \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{M}_2.$$

Лемма доказана.

Для произвольной совокупности n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee_n^{\omega}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c_n^{\omega}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность c_{n-1}^{ω}-значных функций вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$

Тогда через $\vee_{n-1}^{\omega}(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую функцию f, что

$$f(a) = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i \in I} f_i(a)\right)$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

4.7.3 Лемма ([57, лемма 5]; [58, лемма 14]). *Пусть $n \geqslant 1$, f_i — минимальный ω-композиционный c^{ω}_{n-1}-значный спутник n-кратно разрешимо ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I)$ — минимальный ω-композиционный c^{ω}_{n-1}-значный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee^{\omega}_{n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Доказательство. Пусть $h = \vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I)$, а f — минимальный ω-композиционный c^{ω}_{n-1}-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, и пусть

$$\pi_1 = \omega \cap \pi\Big(\mathrm{Com}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)\Big) \quad \text{и} \quad \pi_2 = \omega \cap \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big).$$

Так как $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c}$ для всех $i \in I$, то $\mathrm{E}\Big(\mathrm{Com}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)\Big) \in \Theta^{\omega_c}$. Следовательно, ввиду леммы 1.2.37 $\pi_1 = \pi_2$.

Покажем, что $f = h$. Пусть $\pi = \pi_1 = \pi_2$. Ввиду следствия 1.6.11 и леммы 4.6.6

$$f(\omega') = c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}\Big(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big) =$$

$$= c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}\big(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i\big)\Big) =$$

$$= c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(\omega')\Big) = \big(\vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I)\big)(\omega') = h(\omega').$$

Если $p \in \pi$, то по следствию 1.6.11 и лемме 4.6.6

$$f(p) = c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}\Big(G/C^{p}(G) \mid G \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big) =$$

$$= c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}\big(G/C^{p}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i\big)\Big) =$$

$$= c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big) = \big(\vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I)\big)(p) = h(p).$$

Если $p \in \omega \setminus \pi$, то согласно следствию 1.6.11 $f_i(p) = \varnothing$ для любого $i \in I$. В этом случае

$$h(p) = \bigcup_{i\in I} f_i(p) = \big(\vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I)\big)(p) = \varnothing = f(p).$$

Лемма доказана.

4.7.4 Лемма ([57, лемма 6]). *Для произвольного набора* $\{\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i) \mid i \in I\}$ *разрешимо* ω*-насыщенных формаций* $\mathfrak{F}_i$*, где* f_i *— некоторый внутренний* ω*-композиционный* c^ω_{n-1}*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$*, справедливо равенство*:

$$\vee^\omega_n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_\omega\big(\vee^\omega_{n-1}(f_i \mid i \in I)\big).$$

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций и f_i — некоторый внутренний ω-композиционный c^ω_{n-1}-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Пусть

$$\mathfrak{F} = \vee^\omega_n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I), \quad \mathfrak{M} = CF_\omega\big(\vee^\omega_{n-1}(f_i \mid i \in I)\big)$$

и h_i — минимальный ω-композиционный c^ω_{n-1}-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Тогда ввиду леммы 4.7.3 $h = \vee^\omega_{n-1}(h_i \mid i \in I)$ — минимальный ω-композиционный c^ω_{n-1}-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Так как $h_i \leqslant f_i$ для всех $i \in I$, то

$$h \leqslant f = \vee^\omega_{n-1}(f_i \mid i \in I).$$

Значит, согласно лемме 1.2.38 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Пусть $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(R)) = \varnothing$. Следовательно, $R_\omega(G) = 1$. Тогда

$$G \cong G/1 = G/R_\omega(G) \in f(\omega') = \big(\vee^\omega_{n-1}(f_i \mid i \in I)\big)(\omega') =$$

$$= c^\omega_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(\omega')\Big) = c^\omega_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\Big).$$

Значит, согласно лемме 4.7.1

$$G \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i \subseteq c^\omega_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\Big) = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(R)) \neq \varnothing$.

Если R — неабелева, то $\pi(\mathrm{Com}(R)) = \varnothing$. Тогда $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(R)) = \varnothing$. Противоречие. Значит, R — p-группа, где $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(R))$. Поскольку $G \in \mathfrak{M} = CF_\omega(f)$, то $G/R \in \mathfrak{M}$. Так как $|G/R| < |G|$, то по индукции

$$G/R \in \mathfrak{F} = CF_\omega(h).$$

Значит,

$$(G/R)/R_\omega(G/R) = (G/R)/(R_\omega(G)/R) \cong G/R_\omega(G) \in h(\omega'),$$

$$(G/R)/C^q(G/R) = (G/R)/(C^q(G)/R) \cong G/C^q(G) = h(q)$$

для всех $q \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G)) \setminus \{p\}$.

Вместе с тем, так как $G \in \mathfrak{M} = CF_\omega(f)$, то

$$G/C^p(G) \in f(p) = c^\omega_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big).$$

Так как при этом $O_p(G/C^p(G)) = 1$, то по леммам 4.7.2 и 4.6.6, и согласно следствию 1.6.11

$$G/C^p(G) \in c^\omega_{n-1}\mathrm{form}\Big(A/O_p(A) \mid A \in \bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big) =$$

$$= c^\omega_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\big(A/O_p(A) \mid A \in f_i(p)\big)\Big) =$$

$$= c^\omega_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} c^\omega_{n-1}\mathrm{form}\big(A/O_p(A) \mid A \in f_i(p)\big)\Big) =$$

$$= c^\omega_{n-1}\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} h_i(p)\Big) = \big(\vee^\omega_{n-1}(h_i \mid i \in I)\big)(p) = h(p).$$

Таким образом,

$$G/R_\omega(G) \in h(\omega') \text{ и } G/C^r(G) \in h(r)$$

для всех $r \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Лемма доказана.

4.7.5 Лемма. *Пусть $\mathfrak{R}_i$ — полуформация, порожденная группой G_i, $i = 1, 2$. Тогда $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ — полуформация, причем*

$$\mathfrak{R}_1 = (B_1, \dots, B_t) \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{R}_2 = (C_1, \dots, C_s)$$

для некоторых $B_1, \dots, B_t \in \mathrm{Q}(G_1)$ и $C_1, \dots, C_s \in \mathrm{Q}(G_2)$.

Доказательство. По лемме 4.1.5 $\mathfrak{R}_1 = \mathrm{Q}(G_1)$. Пусть группа $H \in \mathrm{Q}(G_1)$. Тогда H — гомоморфный образ некоторой группы G_1, т. е. $H \cong T/K$, где $T \cong G_1$. Рассмотрим все гомоморфные образы $B_1, \dots, B_t$ группы T. Тогда $\mathfrak{R}_1 = \mathrm{Q}(G_1) = (B_1, \dots, B_t)$ для некоторых $B_1, \dots, B_t \in \mathrm{Q}(G_1)$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{R}_2 = (C_1, \dots, C_s)$ для некоторых $C_1, \dots, C_s$ из $\mathrm{Q}(G_2)$.

Покажем, что $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ — полуформация. Пусть $G \in \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ и $N \lhd G$. Тогда $K \in \mathfrak{R}_1$ или $K \in \mathfrak{R}_2$. Значит, $G/N \in \mathrm{Q}\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1$ или $G/N \in \mathrm{Q}\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2$. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$. Итак, $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 = \mathrm{Q}(\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2)$. Лемма доказана.

4.7.6 Лемма ([58, лемма 15]). *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — произвольные n-кратно разрешимо ω-насыщенные формации и $A \in \mathfrak{F}_1 \vee {}_n^\omega \mathfrak{F}_2$, $n \geqslant 0$. Тогда найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2)$, что*

$$A \in (c_n^\omega \mathrm{form} A_1) \vee {}_n^\omega (c_n^\omega \mathrm{form} A_2).$$

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. По лемме 4.1.10

$$A \in \mathfrak{F}_1 \vee {}_0^\omega \mathfrak{F}_2 = c_0^\omega \mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Ввиду леммы 4.1.10

$$A \in \mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathrm{QR}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Следовательно, $A \cong H/N$, где $H \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Значит, группа H имеет нормальные подгруппы $N_1, \ldots, N_t$ $(t \geqslant 2)$ такие, что

$$\bigcap_{i=1}^{t} N_i = 1 \qquad \text{и} \qquad H/N_i \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2, \quad i = 1, \ldots, t.$$

Рассмотрим пересечение $N_1 \cap \ldots \cap N_t$. Ясно, что часть пересекаемых нормальных подгрупп содержится в $\mathfrak{F}_1$-корадикале группы H, а остальная часть содержится в $H^{\mathfrak{F}_2}$. Поскольку $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$, то $H^{\mathfrak{F}_1} \cap H^{\mathfrak{F}_2} = 1$. Значит, $H \in \mathrm{R}_0(H/H^{\mathfrak{F}_1}, H/H^{\mathfrak{F}_2})$. Отсюда, применяя лемму 4.1.10, получаем

$$A \cong H/N \in \mathrm{QR}_0(H/H^{\mathfrak{F}_1}, H/H^{\mathfrak{F}_2}) = \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_1}, H/H^{\mathfrak{F}_2}) =$$

$$= \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_1}) \vee {}_0^\omega \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_2}) \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee {}_0^\omega \mathfrak{F}_2.$$

Пусть $n > 0$, $\{p_1, \ldots, p_t\} = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A))$ и $A \in \mathfrak{F}_1 \vee {}_n^\omega \mathfrak{F}_2$. Тогда ввиду следствия 1.6.11 и леммы 4.7.3

$$A/C^{p_i}(A) \in f_1(p_i) \vee {}_{n-1}^\omega f_2(p_i) \qquad \text{и} \qquad A/R_\omega(A) \in f_1(\omega') \vee {}_{n-1}^\omega f_2(\omega'),$$

где f_j — минимальный ω-композиционный c_{n-1}^ω-значный спутник формации $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. По индукции найдутся такие группы $A_{i_1} \in f_1(p_i)$, $A_{i_2} \in f_2(p_i)$, $T_1 \in f_1(\omega')$, $T_2 \in f_2(\omega')$, что

$$A/C^{p_i}(A) \in (c_{n-1}^\omega \mathrm{form} A_{i_1}) \vee {}_{n-1}^\omega (c_{n-1}^\omega \mathrm{form} A_{i_2}),$$

$$A/R_\omega(A) \in (c_{n-1}^\omega \mathrm{form} T_1) \vee {}_{n-1}^\omega (c_{n-1}^\omega \mathrm{form} T_2).$$

Заметим, что

$$c_{n-1}^\omega \mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2}) = (c_{n-1}^\omega \mathrm{form} A_{i_1}) \vee {}_{n-1}^\omega (c_{n-1}^\omega \mathrm{form} A_{i_2}),$$

$$c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(T_1,\, T_2) = (c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}T_1) \vee_{n-1}^{\omega} (c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}T_2).$$

Итак, $A/C^{p_i}(A) \in c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2})$ и $A/R_\omega(A) \in c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(T_1,\, T_2)$.

Пусть $\mathfrak{R}_1$ — полуформация, порожденная группой A_{i_1}, $\mathfrak{R}_2$ — полуформация, порожденная группой A_{i_2}, $\mathfrak{Y}_1$ — полуформация, порожденная группой T_1, $\mathfrak{Y}_2$ — полуформация, порожденная группой T_2. Тогда по лемме 4.1.5

$$\mathfrak{R}_1 = (B_1, \ldots, B_t) \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{R}_2 = (C_1, \ldots, C_r)$$

для некоторых $B_1, \ldots, B_t \in \mathrm{Q}(A_{i_1})$ и $C_1, \ldots, C_r \in \mathrm{Q}(A_{i_2})$, а также

$$\mathfrak{Y}_1 = (U_1, \ldots, U_m) \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{Y}_2 = (V_1, \ldots, V_q)$$

для некоторых $U_1, \ldots, U_m \in \mathrm{Q}(T_1)$ и $V_1, \ldots, V_q \in \mathrm{Q}(T_2)$. По лемме 4.7.5 $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2$ — полуформации. Следовательно,

$$A/C^{p_i}(A) \in c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(A_{i_1},\, A_{i_2}) = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2) =$$

$$= c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(B_1, \ldots, B_t; C_1, \ldots, C_r),$$

$$A/R_\omega(A) \in c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(T_1,\, T_2) = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2) =$$

$$= c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(U_1, \ldots, U_m; V_1, \ldots, V_q).$$

Поскольку $O_{p_i}(A/C^{p_i}(A)) = 1$ и $R_\omega(A/R_\omega(A)) = 1$, то ввиду леммы 4.7.2

$$A/C^{p_i}(A) \in c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/O_{p_i}(G) \mid G \in \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2) =$$

$$= c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(B_1/O_{p_i}(B_1), \ldots, B_t/O_{p_i}(B_t); C_1/O_{p_i}(C_1), \ldots, C_r/O_{p_i}(C_r)\big),$$

$$A/R_\omega(A) \in c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2\big) =$$

$$= c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(U_1/R_\omega(U_1), \ldots, U_m/R_\omega(U_m); V_1/R_\omega(V_1), \ldots, V_q/R_\omega(V_q)\big).$$

Таким образом, выполняются включения

$$c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(B_1, \ldots, B_t; C_1, \ldots, C_r) \subseteq$$

$$\subseteq c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(B_1/O_{p_i}(B_1), \ldots, B_t/O_{p_i}(B_t); C_1/O_{p_i}(C_1), \ldots, C_r/O_{p_i}(C_r)\big),$$

$$c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(U_1, \ldots, U_m; V_1, \ldots, V_q) \subseteq$$

$$\subseteq c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(U_1/R_\omega(U_1), \ldots, U_m/R_\omega(U_m); V_1/R_\omega(V_1), \ldots, V_q/R_\omega(V_q)\big).$$

С другой стороны, поскольку $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ и $\mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2$ — полуформации, то для любой группы G выполняются условия: если $G \in \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$, то $G/O_{p_i}(G) \in \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$, и если $G \in \mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2$, то $G/R_\omega(G) \in \mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2$. Значит,

$$\big(G/O_{p_i}(G) \mid G \in \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2\big) \subseteq \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2,$$

$$\big(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2\big) \subseteq \mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2.$$

Следовательно,

$$c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(B_1/O_{p_i}(B_1), \ldots, B_t/O_{p_i}(B_t); C_1/O_{p_i}(C_1), \ldots, C_r/O_{p_i}(C_r)\big) =$$

$$= c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/O_{p_i}(G) \mid G \in \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2) \subseteq$$

$$\subseteq c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2) = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(B_1, \ldots, B_t; C_1, \ldots, C_r),$$

$$c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(U_1/R_\omega(U_1), \ldots, U_m/R_\omega(U_m); V_1/R_\omega(V_1), \ldots, V_q/R_\omega(V_q)\big) =$$

$$= c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2) \subseteq$$

$$\subseteq c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2) = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(U_1, \ldots, U_m; V_1, \ldots, V_q).$$

Итак,

$$A/C^{p_i}(A) \in c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(B_1, \ldots, B_t; C_1, \ldots, C_r) =$$

$$= c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(B_1/O_{p_i}(B_1), \ldots, B_t/O_{p_i}(B_t); C_1/O_{p_i}(C_1), \ldots, C_r/O_{p_i}(C_r)\big).$$

Если $O_{p_i}(B_k) \neq 1$, то

$$B_k/O_{p_i}(B_k) \in \big(B_1, \ldots, B_t; C_1, \ldots, C_r \mid O_{p_i}(B_k) = 1 \text{ и } O_{p_i}(C_l) = 1\big) \subseteq$$

$$\subseteq c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(B_1, \ldots, B_t; C_1, \ldots, C_r \mid O_{p_i}(B_k) = 1 \text{ и } O_{p_i}(C_l) = 1\big),$$

поскольку $O_{p_i}(B_k/O_{p_i}(B_k)) = 1$. Таким образом, полученное равенство означает, что для простоты можно брать $O_{p_i}(B_k) = 1 = O_{p_i}(C_l)$, $k = 1, \ldots, t$ и $l = 1, \ldots, r$. Аналогично

$$A/R_\omega(A) \in c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(U_1, \ldots, U_m; V_1, \ldots, V_q) =$$

$$= c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(U_1/R_\omega(U_1), \ldots, U_m/R_\omega(U_m); V_1/R_\omega(V_1), \ldots, V_q/R_\omega(V_q)\big).$$

Если $R_\omega(U_x) \neq 1$, то

$$U_x/(U_x)_{\omega d} \in \big(U_1, \ldots, U_m; V_1, \ldots, V_q \mid (U_x)_{\omega d} = 1 \text{ и } (U_z)_{\omega d} = 1\big) \subseteq$$

$$\subseteq c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}\big(U_1, \ldots, U_m; V_1, \ldots, V_q \mid (U_x)_{\omega d} = 1 \text{ и } (U_z)_{\omega d} = 1\big).$$

Поэтому можем считать, что

$$O_{p_i}(B_k) = 1 = O_{p_i}(C_l) \qquad \text{и} \qquad R_\omega(U_x) = 1 = R_\omega(V_z)$$

для всех $k = 1, \ldots, t$ и $l = 1, \ldots, r$; $x = 1, \ldots, m$ и $z = 1, \ldots, q$.

Пусть

$$D_{i_1} = B_1 \times \ldots \times B_s \qquad \text{и} \qquad D_{i_2} = C_1 \times \ldots \times C_r;$$

$$U = U_1 \times \ldots \times U_m \qquad \text{и} \qquad V = V_1 \times \ldots \times V_q.$$

Так как $\mathfrak{N}_{p_i}$, $\mathfrak{S}_\omega$ — классы Локетта, то по лемме 4.1.16

$$O_{p_i}(D_{i_1}) = (D_{i_1})_{\mathfrak{N}_{p_i}} = (B_1 \times \ldots \times B_s)_{\mathfrak{N}_{p_i}} =$$

$$= (B_1)_{\mathfrak{N}_{p_i}} \times \ldots \times (B_s)_{\mathfrak{N}_{p_i}} = O_{p_i}(B_1) \times \ldots \times O_{p_i}(B_s) =$$
$$= 1 \times \ldots \times 1 = 1,$$

$$R_\omega(U) = U_{\mathfrak{S}_\omega} = (U_1 \times \ldots \times U_m)_{\mathfrak{S}_\omega} = (U_1)_{\mathfrak{S}_\omega} \times \ldots \times (U_m)_{\mathfrak{S}_\omega} =$$
$$= R_\omega(U_1) \times \ldots \times R_\omega(U_m) = 1 \times \ldots \times 1 = 1.$$

Аналогично $O_{p_i}(D_{i_2}) = 1$ и $R_\omega(V) = 1$. Кроме того,

$$A/C^{p_i}(A) \in c^\omega_{n-1}\mathrm{form}(\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2) =$$

$$= c^\omega_{n-1}\mathrm{form}(D_{i_1},\, D_{i_2}) = c^\omega_{n-1}\mathrm{form}(A_{i_1},\, A_{i_2}).$$

Пусть Z_{p_i} — группа порядка p_i, $W_{i_1} = Z_{p_i} \wr D_{i_1}$, $W_{i_2} = Z_{p_i} \wr D_{i_2}$. Покажем, что $W_{i_1} \in \mathfrak{F}_1$. Пусть K — база регулярного сплетения W_{i_1}. Тогда по лемме 1.2.34

$$W_{i_1}/K = W_{i_1}/O_{p_i}(W_{i_1}) \cong D_{i_1} \in f_1(p_i) \cap \mathfrak{F}_1,$$

где $p_i \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A))$. Значит, по лемме 1.2.35 $W_{i_1} \in \mathfrak{F}_1$. Аналогично доказывается, что $W_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$.

Поскольку $T_1 \in f_1(\omega')$ и f_1 является внутренним ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}_1$, то $T_1 \in \mathfrak{F}_1$. Значит, $U_x \in \mathfrak{F}_1$ для всех $x = 1, \ldots, m$. Аналогично убеждаемся, что $V_z \in \mathfrak{F}_2$ для всех $z = 1, \ldots, q$.

Пусть $A_1 = W_{1_1} \times W_{2_1} \times \ldots \times W_{t_1} \times U$ и $A_2 = W_{1_2} \times W_{2_2} \times \ldots \times W_{t_2} \times V$. Тогда $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$. Пусть

$$\mathfrak{F} = (c^\omega_n\mathrm{form}A_1) \vee^\omega_n (c^\omega_n\mathrm{form}A_2).$$

Покажем, что $A \in \mathfrak{F}$. Для этого достаточно установить, что $A/R_\omega(A) \in f(\omega')$ и $A/C^{p_i}(A) \in f(p_i)$, где f — минимальный ω-композиционный c^ω_{n-1}-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Ясно, что $W_{i_1} \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по лемме 1.2.34

$$D_{i_1} \cong W_{i_1}/K = W_{i_1}/C^{p_i}(W_{i_1}) \in f(p_i).$$

Аналогично доказывается, что $D_{i_2} \in f(p_i)$. Тогда

$$A/C^{p_i}(A) \in c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}(D_{i_1},\, D_{i_2}) \subseteq f(p_i).$$

Кроме того, $U, V \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по следствию 1.6.11

$$T_1 \cong T_1/R_\omega(T_1) \in f(\omega') = c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}).$$

Аналогично, $T_2 \in f(\omega')$. Тогда

$$A/R_\omega(A) \in c^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}(T_1,\, T_2) \subseteq f(\omega').$$

Итак, $A \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Докажем следующую теорему, играющую существенную роль при доказательстве основных результатов данного параграфа.

4.7.7 Теорема ([57, лемма 7]; [58, предложение]). *Решетка всех n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций $\mathfrak{G}$-отделима при любом целом неотрицательном n.*

Доказательство. Пусть $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ — терм сигнатуры $\{\cap, \vee^{\omega}_n\}$, $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ — произвольные n-кратно разрешимо ω-насыщенные формации и

$$A \in \xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m).$$

Индукцией по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee^{\omega}_n\}$ в терм ξ покажем, что найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, что

$$A \in \xi(c^{\omega}_n\mathrm{form}A_1, \ldots, c^{\omega}_n\mathrm{form}A_m).$$

При $r = 0$, очевидно, $A \in c^{\omega}_n\mathrm{form}A$.

Докажем, что утверждение верно при $r = 1$. Существует две возможности: либо $A \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, либо

$$A \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\omega}_n \mathfrak{F}_2 = c^{\omega}_n\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

В первом случае $A \in c^{\omega}_n\mathrm{form}A \cap c^{\omega}_n\mathrm{form}A$. Во втором случае по лемме 4.7.6 найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1,\, 2)$, что

$$A \in (c^{\omega}_n\mathrm{form}A_1) \vee^{\omega}_n (c^{\omega}_n\mathrm{form}A_2).$$

Итак, утверждение при $r = 1$ доказано.

Пусть теперь терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee_n^\omega\}$ и для термов с меньшим числом вхождений доказываемое утверждение верно. Пусть терм ξ имеет вид

$$\xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) \triangle \xi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}),$$

где $\triangle \in \{\cap, \vee_n^\omega\}$, и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ формацию $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a})$, а через $\mathfrak{H}_2$ — формацию $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$, что

$$A \in c_n^\omega \mathrm{form} A_1 \triangle c_n^\omega \mathrm{form} A_2.$$

С другой стороны, по индукции найдутся такие группы $B_1, \ldots, B_a$, $C_1, \ldots, C_b$, что $B_k \in \mathfrak{F}_{i_k}$, $C_k \in \mathfrak{F}_{j_k}$,

$$A_1 \in \xi_1(c_n^\omega \mathrm{form} B_1, \ldots, c_n^\omega \mathrm{form} B_a),$$

$$A_2 \in \xi_2(c_n^\omega \mathrm{form} C_1, \ldots, c_n^\omega \mathrm{form} C_b).$$

Пусть переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$ не входят в слово ξ_2, а все переменные $x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_a}$ в это слово входят. Пусть $D_{i_k} = B_k$, если $k < t+1$; $D_{i_k} = B_k \times C_q$, где q такое, что $x_{i_k} = x_{j_q}$ при всех $k \geqslant t+1$. Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_a}\}$. Обозначим через $\mathfrak{R}_p$ формацию $c_n^\omega \mathrm{form} D_{i_p}$, а через $\mathfrak{X}_c$ — формацию $c_n^\omega \mathrm{form} D_{j_c}$, $p = 1, \ldots, a$; $c = 1, \ldots$ $\ldots, b$. Тогда

$$A_1 \in \xi_1(\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_a), \qquad A_2 \in \xi_2(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_b).$$

Следовательно, найдутся такие формации

$$\mathfrak{L}_1 = c_n^\omega \mathrm{form} L_1, \ \ldots, \ \mathfrak{L}_m = c_n^\omega \mathrm{form} L_m,$$

что

$$A \in \xi_1(\mathfrak{L}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{L}_{i_a}) \triangle \xi_2(\mathfrak{L}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{L}_{j_b}) = \xi(\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_m),$$

где $L_i \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Таким образом, решетка c_n^ω является $\mathfrak{G}$-отделимой. Теорема доказана.

В случае $n = 1$ получаем

4.7.8 Следствие. *Решетка всех разрешимо ω-насыщенных формаций $\mathfrak{G}$-отделима.*

Учитывая [209, замечание 3], мы получаем

4.7.9 Следствие. *Решетка всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима при любом целом неотрицательном n.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ имеем

4.7.10 Следствие. *Решетка всех n-кратно разрешимо насыщенных формаций $\mathfrak{G}$-отделима при любом целом неотрицательном n.*

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ получим

4.7.11 Следствие. *Решетка всех разрешимо насыщенных формаций $\mathfrak{G}$-отделима.*

Для всякого терма ξ сигнатуры $\{\cap, \vee_n^\omega\}$ через $\overline{\xi}$ будем обозначать терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{n-1}^\omega\}$, получаемый из терма ξ, заменой каждого вхождения символа $\vee_n^\omega$ на символ $\vee_{n-1}^\omega$.

4.7.12 Лемма ([57, лемма 8]; [58, лемма 16]). *Пусть $\xi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ — терм сигнатуры $\{\cap, \vee_n^\omega\}$, f_i — внутренний ω-композиционный c_{n-1}^ω-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, где $i = 1, \ldots, m$; $n \geqslant 1$. Тогда*

$$\xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m) = CF_\omega\big(\overline{\xi}(f_1, \ldots, f_m)\big).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу r вхождений в терм ξ символов из $\{\cap, \vee_n^\omega\}$.

Основание индукции (случай $r = 1$) вытекает из лемм 1.2.32 и 4.7.4.

Предположим теперь, что терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\triangle \in \{\cap, \vee_n^\omega\}$. Пусть терм ξ имеет вид

$$\xi(x_1, \ldots, x_m) = \xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) \triangle \xi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}),$$

где $\triangle \in \{\cap, \vee_n^\omega\}$,

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \{x_1, \ldots, x_m\}$$

и лемма для термов ξ_1 и ξ_2 выполняется. Тогда

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = CF_\omega\big(\overline{\xi}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})\big),$$

$$\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = CF_\omega\big(\overline{\xi}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\big).$$

Понятно, что оба спутника $\overline{\xi}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})$ и $\overline{\xi}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})$ внутренние. Значит, по индукции,

$$\xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m) = \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) \triangle\, \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) =$$

$$= CF_\omega\big(\overline{\xi}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})\overline{\triangle}\,\overline{\xi}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b})\big) = CF_\omega\big(\overline{\xi}(f_1,\dots,f_m)\big),$$

где $\overline{\triangle} = \cap$, если $\triangle = \cap$ и $\overline{\triangle} = \vee^\omega_{n-1}$, если $\triangle = \vee^\omega_n$. Лемма доказана.

4.7.13 Теорема ([57, теорема 1]; [58, теорема 1]). *Пусть $n \geqslant 1$. Тогда всякое тождество, справедливое в решетке всех формаций c^ω_0, выполняется и в решетке всех n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций c^ω_n.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое тождество

$$\xi_1(x_{i_1},\dots,x_{i_a}) = \xi_2(x_{j_1},\dots,x_{j_b}) \tag{4.10}$$

сигнатуры $\{\cap, \vee^\omega_n\}$. И пусть

$$\overline{\xi}_1(x_{i_1},\dots,x_{i_a}) = \overline{\xi}_2(x_{j_1},\dots,x_{j_b}) \tag{4.11}$$

— то же самое тождество, но уже в сигнатуре $\{\cap, \vee^\omega_{n-1}\}$.

Предположим, что тождество (4.11) выполняется в решетке c^ω_{n-1}. Пусть

$$\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a};\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b}$$

— произвольные n-кратно разрешимо ω-насыщенные формации. Докажем, что

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b}).$$

Пусть f_{i_c} — минимальный ω-композиционный c^ω_{n-1}-значный спутник формации $\mathfrak{F}_{i_c}$ (где $c = 1,\dots,a$), f_{j_d} — минимальный ω-композиционный c^ω_{n-1}-значный спутник формации $\mathfrak{F}_{j_d}$ (где $d = 1,\dots,b$). Тогда по лемме 4.7.12

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a}) = CF_\omega\big(\overline{\xi}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})\big),$$

$$\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b}) = CF_\omega\big(\overline{\xi}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b})\big).$$

Кроме того, ввиду следствия 1.6.11 формации

$$f_{i_1}(\omega'),\dots,f_{i_a}(\omega');f_{j_1}(\omega'),\dots,f_{j_b}(\omega')$$

и формации

$$f_{i_1}(p),\dots,f_{i_a}(p);f_{j_1}(p),\dots,f_{j_b}(p)$$

для произвольного простого числа $p \in \omega$ принадлежат решетке c^ω_{n-1}. Значит, по индукции

$$\overline{\xi}_1\big(f_{i_1},\dots,f_{i_a}\big)(p) = \overline{\xi}_1\big(f_{i_1}(p),\dots,f_{i_a}(p)\big) =$$

$$= \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)\big) = \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b}\big)(p)$$

и

$$\overline{\xi}_1\big(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a}\big)(\omega') = \overline{\xi}_1\big(f_{i_1}(\omega'), \ldots, f_{i_a}(\omega')\big) =$$
$$= \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}(\omega'), \ldots, f_{j_b}(\omega')\big) = \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b}\big)(\omega').$$

Следовательно,

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Таким образом, тождество (4.10) выполняется в решетке c_n^{ω}. Отсюда вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

4.7.14 Следствие ([58, следствие 5]). *Решетка всех n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций c_n^{ω} модулярна, но не является дистрибутивной при любом целом неотрицательном n.*

Доказательство. Согласно лемме 4.1.14 решетка всех формаций c_0^{ω} модулярна. Применяя теперь теорему 4.7.13, видим, что при любом целом неотрицательном n решетка c_n^{ω} модулярна.

Для доказательства недистрибутивности решетки c_n^{ω} достаточно показать, что в решетке c_0^{ω} имеется недистрибутивная подрешетка. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс локально конечных групп, экспоненты которых делят данное простое число $p \neq 2$. Согласно [111], $\mathfrak{M}$ — многообразие. Пусть $L(\mathfrak{M})$ — решетка его подмногообразий. Тогда ввиду результатов Г. Хигмана [285] (см. также [128, параграф 54.24]) решетка $L(\mathfrak{M})$ не является дистрибутивной. Согласно лемме 4.1.17 решетка $L(\mathfrak{M})$ вкладывается в решетку c_0^{ω}, а значит, и в решетку c_0^{ω}, поскольку формация $\mathrm{fin}(\mathfrak{M})$ нильпотентна. Следовательно, ввиду теоремы 4.7.13, решетка c_n^{ω} не является дистрибутивной. Следствие доказано.

4.7.15 Лемма ([57, лемма 9]; [58, лемма 17]). *Пусть Θ — $\mathfrak{X}$-отделимая решетка формаций, η — такая ее подрешетка, которая со всякой своей формацией $\mathfrak{F}$ содержит и все ее однопорожденные Θ-подформации вида $\Theta\mathrm{form}A$, где $A \in \mathfrak{X}$. Тогда тождество $\xi_1 = \xi_2$ сигнатуры $\{\cap, \vee_{\Theta}\}$ истинно в η, если оно выполняется для всех однопорожденных Θ-формаций из η.*

Доказательство. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}$ — переменные, входящие в терм ξ_1; $x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}$ — переменные, входящие в терм ξ_2; и пусть

$$\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}; \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b} \in \eta.$$

Покажем, что

$$\mathfrak{F} = \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) \subseteq \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \mathfrak{M}.$$

Не теряя общности, можем считать, что

$$x_{j_1}, \ldots, x_{j_t} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\},$$

но

$$\{x_{j_{t+1}}, \ldots, x_{j_b}\} \cap \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} = \varnothing.$$

Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда по условию найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_{i_1}, \ldots$ $\ldots, A_{i_a}$, что $A_{i_k} \in \mathfrak{F}_{i_k}$ (где $k = 1, \ldots, a$) и

$$A \in \xi_1(\Theta\mathrm{form} A_{i_1}, \ldots, \Theta\mathrm{form} A_{i_a}).$$

Пусть $\mathfrak{H}_{i_k} = \Theta\mathrm{form} A_{i_k}$, и пусть

$$\mathfrak{H}_{j_k} = \begin{cases} \mathfrak{H}_{i_c}, & \text{где } x_{j_k} = x_{i_c}, \text{ для некоторого } c \in \{1, \ldots, a\} \\ & \text{для всех } k \in \{1, \ldots, t\}, \\ \Theta\mathrm{form} B_{j_k} & \text{для некоторой группы } B_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k} \\ & \text{для каждого } k > t. \end{cases}$$

По условию

$$\xi_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{j_b}).$$

Однако $\xi_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{j_b}) \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq$ $\subseteq \mathfrak{M}$. Аналогично доказывается обратное включение. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

4.7.16 Теорема ([57, теорема 2]; [58, теорема 2]). *Пусть $n \geqslant 1$. Тогда если ω — бесконечное множество, то системы тождеств решеток всех формаций c_0^ω и всех n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций c_n^ω совпадают.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое тождество

$$\xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) = \xi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}) \tag{4.12}$$

сигнатуры $\{\cap, \vee_n^\omega\}$. Пусть

$$\overline{\xi}_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) = \overline{\xi}_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}) \tag{4.13}$$

— то же самое тождество, но уже в сигнатуре $\{\cap, \vee_{n-1}^\omega\}$.

Предположим, что тождество (4.12) выполняется в решетке c_n^ω. Покажем, что тождество (4.13) выполняется в решетке c_{n-1}^ω. Для этого ввиду леммы 4.7.15 и теоремы 4.7.7 достаточно установить, что если

$$\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}; \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}$$

— произвольные однопорожденные $(n-1)$-кратно разрешимо ω-насыщенные формации, то

$$\overline{\xi}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \overline{\xi}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Пусть

$$\mathfrak{F}_{i_1} = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}A_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a} = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}A_{i_a};$$
$$\mathfrak{F}_{j_1} = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}A_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b} = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}A_{j_b}.$$

Выберем такое простое число $p \in \omega$, что $p \notin \pi(A_{i_1}, \ldots, A_{i_a}, A_{j_1}, \ldots$ $\ldots, A_{j_b})$. Пусть

$$B_{i_1} = Z_p \wr A_{i_1}, \ldots, B_{i_a} = Z_p \wr A_{i_a};$$

$$B_{j_1} = Z_p \wr A_{j_1}, \ldots, B_{j_b} = Z_p \wr A_{j_b},$$

где Z_p — группа простого порядка p. Поскольку формации

$$\mathfrak{M}_{i_1} = c_n^{\omega}\mathrm{form}B_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_a} = c_n^{\omega}\mathrm{form}B_{i_a};$$

$$\mathfrak{M}_{j_1} = c_n^{\omega}\mathrm{form}B_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_b} = c_n^{\omega}\mathrm{form}B_{j_b}$$

принадлежат решетке c_n^{ω}, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$, где

$$\mathfrak{F} = \xi_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_a}) \text{ и } \mathfrak{M} = \xi_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_b}).$$

Пусть f_{i_c} — минимальный ω-композиционный c_{n-1}^{ω}-значный спутник формации $\mathfrak{M}_{i_c}$ (где $c = 1, \ldots, a$); f_{j_d} — минимальный ω-композиционный c_{n-1}^{ω}-значный спутник формации $\mathfrak{M}_{j_d}$ (где $d = 1, \ldots, b$). Тогда ввиду леммы 4.7.12

$$\xi_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_a}) = CF_{\omega}\big(\overline{\xi}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})\big),$$

$$\xi_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_b}) = CF_{\omega}\big(\overline{\xi}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\big).$$

Пусть f и m — минимальные ω-композиционные c_{n-1}^{ω}-значные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Тогда по следствию 1.6.11 и согласно лемме 4.7.3

$$f(p) = \overline{\xi}_1\big(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a}\big)(p) = \overline{\xi}_1\big(f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p)\big)$$

и

$$m(p) = \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b}\big)(p) = \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)\big).$$

Значит,

$$\overline{\xi}_1\big(f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p)\big) = \overline{\xi}_2\big(f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)\big).$$

Так как $O_p(A_{i_c}) = 1$, то, ввиду следствия 1.6.11 $f_{i_c}(p) = \mathfrak{F}_{i_c}$, где $c = 1, \ldots, a$. Аналогично, $f_{j_d}(p) = \mathfrak{F}_{j_d}$, где $d = 1, \ldots, b$.

Следовательно,

$$\overline{\xi}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \overline{\xi}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}),$$

т. е. тождество (4.13) истинно в решетке c^{ω}_{n-1}. Таким образом, каждое тождество решетки c^{ω}_n выполняется в решетке всех формаций c^{ω}_0. Отсюда ввиду теоремы 4.7.13 вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

4.7.17 Следствие ([58, следствие 6]). *Пусть ω — бесконечное множество. Тогда для любых целых неотрицательных m и n решетки c^{ω}_m и c^{ω}_n имеют одну и ту же систему тождеств.*

Доказательство. Пусть некоторое тождество выполняется в решетке c^{ω}_n. Тогда по теореме 4.7.16 оно выполняется в решетке c^{ω}_0. Значит, согласно теореме 4.7.13 это же тождество выполняется в решетке c^{ω}_m. Следствие доказано.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ получаем следующее утверждение.

4.7.18 Следствие. *При любых целых неотрицательных m и n системы тождеств решеток c_m и c_n совпадают.*

4.8 О вложимости разрешимо ω-насыщенных формаций в компактные элементы решетки всех разрешимо ω-насыщенных формаций

4.8.1 Лемма. *Если решетка формаций Θ является алгебраической, то ее компактными элементами являются в точности однопорожденные формации из Θ.*

Доказательство. Пусть Θ — алгебраическая решетка формаций. Понятно, что любая формация из Θ есть решеточное объединение своих однопорожденных подформаций из Θ, т. е.

$$\mathfrak{R} = \vee_{\Theta}(\Theta\mathrm{form}G_i \mid i \in I),$$

где $\Theta\mathrm{form}G_i$ — подформация формации $\mathfrak{R}$, $i \in I$.

Тогда, в силу компактности элемента $\mathfrak{R}$, найдутся такие $i_1, \ldots$ $\ldots, i_t \in I$, что

$$\mathfrak{R} = \Theta\mathrm{form}G_{i_1} \vee_\Theta \ldots \vee_\Theta \Theta\mathrm{form}G_{i_t} = \Theta\mathrm{form}(G_{i_1} \times \ldots \times G_{i_t}).$$

Лемма доказана.

4.8.2 Лемма. *Пусть* $N_1 \times \ldots \times N_t = \mathrm{Soc}(G)$, *где* N_i *— минимальная нормальная подгруппа группы* G $(i = 1, \ldots, t)$, $t > 1$ *и* $R_\omega(G) = 1$. *Пусть* M_i *— наибольшая нормальная в* G *подгруппа, содержащая* $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_t$, *но не содержащая* N_i $(i = 1, \ldots, t)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого* $i \in \{1, \ldots, t\}$ *фактор-группа* G/M_i *монолитична и ее монолит* N_iM_i/M_i G*-изоморфен* N_i *и* $R_\omega(G/M_i) = 1$;

2) $M_1 \cap \ldots \cap M_t = 1$.

Доказательство. Допустим, что группа G/M_i не монолитична и T/M_i — минимальная нормальная в G/M_i подгруппа, отличная от N_iM_i/M_i. Тогда $N_i \not\subseteq T$ и $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_t \subseteq M_i \subseteq T$. Значит, согласно определению подгруппы M_i, имеет место $T \subseteq M_i$. Следовательно, $T = M_i$. Противоречие. Итак, фактор-группа G/M_i монолитична и $N_iM_i/M_i = \mathrm{Soc}(G/M_i)$. Так как $M_i \cap N_i = 1$, то имеет место G-изоморфизм:

$$N_iM_i/M_i \cong N_i/(N_i \cap M_i) = N_i/1 \cong N_i.$$

Из последнего, в частности, вытекает, что $R_\omega(G/M_i) = 1$, поскольку по условию $R_\omega(G) = 1$.

Покажем, что $M_1 \cap \ldots \cap M_t = 1$. Предположим противное. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G, входящая в $M_1 \cap \ldots \cap M_t$. Тогда, очевидно, $R \neq N_i$ для всех $i = 1, \ldots, t$. Понятно, что

$$\bigcap_{i=1}^{t}(N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_t) = 1.$$

Значит, найдется такое $i_0 \in \{1, \ldots, t\}$, что

$$R \not\subseteq K = N_1 \times \ldots \times N_{i_0-1} \times N_{i_0+1} \times \ldots \times N_t.$$

Следовательно, $RK = \mathrm{Soc}(G) \subseteq M_{i_0}$. Тогда $N_{i_0} \subseteq M_{i_0}$. Полученное противоречие показывает, что $M_1 \cap \ldots \cap M_t = 1$. Лемма доказана.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

4.8.3 Теорема *Всякая разрешимо ω-насыщенная формация, вложимая в компактный элемент решетки всех ω-насыщенных формаций, вкладывается также в некоторый компактный элемент решетки всех разрешимо ω-насыщенных формаций.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо ω-насыщенная формация и пусть для некоторой группы G справедливо включение $\mathfrak{F} \subseteq$ $\subseteq l^{\omega}\mathrm{form}G$. Пусть $\mathfrak{H} = l^{\omega}\mathrm{form}G$ и пусть $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G)) = \{p_1, \ldots$ $\ldots, p_t\}$. Пусть $\mathfrak{K} = c^{\omega}\mathrm{form}G^*$, где

$$G^* = G \times (Z_{p_1} \wr (G/O_{p_1}(G))) \times \ldots \times (Z_{p_t} \wr (G/O_{p_t}(G))).$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$.

Пусть f и k — минимальные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{K}$ соответственно и пусть h — минимальный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{H}$. Для доказательства включения $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$ достаточно показать, что $f \leqslant k$, т. е. $f(\omega') \subseteq k(\omega')$ и $f(p) \subseteq k(p)$ для любого $p \in \omega$.

Покажем сначала, что $f(\omega') \subseteq k(\omega')$. Согласно лемме 1.6.13

$$f(\omega') = \mathrm{form}(A \mid A \in f(\omega') \text{ и } R_{\omega}(A) = 1)$$

и

$$k(\omega') = \mathrm{form}(G^*/R_{\omega}(G^*)).$$

Пусть $A \in \mathfrak{F}$ и $R_{\omega}(A) = 1$. Заметим, что поскольку $R_{\omega}(A/R_{\omega}(A)) =$ $= 1$, то по лемме 4.7.2, чтобы показать, что $A \in k(\omega')$ необходимо лишь установить, что $A \in \mathrm{form}G^*$. Согласно лемме 1.5.14

$$h(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G))$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$.

Пусть $\mathrm{Soc}(A) = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа группы A $(i = 1, \ldots, k)$, $t > 1$ и пусть M_i — наибольшая нормальная в A подгруппа, содержащая $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times$ $\times \ldots \times N_t$, но не содержащая N_i $(i = 1, \ldots, k)$. Так как $A \in \mathfrak{F}$, то $A/M_i \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ $(i = 1, \ldots, k)$. Согласно лемме 4.8.2 A/M_i — монолитическая группа с монолитом N_iM_i/M_i. Пусть $p \in \pi(N_iM_i/M_i)$. Поскольку $R_{\omega}(A) = 1$, т. е. монолит N_iM_i/M_i неабелев, то

$$A/M_i \cong A/M_i/1 = (A/M_i)/F_p(A/M_i) \in h(p) =$$

$$= \mathrm{form}(G/F_p(G)) \subseteq \mathrm{form}G.$$

Значит, по лемме 4.8.2

$$A \cong A/1 = A/(M_1 \cap \ldots \cap M_k) \in \mathrm{form}G \subseteq \mathrm{form}G^*.$$

Следовательно, $A \in k(\omega')$. Итак, $f(\omega') \subseteq k(\omega')$.

Покажем теперь, что $f(p) \subseteq k(p)$ для любого $p \in \omega$. Если $f(p) = \varnothing$, то включение очевидно.

Пусть $f(p) \neq \varnothing$. Докажем, что $p \in \pi$. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех таких групп A, что $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A)) \subseteq \pi$. Тогда $\mathfrak{M}$ — формация.

Действительно, если $K \in \mathfrak{M}$ и $N \trianglelefteq K$, то $K/N \in \mathfrak{M}$, так как $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(K/N)) \subseteq \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(K)) \subseteq \pi$. Пусть $K/N_i \in \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ и пусть $D = N_1 \cap N_2$. Поскольку

$$(N_1/D)(N_2/D)/(N_2/D) \subseteq (K/D)/(N_2/D) \cong K/N_2 \in \mathfrak{M},$$

то

$$(N_1/D)(N_2/D)/(N_2/D) = (N_1N_2/D)/(N_2/D) \cong N_1N_2/N_2 \in \mathfrak{M}.$$

Значит,

$$N_1N_2/N_2 \cong N_1/(N_1 \cap N_2) = N_1/D \in \mathfrak{M}.$$

Рассмотрим главный ряд

$$1 \subseteq \ldots \subseteq D \subseteq \ldots \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq K.$$

Так как $K/N_1 \in \mathfrak{M}$, то на участке главного ряда от N_1 до K все композиционные факторы принадлежат классу $\mathfrak{M}$, а поскольку $N_1/D \in \mathfrak{M}$, то на участке главного ряда от D до N_1 все композиционные факторы также принадлежат классу $\mathfrak{M}$. Следовательно, $K/D \in \mathfrak{M}$.

Пусть m — такая формационная функция, что

$$m(a) = \begin{cases} \mathfrak{M}, & \text{если } a = p \in \pi, \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathrm{Com}(G)), \\ \mathfrak{M}, & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{M} = CF_\omega(m)$.

Действительно, если $L \in \mathfrak{M}$, то $L/R_\omega(L) \in \mathfrak{M} = m(\omega')$ и $L/F_p(L) \in \mathfrak{M} = m(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(L))$. Значит, $L \in CF_\omega(m)$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq CF_\omega(m)$.

Предположим, что обратное включение неверно и пусть L — группа минимального порядка из $CF_\omega(m) \setminus \mathfrak{M}$ с монолитом $R = L^{\mathfrak{M}}$. Если $R_\omega(L) \neq 1$, то $R \subseteq R_\omega(L)$. Значит, $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(R)) \subseteq \pi$. Следовательно, $L \in \mathfrak{M}$. Значит, $R_\omega(L) = 1$. Поэтому

$$L/R_\omega(L) = L/1 \cong L \in m(\omega') = \mathfrak{M}.$$

Полученное противоречие показывает, что $CF_\omega(m) \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M} = CF_\omega(m)$.

Значит, $\mathfrak{M}$ — разрешимо ω-насыщенная формация, содержащая группу G. Поэтому $\pi \subseteq \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$. Кроме того, по определению класса $\mathfrak{M}$ для всех групп $A \in \mathfrak{M}$ имеет место $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A)) \subseteq \pi$. Поэтому $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})) \subseteq \pi$. Итак, $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})) = \pi$. Кроме того, справедливо включение

$$\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \subseteq \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G)) = \pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})).$$

Следовательно, $\omega\cap\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \subseteq \pi$ и, тем самым, $p \in \pi$. Тогда $p = p_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, t\}$. Согласно лемме 1.6.13

$$f(p) = \mathrm{form}(A \mid A \in f(p) \text{ и } O_p(A) = 1) \text{ и } k(p) = \mathrm{form}(G^*/C^p(G^*)).$$

Пусть $A \in \mathfrak{F}$ и $O_p(A) = 1$. Пусть $\overline{A} = A/C^p(A)$. Заметим, что поскольку $O_p(\overline{A}) = 1$, то по лемме 4.7.2, чтобы показать, что $\overline{A} \in \mathrm{form}(G/O_p(G))$ необходимо лишь установить, что $\overline{A} \in \mathrm{form} G$.

Так как $F_p(A) \subseteq C^p(A)$, то

$$\overline{A} = A/C^p(A) \in \mathrm{Q}(A/F_p(A)).$$

Поскольку $A \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то

$$A/F_p(A) \in h(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G)).$$

Значит,

$$\overline{A} \in h(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G)) \subseteq \mathrm{form} G$$

и поэтому $\overline{A} \in \mathrm{form}(G/O_p(G))$. Заметим, что так как

$$T = Z_p \wr (G/O_p(G)) = K \leftthreetimes (G/O_p(G)) \in \mathfrak{K},$$

где K — база регулярного сплетения T, то согласно лемме 1.2.34

$$G/O_p(G) \cong T/K = T/C^p(T) \in k(p).$$

Таким образом,

$$\overline{A} = A/C^p(A) \in \mathrm{form}(G/O_p(G)) \subseteq k(p),$$

т. е. $\overline{A} = A/C^p(A) \in k(p)$. Следовательно, $f(p) \subseteq k(p)$.

Итак, $f(\omega') \subseteq k(\omega')$ и $f(p) \subseteq k(p)$ для любого $p \in \omega$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$. Теорема доказана.

Глава 5

КРАТКИЙ ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПО АЛГЕБРЕ КЛАССОВ

Напомним, что частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов существуют точная нижняя и точная верхняя грани, называется *решеткой*. Широкий спектр применения теории решеток в математике и смежных областях продемонстрирован в книге Биркгофа [13]. Методы общей теории решеток нашли широкое применение и были развиты в теории многообразий и квазимногообразий [222], в теории полугрупп и подполугрупп [130, 220, 221, 293, 323, 338], в теории формаций [203, 230, 246, 275] и классов Фиттинга [264].

В первом разделе остановимся на обзоре основных результатов, относящихся к решеткам многообразий.

5.1 Решетки многообразий

Одним из основных направлений теории многообразий полугрупп является изучение решеток полугрупповых многообразий. Значительное внимание в этой области уделяется рассмотрению тождеств и близких к ним условий в таких решетках. Вплоть до недавнего времени почти все работы здесь были посвящены трем наиболее известным решеточным тождествам — дистрибутивности, модулярности и дезарговости. В этом направлении был получен ряд глубоких результатов. М.В. Волковым [37] были полностью описаны многобразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий (чем решена проблема Эванса [265]). В работах [332] и [334] описаны, соответственно, коммутативные многообразия и многообразия нильполугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий (чем для указанных классов многообразий решена проблема Шеврина [169, задача 2.60]); более простое и короткое доказательство упомянутого результата работы [334] опубликовано в [329]. В работах [303,304] доказана дезарговость решетки вполне регулярных многообразий полугрупп.

Напомним, что многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ, обозначается $\mathrm{var}\,\Sigma$. Приведем обозначения для нескольких конкретных многообразий полугрупп, которые будут неоднократно встречаться в дальнейшем:

$\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп;

$\mathcal{COM} = \mathrm{var}\{xy = yx\}$ — многообразие всех коммутативных полугрупп;

$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y = y, xy = yx\}$ — многообразие всех абелевых групп экспоненты, делящей n;

$\mathcal{SL} = \mathrm{var}\{x^2 = x, xy = yx\}$ — многообразие всех полурешеток;

$\mathcal{LZ} = \mathrm{var}\{xy = x\}$ — многообразие всех полугрупп левых нулей;

$\mathcal{RZ} = \mathrm{var}\{xy = y\}$ — многообразие всех полугрупп правых нулей;

$\mathcal{ZM} = \mathrm{var}\{xy = 0\}$ — многообразие всех полугрупп с нулевым умножением.

Через $L(\mathcal{K})$ обозначается решетка всех многообразий, содержащихся в классе алгебраических систем $\mathcal{K}$. Решетка $L(\mathcal{SEM})$ будет всюду обозначаться **SEM**. Всякое многообразие полугрупп либо является периодическим, т. е. состоит из периодических полугрупп, либо надкоммутативно, т. е. содержит многообразие всех коммутативных полугрупп $\mathcal{COM}$. Как совокупность всех периодических многообразий **Per**, так и совокупность всех надкоммутативных многообразий образует подрешетку решетки всех многообразий полугрупп. Решетку подмногообразий многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ обозначают через $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ (см. [31]). Если $\mathcal{V}$ — надкоммутативное многообразие, то решетка его надкоммутативных подмногообразий, т. е. интервал $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$ решетки $\mathcal{L}(\mathcal{V})$, обозначается через $\mathcal{L}_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$.

Решетка **SEM** обладает всеми хрестоматийными свойствами решеток подмногообразий многообразий универсальных алгебр: она полна, атомарна и коалгебраична, причем ее кокомпактными элементами являются в точности конечно базируемые многообразия. Еще в 1955 году в работе Калицкого и Скотта [294] были описаны атомы решетки **SEM**: это многообразия $\mathcal{A}_p$ для всех простых $p, \mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{SL}, \mathcal{ZM}$ и только они. Коатомов в решетке **SEM** нет. Вцелом решетка **SEM** устроена чрезвычайно сложно (см. [222] и рисунок). Достаточно упомянуть, что она содержит интервал, антиизоморфный решетке разбиений счетного множества [259, 292]. Решетка **SEM** континуальна.

Отметим наиболее важные подрешетки решетки **SEM**. Прежде всего, **SEM** разбивается на две большие подрешетки с существенно различными свойствами: коидеал **OC** всех надкоммутативных многообразий (т. е. многообразий, содержащих $\mathcal{COM}$) и идеал **Per** всех периодических многообразий.

Решетка **OC** допускает относительно простое и прозрачное описание в терминах решеток конгруэнций унарных алгебр некоторого специального типа. В работе [335] показано, что решетка **OC** разлагается в подпрямое произведение некоторых своих интервалов, каждый из которых антиизоморфен решетке конгруэнций некоторого G-множества. Таким образом, наиболее сложной частью решетки **SEM** является решетка **Per**.

Рисунок — Решетка всех полугрупповых многообразий

В решетке **Per** можно выделить два обширных идеала с весьма различными свойствами: идеал **CR** всех периодических вполне регулярных многообразий и идеал **Comb** всех комбинаторных многообразий (т. е. многообразий, в которых все группы одноэлементны). Их пересечением является решетка **I** всех многообразий полугрупп идемпотентов, которая полностью описана независимо А.П. Бирюковым [14], Фенмором [266] и Герхардом [272]. Другое доказательство этого результата опубликовано в работе Герхарда и Петрича [273]. Решетка **I** счетна и дистрибутивна.

Говоря о решетке **CR**, следует отметить, что ее можно рассматривать как подрешетку решетки всех многообразий унарных вполне регулярных полугрупп **UCR**, что перекликается с обозначением через **CR** решетки всех вполне регулярных многообразий полугрупп. Решетка **CR**, будучи подрешеткой в **Per**, может рассматриваться как подрешетка решетки **UCR**. Поэтому все свойства последней, наследуемые подрешетками, сохраняются и для решетки **CR**. Практически вся информация, известная на сегодняшний день о решетке **CR**, является «проекцией» на **SEM** результатов о решетке **UCR**. Последняя была предметом интенсивного изучения в 1980-е годы, и на сегодняшний день ее строение изучено достаточно хорошо. Приведем один из ключевых результатов, относящихся к этой решетке:

5.1.1 Теорема ([302, Пастейн], [304, Петрич и Райли]). *Решетка* **UCR** *модулярна и, более того, дезаргова.*

О строении решетки **Comb** известно существенно меньше. Упомянутые выше результаты работ [259, 292] относятся фактически именно к этой решетке, и потому можно утверждать, что решетка **Comb** устроена в некотором смысле столь же сложно, как и вся решетка **SEM**. То же самое можно сказать об идеале **Nil** решетки **Comb**, состоящем из всех нильмногообразий. Вместе с тем, решетка **Nil**, как и решетка **OC**, может быть некоторым образом охарактеризована в терминах решеток конгруэнций унарных алгебр специального типа (см. [32, 328]).

Изучению многообразий полугрупп с различными типами решетки их подмногообразий посвящено значительное число работ. Наибольшее внимание при этом уделялось двум типам ограничений на решетку подмногообразий — условиям конечности (т. е. условиям, выполненным в любой конечной решетке) и тождествам. При рассмотрении тождеств естественно возникает интерес к многообразиям, решетки подмногообразий которых содержат «большие» подрешетки, заведомо не удовлетворяющие никаким нетривиальным тождествам.

Задача описания многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий была отмечена в работе [265]. Она была решена М.В. Волковым:

5.1.2 Теорема ([36, М.В. Волков]). *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ имеет модулярную решетку подмногообразий, то выполнено одно из следующих условий*:

1) $\mathcal{V}$ *— многообразие ступени* $\leqslant 2$;

2) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{C} \vee \mathcal{N}$ *для некоторого* n, *где* $\mathcal{C} = \mathrm{var}\{x^2 = x^3, xy = yx\}$, *а в многообразии* $\mathcal{N}$ *выполнены тождества* $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ *и некоторое перестановочное тождество длины* 4;

3) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{N}$ *есть нильмногообразие, в котором выполнено некоторое перестановочное тождество длины* 4.

Следующая задача была поставлена Л.Н. Шевриным более тридцати лет назад и до сих пор в полном объеме не решена.

5.1.3 Проблема ([169, задача 2.60 а)]). *Описать многообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий.*

Наибольшие продвижения в этом направлении получены в работах [36, 38, 39, 334]. В [36] показано, что для многообразий с дистрибутивной решеткой подмногообразий справедливо утверждение, аналогичное теореме 5.1.2, в [38] описаны многообразия с дистрибутивной решеткой подмногообразий, удовлетворяющие условию 2) теоремы 5.1.2. В работе [39] получен аналогичный результат для многообразий, в которых выполнено одно из требований: $xy = x^{n+1}y$ и $xy = xy^{n+1}$ (в этом случае описание дано по «модулю групп»). В работе [332] полностью описаны нильмногообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий.

В работе [333] была доказана дезарговость решетки подмногообразий произвольного многообразия полугрупп с вполне регулярным квадратом. Этот факт перекрывается следующим утверждением.

5.1.4 Теорема ([33,34,40, Б.М. Верников, М.В. Волков]). *Для многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны*:

1) *решетка $L(\mathcal{V})$ дезаргова*;
2) *решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна*;
3) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх*;
4) *решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх.*

Эта теорема дает полное описание многообразий полугрупп с дезарговой или [слабо] полумодулярной вверх решеткой подмногообразий. Многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых [слабо] полумодулярна вниз, также полностью описаны в [33, 34, 40]. Условия полумодулярности вниз и слабой полумодулярности вниз в решетках многообразий полугрупп оказались эквивалентными между собой, но не эквивалентными модулярности.

Основной целью второго раздела является обзор некоторых результатов по решеткам формаций и классов Фиттинга.

5.2 Решетки формаций и классов Фиттинга

Относительно включения $\subseteq$ множество всех формаций и множество всех классов Фиттинга являются полными решетками. Применение решеточных подходов в теории классов групп было впервые осуществлено в рамках теории многообразий групп [128]. Если $\mathfrak{M}$ — локально конечное многообразие групп, то, как было показано в работе А.Н. Скибы [189], отображение fin, сопоставляющее каждому подмногообразию $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{M}$ класс всех конечных $\mathfrak{F}$-групп fin$\mathfrak{F}$, является изоморфизмом решетки подмногообразий из $\mathfrak{M}$ на решетку всех наследственных подформаций из $\mathfrak{M}$. Это обстоятельство позволяет интерпретировать многие результаты о решетках локально конечных многообразий как результаты о решетках наследственных формаций (см. подробнее работы А.Н. Скибы [190, 191]).

Как следует из результатов работы А.Н. Скибы [191], решетка всех формаций не является дистрибутивной. Поэтому ряд исследований был связан с поиском дистрибутивных решеток формаций. Так, в работе Блессеноля и Брюстера [255] (в классе конечных разрешимых групп) была установлена дистрибутивность решетки всех формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $N\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — формация, а $N\mathfrak{F}$ — класс всех тех групп, у которых $\mathfrak{F}$-корадикал не содержит фраттиниевых главных факторов. Позднее этот результат был доказан и в классе всех групп [186]. Серия наследственных формаций с дистрибутивной решеткой наследственных подформаций найдена в работе А.Н. Скибы [190].

В теории формаций решеточные методы впервые были применены А.Н. Скибой [192]. При этом существенную роль играет тот установленный им факт, что решетка всех (насыщенных) формаций модулярна. Впоследствии этот факт нашел много приложений при исследовании структуры насыщенных формаций (см. главу 4 книги [230]; главы 4, 5 книги [203] и главу 4 книги [275]). В частности, в монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [230] было доказано, что решетка всех n-кратно насыщенных формаций модулярна. Позднее Баллестер-Болинше и Л.А. Шеметков [241] установили модулярность решетки всех p-насыщенных формаций. В это же время в монографии [203] было доказано, что решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций модулярна, но не дистрибутивна, а решетка всех разрешимых тотально насыщенных формаций дистрибутивна. А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков [206, 209] установили модулярность решеток всех n-кратно ω-насыщенных формаций и всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций. Впоследствии И.П. Шабалина [219] установила модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций, а М.В. Задорожнюк [100] — модулярность решетки всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций. В.Г. Сафоновым была доказана модулярность, а затем и дистрибутивность решетки всех тотально насыщенных формаций [153, 310, 311]; а П.А. Жизневским [94] и, независимо, Н.Н. Воробьевым и А.А. Царевым [54] была установлена модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.

В работе А.Н. Скибы и Е.А. Таргонского [195] были описаны насыщенные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка всех насыщенных подформаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}$, конечна и ее длина не превосходит 2. Позднее этот результат был развит многими авторами (см. подробнее главу 5 книги А.Н. Скибы [203]). В частности, в работе Го Вэньбиня и К.П. Шама [277] были описаны ненильпотентные тотально насыщенные формации $\mathfrak{F}$ с булевой решеткой $\mathfrak{F}/_{\infty}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ всех тотально насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$, а в работе Го Вэньбиня [77] описаны τ-замкнутые n-кратно насыщенные формации $\mathfrak{F}$ с булевой решеткой $\mathfrak{F}/^{\tau}_{n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

В работе А.Н. Скибы [192] были описаны элементы высоты $\leqslant 4$ решетки всех разрешимых насыщенных формаций. Отметим, что при решении такой задачи А.Н. Скибой была дана (в неявном виде) классификация элементов высоты $\leqslant 2$ решетки всех формаций (последний результат был передоказан другими методами В.А. Ведерниковым [25] и частично доказан М.И. Эйдиновым [239]).

Пусть Θ — полная модулярная решетка формаций конечных групп, 0_Θ — нуль решетки Θ. Говорят, что Θ-формация $\mathfrak{F} \neq 0_\Theta$ имеет Θ-длину $l_\Theta(\mathfrak{F})$, равную n, если существует такая совокупность Θ-формаций $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_0 = 0_\Theta$ и $\mathfrak{F}_i$ — максимальная Θ-подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. В работе [27] дано полное описание строения композиционных формаций c-длины 3.

В работе А.Н. Скибы [199] описаны n-кратно насыщенные формации, у которых решетка n-кратно насыщенных подформаций булева. В работе Го Вэньбиня [274] были описаны насыщенные формации с булевой решеткой насыщенных подформаций. В дальнейшем [88, 89] были описаны ω-насыщенные формации, у которых решетка ω-насыщенных подформаций булева.

Изучение тождеств решетки n-кратно насыщенных формаций восходит к работе А.Н. Скибы [194], где было отмечено, что при любых целых неотрицательных m и n системы тождеств решеток l_n и l_m совпадают (см. подробнее главу II книги [230]). Позднее Го Вэньбинь и А.Н. Скиба [76] показали, что для любого бесконечного множества простых чисел ω и при любых различных натуральных m и n системы тождеств решетки всех m-кратно ω-насыщенных формаций и решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций совпадают, а в работе Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы и Н.Н. Воробьева [320] этот результат был распространен на решетки функторно замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.

Существенным вкладом в теорию решеток формаций конечных групп явилась монография А.Н. Скибы „Алгебра формаций” [203].

Многие идеи и конструкции этой монографии носят универсальный характер и успешно используются при дальнейшей разработке теорий не только насыщенных, но и композиционных и p-насыщенных формаций.

В серии работ В.А. Ведерникова и его учеников (см., например, [26, 28–30, 183, 184]) аналогичные вопросы исследовались в рамках оригинальной теории расслоенных формаций.

В работе [26, 28] В.А. Ведерниковым предложен новый функциональный подход к исследованию классов групп, позволивший на языке функций описать все формации и классы Фиттинга конечных групп. Построены Ω-расслоенные формации $\Omega F(f, \varphi)$ и Ω-расслоенные классы Фиттинга $\Omega F(f, \varphi)$ со спутником f и направлением φ. Каждому спутнику f соответствует бесконечное множество различных направлений φ. На этом пути получены Ω-канонические и Ω-свободные формации и классы Фиттинга. При фиксированном направлении φ найдено строение минимального спутника f. В работе [26] описано строение максимальных спутников расслоенных формаций и классов Фиттинга, а также установлена многогранность класса Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга, что включает в себя новые Ω-канонические, Ω-композиционные, Ω-биканонические и другие формации и классы Фиттинга.

Рассмотрим концепцию Ω-расслоенных формаций В.А. Ведерникова. Пусть $\mathfrak{I}$ — класс всех конечных простых групп, Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$. Функция

$$f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{\text{формации групп}\},$$

принимающая одинаковые значения на изоморфных группах из Ω, называется Ω-*формационной функцией* или, коротко, ΩF-*функцией* [28]. Функция

$$g : \mathfrak{I} \to \{\text{формации групп}\},$$

принимающая одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathfrak{I}$, называется *формационной функцией* или, коротко, F-*функцией.* Функция

$$\varphi : \mathfrak{I} \to \{\text{непустые формации Фиттинга}\},$$

принимающая одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathfrak{I}$, называется *формационно-радикальной функцией* или, коротко, FR-*функцией.*

Пусть f — ΩF-функция, φ — FR-функция и

$$\Omega F(f, \varphi) = (G \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$$

$$\text{для всех } A \in \Omega \cap \mathcal{K}(G)),$$

где $\mathcal{K}(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G, $O_\Omega(G) = O_\omega(G)$.

Пусть f — F-функция, φ — FR-функция и

$$F(f,\varphi) = (G \mid G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \mathcal{K}(G)).$$

В работе [28] показано, что классы $\Omega F(f,\varphi)$, $F(f,\varphi)$ являются формациями. Формация $\mathfrak{F}$ называется *Ω-расслоенной* [28], если $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$, где f и φ — некоторые ΩF-функция и ΩR-функция соответственно. Функцию f называют *ΩF-спутником*, а функцию φ — *направлением* Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f — F-функция. Формация $\mathfrak{F} = F(f,\varphi)$ называется *расслоенной формацией* с направлением φ, а f называется F-спутником формации $\mathfrak{F}$. В частности, при $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ мы получаем Ω-композиционную формацию. Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$ является *Ω-композиционной* или, коротко, *ΩC-формацией*, если $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, в этом случае пишут

$$\mathfrak{F} = \Omega CF(f,\varphi) = (G \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и}$$

$$G/F_A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathcal{K}(G)),$$

а f называют *ΩC-спутником* формации $\mathfrak{F}$.

В случае, когда функция f является формационной, получаем определение *композиционной* формации

$$\mathfrak{F} = CF(f) = (G \mid G/F_A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \mathcal{K}(G))$$

с *C-спутником f*.

Всякая формация считается 0-кратно Ω-расслоенной с произвольным направлением φ. Формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно Ω-расслоенной с направлением φ, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один Ω-спутник, все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно Ω-расслоенными формациями с тем же направлением φ.

Символом ΩF_n^φ обозначается множество всех n-кратно Ω-расслоенных формаций с направлением φ. В работе Ю.А. Скачковой [184] изучены n-кратно Ω-расслоенные формации с r-направлением φ таким, что $\varphi_0 \leqslant \varphi$, $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для всех $A \in \mathfrak{I}$, у которых решетка всех n-кратно Ω-расслоенных подформаций с направлением φ является булевой.

Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$ называется *Ω-канонической* или, коротко, *ΩK-формацией*, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любого $A \in \mathfrak{I}$ и пишут

$$\mathfrak{F} = \Omega KF(f) = (G \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и}$$

$$G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathcal{K}(G)),$$

а f называют *ΩK-спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f — F-функция. Формация

$$\mathfrak{F} = KF(f) = (G \mid G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \mathcal{K}(G))$$

называется *канонической* формацией с *K-спутником f*.

В работе [183] исследуются решетки всех n-кратно Ω-канонических и n-кратно Ω-биканонических формаций. Основные результаты работы представляют следующие две теоремы.

5.2.1 Теорема ([183, Ю.А. Скачкова]). *Решетка всех n-кратно Ω-канонических формаций индуктивна и модулярна.*

5.2.2 Теорема ([183, Ю.А. Скачкова]). *Решетка всех n-кратно Ω-биканонических формаций индуктивна и модулярна.*

В работе [86] исследуются решетки ΩK_n и K_n соответственно всех n-кратно Ω-канонических и n-кратно канонических формаций. В частности, доказаны следующие утверждения

5.2.3 Теорема ([86, Ю.А. Еловикова]). *Решетка ΩK_n $\mathfrak{G}$-отделима.*

5.2.4 Теорема ([86, Ю.А. Еловикова]). *При различных целых неотрицательных m и n системы тождеств решеток K_m и K_n совпадают.*

Аддитивная группа G с нулевым элементом 0 называется *мультиоператорной T-группой*, если в G задана некоторая система n-арных алгебраических операций T при некоторых n, удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ должно выполняться условие $t(0, \ldots, 0) = 0$, где слева элемент 0 стоит n раз, если операция t n-арна. Частными случаями мультиоператорных T-групп являются группы, модули, кольца и мультикольца.

Пусть $\mathfrak{E}$ — класс всех T-групп с конечными композиционными рядами. Пусть Θ — полная решетка $\mathfrak{E}$-формаций. Обозначают $\Delta_0 = \Theta$ и $\Delta_n = \Omega\Theta_n^{\varphi}$ для любого целого неотрицательного n. В частности, если $\Theta = \mathbf{F}$ — множество всех $\mathfrak{E}$-формаций, то $\Delta_n = \Omega\mathbf{F}_n^{\varphi}$, а $\Delta_0 = \mathbf{F}$. Если $\Omega = \mathfrak{I}$, то $\Delta_n = \Theta_n^{\varphi}$ и $\Delta_0 = \Theta$.

В работе [30] определены и построены различные типы Ω-расслоенных формаций мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами. В частности, доказана следующая

5.2.5 Теорема ([30, теорема 4]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{E}$-класс, Θ — полная решетка $\mathfrak{E}$-формаций. Тогда для любого $n \geqslant 0$ и любого направления φ справедливы утверждения*:

1) $\Delta_n = \Omega\Theta_n^{\varphi}$ *является полной решеткой формаций*;

2) Δ_n *является модулярной решеткой*;

3) $\Delta_n = \Omega\mathbf{F}_n^{\varphi}$ *является полной и модулярной решеткой.*

Рассмотрим концепцию Ω-расслоенных классов Фиттинга [28]. Функция

$$f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\},$$

принимающая одинаковые значения на изоморфных группах из Ω, называется [28] *Ω-радикальной функцией* или, коротко, *ΩR-функцией.* Пусть f — ΩR-функция, φ — FR-функция и

$$\Omega R(f,\varphi) = (G \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G^{\varphi(A)} \in f(A)$$

$$\text{для всех } A \in \Omega \cap \mathcal{K}(G)).$$

В работе [28] показано, что $\Omega R(f,\varphi)$ — класс Фиттинга.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *Ω-расслоенным* [28], если $\mathfrak{F} = \Omega R(f,\varphi)$, где f и φ — некоторые ΩR-функция и FR-функция соответственно. Функцию f называют *ΩR-спутником*, а функцию φ — *направлением* Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Всякий класс Фиттинга считается 0-кратно Ω-расслоенным с произвольным направлением φ. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно Ω-расслоенным с направлением φ, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один Ω-спутник, все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно Ω-расслоенными классами Фиттинга с тем же направлением φ.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f,\varphi)$ называется *Ω-композиционным* или, коротко, *ΩC-классом Фиттинга*, если $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и пишут

$$\mathfrak{F} = \Omega CR(f) = (G \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } F^{A}(G) \in f(A)$$

$$\text{для всех } A \in \Omega \cap \mathcal{K}(G)),$$

а f называется *ΩC-спутником* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f,\varphi)$ называется *Ω-каноническим* или, коротко, *ΩK-классом Фиттинга*, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_A\mathfrak{G}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и пишут

$$\mathfrak{F} = \Omega KR(f) = (G \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } O^{A,A'}(G) \in f(A)$$

$$\text{для всех } A \in \Omega \cap \mathcal{K}(G)),$$

а ΩR-функцию f называют *ΩK-спутником* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ называется *Ω-биканоническим* или, коротко, *ΩB-классом Фиттинга*, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ и $\varphi(A) = \mathfrak{G}_A\mathfrak{G}_{A'}$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный n-кратно ΩB-класс Фиттинга. Тогда через $B^n_\Omega(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех его n-кратно ΩB-подклассов Фиттинга.

О.В. Камозиной [102] описаны n-кратно Ω-биканонические классы Фиттинга с булевой решеткой подклассов Фиттинга. В частности, показано, что в этом случае класс Фиттинга прямо разложим с помощью набора всех атомов своей решетки. Изучены прямые разложения классов Фиттинга, при этом рассмотрены Ω-расслоенные классы Фиттинга с более общими направлениями.

В работе [104] изучены решетки всех классов Фиттинга, всех n-кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга с направлением φ и решетка всех тотально канонических классов Фиттинга. Показано, что данные решетки являются алгебраическими.

В работе [29] В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной введено понятие ω-веерной формации и ω-веерного класса Фиттинга с направлением φ. Направление φ определяется как отображение множества всех простых чисел во множество всех непустых формаций Фиттинга. Существование бесконечного множества таких отображений приводит к возможности построения для фиксированного множества ω новых видов формаций и классов Фиттинга. В частности, ω-насыщенная формация представляет собой ω-веерную формацию с таким направлением φ, что $\varphi(p) = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для любого простого числа p. В работе [29] изучены основные свойства ω-веерных формаций и ω-веерных классов Фиттинга с направлением φ, а при фиксированном φ получено строение их минимальных спутников. Отметим следующее утверждение работы [29].

5.2.6 Теорема ([29, теорема 2]). *Следующие условия эквивалентны:*

1) *формация $\mathfrak{F}$ является ωd-насыщенной;*
2) *формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной.*

Еще один общий подход к исследованию решеток формаций восходит к фундаментальной работе О.В. Мельникова [125], из результатов которой, в частности, вытекает, что решетка всех формаций антиизоморфна решетке всех характеристических подгрупп подходящей свободной проконечной группы счетного ранга. Отметим наконец, что, как показано в работе [289], множество всех формаций решеточно упорядоченных групп образует полную брауэрову решетку. В работе [297] рассмотрена полная алгебраическая решетка всех формаций решеток и описаны атомы и коатомы такой решетки.

5.3 Произведения формаций

Полугруппа формаций и ее идемпотенты. Множество всех формаций групп, рассматриваемое вместе с операцией произведения формаций, которая ассоциативна (см. В. Гашюц [264, гл. IV; теорема 1.8 a), c)]), является полугруппой. Эта полугруппа содержит идемпотенты, т. е. такие формации $\mathfrak{F}$, для которых выполняется равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^2$. Идемпотентом, например, является класс $\mathfrak{N}_p$ всех p-групп для любого простого числа p. Легко видеть, что такая формация является идемпотентом.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Идемпотент $\mathfrak{F}$ называется *минимальным*, если в нем не содержится ни одного неединичного отличного от него идемпотента. Идемпотент $\mathfrak{F}$ называется *неразложимым*, если из равенства $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — подформации из $\mathfrak{F}$, всегда следует $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\} \subseteq \{(1), \mathfrak{F}\}$.

В 1984 г. на Всесоюзном коллоквиуме по теории групп А.И. Старостиным была поставлена задача описания всех идемпотентов полугруппы формаций. Такая задача оказалась весьма сложной — она остается открытой до настоящего времени. В монографии [230] поставлена следующая задача: *разлагается ли нормально наследственная формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ в произведение двух формаций нетривиальным образом?*

Для формации $\mathfrak{N}_p$ А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым (см. [196]) получен отрицательный ответ на этот вопрос. В частности, получен следующий результат.

5.3.1 Теорема ([196, следствие 4]). *Формация $\mathfrak{N}_p$ неразложима в произведение двух своих нетривиальных подформаций.*

Теорема 5.3.1 дает ответ на вопрос 10.72 из [112].

В дальнейшем анализировалась задача, состоящая в перечислении неразложимых нормально наследственных идемпотентов полугруппы всех формаций.

5.3.2 Теорема ([106, теорема 1]). *Если нормально наследственный идемпотент полугруппы всех формаций содержит две неизоморфные простые группы, то он разложим.*

5.3.3 Теорема ([106, теорема 2]). *Пусть $\mathfrak{M}$ — формация всех тех групп, все композиционные факторы которых изоморфны простой неабелевой группе T. Если $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ — непустые формации и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{F}$, то либо $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, либо $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{S}_n\mathfrak{H}$.*

Заметим, что непустой нормально наследственный идемпотент $\mathfrak{F} \neq (1)$ полугруппы всех формаций полностью определяется заданием класса всех простых групп, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Действительно, если $\mathfrak{X}$ — класс всех простых групп, принадлежащих $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ совпадает с классом всех групп, все композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{X}$.

В дальнейшем О.В. Мельниковым [127] получен более общий результат.

Пусть S — конечная простая группа. Через $\mathfrak{N}_s$ обозначают класс групп, все композиционные факторы которых изоморфны S. Очевидно, что такая формация является идемпотентом.

5.3.4 Теорема ([127, теорема]). *Если $\mathfrak{N}_s$ представлена в виде произведения $\mathfrak{N}_s = \mathfrak{H}\mathfrak{F}$ двух своих подформаций, то либо $\mathfrak{F}$, либо $\mathfrak{H}$ совпадает с $\mathfrak{N}_s$.*

В случае, когда S — циклическая группа порядка p, утверждение теоремы 5.3.4 получено А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым [196]. Использование результатов о свободных проконечных группах из [125,126] уточняет основной результат С.Ф. Каморникова и Л.А. Шеметкова [106].

Спутники произведений формаций

В работе [227] (см. также [230, § 7]) Л.А. Шеметков описал спутники произведений насыщенных формаций.

5.3.5 Теорема ([227, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, m — локальный спутник формации $\mathfrak{M}$ и h — внутренний локальный спутник формации $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{F} = LF(f)$, где*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H} & \textit{при } p \in \pi(\mathfrak{M}), \\ h(p) & \textit{при } p \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{M}), \\ \varnothing & \textit{при } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

5.3.6 Теорема ([227, теорема 2]). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \subseteq \pi(\mathfrak{M})$ и формация $\mathfrak{M}$ насыщена. Тогда формация $\mathfrak{F}$ также насыщена и если $\mathfrak{M} = LF(m)$, то $\mathfrak{F} = LF(f)$, где*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H} & \text{при } p \in \pi(\mathfrak{M}), \\ \varnothing & \text{при } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

В дальнейшем эти две теоремы получили развитие в классах ω-насыщенных и разрешимо ω-насыщенных формаций.

5.3.7 Теорема ([206, теорема 7]). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} = LF_\omega(m)$, $\mathfrak{H} = LF_\omega(h)$ и спутники m и h являются внутренними. Тогда $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация и $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где*

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}), \\ h(p), & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

5.3.8 Теорема ([206, теорема 8]). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{M} = LF_p(m)$ для некоторого внутреннего спутника m. Тогда формация $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является p-локальной, когда либо $p \in \pi(\mathfrak{M})$, либо p-локальна формация $\mathfrak{H}$. Более того, при выполнении этих условий $\mathfrak{F} = LF_p(f)$, где*

$$f(a) = \begin{cases} m(p')\mathfrak{H}, & \text{если } a = p', \\ m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } a = p \in \pi(\mathfrak{M}), \\ h(p), & \text{если } a = p \notin \pi(\mathfrak{M}), \end{cases}$$

где h — внутренний p-локальный спутник формации $\mathfrak{H}$.

5.3.9 Теорема ([209, теорема 6]). *Пусть формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} = CF_\omega(m)$, $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$ и спутники h и m являются внутренними. Тогда, если $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где*

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})), \\ h(p), & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})). \end{cases}$$

В серии работ В.А. Ведерникова и его учеников (см., например, [26,30,82,84,85]) аналогичные вопросы исследовались в рамках оригинальной теории расслоенных формаций.

В работе [26] описаны спутники произведений Ω-расслоенных формаций (в частности, Ω-канонических, Ω-биканонических формаций и др.).

5.3.10 Теорема ([26, лемма 3]). *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — ΩF-формации с r-направлением φ, m и h — внутренние Ω-спутники формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Если $\mathfrak{F}_1 = \Omega F(f, \varphi)$ с Ω-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, $f(A) = m(A)\mathfrak{H}$ для всех $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{M})$ и $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$ и f является внутренним Ω-спутником формации $\mathfrak{F}_1$.*

Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называется Ω-канонической или, коротко, ΩK-формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и пишут

$$\mathfrak{F} = \Omega KF(f) = (G \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и}$$

$$G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathcal{K}(G)),$$

а f называют ΩK-спутником формации $\mathfrak{F}$. Пусть f — F-функция. Формация

$$\mathfrak{F} = \Omega KF(f) = (G \mid G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \mathcal{K}(G))$$

называется канонической формацией [26, 28] с K-спутником f.

5.3.11 Теорема ([26, лемма 8]). *Пусть m и h — внутренние Ω-спутники ΩK-формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является ΩK-формацией с внутренним Ω-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = m(A)\mathfrak{H}$ для всех $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{M})$ и $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{M})$.*

Отметим, что теорема 5.3.11 независимо доказана Ю.А. Скачковой.

Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называется Ω-биканонической, или, коротко, ΩB-формацией [26], если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ и $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ и обозначается

$$\mathfrak{F} = \Omega BF(f) = (G \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega'), G/O_{A'}(G) \in f(A)$$

$$\text{для всех } A \in (\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cap \mathcal{K}(G) \text{ и}$$

$$G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathfrak{A} \cap \mathcal{K}(G)).$$

5.3.12 Теорема ([26, лемма 10]). *Пусть m и h — внутренние Ω-спутники ΩB-формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является ΩB-формацией с внутренним Ω-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = m(A)\mathfrak{H}$ для всех $A \in \Omega \cap \mathcal{K}(\mathfrak{M})$ и $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{M})$.*

Пусть $\mathfrak{E}$ — класс всех T-групп с конечными композиционными рядами. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые T-группы принадлежат классу $\mathfrak{E}$.

Следуя [26, 28] в работе [30] определяются Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп и описываются спутники произведений таких формаций.

В частности, доказана следующая

5.3.13 Теорема ([26, теорема 7]). *Пусть m и h — внутренние Ω-спутники Ω-расслоенных $\mathfrak{E}$-формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно с r-направлением $\varphi \leqslant \varphi_2$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является Ω-расслоенной $\mathfrak{E}$-формацией с направлением φ и с внутренним Ω-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = m(A)\mathfrak{H}$ для всех $A \in \Omega \cap \cap \mathcal{K}(\mathfrak{M})$ и $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{M})$.*

Произведения $\mathfrak{X}$-локальных формаций. Пусть $\mathfrak{X}$ — такой класс простых групп, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{X})$. Рассмотрим отображение

$$f : \pi(\mathfrak{X}) \cup \{\mathfrak{X}'\} \to \{\text{ формации групп}\},$$

не различающее никакие две неединичные изоморфные группы. Обозначим через $LF_{\mathfrak{X}}(f)$ класс всех групп G, удовлетворяющих следующим условиям:

1) если H/K — главный $\mathrm{E}\mathfrak{X}$-фактор группы G, то $G/C_G(H/K)$ принадлежит $f(p)$ для любого $p \in \pi(H/K)$;

2) если G/L — монолитическая фактор-группа группы G и $\mathrm{Soc}(G/L) \in \mathrm{E}(\mathfrak{X}')$, то $G/L \in f(S)$, где $S \in \mathrm{Com}(\mathrm{Soc}(G/L))$.

Класс $LF_{\mathfrak{X}}(f)$ является формацией, она называется $\mathfrak{X}$-*локальной* формацией [10].

Основной задачей теории произведений $\mathfrak{X}$-локальных формаций является следующая проблема: *каковы точные условия для двух $\mathfrak{X}$-локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, при которых их произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является $\mathfrak{X}$-локальной формацией?*

Анализу такой задачи были посвящены работы [242–245] и первые результаты в этом направлении были связаны с описанием формационных функций произведений $\mathfrak{X}$-локальных формаций [243, 244].

Упомянутая выше проблема А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова о существовании насыщенных произведений ненасыщенных формаций в теории $\mathfrak{X}$-локальных формаций приобретает следующий вид: *существует ли $\mathfrak{X}$-локальное произведение не $\mathfrak{X}$-локальных формаций?*

Ответ на этот вопрос был получен в работе [242]. Точные условия для двух $\mathfrak{X}$-локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, при которых их произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является $\mathfrak{X}$-локальной формацией, впервые были найдены в работе [245]. В этой же работе были разработаны новые методы исследования произведений формаций, которые позволили дать новое решение упомянутой выше проблемы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова о существовании у формации всех p-групп нетривиальных факторизаций. В частности, был доказан следующий красивый результат: *предположим, что* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *— непустые формации и* $\mathfrak{F}$ *p-насыщена. Если* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p$ *и* $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}_p$, *то* $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Этот результат получил развитие в работах А.Н. Скибы [188, 196, 325], В.Н. Рыжик и А.Н. Скибы [204], Т.Р. Вишневской [330], Т.Р. Вишневской и А.Н. Скибы [331].

В работе Л.А. Шеметкова [234] была доказана следующая теорема: *формация* $\mathfrak{F}$ *является разрешимо ω-насыщенной в том и только в том случае когда она является* $\mathfrak{X}$*-локальной при* $\omega = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$.

Этот принципиальный факт позволяет применять при исследовании $\mathfrak{X}$-локальных формаций результаты и методы теории разрешимо ω-насыщенных формаций.

Произведения ω-насыщенных и разрешимо ω-насыщенных формаций. Если

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \cdots \mathfrak{F}_t \tag{5.1}$$

произведение формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$ и

$$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1} \cdots \mathfrak{F}_t$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, t$, тогда (5.1) называется *несократимой факторизацией* формации $\mathfrak{F}$.

В работе А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [209] под номером 21 сформулирована следующая проблема.

5.3.14 Проблема. *Описать несократимые факторизации однопорожденной разрешимо ω-насыщенной формации.*

Отметим, что данная проблема восходит к работам многих авторов, первым из которых является А.Л. Шмелькин. Напомним, что А.Л. Шмелькин [235] доказал следующий результат: *произведение* $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ *нетривиальных многообразий* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *порождается одной конечной группой тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}$ *— нильпотентное многообразие,* $\mathfrak{H}$ *— абелево многообразие, а* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *имеют взаимно простые экспоненты.*

Так как всякое нильпотентное многообразие неразложимо (см. [128, предложение 24.34]), этот результат дает описание для всех возможных факторизаций многообразий, порожденных одной конечной группой. Позже этот результат был развит в работах [188, 196, 325], где было получено описание всех возможных факторизаций однопорожденных насыщенных формаций. Используя такое описание, А.Н. Скибой [188] было дано новое доказательство теоремы Шмелькина.

Известно, что произведение любых двух ω-насыщенных формаций само является ω-насыщенной формацией при любом непустом множестве простых чисел ω (см. теорему 6 работы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [206]). Обратное утверждение о общем случае неверно, даже если $\omega = \mathbb{P}$. Отметим, что первые примеры, показывающие, что существуют насыщенные произведения ненасыщенных формаций, были построены независимо В.А. Ведерниковым [24] и Н.Т. Воробьевым [70]. Дальнейшие примеры в этом направлении были построены в работах [188, 242, 243].

В связи со всеми этими результатами следует отметить следующий результат работы А.Н. Скибы [325]: *если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная насыщенная формация и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ является насыщенной формацией.*

Этот замечательный результат дал толчок большому числу исследований, связанных с нахождением условий, при которых в произведении $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ двух неединичных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ первый сомножитель является ω-насыщенной формацией для различных ω [204, 205, 245, 276, 291, 330].

Итоговая открытая задача в данном направлении была сформулирована А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым под номером 19 в работе [209].

5.3.15 Проблема. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная разрешимо ω-насыщенная формация. Является ли формация $\mathfrak{M}$ разрешимо ω-насыщенной, если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$?*

В предельном случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p$ — формация всех p-групп, где $p \in \omega$, эта проблема является другой формулировкой следующей известной задачи Л.А. Шеметкова (Коуровская тетрадь, вопрос 10.72 [113]): *доказать неразложимость формации $\mathfrak{N}_p$ в произведение двух нетривиальных подформаций.*

Решение такой задачи, как известно, было достигнуто в работе Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [196]. Отметим, что другими методами эта задача была решена в более поздней работе [245]. Некоторые результаты, касающиеся проблемы 5.3.14 можно найти в работах [11, 75, 82, 205, 243–245, 276, 279, 291, 336].

Хорошо известен следующий результат Б.Х. Неймана, Х. Нейман, П.М. Неймана, А.Л. Шмелькина: *если* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_t$, *где* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_t$ *— неразложимые многообразия групп, тогда все факторы* $\mathfrak{M}_i$ *однозначно определены* (см. [128, теорема 23.32]). Относительно формаций групп, аналогичный результат не доказан (см. вопрос 10.58 в „Коуровской тетради" [113]).

В частности, долгое время открытой оставалась следующая проблема.

5.3.16 Проблема. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_t$ *— произведение неразложимых формаций* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$. *Верно ли, что все сомножители такой факторизации формации* $\mathfrak{F}$ *однозначно определены, при условии, что* $\mathfrak{F}$ *— ограниченная разрешимо* ω*-насыщенная формация?*

Решение проблемы 5.3.16 дает следующая

5.3.17 Теорема ([280, теорема 7.4]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_t$ *— произведение неразложимых формаций* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$. *Если* $\mathfrak{F}$ *— ограниченная разрешимо* ω*-насыщенная формация, тогда все сомножители такой факторизации формации* $\mathfrak{F}$ *однозначно определены.*

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;

$|G|$ — порядок группы G;

1 — единичный элемент и единичная группа;

$\pi(G)$ — множество всех различных простых делителей порядка группы G;

$\pi(\mathfrak{X})$ — объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из $\mathfrak{X}$;

p–группа — группа G, для которой $\pi(G) = \{p\}$;

ω — некоторое непустое множество простых чисел;

ω' — дополнение к множеству простых чисел ω во множестве всех простых чисел;

$\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини неединичной группы G, т. е. пересечение всех максимальных подгрупп группы G;

$F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, т. е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G;

$F_p(G)$ — наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G;

$O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G;

G_p — силовская p–подгруппа группы G;

$G_{p'}$ — дополнение к силовской p–подгруппе в группе G;

$H \leqslant G$ — H является подгруппой группы G;

$H < G$ — H является собственной подгруппой группы G;

$H \trianglelefteq G$ — H является нормальной подгруппой группы G;

$H \trianglelefteq\trianglelefteq G$ — H является субнормальной подгруппой группы G;

$|G : H|$ — индекс подгруппы H в группе G;

$< ... >$ — подгруппа, порожденная некоторым множеством элементов;

$C_G(H)$ — централизатор подгруппы H в группе G;

Z_p — циклическая группа порядка p;

$A \times B$ — прямое произведение групп A и B;

$[A]B$, $A \rightthreetimes B$ — полупрямое произведение групп A и B;

$A \wr B$ — регулярное сплетение группы A с группой B;

$C^\natural = \{(c_1, \ldots, c_n) \mid c_i \in C\} \leqslant K$, где $A \wr B$ — регулярное сплетение группы A с группой B, K — база сплетения $A \wr B$ и $C \leqslant A$;

$A \cong B$ — группы A и B изоморфны;

$A \overset{G}{\cong} B$ — группы A и B G-изоморфны.

Минимальная нормальная подгруппа группы $G \neq 1$ — неединичная нормальная подгруппа группы G, не содержащая собственных неединичных нормальных подгрупп группы G.

Монолитическая группа — неединичная группа, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу.

$\mathrm{Soc}(G)$ — *цоколь группы* G — произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы G.

Монолит — цоколь монолитической группы.

Комонолитическая группа — такая группа G, в которой имеется нормальная подгруппа M (*комонолит группы* G), что G/M — простая группа и любая собственная нормальная подгруппа N группы G содержится в M.

τ — подгрупповой функтор (в терминологии А.Н. Скибы).

Подгрупповой функтор τ сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

τ-подгруппа H группы G — это такая подгруппа, что $H \in \tau(G)$. Если $\tau(G) = \{G\}$, то функтор τ называется *тривиальным*.

Подгрупповой функтор τ называется *замкнутым*, если для любых двух групп G и H, где $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$.

Для любой совокупности подгрупповых функторов $\{\tau_i \mid i \in I\}$ их пересечение $\tau = \cap_{i \in I}\tau_i$ определяется следующим образом:

$$\tau(G) = \bigcap_{i \in I} \tau_i(G)$$

для любой группы G.

Частичный порядок на множестве всех подгрупповых функторов вводится следующим образом:

$\tau_1 \leqslant \tau_2$ имеет место в том и только в том случае, когда для любой группы G справедливо $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$;

$\overline{\tau}$ — *замыкание функтора* τ, т. е. пересечение всех таких замкнутых функторов τ_i, для которых $\tau \leqslant \tau_i$;

$\mathrm{S}_{\overline{\tau}}\mathfrak{X}$ — множество всех таких групп H, что $H \in \overline{\tau}(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$.

$\mathbb{F}_r$ — поле из r элементов.

Класс групп — совокупность групп, содержащая с каждой своей группой G и все ей изоморфные группы.

$\mathfrak{X}$-*группа* — группа, принадлежащая классу групп $\mathfrak{X}$.

$\varnothing$ — пустой класс групп и пустое множество;

(1) — класс всех единичных групп;

$(\mathfrak{X})$ — класс групп, порожденный совокупностью групп $\mathfrak{X}$;

$\mathrm{E}(\mathfrak{T})$ — класс всех таких групп, у которых все композиционные факторы принадлежат $(\mathfrak{T})$, где $\mathfrak{T}$ — произвольное множество простых групп;

$\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп;

$\mathfrak{G}$ — класс всех групп;

$\mathfrak{G}_{p'}$ — класс всех p'-групп;

$\mathfrak{G}_{\pi}$ — класс всех π-групп;

$\mathfrak{G}_{\pi'}$ — класс всех π'-групп;

$\mathfrak{G}_{\omega'}$ — класс всех ω'-групп;

$\mathfrak{G}_{\omega d}$ — класс всех единичных и таких неединичных групп, у которых каждый композиционный фактор A таков, что $\omega \cap \pi(A) \neq \varnothing$;

$\mathfrak{G}_{cp}$ — класс всех таких групп, у которых все главные p-факторы центральны;

$\mathfrak{J}$ — класс всех простых групп;

$\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{N}_p$ — класс всех p–групп;

$\mathfrak{N}_{p'}$ — класс всех нильпотентных p'-групп;

$\mathfrak{N}_{\pi}$ — класс всех нильпотентных π-групп;

$\mathfrak{N}^*$ — класс всех квазинильпотентных групп;

$\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп;

$\mathfrak{S}_{p'}$ — класс всех разрешимых p'-групп;

$\mathfrak{S}_{\pi}$ — класс всех разрешимых π-групп;

$\mathfrak{S}_{\omega d}$ — класс всех единичных и таких неединичных разрешимых групп, у которых каждый композиционный фактор A таков, что $\omega \cap \cap\, \pi(A) \neq \varnothing$;

$\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп.

Главный p-фактор группы G — это главный фактор группы G, имеющий порядок, который делится на простое число p.

Всякое отображение множества всех классов групп в себя называется *операцией на классах групп*. Результат операции C, примененной к классу $\mathfrak{X}$, обозначается через $\mathrm{C}\mathfrak{X}$. Степень операции C определяется так: $\mathrm{C}^1 = \mathrm{C}$, $\mathrm{C}^{n+1}\mathfrak{X} = \mathrm{C}^n(\mathrm{C}\mathfrak{X})$. Произведение операций определяется равенствами:

$$\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\mathfrak{X} = \mathrm{C}_1(\mathrm{C}_2\mathfrak{X}), \quad \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2 \ldots \mathrm{C}_t\mathfrak{X} = \mathrm{C}_1(\mathrm{C}_2 \ldots \mathrm{C}_t\mathfrak{X}).$$

Операции S, S_n, S_F, Q, N_0, R_0, D_0 определяются следующим образом:

$\mathrm{Q}(\mathfrak{X})$ — класс всех гомоморфных образов групп из $\mathfrak{X}$;

$\mathrm{R}_0(\mathfrak{X})$ — класс всех таких групп G, что в G имеется система нормальных подгрупп $N_1, N_2, \ldots, N_t$ со свойствами $N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_t = 1$ и $G/N_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, 2, \ldots, t$;

$\mathrm{N}_0(\mathfrak{X})$ — класс всех таких групп G, что в G имеется система субнормальных подгрупп $K_1, K_2, \ldots, K_t$ со свойствами $G = \langle K_1, K_2, \ldots \ldots, K_t \rangle$ и $K_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, 2, \ldots, t$;

$\mathrm{D}_0(\mathfrak{X})$ — класс всех таких групп G, что $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_t$, где $G_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, 2, \ldots, t$;

$\mathrm{S}_n(\mathfrak{X}) = (G \mid G \triangleleft\triangleleft H$ для некоторой $H \in \mathfrak{X})$;

$\mathrm{S}_F\mathfrak{X} = (G \mid G \leqslant H \in \mathfrak{X}$ и $G^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq H)$;

$\mathrm{S}(\mathfrak{X}) = (G \mid G \leqslant H$ для некоторой $H \in \mathfrak{X})$.

Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *наследственным* или S-*замкнутым*, если $\mathfrak{X} = \mathrm{S}(\mathfrak{X})$.

$\mathrm{Com}(G)$ — класс всех абелевых простых групп A таких, что $A \cong \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы G;

$\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ — класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \in \mathfrak{X}$.

$C^p(G)$ — пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G) = G$).

Формация — класс групп $\mathfrak{F}$, который одновременно является Q-замкнутым и R_0-замкнутым, т. е. класс групп $\mathfrak{F}$ является формацией, если $\mathfrak{F}$ обладает следующими свойствами:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$.

Класс Фиттинга — класс групп $\mathfrak{F}$, который одновременно является S_n-замкнутым и N_0-замкнутым, т. е. класс групп $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ обладает следующими свойствами:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, $N_1 \triangleleft G, N_2 \triangleleft G$ и $G = N_1N_2$ то $G \in \mathfrak{F}$.

Подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-*инъектором* группы G, если $V \cap N$ является максимальной подгруппой группы N среди подгрупп, входящих в $\mathfrak{F}$ для любой субнормальной подгруппы N группы G.

$\mathfrak{F}$-*радикал* $G_{\mathfrak{F}}$ — произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G;

$\mathfrak{F}$-*корадикал* $G^{\mathfrak{F}}$ группы G — пересечение всех тех нормальных подгрупп M из G, для которых $G/M \in \mathfrak{F}$;

$O_p(G) = G_{\mathfrak{N}_p}$;

$O^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p}$;

$F_p(G) = G_{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}$;

$F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}}$;

$O_\omega(G) = G_{\mathfrak{G}_\omega}$;

$O^\omega(G) = G^{\mathfrak{G}_\omega}$;

$G_{\omega d} = G_{\mathfrak{G}_{\omega d}}$;

$G^{\omega d} = G^{\mathfrak{G}_{\omega d}}$;

$R_\omega(G)$ — $\mathfrak{S}_\omega$-радикал группы G, т. е. произведение всех таких ее разрешимых нормальных подгрупп, чьи порядки являются ω-группами.

$\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — *произведение классов групп* $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, т. е. класс групп

$$(G \mid G \text{ обладает нормальной подгруппой } N \in \mathfrak{M}, \quad G/N \in \mathfrak{H}).$$

$\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ — *формационное произведение* или *произведение формаций* $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, т. е. класс групп $(G \mid G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M})$.

Если

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 \circ \ldots \circ \mathfrak{F}_t \tag{1}$$

произведение формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$ и

$$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 \circ \ldots \circ \mathfrak{F}_{i-1} \circ \mathfrak{F}_{i+1} \circ \ldots \circ \mathfrak{F}_t$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, t$, тогда (1) называется *несократимой факторизацией формации* $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ — *фиттингово произведение* $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, т. е. класс групп $(G \mid G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H})$.

Полуформация — такой класс групп $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} = \mathrm{Q}(\mathfrak{F})$.

Насыщенная формация — такая формация $\mathfrak{F}$, что для любой группы G с $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

ω-Насыщенная формация — такая формация $\mathfrak{F}$, что для любого простого числа $p \in \omega$ формация $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу G с $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$.

Разрешимо ω-насыщенная формация — такая формация $\mathfrak{F}$, что для любого простого числа $p \in \omega$ формация $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу G с $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$.

Разрешимо насыщенная формация — разрешимо $\mathbb{P}$-насыщенная формация.

Решетка формаций — такая непустая совокупность формаций Ω, что для любых формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H} \in \Omega$ обе формации $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{H} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ принадлежат Ω.

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$ и пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$

Функции f сопоставляют два класса групп

$$LF_\omega(f) = \big(G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p)$$
$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\big)$$

и

$$CF_\omega(f) = \big(G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и}$$
$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))\big).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой функции f, то $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной* или *ω-локальной формацией* с *ω-локальным спутником* f. Если же формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f, то $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо ω-насыщенной* или *ω-композиционной формацией* с *ω-композиционным спутником* f.

Внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$ — такой спутник f, что все его значения лежат в $\mathfrak{F}$.

Минимальный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ — такой ω-локальный спутник f, что $f = \bigcap\limits_{i \in I} f_i$, где $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех ω-локальных спутников формации $\mathfrak{F}$.

Любое множество ω-локальных спутников считают частично упорядоченным с отношением $\leqslant$, которое задается следующим образом: $f \leqslant h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, где f и h — ω-локальные спутники.

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}); \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Канонический спутник ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ — такой ее внутренний спутник f, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$, для всех $p \in \omega$.

Всякая формация считается *0-кратно ω-насыщенной*, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-насыщенной*, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями.

l_n^ω-значный спутник — такой ω-локальный спутник, все значения которого являются n-кратно ω-насыщенными формациями.

τ-замкнутая формация $\mathfrak{F}$ — формация со свойством $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

τ-значный ω-локальный спутник — такой ω-локальный спутник, все значения которого являются τ-замкнутыми формациями.

$l_{\omega_n}^\tau$-значный спутник — такой ω-локальный спутник, все значения которого являются τ-замкнутыми n-кратно ω-насыщенными формациями.

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$ и пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$

Функции f сопоставляют класс групп

$$LF_\omega\langle f\rangle = \big(G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p)$$

$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\big).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$ для некоторой функция f, то $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной формацией* с *ω-локальным V-спутником f*.

Внутренний ω-локальный V-спутник формации $\mathfrak{F}$ — такой ω-локальный V-спутник f, что все его значения лежат в $\mathfrak{F}$.

Минимальный ω-локальный V-спутник формации $\mathfrak{F}$ — такой ω-локальный V-спутник f, что $f = \bigcap\limits_{i\in I} f_i$, где $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех ω-локальных V-спутников формации $\mathfrak{F}$.

Канонический ω-локальный V-спутник формации $\mathfrak{F}$ — такой спутник F, что $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle F\rangle$, где $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$.

Минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$ — такой ω-композиционный спутник f, что $f = \bigcap\limits_{i\in I} f_i$, где $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех ω-композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$.

Любое множество ω-композиционных спутников считают частично упорядоченным с отношением $\leqslant$, которое задается следующим образом: $f \leqslant h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, где f и h — ω-композиционные спутники.

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают

$$\mathfrak{X}(C^p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})); \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})). \end{cases}$$

Канонический спутник разрешимо ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ — такой ее внутренний спутник f, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p)$, для всех $p \in \omega$.

Всякая формация считается 0-*кратно разрешимо ω-насыщенной*, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно разрешимо ω-насыщенной*, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n-1)$-кратно разрешимо ω-насыщенными формациями.

c_n^ω-значный спутник — такой ω-композиционный спутник, все значения которого являются n-кратно разрешимо ω-насыщенными формациями.

τ-значный ω-композиционный спутник — такой ω-композиционный спутник, все значения которого являются τ-замкнутыми формациями.

$c_{\omega_n}^\tau$-значный спутник — такой ω-композиционный спутник, все значения которого являются τ-замкнутыми n-кратно разрешимо ω-насыщенными формациями.

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$ и пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}.$$

Функции f сопоставляют класс групп

$$LR_\omega(f) = \big(G \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\big).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой функции f, то $\mathfrak{F}$ называется *ω-локальным классом Фиттинга* с *ω-локальной H-функцией f*.

Если в приведенном определении $\omega = \mathbb{P}$, то символ ω опускается, и мы получаем определение *локального класса Фиттинга*.

$\mathrm{Supp}(f) = \{a \in \omega \cup \{\omega'\} \mid f(a) \neq \varnothing\}$ — *носитель ω-локальной H-функции f*.

В 2002 году профессором В.А. Ведерниковым предложен следующий подход к определению ω-локального класса Фиттинга. Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$ и пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}.$$

Функции f сопоставляют класс групп

$$LR_\omega\langle f\rangle = \big(G \mid O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p)$$

$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\big).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\omega\langle f\rangle$ для некоторой функции f, то $\mathfrak{F}$ называется *ω-локальным классом Фиттинга* с *ω-локальной H-функцией* f.

Внутренняя (*приведенная*) *ω-локальная H-функция класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$ — такая ω-локальная H-функция f, что $f(a) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Минимальная ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ — такая ω-локальная H-функция f, что $f = \bigcap\limits_{i \in I} f_i$, где $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех ω-локальных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают

$$\mathfrak{X}(F^p) = \begin{cases} \mathrm{fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}); \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Каноническая ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ — такая H-функция $\overline{f}$ класса $\mathfrak{F}$, что $\overline{f}(\omega') = \mathfrak{F}$ и $\overline{f}(p) = (f(p))^*\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$, где f — внутренняя ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Θ-*Каноническая ω-локальная H-функция класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$ — такая H-функция F класса $\mathfrak{F}$, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \Theta\mathrm{fit}(\mathfrak{F}(F^p))\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$.

Всякий класс Фиттинга считается 0-*кратно ω-локальным*, а при $n \geqslant 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где все непустые значения H-функции f являются $(n-1)$-кратно ω-локальными классами Фиттинга.

Тотально ω-локальный класс Фиттинга — класс Фиттинга, который n-кратно ω-локален для всех натуральных n.

$\mathfrak{F}^*$ — максимальный элемент секции Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, т. е. наименьший (по включению) класс Фиттинга, содержащий класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ и такой, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$.

Класс Локетта — такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которого имеет место $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

f^* — такая H-функция, что $f^*(p) = (f(p))^*$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

$\mathfrak{F}_*$ — минимальный элемент секции Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

$\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ — секция Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Полная решетка классов Θ — такая непустая совокупность классов групп, что пересечение любой совокупности классов из Θ снова принадлежит Θ, и во множестве Θ имеется такой класс $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого другого класса $\mathfrak{H} \in \Theta$.

$l(G)$ — нильпотентная длина разрешимой группы G;

l, l_1 — полная решетка всех насыщенных формаций;

l_n — полная решетка всех n-кратно насыщенных формаций;

l_n^τ — полная решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций;

l_∞ — полная решетка всех тотально насыщенных формаций;

l_∞^τ — полная решетка всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций;

l^ω — полная решетка всех ω-насыщенных формаций;

l_n^ω — полная решетка всех n-кратно ω-насыщенных формаций;

l_ω^τ — полная решетка всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций;

$l_{\omega_n}^\tau$ — полная решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций;

c — полная решетка всех разрешимо насыщенных формаций;

c_n — полная решетка всех n-кратно разрешимо насыщенных формаций;

c_n^τ — полная решетка всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо насыщенных формаций;

c_∞ — полная решетка всех тотально разрешимо насыщенных формаций;

c_∞^τ — полная решетка всех τ-замкнутых тотально разрешимо насыщенных формаций;

c^ω — полная решетка всех разрешимо ω-насыщенных формаций;

c_n^ω — полная решетка всех n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций;

c_ω^τ — полная решетка всех τ-замкнутых разрешимо ω-насыщенных формаций;

$c_{\omega_n}^\tau$ — полная решетка всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций;

l, l^1 — полная решетка всех локальных классов Фиттинга;

l^n — полная решетка всех n-кратно локальных классов Фиттинга;

l_ω — полная решетка всех ω-локальных классов Фиттинга;

l_ω^n — полная решетка всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга;

l^∞ — полная решетка всех тотально локальных классов Фиттинга;

l_ω^∞ — полная решетка всех тотально ω-локальных классов Фиттинга.

$L_n(\mathfrak{F})$ — решетка всех n-кратно насыщенных формаций, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l_n$;

$L_n^\tau(\mathfrak{F})$ — решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l_n^\tau$;

$L_n^\omega(\mathfrak{F})$ — решетка всех n-кратно ω-насыщенных формаций, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l_n^\omega$;

$L_\infty(\mathfrak{F})$ — решетка всех тотально насыщенных формаций, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l_\infty$;

$L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ — решетка всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l_\infty^\tau$;

$L_\infty^\omega(\mathfrak{F})$ — решетка всех тотально ω-насыщенных формаций, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l_\infty^\omega$;

$L^n(\mathfrak{F})$ — решетка всех n-кратно локальных классов Фиттинга, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l^n$;

$L_\omega^n(\mathfrak{F})$ — решетка всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l_\omega^n$;

$L^\infty(\mathfrak{F})$ — решетка всех тотально локальных классов Фиттинга, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l^\infty$.

$L(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$, $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ — решетка всех классов Фиттинга, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга таковы, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$;

$\mathfrak{M}/^\infty\mathfrak{H}$ — решетка всех тотально локальных классов Фиттинга, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — такие тотально локальные классы Фиттинга, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$;

$\mathfrak{M}/_\infty\mathfrak{H}$ — решетка всех тотально насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — такие тотально насыщенные формации, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$;

$\mathfrak{M}/_n^\tau\mathfrak{H}$ — решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — такие τ-замкнутые n-кратно насыщенные формации, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$;

$\mathfrak{M}/_n^\omega\mathfrak{H}$ — решетка всех n-кратно ω-насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — такие n-кратно ω-насыщенные формации, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$.

$\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех формаций из полной решетки Θ, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех τ-замкнутых формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$s\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех наследственных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l^s\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех наследственных насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l_n\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех n-кратно насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l_n^\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l_\infty\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех тотально насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l_\infty^\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l^\omega\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l_n^\omega\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех n-кратно ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l_\omega^\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l_{\omega_n}^\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$c\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех разрешимо насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$c_n\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех n-кратно разрешимо насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$c_n^\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех τ-замкнутых n-кратно разрешимо насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$c_\infty\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех тотально разрешимо насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$c_\infty^\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех τ-замкнутых тотально разрешимо насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$c^\omega\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех разрешимо ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$c_n^\omega\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$c_\omega^\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех τ-замкнутых разрешимо ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$c_{\omega_n}^\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$\Theta\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех классов Фиттинга из полной решетки Θ, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех локальных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$s\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех наследственных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l^n\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех n-кратно локальных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l_\omega\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех ω-локальных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l_\omega^n\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l^\infty\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех тотально локальных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$;

$l_\omega^\infty\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех тотально ω-локальных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Тогда если $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Theta$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — нижняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ. Символом $\mathfrak{M} \vee{}_\Theta \mathfrak{H}$ обозначается верхняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ.

Спутник f называется Θ-*значным*, если все его значения принадлежат решетке Θ.

Θ^{ω_l} — совокупность всех таких формаций, которые обладают ω-локальным Θ-значным спутником;

Θ^{ω_c} — совокупность всех таких формаций, которые обладают ω-композиционным Θ-значным спутником.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Для произвольной совокупности формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из Θ полагают

$$\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность Θ-значных спутников. Тогда через $\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой спутник f, что $f(a) = \Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(a)\Big)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Полная решетка формаций Θ^{ω_l} называется *индуктивной*, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_l}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных ω-локальных спутников f_i, где f_i — ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_\omega\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big).$$

Полная решетка формаций Θ^{ω_c} называется *индуктивной*, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных ω-композиционных спутников f_i, где f_i — ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_\omega\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big).$$

Пусть Θ — полная решетка классов Фиттинга. Тогда если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H} \in \Theta$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — нижняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ. Символом $\mathfrak{M} \vee^\Theta \mathfrak{H}$ обозначается верхняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ.

H-Функция f называется Θ-*значной*, если все ее значения принадлежат решетке Θ.

Θ^ω — совокупность всех таких классов Фиттинга, которые обладают ω-локальной Θ-значной H-функцией.

Пусть Θ — полная классов Фиттинга. Для произвольной совокупности классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из Θ полагают

$$\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\Big).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность Θ-значных H-функций. Тогда через $\vee^\Theta(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую H-функцию f, что $f(a) = \Theta\mathrm{fit}\Big(\bigcup\limits_{i \in I} f_i(a)\Big)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Полная решетка классов Фиттинга Θ^ω называется *индуктивной*, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i \in \Theta^\omega$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных ω-локальных H-функций f_i, где f_i — ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^\omega}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LR_\omega\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big).$$

Однопорожденная формация $\mathfrak{F}$ — такая формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = \mathrm{form}G$.

Однопорожденная наследственная формация $\mathfrak{F}$ — такая формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = s\mathrm{form}(G)$.

Однопорожденная насыщенная формация $\mathfrak{F}$ — такая формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}(G)$.

Однопорожденная наследственная насыщенная формация $\mathfrak{F}$ — такая формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = l^s\mathrm{form}(G)$.

Однопорожденная ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ — такая формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}(G)$.

Однопорожденная τ-замкнутая ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ — такая формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega}\mathrm{form}(G)$.

Однопорожденная разрешимо ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ — такая формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = c^{\omega}\mathrm{form}(G)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полная решетка формаций Θ называется $\mathfrak{X}$-*отделимой*, если для любого терма $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых формаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ из Θ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \xi(\Theta\mathrm{form}A_1, \ldots, \Theta\mathrm{form}A_m)$.

Однопорожденный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ — такой класс Фиттинга, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = \mathrm{fit}G$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полная решетка классов Фиттинга Θ называется $\mathfrak{X}$-*отделимой*, если для любого терма $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ из Θ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \xi(\Theta\mathrm{fit}A_1, \ldots, \Theta\mathrm{fit}A_m)$.

Полная решетка формаций (классов Фиттинга) Θ называется *частичной алгеброй формаций* (*классов Фиттинга*), если для любого простого числа p и для любой формации (любого класса Фиттинга) $\mathfrak{F} \in \Theta$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \in \Theta$ (соответственно, имеет место $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \in \Theta$).

Компактный элемент — такой элемент c полной решетки L, что для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $c \leqslant \sup_L X$ вытекает существование такого конечного подмножества $X_0 \subseteq X$, что $c \leqslant \sup_L X_0$.

Алгебраическая решетка — такая полная решетка, что любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов.

Модулярная решетка — такая решетка L, что для любых x, y, $z \in L$ таких, что $x \leqslant y$, выполняется равенство

$$x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z),$$

называемое *модулярным законом.*

Дистрибутивная решетка — такая решетка L, что для любых

$x,\ y,\ z \in L$ выполняется тождество

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

называемое *дистрибутивным законом.*

Элемент a решетки L называется *атомом*, если для любого $x \in L$ из $0 < x \leqslant a$ следует, что $x = a$ (т. е. если a *покрывает* наименьший элемент 0).

Ортогональная система классов — такая совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in \in I\}$ непустых классов групп $\mathfrak{F}_i$, что

1) либо $|I| = 1$, либо $|I| > 1$ и

2) $\mathfrak{F}_i \bigcap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых двух различных $i,\ j \in I$.

Для любой ортогональной системы классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ символом $\bigotimes\limits_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ (или иначе $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_n$ в случае, когда $I = \{1, \ldots, n\}$) обозначают совокупность всех групп вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторого натурального t и $i_1,\ i_2, \ldots, i_t \in I$.

Если $|I| = 1$ и $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$, то полагают $\mathfrak{F} = \bigotimes\limits_{i\in I} \mathfrak{F}_i$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Говорят, что $\mathfrak{F}$ является *прямым произведением* классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, если совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ является ортогональной системой классов, и $\mathfrak{F} = \bigotimes\limits_{i\in I} \mathfrak{F}_i$.

Пусть L — решетка классов групп и $\mathfrak{F} \in L$. Класс $\mathfrak{F}$ называется*прямо разложимым* в решетке L, если $\mathfrak{F}$ является прямым произведением некоторых неединичных классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} \subseteq L$. В противном случае $\mathfrak{F}$ называется *прямо неразложимым* в решетке L.

Алфавитом называется произвольная совокупность попарно различных символов. Произвольная конечная последовательность букв, каждая из которых воспроизводит тот или иной символ алфавита, называются *словом* в данном алфавите. Слова вида

$$(x\Delta \ldots \Delta) = (x\Delta^m) = x_m \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

$$(\Delta \ldots \Delta F \Delta \ldots \Delta) = (\Delta^m F \Delta^n) = F_m^{(n)} \quad (m, n = 0, 1, \ldots),$$

$$(\Delta \ldots \Delta P \Delta \ldots \Delta) = (\Delta^m P \Delta^n) = P_m^{(n)} \quad (m, n = 0, 1, \ldots)$$

называются соответственно *предметными*, *функциональными* и *предикатными переменными.* Число m называется *номером* переменного, а число n — *арностью* соответственного предикатного или функционального переменного.

Полагают: 1) каждое слово вида x_i или $F_i^{(0)}$ есть терм; 2) если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — термы, то слово $F_i^{(n)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ также терм; 3) слово называется *термом*, если оно является термом в силу условий 1, 2. *Тождеством* называется формула вида

$$(\forall x_1 \ldots x_n)(f = g), \ \ (\forall x_1 \ldots x_n)P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

где f, g, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — термы от $x_1, \ldots, x_n$, P — сигнатурный предикатный символ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аниськов, В.В. Классификация разрешимых неприводимых локальных формациий с p-нильпотентным дефектом 2 / В.В. Аниськов // Вестн. БГУ. Сер. 1. Математика и информатика. – 1995. – № 2. – С. 66–69.

2. Аниськов, В.В. О неприводимых p-разрешимых локальных формациях с π-разложимым дефектом 2 / В.В. Аниськов // Вопросы алгебры. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 1995. – Вып. 8. – С. 11–21.

3. Аниськов, В.В. О приводимых локальных формациях с заданным $\mathfrak{H}$-дефектом / В.В. Аниськов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 1997. – № 4. – С. 65–68.

4. Аниськов, В.В. Разрешимые локальные формации с π-нильпотентным дефектом 2 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–15. – 1999. – № 1 (15). – С. 60–63 .

5. Аниськов, В.В. О локальных формациях с p-замкнутым дефектом 2 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 6 (51), ч. 2. – С. 137–140.

6. Аниськов, В.В. О бипримарных локальных формациях с p-замкнутым дефектом 2 / В.В. Аниськов // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. – 2009. – № 1. – С. 20–25.

7. Аниськов, В.В. Разрешимые приводимые локальные формации p-разложимого дефекта 3 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2009. – № 5 (59). – С. 91–94.

8. Аниськов, В.В. О неприводимых разрешимых локальных формациях p-разложимого дефекта 3 / В.В. Аниськов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 16–21.

9. Аниськов, В.В. Об одном свойстве локальных формаций p-разложимого дефекта 2 / В.В. Аниськов // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2010. – № 3. – С. 65–71.

10. Баллестер-Болинше, А. О частично насыщенных формациях конечных групп / А. Баллестер-Болинше, К. Кальво, Л.А. Шеметков // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, № 6. – С. 3–24.

11. Баллестер-Болинше, А. Факторизации однопорожденных $\mathfrak{X}$-локальных формаций / А. Баллестер-Болинше, К. Кальво // Сибирский матем. журн. – 2009. – Т. 50, № 3. – С. 489–502.

12. Белоногов, В.А. Задачник по теории групп / В.А. Белоногов. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 2000. – 210 с.

13. Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1984. – 568 с.

14. Бирюков, А.П. Многообразия идемпотентных полугрупп / А.П. Бирюков // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9, № 3. – С. 255–273.

15. Близнец, И.В. О прямых разложениях композиционных формаций / И.В. Близнец, Н.Н. Воробьев // Вопросы алгебры. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 1998. – Вып. 12. – С. 106–112.

16. Близнец, И.М. О τ-замкнутых ω-локальных формациях / И.М. Близнец // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – № 5 (14). – С. 53–58.

17. Близнец, И.М. Описание элементов высоты 2 решетки ω-локальных формаций / И.М. Близнец // Вестн. БГУ. Сер. 1. Математика и информатика. – 2003. – № 2. – С. 57–60.

18. Близнец, И.М. Описание элементов высоты 3 решетки τ-замкнутых ω-локальных формаций / И.М. Близнец // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 2. – С. 50–53.

19. Близнец, И.М. Об одном классе дистрибутивных решеток τ-замкнутых ω-локальных формаций / И.М. Близнец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2003. – № 2. – С. 43–45.

20. Близнец, И.М. Описание элементов высоты 3 решетки s_n-замкнутых ω-насыщенных формаций / И.М. Близнец // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2 (47). – С. 25–28.

21. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры : сб. ст. / Ин-т математики АН Украины ; отв. ред. Н.С. Черников. – Киев, 1993. – С. 27–54.

22. Вдовин, Е.П. Теоремы силовского типа / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 5 (401). – С. 3–46.

23. Вдовин, Е.П. Формации конечных C_π-групп / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин, Л.А. Шеметков // Алгебра и анализ. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 40–52.

24. Ведерников, В.А. О локальных формациях конечных групп / В.А. Ведерников // Матем. заметки. – 1989. – Т. 46, вып. 6. – С. 32–37.

25. Ведерников, В.А. Вполне факторизуемые формации конечных групп / В.А. Ведерников // Вопросы алгебры. – Минск : изд-во „Университетское", 1990. – Вып. 5. – С. 28–34.

26. Ведерников, В.А. Максимальные спутники Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга / В.А. Ведерников // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 55–71.

27. Ведерников, В.А. Композиционные формации c-длины 3 / В.А. Ведерников, Д.Г. Коптюх // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 1. – С. 119–131.

28. Ведерников, В.А. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 125–144.

29. Ведерников, В.А. ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71, вып. 1. – С. 43–60.

30. Ведерников, В.А. Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп / В.А. Ведерников, Е.Н. Демина // Сибирский матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 5. – С. 990–1009.

31. Верников, Б.М. Полудистрибутивность и другие квазитождества в решетках многообразий полугрупп / Б.М. Верников // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 56–67.

32. Верников, Б.М. Строение решеток многообразий нильполугрупп / Б.М. Верников, М.В. Волков // Известия Уральского гос. ун-та. – 2001. – № 18, вып. 3. – С. 34-52.

33. Верников, Б.М. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп : запрещенные подмногообразия / Б.М. Верников // Известия Уральского гос. ун-та. – 2002. – № 22, вып. 4. – С. 16-42.

34. Верников, Б.М. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп : завершение описания / Б.М. Верников, М.В. Волков // Известия Уральского гос. ун-та. – 2004. – № 30, вып. 6. – С. 5–36.

35. Вишневская, Т.Р. p-Локальные произведения формаций конечных групп / Т.Р. Вишневская // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2001. – № 1 (16). – С. 107–108.

36. Волков, М.В. Многообразия полугрупп с модулярной

решеткой подмногообразий. I / М.В. Волков // Известия вузов. Математика. – 1989. – № 6 (325). – С. 51–60.

37. Волков, М.В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий / М.В. Волков // Докл. РАН. – 1992. – Т. 326, № 3. – С. 409–413.

38. Волков, М.В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. II / М.В. Волков // Известия вузов. Математика. – 1992. – № 7 (362). – С. 3–8.

39. Волков, М.В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. III / М.В. Волков // Известия вузов. Математика. – 1992. – № 8 (363). – С. 21–29.

40. Волков, М.В. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп : тождества / М.В. Волков // Известия Уральского гос. ун-та. – 2002. – № 22, вып. 4. – С. 43–61.

41. Воробьев, Н.Н. О прямых разложениях ω-локальных формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 1997. – № 3 (5). – С. 55–58.

42. Воробьев, Н.Н. Об одном вопросе теории локальных классов конечных групп / Н.Н. Воробьев // Вопросы алгебры. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 1999. – Вып. 14. – С. 132–140.

43. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Сибирский матем. журн. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 523–530.

44. Воробьев, Н.Н. О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67, вып. 5. – С. 662–673.

45. Воробьев, Н.Н. Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 3. – С. 21–24.

46. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n-кратно ω-локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – № 5 (14). – С. 43–46.

47. Воробьев, Н.Н. Об одном свойстве порожденных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (17). – С. 35–38.

48. Воробьев, Н.Н. О решеточных свойствах разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные на-

уки. – 2006. – № 4. – С. 12–14.

49. Воробьев, Н.Н. О свойствах разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2006. – № 2 (40). – С. 116–120.

50. Воробьев, Н.Н. О проблемах структуры классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залесская // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2007. – № 2 (44). – С. 105–108.

51. Воробьев, Н.Н. Отделимые решетки тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 4. – С. 25–28.

52. Воробьев, Н.Н. О кратно локальных формациях со стоуновой решеткой подформаций / Н.Н. Воробьев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2008. – № 3. – С. 23–27.

53. Воробьев, Н.Н. О тождествах решеток частично насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 1. – С. 15–18.

54. Воробьев, Н.Н. О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Украинский матем. журн. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453–463.

55. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках частично насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, В.О. Побойнев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2010. – № 4. – С. 37–42.

56. Воробьев, Н.Н. О прямых разложениях n-кратно ω-насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 48–51.

57. Воробьев, Н.Н. О тождествах решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 10–14.

58. Воробьев, Н.Н. Тождества решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Сибирский матем. журн. – 2011. – Т. 22, № 5. – С. 1011–1024.

59. Воробьев, Н.Н. Об одном классе прямо разложимых обобщенно насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2012. – № 1. – С. 34–38.

60. Воробьев, Н.Н. Прямые разложения n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 26–29.

61. Воробьев, Н.Н. О тождествах решеток функторно замкнутых частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 3. – С. 23–27.

62. Воробьев, Н.Н. О прямых произведениях классов конечных групп / Н.Н. Воробьев // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 67–74.

63. Воробьев, Н.Н. О стоуновых решетках кратно насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2012. – № 4 (70). – С. 20–23.

64. Воробьев, Н.Н. Композиционные формации с условием дополняемости / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2012. – № 5 (71). – С. 15–18.

65. Воробьев, Н.Н. О произведениях формаций, вложимых в однопорожденную насыщенную формацию / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 6. – С. 21–24.

66. Воробьев, Н.Н. Классы Фиттинга с заданными свойствами решеточных объединений / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 27–30.

67. Воробьев, Н.Т. О локальных радикальных классах / Н.Т. Воробьев // Вопросы алгебры. – Минск : изд-во „Университетское", 1986. – Вып. 2. – С. 41–50.

68. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, вып. 2. – С. 161–168.

69. Воробьев, Н.Т. Локальные произведения классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Весці АН БССР. Сер. фіз.-матэм. навук. – 1991. – № 6. – С. 22–26.

70. Воробьев, Н.Т. О факторизациях нелокальных формаций конечных групп / Н.Т. Воробьев // Вопросы алгебры. – Минск : изд-во „Университетское", 1992. – Вып. 6. – С. 21–24.

71. Воробьев, Н.Т. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51, вып. 3. – С. 3–8.

72. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сибирский матем. журн. – 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1296–1302.

73. Воробьев, Н.Т. Развитие локального метода Хартли в теории конечных разрешимых групп : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.06 / Н.Т. Воробьев. – Витебск, 1996. – 202 л.

74. Воробьев, Н.Т. О наибольшей приведенной функции Хартли / Н.Т. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–15. – 1999. – № 1 (15). – С. 14–17.

75. Го, Вэньбинь. Факторизации однопорожденных композиционных формаций / Вэньбинь Го, А.Н. Скиба // Алгебра и

логика. – 2001. – Т. 40, № 5. – С. 545–560.

76. Го, Вэньбинь. Два замечания о тождествах решеток ω-локальных и ω-композиционных формаций конечных групп / Вэньбинь Го, А.Н. Скиба // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 5 (480). – С. 14–22.

77. Го, Вэньбинь. Об одном вопросе теории кратно локальных формаций / Вэньбинь Го // Сибирский матем. журн. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1263–1270.

78. Го, Вэньбинь. О решетках подгрупповых и подсистемных функторов / Вэньбинь Го, А.Н. Скиба, К.П. Шам // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, № 6. – С. 710–730.

79. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М. : Мир, 1985. – 352 с.

80. Гретцер, Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер. – М. : Мир, 1982. – 456 с.

81. Демина, Е.Н. Решетки n-кратно Ω_1-расслоенных τ-замкнутых формаций мультиоператорных T-групп / Е.Н. Демина // Дискретная математика. – 2012. – Т. 24, вып. 1. – С. 3–25.

82. Еловиков, А.Б. Однопорожденные композиционные формации / А.Б. Еловиков // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 153–160.

83. Еловиков, А.Б. Факторизация биканонических формаций / А.Б. Еловиков // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – № 5 (14). – С. 112–124.

84. Еловиков, А.Б. Факторизация однопорожденных формаций / А.Б. Еловиков // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73, вып. 5. – С. 684–697.

85. Еловиков, А.Б. Факторизация однопорожденных частично расслоенных формаций / А.Б. Еловиков // Дискретная математика. – 2009. – Т. 21, вып. 3. – С. 99–118.

86. Еловикова, Ю.А. Свойства решетки всех кратно Ω-канонических формаций / Ю.А. Еловикова // Дискретная математика. – 2006. – Т. 18, вып. 2. – С. 146–158.

87. Ефремова, М.И. О дистрибутивности решетки τ-классов Шунка конечных n-арных групп / М.И. Ефремова // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–17. – 2001. – № 3 (6). – С. 182–186.

88. Жевнова, Н.Г. ω-Локальные формации с булевой решеткой ω-локальных подформаций / Н.Г. Жевнова // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 5. – С. 15–19.

89. Жевнова, Н.Г. p-Насыщенные формации с дополняемыми p-насыщенными подформациями / Н.Г. Жевнова, А.Н. Скиба // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 5 (420). – С. 23–29.

90. Жизневский, П.А. Формации групп с максимальной $\mathfrak{L}$-композиционной нильпотентной подформацией / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2007. – № 9. – С. 30–36.

91. Жизневский, П.А. О $\mathfrak{L}$-композиционных формациях, имеющих заданные подрешетки с дополнениями / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2008. – № 3 (49). – С. 93–100.

92. Жизневский, П.А. О свойствах ненильпотентной однопорожденной $\mathfrak{L}$-композиционной формации / П.А. Жизневский // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2 (47). – С. 84–90.

93. Жизневский, П.А. τ-Замкнутые ω-композиционные формации с нильпотентным c_ω^τ-дефектом 1 / П.А. Жизневский // Вестн. БГУ. Сер. 1. Математика и информатика. – 2009. – № 3. – С. 79–84.

94. Жизневский, П.А. О модулярности и индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций конечных групп / П.А. Жизневский // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2010. – № 1 (58). – С. 185–191.

95. Жизневский, П.А. Элементы высоты 3 решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / П.А. Жизневский // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 61–68.

96. Жизневский, П.А. О c_n^ω-неприводимых формациях $\mathfrak{H}_n^\omega$-дефекта 2 / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2011. – № 4 (64). – С. 12–21.

97. Жизневский, П.А. О $c_{n_\omega}^\tau$-неприводимых формациях $\mathfrak{H}_{n_\omega}^\tau$-дефекта $\leqslant 2$ / П.А. Жизневский // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. – 2011. – № 3 (118). – С. 5–19.

98. Жизневский, П.А. О c_ω-неприводимых формациях $\mathfrak{H}_\omega$-дефекта 2 / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 49–54.

99. Задорожнюк, М.В. Элементы высоты 2 решетки τ-значных ω-композиционных формаций / М.В. Задорожнюк // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. –

2006. – № 4. – С. 25–27.

100. Задорожнюк, М.В. Об элементах высоты 3 решетки τ-значных ω-композиционных формаций / М.В. Задорожнюк // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. – 2008. – № 2. – С. 16–21.

101. Залесская, Е.Н. О решетках частично локальных классов Фиттинга / Е.Н. Залесская, Н.Н. Воробьев // Сибирский матем. журн. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1319–1327.

102. Камозина, О.В. Булевы решетки n-кратно Ω-биканонических классов Фиттинга / О.В. Камозина // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, вып. 3. – С. 47–53.

103. Камозина, О.В. Булевы решетки кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга / О.В. Камозина // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – № 5 (14). – С. 134–137.

104. Камозина, О.В. Алгебраические решетки кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга / О.В. Камозина // Дискретная математика. – 2006. – Т. 18, вып. 2. – С. 139–145.

105. Камозина, О.В. О неоднопорожденных кратно ω-веерных классах Фиттинга конечных групп / О.В. Камозина // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79, вып. 3. – С. 396–408.

106. Каморников, С.Ф. Разложимые идемпотенты полугруппы формаций конечных групп / С.Ф. Каморников, Л.А. Шеметков // Докл. АН БССР. – 1991. – Т. 35, № 10. – С. 869–871.

107. Каморников, С.Ф. О двух задачах из „Коуровской тетради" / С.Ф. Каморников // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 6. – С. 59–63.

108. Каморников, С.Ф. О корадикалах субнормальных подгрупп / С.Ф. Каморников, Л.А. Шеметков // Алгебра и логика. – 1995. – Т. 34, № 5. – С. 493–513.

109. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, В.М. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 254 с.

110. Кенько (Задорожнюк), М.В. О ω-композиционных формациях длины 3 / М.В. Кенько // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2001. – № 1. – С. 22–25.

111. Кострикин, А.И. Вокруг Бернсайда / А.И. Кострикин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1986. – 127 с.

112. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Институт математики СО АН СССР ; сост.: В.Я. Бло-

щицын, Ю.И. Мерзляков, В.А. Чуркин. – Новосибирск : изд-во Института математики СО АН СССР, 1986. – 132 с.

113. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Институт математики СО АН СССР ; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск : изд-во Института математики СО АН СССР, 1990. – 126 с.

114. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. – 15-е изд. / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН ; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск : изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2002. – 172 с.

115. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. – 17-е изд., доп., включающее Архив решенных задач / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН ; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск : изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2010. – 219 с.

116. Курош, А.Г. Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. – М. : Физматгиз, 1962.

117. Мальцев, А.И. Современное состояние теории классов моделей / Мальцев А.И. // IV Всесоюзный математический съезд : аннотации пленарных докл., Ленинград, 3–12 июля 1961 г. / Ленинградский гос. ун-т, Ленинградское математическое общество, Ин-т математики им. В.А. Стеклова АН СССР ; оргкомитет : А.Д. Александров (пред.) [и др.]. – Ленинград, 1961. – С. 19–21.

118. Мальцев, А.И. Некоторые вопросы современной теории классов моделей / А.И. Мальцев. – Новосибирск, 1961. – 61 с. – (Ротапринт / Акад. наук СССР, Сибирское отд-ние, Ин-т математики; Вычисл. центр).

119. Мальцев, А.И. Некоторые вопросы теории классов моделей / А.И. Мальцев // Труды IV Всесоюзн. матем. съезда. Т. 1 : Пленарные докл. / Ленинградский гос. ун-т, Ленинградское математическое общество, Ин-т математики им. В.А. Стеклова АН СССР ; под ред. А.Д. Александрова. – Ленинград, 1963. – С. 188–198.

120. Мальцев, А.И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и логики / А.И. Мальцев // Междунар. конгр. математиков : тезисы докл. по приглашению, Москва, 16–26 августа 1966 г. / Ин-т математики им. В.А. Стеклова АН СССР ; оргкомитет : И.Г. Петровский (пред) [и др.]. – М. : Мир, 1966. – С. 26.

121. Мальцев, А.И. Об умножении классов алгебраических систем / А.И. Мальцев // Сибирский матем. журн. – 1967. – Т. 8, № 2. – С. 346–365.

122. Мальцев, А.И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и логики / А.И. Мальцев // Труды Междунар. конгр. математиков : сб. науч. тр. / Ин-т математики им. В.А. Стеклова АН СССР ; под ред. И.Г. Петровского. – М. : Мир, 1968. – С. 217–231.

123. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1970. – 392 с. – (Соврем. алгебра).

124. Мальцев, А.И. Избранные труды : в 2-х т. / А.И. Мальцев – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1976. – Т. 2 : Математическая логика и общая теория алгебраических систем. – 388 с.

125. Мельников, О.В. Нормальные делители свободных проконечных групп / О.В. Мельников // Известия АН СССР. Математика. – 1978. – Т. 42, № 1. – С. 3–25.

126. Мельников, О.В. Характеристические подгруппы и автоморфизмы свободных проконечных групп / О.В. Мельников // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31, вып. 3. – С. 339–342.

127. Мельников, О.В. Неразложимость минимальных идемпотентов полугруппы формаций / О.В. Мельников // Вопросы алгебры. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 1996. – Вып. 9. – С. 42–47.

128. Нейман, Х. Многообразия групп / Х. Нейман. – М. : Мир, 1969. – 264 с.

129. Общая алгебра : в 2 т. / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков [и др.] ; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1991. – Т. 2. – 480 с. – (Справ. матем. б-ка).

130. Попович, А.Л. О представлении решеток решетками конгруэнций полугрупп / А.Л. Попович, В.Б. Репницкий // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 28–36.

131. Рябченко, А.И. Частично насыщенные формации с π-специальным дефектом 1 / А.И. Рябченко // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 5 (38). – С. 59–68.

132. Рябченко, А.И. О частично насыщенных формациях с $\mathfrak{X}^{\omega}$-дефектом 1 / А.И. Рябченко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2008. – № 1. – С. 28–34.

133. Рябченко, А.И. О частично насыщенной формации с максимальной подформацией классического типа / А.И. Рябченко // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. –

№ 5 (50). – С. 216–222.

134. Рябченко, А.И. К теории частично насыщенных формаций / А.И. Рябченко // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 6 (51). – С. 141–148.

135. Рябченко, А.И. О минимальных n-кратно ω-насыщенных ненильпотентных формациях / А.И. Рябченко / Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2008. – № 9. – С. 31–36.

136. Савельева, Н.В. Максимальные подклассы локальных классов Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев // Сибирский матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 1411–1419.

137. Савельева, Н.В. О проблеме существования максимальных подклассов Фиттинга в минимальном π-нормальном классе Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2009. – № 1. – С. 29–37.

138. Савельева, Н.В. О достаточных признаках максимальности для классов Фиттинга конечных частично разрешимых групп / Н.В. Савельева // Весн. Брэсцкага дзярж. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 2. – С. 111–117.

139. Савельева, Н.В. Максимальные подклассы Фиттинга класса всех конечных π-групп / Н.В. Савельева // Сибирский матем. журн. – 2013. – Т. 54, № 1. – С. 180–187.

140. Савельева, Н.В. О полугруппе π-нормальных классов Фиттинга / Н.В. Савельева // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2013. – № 1 (73). – С. 12–17.

141. Савельева, Н.В. Приложения свойства максимальности к исследованию решеточной структуры классов Фиттинга конечных групп / Н.В. Савельева // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2013. – № 3. – С. 21–24.

142. Салий, В.Н. Решетки с единственными дополнениями / В.Н. Салий – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1984. – 128 с. – (Соврем. алгебра).

143. Сафонов, В.Г. О разрешимых локальных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 1996. – № 3. – С. 8–12.

144. Сафонов, В.Г. О кратно локальных формациях конечных групп с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 1996. – Вып. 9. – С. 161–175.

145. Сафонов, В.Г. О локальных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского гос. ун-та

им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–15. – 1999. – № 1 (15). – С. 78–84.

146. Сафонов, В.Г. О неразрешимых насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2004. – № 4 (25). – С. 142–147.

147. Сафонов, В.Г. О тотально насыщенных формациях конечной длины / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (27). – С. 150–155.

148. Сафонов, В.Г. О кратно насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2005. – № 3 (37). – С. 105–108.

149. Сафонов, В.Г. О приводимых тотально насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2005. – № 4 (31). – С. 157–162.

150. Сафонов, В.Г. Приводимые ω-насыщенные формации с разрешимым дефектом $\leqslant 2$ / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5 (32). – С. 162–165.

151. Сафонов, В.Г. О двух задачах теории тотально насыщенных формаций / В.Г. Сафонов // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 5. – С. 16–20.

152. Сафонов, В.Г. Частично насыщенные формации с π-нильпотентным дефектом 1 / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Весн. Мазырскага дзярж. педаг. ун-та. – 2005. – № 2 (13). – С. 16–20.

153. Сафонов, В.Г. О модулярности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов // Украинский матем. журн. – 2006. – Т. 58, № 6. – С. 852–858.

154. Сафонов, В.Г. О неприводимых тотально насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3 (36). – С. 131–136.

155. Сафонов, В.Г. Тотально насыщенные формации с метанильпотентным l_∞-дефектом $\leqslant 2$ / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 4 (37). – С. 166–173.

156. Сафонов, В.Г. О ω-насыщенных формациях с π-разложимым дефектом 1 / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Весн. Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. – 2006. – № 4 (25). –

С. 204–211.

157. Сафонов, В.Г. Тотально насыщенные формации l_∞-длины $\leqslant 4$ / В.Г. Сафонов // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2006. – № 10. – С. 30–34.

158. Сафонов, В.Г. Об алгебраичности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций / В.Г. Сафонов // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, № 5. – С. 620–626.

159. Сафонов, В.Г. Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов // Сибирский матем. журн. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 185–191.

160. Сафонов, В.Г. Тотально насыщенные формации с метанильпотентным l_∞-дефектом 3 / В.Г. Сафонов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2007. – № 4. – С. 40–46.

161. Сафонов, В.Г. О τ-замкнутых тотально насыщенных формациях l_∞^τ-длины $\leqslant 5$ / В.Г. Сафонов, А.Н. Скиба // Труды Института математики. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 73–80.

162. Сафонов, В.Г. О подрешетках решетки тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 4. – С. 34–37.

163. Сафонов, В.Г. О n-кратно ω-насыщенных формациях с максимальной разрешимой подформацией / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. – 2008. – № 2 (68). – С. 53–57.

164. Сафонов, В.Г. О τ-замкнутых ω-насыщенных формациях разрешимого l_τ^ω-дефекта 1 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2008. – № 2 (48). – С. 120–125.

165. Сафонов, В.Г. О l_∞^τ-формациях с изоморфными подрешетками / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 4 (49). – С. 177–181.

166. Сафонов, В.Г. О приводимых τ-замкнутых ω-насыщенных формациях с разрешимым дефектом 2 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2009. – № 1 (1). – С. 64–68.

167. Сафонов, В.Г. Об одной проблеме теории кратно ω-насыщенных формаций / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2009. – № 3. – С. 31–40.

168. Сафонов, В.Г. $\mathfrak{G}$-отделимость решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций / В.Г. Сафонов // Алгебра и ло-

гика. – 2010. – Т. 49, № 5. – С. 690–702.

169. Свердловская тетрадь. Нерешенные задачи теории полугрупп / под ред. Л.Н. Шеврина. – 2-е изд. – Свердловск : изд-во Уральского гос. ун-т, 1979. – 41 с. вып 3

170. Селькин, В.М. Об одной проблеме теории ω-локальных формаций / В.М. Селькин // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5 (32). – С. 166–168.

171. Селькин, В.М. Однопорожденные формации / В.М. Селькин ; Министерство образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины, 2011. – 240 с.

172. Селькин, В.М. О факторизациях подформаций однопорожденных наследственных ω-насыщенных формаций / В.М. Селькин // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 2. – С. 232–237.

173. Селькин, В.М. Об одном свойстве произведения неединичных формаций / В.М. Селькин // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. – 2012. – № 2 (129). – С. 6–10.

174. Селькин, В.М. Однозначность разложения ограниченной разрешимо ω-насыщенной формации на неразложимые множители / В.М. Селькин // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2012. – № 1 (67). – С. 18–21.

175. Селькин, В.М. Об одном свойстве произведения неединичных формаций / В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 101–104.

176. Селькин, В.М. О факторизациях ограниченных формаций / В.М. Селькин // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2012. – № 2 (68). – С. 5–9.

177. Селькин, В.М. О несократимых факторизациях ограниченных ω-композиционных формациях / В.М. Селькин // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 2. – С. 31–34.

178. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

179. Селькин, М.В. О решетках τ-классов Шунка / М.В. Селькин, А.Н. Скиба // Докл. НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 3. – С. 51–53.

180. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп : труды Гомельского семинара / Ин-т

математики АН БССР ; под ред. В.И. Сергиенко. – Минск : Наука и техника, 1984. – С. 166–170.

181. Семенчук, В.Н. Описание разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной тотально локальной формации $\mathfrak{F}$ / В.Н. Семенчук // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, вып. 4. – С. 452–459.

182. Семенчук, В.Н. Разрешимые тотально локальные формации / В.Н. Семенчук // Сибирский матем. журн. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 869–872.

183. Скачкова, Ю.А. Решетки Ω-расслоенных формаций / Ю.А. Скачкова // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, № 2. – С. 85–94.

184. Скачкова, Ю.А. Булевы решетки кратно Ω-расслоенных формаций / Ю.А. Скачкова // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, № 3. – С. 42–46.

185. Скиба, А.Н. Характеризации конечных метанильпотентных групп / А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 1980. – Т. 27, № 3. – С. 345–351.

186. Скиба, А.Н. О формациях, порожденных классами групп / А.Н. Скиба // Весці АН БССР. Сер. фіз.-матэм. навук. – 1981. – № 3. – С. 33–39.

187. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп : труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.

188. Скиба, А.Н. О произведениях формаций / А.Н. Скиба // Алгебра и логика. – 1983. – Т. 22, № 5. – С. 574–583.

189. Скиба, А.Н. Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности : сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР ; отв. ред. Ю.И. Мерзляков. – Новосибирск, 1984. – Т. 4. – С. 101–118.

190. Скиба, А.Н. О конечных подформациях многообразий алгебраических систем / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Минск : изд-во „Университетское", 1986. – Вып. 2. – С. 7–20.

191. Скиба, А.Н. О подформациях многообразий алгебраических систем / А.Н. Скиба // Докл. АН БССР. – 1986. – Т. 30, № 1. – С. 9–12.

192. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп : труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН

БССР ; под ред. М.И. Салука. – Минск : Наука и техника, 1986. – С. 135–149.

193. Скиба, А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Минск : изд-во „Университетское", 1987. – Вып. 3. – С. 21–31.

194. Скиба, А.Н. Решетки кратно локальных формаций / А.Н. Скиба // XIX Всесоюзн. алг. конф. : тез. сообщений, Львов, 9–11 сентября 1987 г. : в 2 ч. / Ин-т математики им. В.А. Стеклова АН СССР, Львовский ордена Ленина гос. ун-т АН УССР ; оргкомитет : Я.С. Подстригач (пред.) [и др.]. – Львов, 1987. – Ч. 2.– С. 261.

195. Скиба, А.Н. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41, вып. 4. – С. 490–499.

196. Скиба, А.Н. О наследственно неразложимых формациях групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Докл. АН БССР. – 1989. – Т. 33, № 7. – С. 581–582.

197. Скиба, А.Н. Формации алгебр с дополняемыми подформациями / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 1991. – Т. 43, № 7, 8. – С. 1008–1012.

198. Скиба, А.Н. О минимальном композиционном экране композиционной формации / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 1992. – Вып. 7. – С. 39–43.

199. Скиба, А.Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Известия вузов. Сер. Математика. – 1994. – № 10 (389). – С. 75–80.

200. Скиба, А.Н. О частично локальных формациях / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Докл. АН Беларуси. – 1995. – Т. 39, № 3. – С. 9–11.

201. Скиба, А.Н. О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 1996. – Вып. 9. – С. 114–118.

202. Скиба, А.Н. О решетке подгрупповых функторов / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 1996. – Вып. 10. – С. 177–186.

203. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

204. Скиба, А.Н. Факторизации p-локальных формаций /

А.Н. Скиба, В.Н. Рыжик // Вопросы алгебры. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 1997. – Вып. 11. – С. 76–89.

205. Скиба, А.Н. О факторизациях композиционных формаций / А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65, вып. 3. – С. 389–395.

206. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

207. Скиба, А.Н. О полугруппе конечных многообразий / А.Н. Скиба // Междунар. алгебраич. семинар, посвящ. 70-летию кафедры высшей алгебры МГУ : тезисы докл., Москва, 10–12 февраля 1999 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова ; оргкомитет : А.В. Михалев. – М., 1999. – С. 51.

208. Скиба, А.Н. Частично композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 1999. – Т. 43, № 4. – С. 5–8.

209. Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

210. Скорняков, Л.Я. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца / Л.Я. Скорняков. – М. : Физматгиз, 1961. – 198 с.

211. Скорняков, Л.Я. Элементы теории структур / Л.Я. Скорняков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1970. – 148 с.

212. Скорняков, Л.Я. Элементы теории структур. Изд. 2-е, перераб. и доп. / Л.Я. Скорняков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1982. – 160 с.

213. Скорняков, Л.Я. Элементы общей алгебры / Л.Я. Скорняков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1983. – 272 с.

214. Скорняков, Л.Я. Элементы алгебры. Изд. 2-е, перераб. / Л.Я. Скорняков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1986. – 240 с.

215. Сыромолотова (Камозина), О.В. Произведения классов Фиттинга конечных групп / О.В. Сыромолотова // Матем. заметки. – 2004. – Т. 75, вып. 2. – С. 269–276.

216. Царев, А.А. О недистрибутивности решетки всех n-кратно ω-композиционных формаций / А.А. Царев // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 84–88.

217. Царев, А.А. Тождества решеток формаций конечных

групп. Решетки частично композиционных формаций / А.А. Царев [Электронный ресурс]. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Pablishing GmbH & Co. KG, 2012. – Режим доступа : https://www.lap-publishing.com/catalog/details//store/ru/book/978-3-659-12163-0/Тождества-решеток-формаций-конечных-групп. – Дата доступа : 25.12.2012.

218. Шабалина, И.П. Алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций / И.П. Шабалина // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – № 5 (14). – С. 59–67.

219. Шабалина, И.П. О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп / И.П. Шабалина // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2003. – № 1. – С. 28–30.

220. Шеврин, Л.Н. Полугруппы и их подполугрупповые решетки : в 2 ч. / Л.Н. Шеврин, А.Я. Овсянников. – Свердловск : изд-во Уральского гос. ун-та, 1990. – Ч. 1 : Полугруппы с некоторыми типами решеток подполугрупп и решеточные характеризации классов полугрупп. – 238 с.

221. Шеврин, Л.Н. Полугруппы и их подполугрупповые решетки : в 2 ч. / Л.Н. Шеврин, А.Я. Овсянников. – Свердловск : изд-во Уральского гос. ун-та, 1991. – Ч. 2 : Решеточные изоморфизмы. – 246 с.

222. Шеврин, Л.Н. Решетки многообразий полугрупп / Л.Н. Шеврин, Б.М. Верников, М.В. Волков // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 3. – С. 3–36.

223. Шеметков, Л.А. Два направления в развитии теории непростых конечных групп / Л.А. Шеметков // Успехи матем. наук. – 1975. – Т. 30, № 2. – С. 179–198.

224. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).

225. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // VI Всесоюзн. симпозиума по теории групп : сб. науч. тр., Киев, 19–21 сентября 1978 г. / Ин-т математики АН УССР, Черкасский гос. пед. ин-т ; оргкомитет : С.Н. Черников (пред.) [и др.]. – Киев : Наукова думка, 1980. – С. 37–50.

226. Шеметков, Л.А. Экраны произведения формаций / Л.А. Шеметков // Докл. АН БССР. – 1981. – Т. 25, № 8. – С. 677–680.

227. Шеметков, Л.А. О произведении формаций / Л.А. Шеметков // Докл. АН БССР. – 1984. – Т. 28, № 2. – С. 101–

103.

228. Шеметков, Л.А. Новое направление общей алгебры / Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. – Минск : изд-во „Университетское", 1986. – Вып. 2. – С. 3–7.

229. Шеметков, Л.А. Композиционные формации и радикалы конечных групп / Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 1988. – Т. 40, № 3. – С. 369–374.

230. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).

231. Шеметков, Л.А. Новые идеи и результаты теории формаций / Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. – Минск : изд-во „Университетское", 1989. – Вып. 4. – С. 65–70.

232. Шеметков, Л.А. Гашюцовы произведения классов групп / Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42, № 3. – С. 22–26.

233. Шеметков, Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л.А. Шеметков // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–15. – 1999. – № 1 (15). – С. 5–13.

234. Шеметков, Л.А. Локальные задания формаций конечных групп / Л.А. Шеметков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2010. – Т. 16, № 8. – С. 229–244.

235. Шмелькин, А.Л. Сплетения и многообразия групп / А.Л. Шмелькин // Известия АН СССР. Математика. – 1965. – Т. 29. – С. 149–170.

236. Шпаков, В.В. Локальные факторизации нелокальных классов Фиттинга / В.В. Шпаков, Н.Т. Воробьев // Дискретная математика. – 2008. – Т. 20, вып. 3. – С. 111–118.

237. Шпаков, В.В. Холловски замкнутые классы Фиттинга / В.В. Шпаков // Весн. Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. – 2009. – № 2–3 (33). – С. 187–195.

238. Эйдинов, М.И. О формациях с дополняемыми подформациями / М.И. Эйдинов // IX Всесоюзн. симпозиум по теории групп : тезисы докл., Москва, 18–20 сентября 1984 г. / Московский гос. педаг. ин-т им. В.И. Ленина, Ин-т математики им. В.А. Стеклова АН СССР ; оргкомитет (пред.) : Л.Я. Куликов [и др.]. – М., 1984. – С. 101.

239. Эйдинов, М.И. Элементы высоты два решетки формаций конечных групп / М.И. Эйдинов // Известия вузов. Сер. Математика. – 1990. – № 6 (337). – С. 77–80.

240. Ballester-Bolinches, A. On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal groups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Pérez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148, № 1. – P. 42–52.

241. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65.

242. Ballester-Bolinches, A. Some questions of the Kourovka Notebook concerning formation products / A. Ballester-Bolinches, M.D. Pérez-Ramos // Comm. Algebra. – 1998. – Vol. 26, № 5. – P. 1581–1587.

243. Ballester-Bolinches, A. A question of the Kourovka Notebook on formation products / A. Ballester-Bolinches, C. Calvo, R. Esteban-Romero // Bull. Austral. Math. Soc. – 2003. – Vol. 68. – P. 461–470.

244. Ballester-Bolinches, A. On $\mathfrak{X}$-saturated formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, C. Calvo, R. Esteban-Romero // Comm. Algebra. – 2004. – Vol. 33, № 4. – P. 1053–1064.

245. Ballester-Bolinches, A. Products of formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, C. Calvo, R. Esteban-Romero // J. Algebra. – 2006. – Vol. 299. – P. 602–615.

246. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p. – (Mathematics and Its Applications ; vol. 584).

247. Ballester-Bolinches, A. Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg's variety theorem revisited / A. Ballester-Bolinches, J.-É. Pin, X. Soler-Escrivà // Forum Math. (submitted).

248. Ballester-Bolinches, A. Languages associated with saturated formations of groups / A. Ballester-Bolinches, J.-É. Pin, X. Soler-Escrivà // Forum Math. (submitted).

249. Behle, Ch. An Approach to characterize the Regular Languages in TC^0 with Linear Wires / Ch. Behle, A. Krebs, S. Reifferscheid // Electronic Colloquium on Computational Complexity. – 2009. – Vol. 16, № 85. – P. 1–7.

250. Beidleman, J.C. Über Fittingklassen und die Lockett-Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 2. – S. 161–167.

251. Berger, T.R. An example in the theory of normal Fitting classes / T.R. Berger, J. Cossey // Math. Z. – 1977. – Bd. 154. – S. 287–293.

252. Between Nilpotent and Solvable / H.G. Bray [at

all] ; edited by M. Weinstein. – Passaic : Polygonal Publishing House, 1982. – 231 p.

253. Birkhoff, G. On structure of algebras / G. Birkhoff // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1935. – Vol. 31. – P. 433–454.

254. Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118. – S. 1–8.

255. Blessenohl, D. Über Formationen und komplementierbare Hauptfaktoren / D. Blessenohl, B. Brewster // Arch. Math. – 1976. – Vol. 27, № 4. – P. 347–351.

256. Bryce, R.A. Fitting formation of finite soluble groups / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1972. – Bd. 127, № 3. – S. 217–223.

257. Bryce, R.A. A problem in theory of normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, № 2. – S. 99–110.

258. Bryce, R.A. Subgroup closed Fitting classes are formations / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Proc. Cambrige Philos. Soc. – 1982. – Vol. 91. – P. 225–258.

259. Burris, S. Embedding the dual of Π_∞ in the lattice of equational classes of semigroups / S. Burris, E. Nelson // Algebra Universalis. – 1971. – Vol. 1, № 2. – P. 248–254.

260. Carter, R.W. The $\mathfrak{F}$-normalizers of finite soluble groups / R.W. Carter, T.O. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

261. Cusack, E. The join of two Fitting classes / E. Cusack // Math. Z. – 1979. – Bd. 167. – S. 37–47.

262. Dixon, M.R. Sylow Theory, Formations and Fitting Classes in Locally Finite Groups / M.R. Dixon. – Singapore – New Jersey – London – Hong Kong : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1994. – 304 p. – (Series in Algebra ; vol. 2).

263. Doerk, K. Zwei Klassen von Formationen endlicher auflösbarer Gruppen, deren Halbverband gessättigter Unterformationen genau ein maximales Element besitzt / K. Doerk // Arch. Math. – 1970. – Vol. 21, № 3. – P. 240–244.

264. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

265. Evans, T. The lattice of semigroup varieties / T. Evans // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2, № 1. – P. 1–43.

266. Fennemore, C.F. All varieties of bands / C.F. Fennemore // Math. Nachr. – 1971. – Vol. 48, № 1. – P. 237–252.

267. Fischer, B. Injectoren endlicher auflösbaren Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. – S. 337–339.

268. Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra. – 1996. – Vol. 24, № 6. – P. 2011–2023.

269. Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1963. – Bd. 80, № 4. – S. 300–305.

270. Gaschütz, W. Selected topics in the theory of soluble groups. Lectures given at the 9th Summer Research Institute of the Australian Math. Soc. Notes by J. Looker / W. Gaschütz. – Canberra, 1969.

271. Gaschütz, W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschütz // Notes in Pure Mathematics. – Canberra : Austral. Nat. Univ. – 1979. – Vol. 11. – 100 p.

272. Gerhard, J.A. The lattice of equational classes of idempotent semigroups / J.A. Gerhard // J. Algebra. – 1970. – Vol. 15, № 2. – P. 195–224.

273. Gerhard, J.A. Varieties of bands revisited / J.A. Gerhard, M. Petrich // Proc. London Math. Soc. – 1989. – Vol. 58, № 2. – P. 323–350.

274. Guo, Wenbin. Local formations in which every subformation of type $\mathfrak{N}_p$ has a complement / Wenbin Guo // Chinese Science Bulletin. – 1997. – Vol. 42, № 5. – P. 364–368.

275. Guo, Wenbin. The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. – Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London : Science Press/ Kluwer Academic Publishers, 2000. – 261 p. – (Mathematics and Its Applications ; vol. 505).

276. Guo, Wenbin. On one question of the Kourovka Notebook / Wenbin Guo // Comm. Algebra. – 2000. – Vol. 28, № 10. – P. 4767–4782.

277. Guo, Wenbin. On totally local formations of groups / Wenbin Guo, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2002. – Vol. 30, № 5. – P. 2117–2131.

278. Guo, Wenbin. Problems on product of formations / Wenbin Guo, K.P. Shum // Manuscripta math. –2002. – Vol. 108, Issue 2. – P. 205–215.

279. Guo, Wenbin. Uncancellative factorizations of Bear-local formations / Wenbin Guo, K.P. Shum // J. Algebra. – 2003. – Vol. 267. – P. 654–672.

280. Guo, Wenbin. Factorization theory of 1-generated ω-composition formations / Wenbin Guo, V.M. Sel'kin, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2007. – Vol. 35, № 9. – P. 2901–2931.

281. Guo, Wenbin. Problems related to the Lockett Conjecture on Fitting classes of finite groups / Wenbin Guo, K.P. Shum, N.T. Vorob'ev // Indag. Mathem. N. S. – 2008. – Vol. 19, № 3. – P. 391–339.

282. Hauck, P. On products of Fitting classes / P. Hauck // J. London Math. Soc. – 1979. – Vol. 20, № 2. – P. 423–434.

283. Hawkes, T. Sceletal classes of soluble groups / T. Hawkes // Arch. Math. – 1971. – Vol. 22, № 6. – P. 577–589.

284. Higgins, P.J. Groups with multiple operators / P.J. Higgins // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 6, № 3. – P. 366–416.

285. Higman, G. Representations of general linear groups and varieties of groups / G. Higman // Proc. Internat. Conf. Theory of Groups. Canberra : Austral. Nat. Univ., 1965. – P. 167–173.

286. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag, 1967. – 796 s. – (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete ; Band 134).

287. Huppert, B. Finite Groups II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag, 1982. – 533 p. – (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ; Band 242. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics).

288. Huppert, B. Finite groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag, 1982. – 455 p. – (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ; Band 243. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics).

289. Jakubík, J. Formations of lattice ordered groups and of GMV-algebras / J. Jakubík // Mathematica Slovaca. – 2008. – Vol. 58, № 5. – P. 521–534.

290. Jakubíková-Studenovská, D. Formations of finite monounary algebras / D. Jakubíková-Studenovská, J. Pócs // Algebra Universalis. – 2012. – Vol. 68. – P. 249–255.

291. Jaraden, Jehad Jumah. On factirizations of Bear-local formations / Jehad Jumah Jeraden // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31, № 10. – P. 4697–4711.

292. Ježek, J. Intervals in lattices of varieties / J. Ježek // Algebra Universalis. – 1976. – Vol. 6, № 2. – P. 147–158.

293. Jones, P. Semimodular inverse semigroups / P. Jones //

J. London Math. Soc. – 1978. – Vol. 17. – P. 446–456.

294. Kalicki, J. Equationally completeness in abstract algebras / J. Kalicki, D. Scott // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. – 1955. – Vol. 58, № 17. – P. 650–659.

295. Laue, H. Über nichtauflösbare normalen Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45. – P. 274–283.

296. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – S. 67–72.

297. Lihova, J. On formations of lattices / J. Lihova, J. Pócs // Acta Universitatis Matthiae Belii. Ser. Mathematics. – 2009. - Vol. 15. – P. 63–72.

298. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / F.P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Bd. 131. – S. 103–115.

299. Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.

300. Mekhovich, A.P. Hall operators on the set of formations of finite groups / A.P. Mekhovich, N.N. Vorob'ev, N.T. Vorob'ev // Algebra and Discrete Mathematics. – 2010. – Vol. 9, № 1. – P. 72–78.

301. Neumann, B.H. Identical relations in groups I / B.H. Neumann // Math. Ann. – 1937. – Vol. 114. – P. 506–525.

302. Pastijn, F.J. The lattice of completely regular semigroup varieties / F.J. Pastijn // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1990. – Vol. 49, № 1. – P. 24–42.

303. Pastijn, F.J. Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups / F.J. Pastijn // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 323, № 1. – P. 79–92.

304. Petrich, M. The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations / M. Petrich, N.R. Reilly // Glasgow Math. J. – 1990. – Vol. 32, № 2. – P. 137–152.

305. Reifferscheid, S. On $\mathfrak{F}$-normal Fitting classes of finite soluble groups / S. Reifferscheid // Arch. Math. – 2000. – Vol. 75, № 3. – P. 164–172.

306. Reifferscheid, S. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups // Dissertation der Mathematischen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität Tübingen zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften. – Tübingen, 2001. – 131 p.

307. Reifferscheid, S. On locally normal Fitting classes of finite soluble groups / S. Reifferscheid // J. Algebra. – 2003. – Vol. 261, № 1. – P. 186–206.

308. Reifferscheid, S. A note on subgroup-closed Fitting classes of finite soluble groups / S. Reifferscheid // J. Group Theory. – 2003. – Vol. 6, № 3. – P. 331–345.

309. Reifferscheid, S. On local embedding properties of injectors of finite soluble groups / S. Reifferscheid // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 2004. – Vol. 76, № 1. – P. 23–37.

310. Safonov, V.G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Comm. Algebra. – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502.

311. Safonov, V.G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Algebra Colloquium. – 2008. – Vol. 15, № 1. – P. 119–128.

312. Safonov, V.G. On τ-closed totally saturated groups formations with Boolean sublattices / V.G. Safonov // Algebra and Discrete Mathematics. – 2008. – № 2. – P. 109–122.

313. Safonov, V.G. On a question of A.N. Skiba about totally saturated formations / V.G. Safonov // Algebra and Discrete Mathematics. – 2008. – № 3. – P. 88–97.

314. Schmid, P. Lokale Formationen endlicher Gruppen / P. Schmid // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 1. – S. 31–48.

315. Selkin, V.M. On non-trivial factorizations of one-generated ω-saturated formations / V.M. Selkin, A.N. Skiba // Proc. of the F. Scorina Gomel State University. Problems in Algebra–17. – 2001. – № 3 (6). – P. 207–208.

316. Selkin, V.M. On factorizations of limited solubly ω-saturated formations / V.M. Selkin // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. – Vol. 13, № 2. – P. 289–298.

317. Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 25, № 3. – P. 955–964.

318. Shemetkov, L.A. On Gaschütz product of composition formations / L.A. Shemetkov // Intern. Algebraic Seminar dedicated to 70th anniversary of the Chair of Higher Algebra of Moscow State University : Book of abstracts, Moscow, February, 10–12, 1999 / Lomonosov Moscow State University : organizing committee A.V. Michalev. – Moscow, 1999. – P. 82.

319. Shemetkov, L.A. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Proc. of the F. Scorina Gomel State University. Problems in Algebra–16. – 2000. – № 3 (16). – C. 186–187.

320. Shemetkov, L.A. On laws of lattices of partially saturated formations / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev //

Asian-European Journal of Mathematics. – 2009. – Vol. 2, № 1. – P. 155–169.

321. Shemetkov, L.A. On lattices of formations of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Algebra Colloquium. – 2010. – Vol. 17, № 4. – P. 557–564.

322. Shemetkov, L.A. A note on $\mathfrak{X}$-local formations / L.A. Shemetkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2010. – № 4 (5). – P. 61–62.

323. Shevrin, L.N. Semigroups and their subsemigroup lattices / L.N. Shevrin, A.J. Ovsyannikov // Semigroup Forum. – 1983. – Vol. 27. – P. 1–154.

324. Shpakov, V.V. On intersection of normal Fitting classes of finite groups / V.V. Shpakov, N.N. Vorob'ev, N.T. Vorob'ev // Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae. – 2003. – Vol. 30. – P. 167–171.

325. Skiba, A.N. On nontrivial factorisations of a one-generated local formation of finite groups / A.N. Skiba // Proc. of the International Conference on Algebra dedicated to the memory of A.I. Mal'cev / L.A. Bokut', Yu.L. Ershov, A.I. Kostrikin, editors, Novosibirsk, USSR, August 21–26, 1989. Contemporary Mathematics, 131. Part 1. – Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1992. – P. 363–374.

326. Skiba, A.N. On Stone sublattices of the lattice of totally local Fitting classes / A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Algebra and Discrete Mathematics. – 2007. – № 4. – P. 138–146.

327. Tsarev, A.A. On a question of the theory of partially composition formations / A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // Algebra Colloquium. – 2013. – Vol. 21, № 4. – P. 357–364.

328. Vernikov, B.M. On congruences of G-sets / B.M. Vernikov // Comment. Math. Univ. Carol. – 1997. – Vol. 38, № 3. – P. 603–613.

329. Vernikov, B.M. Commuting fully invariant congruences on free semigroups / B.M. Vernikov, M.V. Volkov // Contrib. General Algebra. – 2000. – Vol. 12. – P. 391–417.

330. Vishnevskaya, T.R. On factorizations of one-generated p-local formations / T.R. Vishnevskaya // Proc. of the F. Scorina Gomel State University. Problems in Algebra–16. – 2000. – № 3 (16). – C. 88–92.

331. Vishnevskaya, T.R. On the Gaschütz product of ω-local formations of finite groups / T.R. Vishnevskaya, A.N. Skiba // Proc. of the F. Scorina Gomel State University. Problems in Algebra–16. –

2000. – № 3 (16). – P. 201–202.

332. Volkov, M.V. Commutative semigroup varieties with distributive subvariety lattices / M.V. Volkov // Contrib. General Algebra. – 1991. – Vol. 7. – P. 351–359.

333. Volkov, M.V. The lattice of varieties of semigroups with completely regular square / M.V. Volkov, T.A. Ershova // In: Monash Conf. on Semigroup Theory in Honour of G.B. Preston ; ed.: T.E. Hall – Singapore : World Scientific. – 1991. – P. 306–322.

334. Volkov, M.V. Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects / M.V. Volkov // Contemp. Math. – 1992. – Vol. 131, № 3. – P. 295–316.

335. Volkov, M.V. Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties / M.V. Volkov // In: Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. Held at the Univ. Essex ; ed.: P.M. Higgins. – Colchester : University of Essex, 1994. – P. 99–110.

336. Vorob'ev, N.N. On factorizations of subformations of one-generated saturated finite varieties / N.N. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2013. – Vol. 41, № 3. – P. 1087–1093.

337. Vorob'ev, N.T. On Lockett's conjecture for finite groups / N.T. Vorob'ev, A. Grytczuk // Tsukuba Journ. Math. – 1994. – № 1. – P. 63–67.

338. Whitman, Ph.M. Lattices, equivalence relations, and subgroups / Ph.M. Whitman // Bull. Amer. Math. Soc. – 1946. – Vol. 52. – P. 507–522.

339. Yang, Nanying. Factorizations of Fitting classes / Nanying Yang, Wenbin Guo, N.T. Vorob'ev // Front. Math. China. – 2012. – Vol. 7, № 5. – P. 943–954.

340. Zhiznevsky, P.A. On τ-closed n-multiply ω-composition formations with Boolean sublattices / P.A. Zhiznevsky //Algebra and Discrete Mathematics. – 2010. – Vol. 10, № 2. – C. 118–127.

Предметный указатель

Научное издание

ВОРОБЬЕВ Николай Николаевич

АЛГЕБРА КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Монография

Технический редактор Г.В. Разбоева
Компьютерный дизайн И.В. Близнец, С.А. Коренев, А.П. Мехович, В.О. Побойнев, А.А. Царев
Художник М.Н. Клецков

Подписано в печать 2012. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 14,6.
Уч.-изд. л. 15,37. Тираж 100 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования
„Витебский государственный университет
имени П.М. Машерова".
ЛИ № 02330/0494385 от 16.03.2009.
Отпечатано на ризографе учреждения образования

„Витебский государственный университет имени П.М. Машерова".
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.