УДК 517.926+517.977

# О существовании линейно-независимых направлений движения для равномерно вполне управляемой трехмерной линейной системы с локально интегрируемыми коэффициентами

**А.А. Козлов, А.Д. Бурак**
*Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»*

*Получен ряд вспомогательных утверждений, необходимых для решения задачи глобального управления показателями Ляпунова трехмерных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с локально-интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами. Основополагающую роль среди этих утверждений для решения такой задачи играет теорема, устанавливающая существование для трехмерной линейной равномерно вполне управляемой системы с вышеуказанными коэффициентами трех измеримых и ограниченных векторных управлений таких, что решения (траектории движения) системы с этими управлениями на произвольном отрезке времени фиксированной длины лежат в трех выпуклых круговых конусах достаточно малой угловой меры и образуют базис трехмерного евклидова векторного пространства достаточно большого объема.*

***Ключевые слова:*** *равномерно вполне управляемая система, характеристические показатели Ляпунова, матрица Коши, выпуклый конус, локальная интегрируемость, интегральная ограниченность.*

# About the existence of the linearly independent motion direction for uniform completely controllable trivariate system with locally integrable coefficients

**F.A. Kozlov, A.D. Burak**
*Educational establishment «Polotsk State University»*

*The number of auxiliary statements necessary for solving the problem of global Liapunov indicators management trivariate linearly systems of ordinary equations with locally-integrated and integrally limited quotients has been obtained. The essential role among these statements for solving these task plays the theorem that establishes the existence for trivariate linearly completely controllable system with the abovementioned quotients of three measurable and limited vector control of such kind that the solutions (motion trajectories) of the system with these controls in the arbitrary time interval of the fixed length lie in three convex circular cone of sufficiently small angular measure and form the basis of trivariate Euclidean vector space of sufficiently large volume.*

***Key words:*** *uniform completely contollable system, Liapunov characteristical indicators, Koshi matrix, convex cone, local integrability, integral boundedness.*

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \qquad (1)$$

с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными [1, с. 252] матрицами коэффициентов $A$ и $B$. Замыкая систему (1) при помощи линейной обратной связи $u = U(t)x$, где $U$ – некоторая ограниченная и измеримая $(m \times n)$-матрица, получим однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \qquad (2)$$

коэффициенты которой также локально интегрируемы и интегрально ограничены. Это значит, что система (2) имеет конечные показатели Ляпунова [1, с. 245; 2, с. 72] $\lambda_1(A+BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+BU)$.

Задача о построении для системы (1) обратной связи $u = U(t)x$, обеспечивающей выполнение равенств $\lambda_i(A+BU) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$, для произвольных заранее заданных вещественных чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, называется задачей глобального управления характеристическими показателями. Она является обобщением широко известной задачи о назначении спектра [3, с. 141–142] на случай нестационарных систем. Впервые задача управления показателями Ляпунова и другими асимптотическими характеристиками общих (непериодических) нестационарных линейных систем была сформулирована Е.Л. Тонковым в работе [4], где было также показано, что эту задачу естественно рассматривать в предположении равномерной полной управляемости системы (1) по Калману. Напомним, что система (1) называется равномерно вполне управляемой [4–5], если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на отрезке $[t_0,\, t_0+\sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление $u$, при всех $t \in [t_0,\, t_0+\sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leq \gamma\|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

В рамках этого подхода целым рядом авторов были получены различные условия управляемости характеристических показателей линейных нестационарных систем [6–10]. Бóльшую часть этих результатов содержит вышедшая в 2012 году монография Е.К. Макарова и С.Н. Поповой «Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем» [11]. В данной книге, в частности, задача глобального управления показателями Ляпунова решена для равномерно вполне управляемых систем (1), у которых матрица $B$ является кусочно равномерно непрерывной [9]. Однако применение подхода, предложенного авторами в этой работе, даже в случае систем (1) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами может приводить к неограниченному росту нормы искомого управления $U$ на положительной полуоси, что, исходя из постановки задачи, является недопустимым. Таким образом, возникает задача обобщения результатов, содержащихся в монографии [11], на более широкий класс систем (1), например, систем с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами. В статье [10] эту задачу удалось решить для $n$-мерных систем с квадратной кусочно-непрерывной матрицей $B$, удовлетворяющей условию равномерной интегральной невырожденности – более сильному, чем условие равномерной полной управляемости. В работе [12] (а также в главе «Дополнение» вышеуказанной монографии [11]) А.А. Козловым доказана глобальная управляемость показателей Ляпунова для двумерных систем (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов $A$ и $B$ в случае равномерной полной управляемости соответствующей системы (1). Для равномерно вполне управляемых систем (1) размерности $n > 2$ вопрос остается открытым.

В настоящей работе предложены обобщения на трехмерный случай лемм и теорем, являющихся основополагающими при доказательстве глобальной управляемости показателей Ляпунова трехмерной линейной системы (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами для случая, когда соответствующая система (1) обладает свойством равномерной полной управляемости.

**Материал и методы.** Введем ряд необходимых определений и обозначений. В соответствии с целями данной работы всюду в дальнейшем полагаем $n = 3$ и $m \in \{1,2,3\}$. Будем считать, что для системы (1) числа $\sigma$ и $\gamma$ из определения равномерной полной управляемости зафиксированы. Обозначим через $e_i$, $i = \overline{1,3}$, векторы канонического ортонормированного базиса в евклидовом координатном пространстве $\mathbb{R}^3$, а через $\mathrm{M}_3$ – пространство вещественных матриц размерности $3\times 3$ со спектральной операторной нормой [13, с. 355], т.е. нормой, индуцируемой на $\mathrm{M}_3$ евклидовой нормой в $\mathbb{R}^3$, и пусть $E = [e_1, e_2, e_3] \in \mathrm{M}_3$ – единичная матрица. Из свойства интегральной ограниченности [1, с. 252] матриц $A$ и $B$ вытекает существование таких чисел $a, b \geqslant 1$, что для всех $t \geqslant 0$ выполняются оценки $\int_t^{t+\sigma} \|A(\tau)\|\, d\tau \leq a < +\infty$, $\int_t^{t+\sigma} \|B(\tau)\|\, d\tau \leq b < +\infty$. Эти числа $a$ и $b$ также зафиксируем.

Векторное управление $u$ будем считать допустимым, если оно является измеримой и ограниченной на положительной полуоси функцией со значениями в $\mathbb{R}^m$. Матричное управление $U$ будем называть допустимым, если все столбцы матрицы $U$ являются допустимыми векторными управлениями.

**Замечание 1.** Заметим, что если $m=1$ $(m=2)$, то при всех $t\geqslant 0$ справедливо тождество $B(t)\equiv b(t)\in\mathbb{R}^3$ ($B(t)\equiv[b_1(t),b_2(t)]$, $b_i(t)\in\mathbb{R}^3$, $i=1,2$). Тогда, полагая $u=e_1^T v$ ($u=[e_1,e_2]^T v$), где $v$ – новое управление, от системы (1) перейдем к системе

$$\dot{x}=A(t)x+B_1(t)v,\quad x\in\mathbb{R}^3,\quad v\in\mathbb{R}^3,\quad t\geqslant 0,$$

в которой $B_1(t):=[b(t),0,0]\in \mathrm{M}_3$ $(B_1(t):=[b_1(t),b_2(t),0]\in \mathrm{M}_3)$. Очевидно, что полученная система равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда этим свойством обладает система (1) с той же константой $\sigma$ из определения равномерной полной управляемости. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, в дальнейшем будем рассматривать систему (1), считая $B(t)\in \mathrm{M}_3$, $t\geqslant 0$, или, что то же самое, $m=3$.

**Замечание 2.** Пусть $X_U(t,\tau)\in \mathrm{M}_3$, $t,\tau\geqslant 0$, – матрица Коши системы (2) с управлением $U$, $X(t,\tau):=X_0(t,\tau)$, $t,\tau\geqslant 0$, – матрица Коши системы (2) с нулевым управлением. Используя лемму Гроноулла–Беллмана [14, с. 108], нетрудно показать, что при любых $k\in\mathbb{N}$ и $t,\tau\geqslant 0$ таких, что $|t-\tau|\leq k\sigma$, для матрицы Коши $X(t,\tau)$ выполняется оценка $\|X(t,\tau)\|\leqslant\exp(ak)$. Кроме того, отсюда в силу верного для произвольной невырожденной матрицы $D\in \mathrm{M}_3$ неравенства $|\det D|\leq\|D\|^2/\|D^{-1}\|$ (доказательство см., например, в замечании 1 работы [8]) при всех $k\in\mathbb{N}$ вытекают соотношения

$$\det X(t_0,t_0+k\sigma)\leq$$
$$\leq\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|^2/\|X(t_0+k\sigma,t_0)\|\leqslant\exp(3ak).$$

**Лемма 1.** *Если вектор-функция* $v:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^l$, $l\in\mathbb{N}$, *локально интегрируема, то для любого* $\varepsilon>0$ *найдется такое натуральное* $p$, *что для произвольного* $t_0\geqslant 0$ *при всех* $i=\overline{1,p}$ *и* $t\in[t_{i-1},t_i]\subset\ \subset[t_0,t_0+\sigma]$, *где* $t_i:=t_0+i\sigma/p$, *выполняется включение* $\int_{t_{i-1}}^{t} v(\tau)\,d\tau\in \mathrm{U}_\varepsilon(0)$, *в котором* $\mathrm{U}_\varepsilon(0)$ *обозначает* $\varepsilon$*-окрестность нуля в пространстве* $\mathbb{R}^l$, *т.е. множество* $\mathrm{U}_\varepsilon(0):=\{\xi\in\mathbb{R}^l:\|\xi\|\leq\varepsilon\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любые числа $\varepsilon>0$ и $t_0\geqslant 0$ и на отрезке $[t_0,t_0+\sigma]$ рассмотрим функцию $\mu(t)=\int_{t_0}^{t}\|v(\tau)\|\,d\tau.$ Поскольку интеграл от неотрицательной локально интегрируемой функции как функция своего верхнего предела является неубывающей и абсолютно непрерывной [15, с. 68] функцией, то $\mu=\mu(t)$ – неубывающая и абсолютно непрерывная функция. Поэтому для выбранного $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любых $s_1,s_2\in[t_0,t_0+\sigma]$, удовлетворяющих неравенству $|s_1-s_2|\leq\delta$, имеет место оценка $|\mu(s_1)-\mu(s_2)|=|\int_{s_2}^{s_1}\|v(\tau)\|\,d\tau|\leq\varepsilon.$ Взяв натуральное $p>\sigma/\delta$, для каждого $i=\overline{1,p}$ получим неравенства $|t_i-t_{i-1}|\leq\delta$, из которых ввиду монотонности и абсолютной непрерывности функции $\mu(t)$ при всех $t\in[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,p}$, следуют соотношения

$$\|\int_{t_{i-1}}^{t} v(\tau)\,d\tau\ \|\leqslant\int_{t_{i-1}}^{t}\|v(\tau)\|\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|v(\tau)\|\,d\tau\leq\varepsilon,$$

устанавливающие требуемое включение. Лемма 1 доказана.

**1. Свойства выпуклых конусов.** Всюду далее под выпуклым конусом мы будем понимать выпуклый конус [16, с. 56] с вершиной в нуле. Угловой мерой выпуклого конуса $\Phi\subset\mathbb{R}^3$ назовем величину $\sphericalangle\Phi:=\sup\limits_{\xi_1,\xi_2\in\Phi}\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)$. При этом заметим, что верно включение $\sphericalangle\Phi\in[0,\pi]$.

**Лемма 2.** *Для произвольных чисел* $k\in\mathbb{N}$, $t_0\geqslant 0$, $0<\varphi\leq\pi/2$ *и выпуклого конуса* $\Phi\subset\mathbb{R}^3$ *угловой меры* $\varphi$ *множество* $X(t_0,t_0+k\sigma)\Phi$ *является выпуклым конусом, причем если* $\exp(4ak)\varphi\leq 1$, *то угловая мера* $\phi$ *этого конуса не превосходит величины* $\arcsin(\varphi\exp(4ak))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку при всех $k\in\mathbb{N}$ и $t_0\geqslant 0$ оператор Коши $X(t_0,t_0+k\sigma)$ невырожден и линеен, а образ выпуклого конуса при невырожденном линейном отображении есть выпуклый конус, множество

$X(t_0,t_0+k\sigma)\Phi$ является выпуклым конусом для любых $k\in\mathbb{N}$ и $t_0\geqslant 0$. При этом найдутся такие векторы $v_i\in\Phi$, для которых справедливы равенства $w_i = X(t_0,t_0+k\sigma)v_i$, где $w_i\in\mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,2}$, – такие единичные векторы, что $\sphericalangle(w_1,w_2)=\sphericalangle(X(t_0,t_0+k\sigma)\Phi) =: \phi$. Всюду далее для любых векторов $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^3$ через $L(\xi_1,\xi_2)\subset\mathbb{R}^3$ будем обозначать подпространство, натянутое на эти векторы, (линейную оболочку [17, с. 373] этих векторов). Пусть $w_3\in\mathbb{R}^3$ – единичный вектор, ортогональный подпространству $L(w_1,w_2)$, т.е. $w_3\perp L(w_1,w_2)$. В силу невырожденности оператора Коши $X(t_0,t_0+k\sigma)$ найдется такой вектор $v_3\in\mathbb{R}^3$, для которого справедливо равенство $v_3 = X(t_0,t_0+k\sigma)^{-1}w_3$. Отсюда, из определения векторов $w_i$, геометрического смысла определителя, а также оценки $\sphericalangle(v_1,v_2)\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, верной ввиду равенства $\sphericalangle\Phi=\varphi$ и включений $v_i\in\Phi$, $i=\overline{1,2}$, с учетом замечания 2 следуют соотношения

$$|\det[v_1,v_2,v_3]|=\|v_1\|\,\|v_2\|\,\|v_3\|\cdot$$
$$\cdot|\sin\sphericalangle(v_1,v_2)|\,|\sin\sphericalangle(v_3,L(v_1,v_2))|\leqslant$$
$$\leqslant\|v_1\|\,\|v_2\|\,\|v_3\|\,|\sin\sphericalangle(v_1,v_2)|\leqslant$$
$$\leqslant\|X(t_0,t_0+k\sigma)^{-1}\|\|w_1\|\,\|X(t_0,t_0+k\sigma)^{-1}\|\|w_2\|\cdot$$
$$\cdot\|X(t_0,t_0+k\sigma)^{-1}\|\|w_3\|\sin\varphi\leqslant$$
$$\leqslant\|X(t_0+k\sigma,t_0)\|\exp(2ak)\sin\varphi\leqslant$$
$$\leqslant\|X(t_0+k\sigma,t_0)\|\exp(2ak)\varphi\,.$$

Поэтому

$$|\det[v_1,v_2,v_3]|\leqslant\|X(t_0+k\sigma,t_0)\|\cdot\cdot\exp(2ak)\varphi.$$

Используя эту оценку, равенства $\sphericalangle(w_1,w_2)=\phi$ и $\|w_i\|=1$, $i=\overline{1,3}$, ортогональность $w_3\perp L(w_1,w_2)$, а также замечание 2, получим соотношения

$$\sin\phi=|\sin\sphericalangle(w_1,w_2)|\,\|w_1\|\|w_2\|\|w_3\|=\|w_1\|\|w_2\|\cdot$$
$$\cdot\|w_3\|\,|\sin\sphericalangle(w_1,w_2)|\,|\sin\sphericalangle(w_3,L(w_1,w_2))|=$$
$$=|\det[w_1,w_2,w_3]|=|\det[X(t_0,t_0+k\sigma)v_1,$$
$$X(t_0,t_0+k\sigma)v_2,\,X(t_0,t_0+k\sigma)v_3]|=$$
$$=|\det X(t_0,t_0+k\sigma)|\,|\det[v_1,v_2,v_3]|\leqslant$$
$$\leqslant\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|^2\|X(t_0+k\sigma,t_0)\|^{-1}\cdot$$
$$\cdot|\det[v_1,v_2,v_3]|\leqslant\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|^2\exp(2ak)\varphi\leqslant$$
$$\leqslant\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|^2\exp(2ak)\varphi\leqslant\exp(4ak)\varphi.$$

Отсюда в случае выполнимости неравенства $\exp(4ak)\varphi\leqslant 1$ получим оценку

$$\phi\leqslant\arcsin(\exp(4ak)\varphi)\,.$$

Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** *При любых числах $k\in\mathbb{N}$, $t_0\geqslant 0$ и $0<\varphi\leqslant\pi/2$ и единичных векторах $v_i(0):=v_i\in\mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,3}$, удовлетворяющих оценкам $\sin\sphericalangle(v_i,v_j)\geqslant\sin\varphi$ и $|\sin\sphericalangle(v_s,L(v_i,v_j))|\geqslant\sin\varphi,$ $i,j,s=\overline{1,3}$, $i\neq j\neq s$, для векторов $v_i(k):=X(t_0,t_0+k\sigma)v_i$, $i=\overline{1,3}$, имеют место соотношения*

$$\exp(-ak)\leq\|v_i(k)\|\leq\exp(ak),$$
$$\sphericalangle(v_i(k),v_j(k))\geqslant\sin\varphi\exp(-4ak),$$
$$|\sin\sphericalangle(v_s(k),L(v_i(k),v_j(k)))|\geqslant\sin^2\varphi\,\exp(-6ak),$$

*$i,j,s=\overline{1,3}$, $i\neq j\neq s$. Кроме того, для векторов $v_i(k)$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, справедлива оценка*

$$|v_{11}(k)|+|v_{21}(k)|+|v_{31}(k)|\geqslant$$
$$\geqslant\sin^2\varphi\exp(-3ak)/2$$

(здесь и всюду далее для любого $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ через $\eta_{ri}$, $i=\overline{1,3}$, обозначаются компоненты вектора $\eta_r\in\mathbb{R}^3$, т.е. $\eta_r:=(\eta_{r1},\eta_{r2},\eta_{r3})^T$ ).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость первого соотношения следует из оценки $\exp(-ak)\leqslant\|X(t_0+k\sigma,t_0)\|\leqslant\exp(ak)$, данной в замечании 2. Второе соотношение вытекает из леммы 2, в которой вместо $\phi$ и $X(t_0,t_0+k\sigma)$ следует положить $\varphi$ и $X(t_0+k\sigma,t_0)$ соответственно. Последняя оценка в лемме 3 получается из верных для всех $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ в силу определения векторов $v_i(k)$, $i=\overline{1,3}$, и замечания 2 соотношений

$$|\det[v_1(k),v_2(k),v_3(k)]|\leqslant$$
$$\leqslant|v_{11}(k)|\,|v_{22}(k)|\,|v_{33}(k)|+|v_{21}(k)|\,|v_{32}(k)|\cdot$$
$$\cdot|v_{13}(k)|+|v_{12}(k)|\,|v_{23}(k)|\,|v_{31}(k)|+|v_{13}(k)|\cdot$$
$$\cdot|v_{22}(k)|\,|v_{31}(k)|+|v_{21}(k)|\,|v_{12}(k)|\,|v_{33}(k)|+$$
$$+|v_{23}(k)|\,|v_{32}(k)|\,|v_{11}(k)|\leqslant 2(\max_{i=\overline{1,3},\,j=2,3}|v_{ij}(k)|)^2\cdot$$
$$\cdot(|v_{11}(k)|+|v_{21}(k)|+|v_{31}(k)|)\leqslant 2(\max_{i=\overline{1,3}}\|v_i(k)\|)^2\cdot$$
$$\cdot(|v_{11}(k)|+|v_{21}(k)|+|v_{31}(k)|)\leqslant$$

$$\leqslant 2(\max_{i=1,3}\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\,\|\nu_i\|)^2\,(|\nu_{11}(k)|+$$
$$+|\nu_{21}(k)|+|\nu_{31}(k)|)\leqslant 2\,\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|^2\,(|\nu_{11}(k)|+$$
$$+|\nu_{21}(k)|+|\nu_{31}(k)|)$$

и

$$|\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\nu_3(k)|=$$
$$=|\det X(t_0,t_0+k\sigma)|\,|\det[\nu_1,\nu_2,\nu_3]|=$$
$$=|\det X(t_0+k\sigma,t_0)|^{-1}\,|\det[\nu_1,\nu_2,\nu_3]|\geqslant$$
$$\geqslant\|X(t_0+k\sigma,t_0)\|^{-2}\,\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\cdot$$
$$\cdot\|\nu_1\|\,\|\nu_2\|\,\|\nu_3\|\,|\sin\sphericalangle(\nu_3,L(\nu_1,\nu_2))|\,|\sin\sphericalangle(\nu_1,\nu_2)|\geqslant$$
$$\geqslant\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\exp(-2ak)\sin^2\varphi.$$

Используя последнюю оценку для определителя $|\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\nu_3(k)]|$, докажем третье неравенство. Ввиду замечания 2 и равенств $\|\nu_i\|=1$, $i=\overline{1,3}$, имеем соотношения

$$|\sin\sphericalangle(\nu_s(k),L(\nu_i(k),\nu_j(k)))|\exp(3ak)\geqslant$$
$$\geqslant\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|^3\cdot$$
$$\cdot|\sin\sphericalangle(\nu_s(k),L(\nu_i(k),\nu_j(k)))|=$$
$$=\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\,\|\nu_i\|\,\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\cdot$$
$$\cdot\|\nu_j\|\,\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\,\|\nu_s\|\cdot$$
$$\cdot|\sin\sphericalangle(\nu_s(k),L(\nu_i(k),\nu_j(k)))|\geqslant\|\nu_i(k)\|\,\|\nu_j(k)\|\cdot$$
$$\cdot\|\nu_s(k)\|\,|\sin\sphericalangle(\nu_s(k),L(\nu_i(k),\nu_j(k)))|\cdot$$
$$|\sin\sphericalangle(\nu_i(k),\nu_j(k))|=|\det[\nu_j(k),\nu_j(k),\nu_s(k)]|.$$

Поскольку при перестановке двух столбцов определитель меняет лишь знак, то верно равенство

$$|\det[\nu_i(k),\nu_j(k),\nu_s(k)]|=|\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\nu_3(k)]|.$$

Отсюда и из оценки снизу на модуль определителя $|\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\nu_3(k)]|$, установленной при доказательстве последнего неравенства леммы 3, получим соотношения

$$\exp(3ak)|\sin\sphericalangle(\nu_s(k),L(\nu_i(k),\nu_j(k)))|\geqslant$$
$$\geqslant|\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\nu_3(k)]|\geqslant$$
$$\geqslant\sin^2\varphi\exp(-2ak)\,\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\geqslant$$
$$\geqslant\exp(-3ak)\sin^2\varphi,$$

из которых и следует третья оценка леммы 3. Следовательно, лемма 3 доказана.

**Замечание 3.** Лемму 3 можно переформулировать следующим образом:

**Лемма 3′.** *При любых числах* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $t_0\geqslant 0$, $0<\delta\leqslant 1$ *и единичных векторах* $\nu_i(0):=\nu_i\in\mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,3}$, *удовлетворяющих неравенству* $|\det[\nu_l,\nu_j,\nu_s]|\geqslant\delta$, $l,j,s=\overline{1,3}$, $l\neq j\neq s$, *для векторов* $\nu_i(k):=X(t_0,t_0+k\sigma)\nu_i$, $i=\overline{1,3}$, *выполняются оценки*

$$\exp(-ak)\le\|\nu_i(k)\|\le\exp(ak),$$
$$|\det[\nu_l(k),\nu_j(k),\nu_s(k)]|\geqslant\delta\exp(-3ak),$$

$l,j,s=\overline{1,3}$, $l\neq j\neq s$. *Кроме того, для каждого* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *среди векторов* $\nu_i(k)$, $i=\overline{1,3}$, *найдется такой вектор* $\nu$, *что справедлива оценка* $|\det[\nu,e_2,e_3]|\geqslant\delta\exp(-3ak)/6$.

Доказательство леммы 3′ непосредственно следует из доказательства леммы 3.

**Лемма 4.** *При всяких числах* $0<\vartheta,\beta\leqslant 1$ *и произвольных единичных векторах* $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^3$ *таких, что имеет место оценка* $|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|\geqslant\vartheta>0$, *среди векторов* $\nu_i\in\mathbb{R}^3$, $\|\nu_i\|=1$, $i=\overline{1,3}$, *удовлетворяющих неравенству* $|\det[\nu_1,\nu_2,\nu_3]|\geqslant\beta$, *найдется такой вектор* $w$, *при котором справедливо соотношение* $|\det[\xi_1,\xi_2,w]|\geqslant\vartheta\beta/3$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные векторы $\xi_j\in\mathbb{R}^3$, $j=1,2$, и предположим противное, т.е. пусть для всех векторов $\nu_i\in\mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,3}$, определенных в лемме 4, выполняется неравенство

$$|\det[\xi_1,\xi_2,\nu_i]|<\vartheta\beta/3. \qquad (3)$$

В силу определения векторов $\nu_i\in\mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,3}$, их совокупность образует базис в пространстве $\mathbb{R}^3$. Возьмем такой единичный вектор $w^\perp\in\mathbb{R}^3$, что $w^\perp\perp L(\xi_1,\xi_2)$. Поскольку векторы $\nu_i$, $i=\overline{1,3}$, составляют базис, то справедливо разложение $w^\perp=\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2+\alpha_3\nu_3$ с некоторыми коэффициентами $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,3}$. Найдем оценки сверху на модули этих коэффициентов. Ввиду определения векторов $\nu_i$, $i=\overline{1,3}$, неравенства Адамара [13, с. 565] и простейших свойств определителя, выполняются соотношения

$$1=\|\nu^\perp\|\,\|\nu_1\|\,\|\nu_2\|\geqslant|\det[\nu^\perp,\nu_1,\nu_2]|=$$
$$=|\det[\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2+\alpha_3\nu_3,\nu_1,\nu_2]|=$$
$$=|\alpha_1\det[\nu_1,\nu_1,\nu_2]+\alpha_2\det[\nu_2,\nu_1,\nu_2]+$$
$$+\alpha_3\det[\nu_3,\nu_1,\nu_2]|\geqslant|\alpha_3|\beta,$$

из которых следует неравенство $|\alpha_3|\leqslant 1/\beta$. Аналогичным образом находятся и оценки на остальные коэффициенты $|\alpha_i|\leqslant 1/\beta$, $i=1,2$.

Таким образом, справедливо неравенство $\sum_{i=1}^{3}|\alpha_i|\leqslant 3/\beta$. Отсюда и из определения векторов $\xi_1,\xi_2,w^{\perp}$, а также неравенства (3) вытекают соотношения

$$|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|=1\cdot 1\cdot 1\cdot\sin(\pi/2)\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|=$$
$$=\|w^{\perp}\|\|\xi_1\|\|\xi_2\||\sin\sphericalangle(w^{\perp},L(\xi_1,\xi_2))|\cdot$$
$$\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|=|\det[w^{\perp},\xi_1,\xi_2]|=|\det[\alpha_1\nu_1+$$
$$+\alpha_2\nu_2+\alpha_3\nu_3,\xi_1,\xi_2]|\leqslant|\alpha_1\det[\nu_1,\xi_1,\xi_2]|+$$
$$+|\alpha_2\det[\nu_2,\xi_1,\xi_2]|+|\alpha_3\det[\nu_3,\xi_1,\xi_2]|<$$
$$<|\alpha_1|\vartheta\beta/3+|\alpha_2|\vartheta\beta/3+|\alpha_3|\vartheta\beta/3=$$
$$=\vartheta\beta\sum_{i=1}^{3}|\alpha_i|/3\leqslant 3\vartheta\beta/(3\beta)=\vartheta,$$

которые приводят к противоречивому неравенству $\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)<\vartheta$. Следовательно, для некоторого вектора $w\in\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ справедливо обратное оценке (3) соотношение. Лемма 4 доказана.

Выпуклым круговым конусом будем называть бесконечный прямой круговой конус. Очевидно, что выпуклый круговой конус является выпуклым конусом. Осью выпуклого кругового конуса $\Phi$ угловой меры $\varphi$ назовем такой выходящий из нуля луч $o\subset\mathbb{R}^3$, что для любого вектора $\xi\in\Phi$ выполняются неравенства $0\leqslant\sphericalangle(o,\xi)\leqslant\varphi/2$. Отсюда и из определения угловой меры выпуклого конуса непосредственно вытекает включение $o\subset\Phi$.

Для произвольного выпуклого конуса $\Phi\subset\mathbb{R}^3$ обозначим через $K(\Phi)$ соответствующий ему конус [1, с. 481], т.е. множество $K(\Phi):=\Phi\cup(-\Phi)$. Угловая мера конуса $K(\Phi)$ определяется угловой мерой соответствующего ему выпуклого конуса $\Phi$.

**Лемма 5.** *Для всякого выпуклого кругового конуса* $\Phi\subset\mathbb{R}^3$ *угловой меры* $0\leqslant\varphi<\pi/2$ *и любых векторов* $\xi,\eta^{\perp}\in\mathbb{R}^3$ *таких, что* $\xi\in K(\Phi)$, $\eta^{\perp}\perp o$, $\|\eta^{\perp}\|=1$, *где* $o$ *– ось конуса* $\Phi$, *выполняется неравенство* $|\cos\sphericalangle(\xi,\eta^{\perp})|\leqslant\sin(\varphi/2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные выпуклый круговой конус $\Phi$ и векторы $\xi$, $\eta^{\perp}$, удовлетворяющие условию леммы 5. Обозначим через $\eta\in\mathbb{R}^3$ единичный вектор, лежащий на оси $o$ конуса $\Phi$. Введем в $\mathbb{R}^3$ прямоугольную систему координат $Oxyz$: за начало координат $O$ возьмем вершину конуса $\Phi$, а в качестве базисных векторов – векторы $e_1=\eta^{\perp}$, $e_3=\eta$, $e_2=\eta\times\eta^{\perp}$ (здесь и далее для любых векторов $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^3$ выражение $\xi_1\times\xi_2$ означает векторное произведение этих векторов). В силу определений $\eta$ и $\eta^{\perp}$ и векторного произведения векторов введенная таким образом в пространстве $\mathbb{R}^3$ прямоугольная система координат определена корректно. Легко показать, что при таком выборе системы координат уравнение конуса $K(\Phi)$ имеет вид $x^2+y^2=tg^2\alpha\cdot z^2$, где $x,y,z\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\alpha\leqslant\varphi/2$, т.е. вектор $\xi\in K(\Phi)$ записывается в координатной форме следующим образом: $\xi=(x_1,y_1,\pm\sqrt{x_1^2+y_1^2}/\operatorname{tg}\alpha_1)$, где $x_1,y_1,z_1\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\alpha_1\leqslant\varphi/2$. Тогда выполняется соотношение $\xi^T e_1=x_1$. С другой стороны, имеют место равенства $\xi^T e_1=\|\xi\|\|e_1\|\cos\sphericalangle(\xi,e_1)=$

$$=\sqrt{x_1^2+y_1^2+(x_1^2+y_1^2)/\operatorname{tg}^2\alpha_1}\cdot 1\cdot$$
$$\cdot\cos\sphericalangle(\xi,e_1)=\sqrt{x_1^2+y_1^2+(x_1^2+y_1^2)/\operatorname{tg}^2\alpha_1}\cdot 1\cdot$$
$$\cdot\cos\sphericalangle(\xi,e_1)=\cos\sphericalangle(\xi,e_1)\sqrt{x_1^2+y_1^2}/|\sin\alpha_1|.$$

Поэтому $\cos\sphericalangle(\xi,e_1)=|\sin\alpha_1|\cdot x_1/\sqrt{x_1^2+y_1^2}$. Отсюда, ввиду последнего равенства и неравенств $0\leqslant\alpha_1\leqslant\varphi/2<\pi/4$, с учетом возрастания функции sin на отрезке $[0,\pi/4)$ вытекают требуемые соотношения

$$|\cos\sphericalangle(\xi,\eta^{\perp})|=|\cos\sphericalangle(\xi,e_1)|=|\sin\alpha_1|\cdot$$
$$\cdot|x_1|/\sqrt{x_1^2+y_1^2}\leqslant|\sin\alpha_1|\leqslant$$
$$\leqslant|\sin(\varphi/2)|=\sin(\varphi/2).$$

Лемма 5 доказана.

Для произвольных векторов $\psi_1,\psi_2\in\mathbb{R}^3$, $\psi_1\neq\psi_2$, числа $\varphi\in(0,\pi/4)$ и выпуклого кругового конуса $\Phi\subset\mathbb{R}^3$ меры $\varphi$, ось которого содержит вектор $\psi_2-\psi_1$, рассмотрим множество $(\psi_1+\Phi)\cap(\psi_2-\Phi)\subset\mathbb{R}^3$, т.е. множество, образованное пересечением выпуклых круговых конусов $\Phi$ и $-\Phi$ с вершинами соответственно в точках $\psi_1$ и $\psi_2$. На основании работы [16, с. 37] назовем такое множество конусным интервалом и обозначим его $\Phi[\psi_1,\psi_2]$.

Под $\varepsilon$-окрестностью конусного интервала $\Phi[\psi_1,\psi_2]$ будем понимать множество $\mathrm{U}_\varepsilon(\Phi[\psi_1,\psi_2]) := \Phi[\psi_1,\psi_2] + \mathrm{U}_\varepsilon(0)$, где, как и ранее, $\mathrm{U}_\varepsilon(0) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \|\xi\| \le \varepsilon\}$ $-\varepsilon$-окрестность нуля. Для всякого ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{R}^3$ пусть $\mathrm{Pr}_\xi \mathfrak{y} := \xi^T \mathfrak{y} / \|\xi\|$ – проекция точки $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3$ на ось, определяемую вектором $\xi$. Проекцией $\mathrm{Pr}_\xi(\Phi[\psi_1,\psi_2])$ конусного интервала $\Phi[\psi_1,\psi_2]$ на ось, определяемую вектором $\xi$, будем называть совокупность, состоящую из проекций каждой точки из $\Phi[\psi_1,\psi_2]$ на эту ось, т.е. $\mathrm{Pr}_\xi(\Phi[\psi_1,\psi_2]) := \{\mathrm{Pr}_\xi \mathfrak{y},\ \mathfrak{y} \in \Phi[\psi_1,\psi_2]\}$.

**Лемма 6.** *Для произвольных чисел* $s \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ *и* $0 < \varphi < \pi/4$, *выпуклого кругового конуса* $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ *угловой меры* $\varphi$ *и векторов* $\psi_1$, $\psi_2$, $v_i \in \mathbb{R}^3$, $i = \overline{1, s}$, *таких, что* $v_i \in \Phi$, $i = \overline{1,s}$, $\psi_1 \ne \psi_2$ *и* $\psi_1 + \alpha \sum_{i=1}^{s} v_i = \psi_2$, *при каждом* $j = \overline{1, s}$ *выполняется включение* $\psi_1 + \alpha \sum_{i=1}^{j} v_i \in \Psi[\psi_1,\psi_2]$, *где* $\Psi$ *– выпуклый круговой конус меры* $2\varphi$, *ось которого содержит вектор* $\psi_2 - \psi_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные числа $s \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $0 < \varphi < \pi/4$, конус $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ и векторы $\psi_1, \psi_2, v_i \in \mathbb{R}^3$, $i = \overline{1, s}$, удовлетворяющие условию леммы 6. Для всех $j = \overline{1, s}$ обозначим $y_j := \sum_{i=1}^{j} v_i$, $z_j := \sum_{i=j}^{s} v_i$. Поскольку $v_i \in \Phi$, $i = \overline{1, s}$, по свойству выпуклости конуса $\Phi$ для всех $j = \overline{1, s}$ выполняются соотношения $\alpha y_j \in \Phi$ и $\alpha z_j \in \Phi$, в частности, $\psi_2 - \psi_1 = \alpha y_s \in \Phi$. Из последнего включения и равенства $\sphericalangle \Phi = \varphi$ вытекает, что для любого $\nu \in \Phi$ выполняются неравенства $0 \le \sphericalangle(\nu, \psi_2 - \psi_1) \le \varphi$. Тогда отсюда ввиду определения конуса $\Psi$ следует включение $\Phi \subset \Psi$, и поэтому при любом $j = \overline{1, s-1}$ верны соотношения $\alpha y_j \in \Psi$ и $-\alpha z_{j+1} \in -\Psi$, а значит, $(\psi_1 + \alpha y_j) \in (\psi_1 + \Psi)$ и $(\psi_2 - \alpha z_{j+1}) \in (\psi_2 - \Psi)$, $j = \overline{1, s}$. Отсюда с учетом равенства $\psi_1 + \alpha y_s = \psi_2$ для всех $j = \overline{1, s}$ получим соотношения

$$(\psi_1 + \Psi) \ni (\psi_1 + \alpha y_j) = \psi_1 + \alpha y_s - \alpha z_{j+1} =$$
$$= (\psi_2 - \alpha z_{j+1}) \in (\psi_2 - \Psi),$$

означающие, что при любом $j = \overline{1,s}$ справедливо включение

$$(\psi_1 + \alpha y_j) \in ((\psi_1 + \Psi) \cap (\psi_2 - \Psi)) =$$
$$= \Psi[\psi_1, \psi_2].$$

Лемма 6 доказана.

**Лемма 7.** *Пусть* $\xi \in \mathbb{R}^3$ *– произвольный единичный вектор, а векторы* $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^3$, $\psi_1 \ne \psi_2$, *таковы, что справедливо неравенство* $\varepsilon_1 := \min_{i=1,2} \xi^T \psi_i > 0$, *тогда для всякого числа* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1/3$, *выпуклого кругового конуса* $\Phi$ *угловой меры* $\varphi$, *ось которого содержит вектор* $\psi_2 - \psi_1$, *и любого элемента* $\mathfrak{y} \in \mathrm{U}_\varepsilon(\Phi[\psi_1,\psi_2])$ *выполнение оценки*

$$\varphi \le 2\,\mathrm{arctg}(2\varepsilon / \|\psi_2 - \psi_1\|) \qquad (4)$$

*влечет за собой неравенство* $\xi^T \mathfrak{y} \geqslant \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с работой [16, с. 20] точку $\psi$ произвольного множества $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^3$ назовем крайней точкой этого множества, если она не является внутренней точкой никакого отрезка, концы которого принадлежат $\mathfrak{M}$. По теореме Крейна–Мильмана [18, с. 312] любое компактное выпуклое множество $\mathfrak{M}$ совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества [18, с. 304] своих крайних точек, причем если размерность $\dim \mathfrak{M} = m$, то каждая точка $\nu \in \mathfrak{M}$ является выпуклой комбинацией [18, с. 304] некоторых $m+1$ его крайних точек. Воспользуемся данной теоремой для доказательства леммы 7. Возьмем произвольные векторы $\xi, \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^3$, число $\varepsilon$ и конус $\Phi$ угловой меры $\varphi$, удовлетворяющие условиям леммы 7, и рассмотрим конусный интервал $\mathfrak{R} := \Phi[\psi_1,\psi_2]$. Очевидно, что $\mathfrak{R}$ является компактным выпуклым множеством размерности $\dim \mathfrak{R} = 3$, и, следовательно, удовлетворяет условиям теоремы Крейна–Мильмана. Найдем тогда множество крайних точек конусного интервала $\mathfrak{R}$. Пусть $f_1 := (\psi_1 + \psi_2)/2$ и $f_2 := (\psi_2 - \psi_1)/2$. Обозначим через $W$ совокупность векторов $w \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sphericalangle(w, f_2) = \varphi/2, \qquad \|w\| = \|f_2\| / \cos(\varphi/2), \qquad (5)$$

и положим $W_1 := (\psi_1 + W) \subset \mathbb{R}^3$. Тогда из определения множества $W$ и конуса $\Phi$ следуют включения $W \subset \Phi$, $W \subset (-\Phi)$, а значит, и $W_1 = (\psi_1 + W) \subset (\psi_1 \pm \Phi)$. Отсюда и из определения конусного интервала $\mathfrak{R} = \Phi[\psi_1, \psi_2]$ вытекает соотношение $W_1 \subset \mathfrak{R}$. Поэтому, полагая $\Gamma := W_1 \cup \{\psi_1\} \cup \{\psi_2\}$, имеем включение $\Gamma \subset \mathfrak{R}$. Исходя из геометрических соображений, очевидно, что $\Gamma$ является множеством всех крайних точек конусного интервала $\mathfrak{R}$.

Покажем теперь, что для каждого фиксированного вектора $\eta \in W_1$ найдется такой вектор $f_3 \in \mathbb{R}^3$, при котором выполняются соотношения

$$f_3 \perp f_2, \qquad \|f_3\| = \|f_2\| \, |\operatorname{tg}(\varphi/2)|,$$
$$\eta = f_1 + f_3. \tag{6}$$

Возьмем произвольный фиксированный элемент $\eta \in W_1$. Тогда в силу определения множества $W_1$ выполняется равенство $\eta = \psi_1 + w$ для некоторого фиксированного $w \in W$. Рассмотрим вектор $(w - f_2) \in \mathbb{R}^3$. Умножим этот вектор слева на $f_2^T$, с учетом формул (5) получим равенства

$$f_2^T (w - f_2) = f_2^T w - f_2^T f_2 = \|w\| \, \|f_2\| \cdot$$
$$\cdot \cos\sphericalangle(w, f_2) - \|f_2\|^2 = \|f_2\| \, \|f_2\| \cos\sphericalangle(w, f_2):$$
$$: \cos\sphericalangle(w, f_2) - \|f_2\|^2 = 0.$$

Следовательно, $(w - f_2) \perp f_2$. Далее ввиду формул (5) имеем соотношения

$$\|w - f_2\|^2 = (w - f_2)^2 = w^2 - 2w^T f_2 + f_2^2 =$$
$$= \|w\|^2 - 2\|w\| \, \|f_2\| \cos\sphericalangle(w, f_2) + \|f_2\|^2 =$$
$$= \|f_2\|^2 / \cos^2(\varphi/2) - 2\|f_2\| \cos(\varphi/2) \|f_2\| / \cos(\varphi/2) +$$
$$+ \|f_2\|^2 = \|f_2\|^2 / \cos^2(\varphi/2) - \|f_2\|^2 = \|f_2\|^2 \operatorname{tg}^2(\varphi/2),$$

т.е. $\|w - f_2\| = \|f_2\| \, |\operatorname{tg}(\varphi/2)|$. В качестве $f_3$ возьмем вектор $w - f_2$, который, очевидно, удовлетворяет первым двум требованиям (6). Тогда справедливо равенство $w = f_2 + f_3$, из которого ввиду соотношений

$$\psi_1 + f_2 = \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1)/2 = (\psi_1 + \psi_2)/2 = f_1$$

вытекает выполнимость для вектора $f_3$ и третьего требования

$$\eta = \psi_1 + w = \psi_1 + f_2 + f_3 = f_1 + f_3.$$

Зафиксируем произвольный вектор $\eta \in W_1$. Тогда для элемента $\eta$ найдется такой вектор $f_3 \in \mathbb{R}^3$, при котором выполняются условия (6). Отсюда, используя определение величины $\varepsilon_1$ и векторов $\eta$ и $\xi$, получим соотношения

$$\xi^T \eta = \xi^T (f_1 + f_3) = \xi^T (\psi_1 + \psi_2)/2 + \xi^T f_3 =$$
$$= (\xi^T \psi_1 + \xi^T \psi_2)/2 + \|\xi^T\| \, \|f_3\| \cos\sphericalangle(\xi, f_3) \geqslant$$
$$\geqslant (\varepsilon_1 + \varepsilon_1)/2 + \|f_3\| \cos\sphericalangle(\xi, f_3) \geqslant \varepsilon_1 - \|f_3\| \cdot$$
$$\cdot |\cos\sphericalangle(\xi, f_3)| \geqslant \varepsilon_1 - \|f_3\| = \varepsilon_1 - \|f_2\| \, |tg(\varphi/2)| =$$
$$= \varepsilon_1 - tg(\varphi/2) \|\psi_2 - \psi_1\|/2,$$

из которых ввиду условия (4) и определений $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$ следуют оценки $\xi^T \eta \geqslant \varepsilon_1 - \varepsilon \geqslant 2\varepsilon_1/3$. В силу произвольности выбора вектора $\eta \in W_1$ неравенство $\xi^T \eta \geqslant 2\varepsilon_1/3$ справедливо при любом $\eta \in W_1$. Поэтому для всякого вектора $\psi \in \Gamma$ выполняется оценка

$$\xi^T \psi \geqslant 2\varepsilon_1/3, \tag{7}$$

вытекающая из определения множества $\Gamma$, векторов $\psi_1, \psi_2$ и величины $\varepsilon_1$.

Поскольку конусный интервал $\mathfrak{R}$ имеет размерность $\dim \mathfrak{R} = 3$ и удовлетворяет условиям теоремы Крейна–Мильмана [18, с. 312], а совокупность $\Gamma$ есть множество крайних точек $\mathfrak{R}$, то для любого элемента $\nu \in \mathfrak{R}$ найдутся такие точки $\nu_i \in \Gamma$, $i = \overline{1,4}$, и числа $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^4 \alpha_k = 1$, $i = \overline{1,4}$, при которых выполняется равенство $\nu = \sum_{k=1}^4 \alpha_k \nu_k$. Отсюда и из линейности оператора проектирования для проекции $\Pr_\xi(\nu)$ элемента $\nu$ на ось $\xi$ следуют равенства

$$\Pr_\xi(\nu) = \Pr_\xi\left(\sum_{k=1}^4 \alpha_k \nu_k\right) = \sum_{k=1}^4 (\alpha_k \Pr_\xi(\nu_k)).$$

Поскольку имеют место соотношения $\|\xi\| = 1$ и $\nu_i \in \Gamma$, $i = \overline{1,4}$, то на основании формулы (7) выполняются неравенства $\Pr_\xi(\nu_i) \geqslant 2\varepsilon_1/3$, $i = \overline{1,4}$, из которых с учетом последних равенств для проекции $\Pr_\xi(\nu)$ вытекает включение $\Pr_\xi(\nu) \subset [2\varepsilon_1/3, +\infty)$. В силу произвольности выбора элемента $\nu \in \mathfrak{R}$ последнее включение справедливо для любой точки множества $\mathfrak{R}$. Поэтому истинно соотношение $\Pr_\xi(\mathfrak{R}) \subset [2\varepsilon_1/3, +\infty)$. Отсюда и из включения $\Pr_\xi(\mathrm{U}_\varepsilon(0)) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$ с учетом линейности оператора проектирования получим соотношения

$$\Pr_\xi(\mathrm{U}_\varepsilon(\mathfrak{R})) = \Pr_\xi(\mathfrak{R}) + \Pr_\xi(\mathrm{U}_\varepsilon(0)) \subset$$

$$\subset [2\varepsilon_1/3,+\infty)+[-\varepsilon,\varepsilon]\subset[\varepsilon_1/3,+\infty),$$

и значит, ввиду определения $\varepsilon$, для любого элемента $\mathfrak{y}\in \Pr_{\xi}(\mathrm{U}_{\varepsilon}(\mathfrak{R}))$ выполняются неравенства $\xi^T\mathfrak{y}\geqslant\varepsilon_1/3\geqslant\varepsilon$. Лемма 7 доказана.

**2. Свойства трехмерных линейных равномерно вполне управляемых систем.** Пусть $Q(t,\tau)=\{q_{ij}(t,\tau)\}_{i,j=1}^3:=X(t,\tau)B(\tau)\in \mathrm{M}_3$, $t,\tau\geqslant 0$, где, как и ранее, $X(t,\tau):=X_0(t,\tau)$, $t,\tau\geqslant 0$, – матрица Коши системы (2) с нулевым управлением, тогда имеет место

**Лемма 8.** *Если система (1) $\sigma$ -равномерно вполне управляема, то для любого $t_0\geqslant 0$ выполняются неравенства*

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma}(|q_{i1}(t_0,\tau)|+|q_{i2}(t_0,\tau)|+|q_{i3}(t_0,\tau)|)d\tau\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\gamma},\qquad i=\overline{1,3}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные $t_0\geqslant 0$ и $x_0\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. Так как система (1) $\sigma$ -равномерно вполне управляема, то на отрезке $[t_0,t_0+\sigma]$ найдется допустимое управление $u$, $\|u(t)\|\le\gamma\|x_0\|$, $t\in[t_0,t_0+\sigma]$, переводящее вектор начального состояния $x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке. Тогда имеют место равенства

$$0=x(t_0+\sigma)=X(t_0+\sigma,t_0)(x_0+$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+\sigma}Q(t_0,\tau)u(\tau)d\tau),$$

и, следовательно,

$$-e_i^T x_0=\int_{t_0}^{t_0+\sigma}e_i^T Q(t_0,\tau)u(\tau)d\tau,\quad i=\overline{1,3}. \tag{9}$$

Кроме того, при всех $t\in[t_0,t_0+\sigma]$ и $i=\overline{1,3}$ справедлива оценка

$$|e_i^T Q(t_0,t)u(t)|\leqslant\sum_{j=1}^3|q_{ij}(t_0,t)u_j(t)|\leqslant$$

$$\leqslant\max\{|u_i(t)|,i=\overline{1,3}\}\sum_{j=1}^3|q_{ij}(t_0,t)|\leqslant$$

$$\leqslant\|u(t)\|\sum_{j=1}^3|q_{ij}(t_0,t)|\leqslant\gamma\|x_0\|\cdot$$

$$\cdot\sum_{j=1}^3|q_{ij}(t_0,t)|.$$

Отсюда и из равенств (9) для $i=\overline{1,3}$ следуют соотношения

$$|-e_i^T x_0|\leqslant\int_{t_0}^{t_0+\sigma}|e_i^T Q(t_0,\tau)u(\tau)|d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant\gamma\|x_0\|\sum_{j=1}^3\int_{t_0}^{t_0+\sigma}|q_{ij}(t_0,\tau)|d\tau,$$

т.е.

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\sum_{j=1}^3|q_{ij}(t_0,\tau)|d\tau\geqslant|e_i^T x_0|\cdot(\gamma\|x_0\|)^{-1},$$

$$i=\overline{1,3}.$$

Поскольку полученные неравенства выполняются при любом $x_0\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, то, взяв для каждого $i=\overline{1,3}$ в качестве $x_0$ вектор $e_i$, получим требуемые оценки (8). Лемма 8 доказана.

Возьмем произвольное число $s\geqslant 0$ и рассмотрим отрезок $[s,s+\sigma]$. При любом фиксированном натуральном $p\geqslant 2$ разделим этот отрезок точками $t_i:=s+i\sigma/p$, $i=\overline{1,p-1}$, на $p$ равных частей и для всякого допустимого управления $u(t)$, $t\in[s,s+\sigma]$, положим $w_i(s,u):=\int_{t_{i-1}}^{t_i}Q(s,\tau)u(\tau)d\tau$, $i=\overline{1,p}$, где $t_p:=s+\sigma$. Заметим, что эти интегралы существуют, ввиду локальной интегрируемости функции $B$ и непрерывности матрицы $X(t,\tau)$ по $\tau$. Обозначим

$$\mathbb{R}_+:=\{y\in\mathbb{R}:y\geqslant 0\},\ \gamma_1:=\max\{\gamma,\sqrt{3}\},$$

$$\ell=\ell(\varphi):=\min\{\varphi^2/(4\pi^2\gamma_1),3\varphi^2/(16\pi^2)\}=$$

$$=\varphi^2/(4\pi^2\gamma_1).$$

Положим также $\theta:=2\arcsin(4\gamma_1 b\exp a)^{-1}$, где, напомним, числа $a,b\geq 1$ – равномерные по $t\geqslant 0$ оценки на интегралы от норм матричных коэффициентов $A$ и $B$ системы (1), т.е. $\int_t^{t+\sigma}\|A(\tau)\|d\tau\le a$, $\int_t^{t+\sigma}\|B(\tau)\|d\tau\le b.$

Поскольку $4\gamma_1 b\exp a\geqslant 4e\sqrt{3}>1$, величина $\theta$ определена корректно и удовлетворяет включению $\theta\in(0,\pi/18]$.

**Теорема 1.** *Если система (1) $\sigma$ -равномерно вполне управляема, то для любых $t_0\geqslant 0$, $0<\varphi\le\theta/16$ и натурального $p\geqslant 2$ найдутся выпуклые круговые конусы $\Phi_1\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2$ и $\Phi_2,\Phi_3\subset\mathbb{R}^3$, множества $M_i\subset\{1,\ldots,p\}$, и допустимые управления $u_i(t)$, $t\in[t_0,t_0+\sigma]$, $i=\overline{1,3}$, такие, что:*

*1) угловая мера конусов $\Phi_i$, $i=\overline{1,3}$, не превосходит $4\varphi$;*

*2) при каждом $j\in M_i$, $i=\overline{1,3}$, справедливо* *включение* $w_j(t_0,u_i)\in\Phi_i$;

*3) для векторов* $\zeta_i:=\sum_{j\in M_i} w_j(t_0,u_i)\in\Phi_i$, $i=\overline{1,3}$, *верны соотношения* $\|\zeta_i\|\geqslant \ell(\varphi)$;

*4) векторы* $v_i:=\zeta_i/\|\zeta_i\|$ *удовлетворяют неравенству* $|\det[v_1,v_2,v_3]|\geqslant\sin(15\theta/16)/2$;

*5) при всех* $i=\overline{1,3}$ *и* $t\in[t_0,t_0+\sigma]$ *для управлений* $u_i$ *выполняется оценка* $\|u_i(t)\|\leq\gamma_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные числа $p$, $t_0$ и $\varphi$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, и отыщем вначале управление $u_1$, конус $\Phi_1$ и множество $M_1$, описанные в этой теореме. Возьмем $r\in\mathbb{N}$ такое, что справедливо соотношение

$$\varphi_1:=\pi/(2r)\leqslant\varphi<\pi/(2(r-1)).$$

Пусть $\mathbb{S}_+^2$ – полусфера единичного радиуса с центром в нуле, лежащая в полупространстве $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2$. Удалим из $\mathbb{S}_+^2$ сферический сегмент, отсекаемый выпуклым круговым конусом $K_0$ угловой меры $2\varphi_1$, ось которого содержит вектор $e_1$. Обозначив полученное множество через $\mathrm{S}_1$, определим далее отображение

$$f:[0,2\pi)\times[0,\pi/2-\varphi_1)\ni(\psi,\vartheta)\to$$
$$\to(x_1,x_2,x_3)\in\mathrm{S}_1$$

равенствами

$$x_1=\sin\vartheta,\quad x_2=\cos\psi\cos\vartheta,\ x_3=\sin\psi\cos\vartheta. \quad (10)$$

Очевидно, что отображение $f$ взаимнооднозначно. Разобьем полуоткрытый прямоугольник $[0,2\pi)\times[0,\pi/2-\varphi_1)$ на $4r(r-1)=:4rr_1$ полуоткрытых квадрата

$$\Pi_{kl}^1:=\{\varphi_1(k-1)\leqslant\psi<\varphi_1 k,$$
$$\varphi_1(l-1)\leqslant\vartheta<\varphi_1 l,\ k=\overline{1,4r}, l=\overline{1,r_1}\}.$$

Тогда в силу взаимной однозначности отображения $f$ множество $\mathrm{S}_1$ соответственно разобьется на непересекающиеся полуоткрытые множества $f(\Pi_{kl}^1)$, $k=\overline{1,4r}$, $l=\overline{1,r_1}$, множества $\mathrm{S}_1$.

Пусть $D$ – произвольное множество в пространстве $\mathbb{R}^3$. В дальнейшем через $\mathbb{P}(D)\subseteq\mathbb{R}^3$ будем обозначать множество всех лучей в $\mathbb{R}^3$, выходящих из нуля и проходящих через точки множества $D$, т.е. множество $\{\lambda v\in\mathbb{R}^3: v\in D,\ \lambda\geqslant 0\}$. Положим $\mathrm{P}_1:=\mathbb{P}((\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)\setminus K_0)$ и рассмотрим отображение $g:\mathrm{S}_1\to\mathrm{P}_1$, ставящее в соответствие каждой точке множества $\mathrm{S}_1$ луч, выходящий из нуля и проходящий через эту точку. Легко убедиться, что такое отображение является взаимнооднозначным. Кроме того, выполняются соотношения

$$g(f(\Pi_{ij}^1))=\mathrm{Con}(f(\Pi_{ij}^1)):=\{v\in\mathbb{R}^3:$$
$$v=\sum_{i=1}^k\alpha_s v_s,\ k\in\mathbb{N},$$
$$v_s\in f(\Pi_{ij}^1),\ \alpha_s\geqslant 0,\ s=\overline{1,k}\},$$
$$i=\overline{1,4r},\quad j=\overline{1,r_1},\ \text{и}$$
$$\coprod_{i=1}^{4r}\coprod_{j=1}^{r_1} g(f(\Pi_{ij}^1))=(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)\setminus K_0$$

(здесь $\mathrm{Con}(D)$ означает коническую оболочку [17, с. 374] непустого множества $D$). При всех $i=\overline{1,4r}$, $j=\overline{1,r_1}$ обозначим $\Phi_{ij}^1:=g(f(\Pi_{ij}^1))$, $\Phi_{4rr}^1:=K_0$ и для дальнейшего единообразия записи положим

$$\Phi_{qr}:=\varnothing,\quad q=\overline{1,4r-1}. \quad (11)$$

Для произвольного множества $D$ пространства $\mathbb{R}^3$ через $\mathrm{cl}\,D$ далее будем обозначать замыкание [16, с. 49–50] множества $D$. Докажем теперь, что при любых индексах $i=\overline{1,4r}$, $j=\overline{1,r_1}$ и векторах $\mu_1,\mu_2\in\mathrm{cl}\,\Phi_{ij}^1$ выполняется неравенство

$$\sphericalangle(\mu_1,\mu_2)\leqslant 2\varphi_1=:\varphi_2. \quad (12)$$

Зафиксируем произвольные $i\in\{1,\ldots,4r\}$ и $j\in\{1,\ldots,r_1\}$ и рассмотрим множество $\mathrm{cl}\,\Phi_{ij}^1$. Легко видеть, что

$$\mathrm{cl}\,\Phi_{ij}^1=\mathrm{cl}\,(g(f(\Pi_{ij}^1)))=g(\mathrm{cl}\,(f(\Pi_{ij}^1)))=$$
$$=g(f(\mathrm{cl}\,\Pi_{ij}^1)).$$

Для $s=1,2$ возьмем произвольные векторы $\mu_s\in\mathrm{cl}\,\Phi_{ij}^1$ и положим $\omega_s:=\mu_s/\|\mu_s\|$. Отсюда, из оценки (12), а также из определения отображения $f$ для векторов $\omega_1$ и $\omega_2$ получим соотношения

$$\sphericalangle(\mu_1,\mu_2)=\sphericalangle(\omega_1,\omega_2),\quad\|\omega_s\|=1,$$
$$\omega_s\in f(\mathrm{cl}\,\Pi_{ij}^1),\quad s=1,2.$$

Из этих соотношений, с учетом определений множеств $\Pi_{ij}^1$, отображения $f$, а также замыкания множества, следует, что векторы $\omega_s$ представляются в виде

$$\omega_s = (\sin\theta_s,\ \cos\psi_s\cos\theta_s,\ \sin\psi_s\cos\theta_s), \quad (13)$$

$$\varphi_1(i-1) \leqslant \psi_s \leqslant \varphi_1 i,$$
$$\varphi_1(j-1) \leqslant \theta_s \leqslant \varphi_1 j, \quad s=1,2. \qquad (14)$$

Поскольку $\|\omega_s\|=1,\ s=1,2,$ то

$$\omega_1^T\omega_2 = \|\omega_1\|\,\|\omega_2\|\cos\sphericalangle(\omega_1,\omega_2) = \cos\sphericalangle(\omega_1,\omega_2).$$

С другой стороны, ввиду формул (13) и (14) и вытекающих из них оценок

$$|\theta_1-\theta_2| \leqslant \varphi_1,\ |\psi_1-\psi_2| \leqslant \varphi_1 < \pi/2,$$

а также в силу убывания функции cos на отрезке $[0,\pi]$ получим соотношения

$$\omega_1^T\omega_2 = \sin\theta_1\sin\theta_2 +$$
$$+\cos\psi_1\cos\theta_1\cos\psi_2\cos\theta_2+\sin\psi_1\cos\theta_1\cdot$$
$$\cdot\sin\psi_2\cos\theta_2 = \sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot$$
$$\cdot(\cos\psi_1\cos\psi_2+\sin\psi_1\sin\psi_2) = \sin\theta_1\sin\theta_2+$$
$$+\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\psi_1-\psi_2) \geqslant \sin\theta_1\sin\theta_2\cdot$$
$$\cdot\cos(\psi_1-\psi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\psi_1-\psi_2) =$$
$$=\cos(\theta_1-\theta_2)\cos(\psi_1-\psi_2) = (\cos((\theta_1-\theta_2)+$$
$$+(\psi_1-\psi_2))+\cos((\theta_1-\theta_2)-(\psi_1-\psi_2)))/2 \geqslant$$
$$\geqslant (\cos 2\varphi_1+\cos 2\varphi_1)/2 = \cos 2\varphi_1 = \cos\varphi_2.$$

Поэтому $\cos\sphericalangle(\omega_1,\omega_2)\geqslant\cos\varphi_2$, и значит, $\sphericalangle(\omega_1,\omega_2)\leqslant\varphi_2$. Тогда ввиду равенства $\sphericalangle(\omega_1,\omega_2)= =\sphericalangle(\mu_1,\mu_2)$ выполняется и соотношение $\sphericalangle(\mu_1,\mu_2)\leqslant\varphi_2$. Так как $\mu_1,\ \mu_2$ – произвольные векторы множества $\mathrm{cl}\,\Phi_{ij}^1$, то формула (12) справедлива для любых векторов из этого множества. Но тогда в силу произвольности выбора индексов $i\in\{1,\ldots,4r\}$ и $j\in\{1,\ldots,r_1\}$ неравенство (12) оказывается справедливым и для всяких двух векторов, принадлежащих любому из множеств $\mathrm{cl}\,\Phi_{ij}^1,\ i=\overline{1,4r},\ j=\overline{1,r_1}$.

Выберем теперь в качестве управления $u_1$ на отрезке $[t_0,t_0+\sigma]$ векторную функцию $u_1(t)=(\mathrm{sign}\,q_{11}(t_0,t),\mathrm{sign}\,q_{12}(t_0,t),\ \mathrm{sign}\,q_{13}(t_0,t))^T$, при этом заметим, что для любого $t\in[t_0,t_0+\sigma]$ выполняется оценка $\|u_1(t)\|\le\sqrt{3}\le\gamma_1$. Разделим отрезок $[t_0,t_0+\sigma]$ точками $t_i,\ i=\overline{1,p-1}$, на $p$ равных частей и положим $t_p:=t_0+\sigma$. Поскольку матричная функция $B(t)$ локально-интегрируема для всех $t\geqslant 0$, то функция $Q(t_0,t)$ также локально-интегрируема при любых $t_0,t\geqslant 0$, а значит, интегралы $w_j(u_1):=w_j(t_0,u_1),\quad j=\overline{1,p},$ существуют. Согласно определению векторов $u_1$ и $w_j(u_1)$, $j=\overline{1,p}$, имеем равенства

$$e_1^T\sum_{j=1}^p w_j(u_1) = e_1^T\int_{t_0}^{t_0+\sigma}Q(t_0,\tau)u_1(\tau)d\tau =$$
$$=\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\sum_{j=1}^3|q_{1j}(t_0,\tau)|d\tau,$$

из которых ввиду леммы 8 следует, что найдется такое $l\in\{1,\ldots,p\}$, при котором вектор $w_l(u_1)$ ненулевой и лежит в $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2$. Обозначим через $\mathfrak{S}_{ij}^1,\ i=\overline{1,4r},\ j=\overline{1,r},$ – множество тех индексов $s\in\{1,\ldots,p\}$, при которых имеет место включение $w_s(u_1)\in\Phi_{ij}^1$, и докажем, что существуют $k_1\in\{1,\ldots,4r\}$ и $l_1\in\{1,\ldots,r\}$, обеспечивающие справедливость соотношения

$$\|\zeta_1\|:=\|\sum_{s\in\mathfrak{S}_{k_1l_1}^1}w_s(u_1)\|\geqslant 1/(4r^2\gamma). \quad (15)$$

Предположим противное: пусть для всех $i=\overline{1,4r},\quad j=\overline{1,r}$ имеет место неравенство $\|\sum_{s\in\mathfrak{S}_{ij}^1}w_s(u_1)\|<1/(4r^2\gamma)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{4r}\sum_{j=1}^{r}\|\sum_{s\in\mathfrak{S}_{ij}^1}w_s(u_1)\|<1/\gamma.$$

Так как справедливы соотношения

$$\coprod_{i=1}^{4r}\coprod_{j=1}^{r}\Phi_{ij}^1 = (\coprod_{i=1}^{4r}\coprod_{j=1}^{r-1}g(f(\Pi_{ij}^1)))\coprod(\coprod_{i=1}^{4r-1}\Phi_{ir}^1)\coprod$$
$$\coprod\Phi_{4rr}^1 = ((\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)\setminus K_0)\coprod_{i=1}^{4r-1}\varnothing\coprod K_0 =$$
$$=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2 \text{ и } w_s(u_1)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2,\ s=\overline{1,p},$$

то для всех $s=\overline{1,p}$ ненулевой вектор $w_s(u_1)$ принадлежит одному из множеств $\Phi_{ij}^1$, $i=\overline{1,4r},\quad j=\overline{1,r},$ и поэтому выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{4r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{s\in\mathfrak{S}_{ij}^1}w_s(u_1) =$$
$$=\int_{t_0}^{t_0+\sigma}Q(t_0,\tau)u_1(\tau)d\tau.$$

Отсюда с учетом формул (15) следуют неравенства

$$\sum_{i=1}^{4r}\sum_{j=1}^{r}\|\sum_{s\in\mathfrak{S}_{ij}^1}w_s(u_1)\|\geqslant$$

$$\geqslant \|\sum_{i=1}^{4r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{s\in\mathfrak{S}_{ij}^{1}} w_s(u_1)\| =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \| Q(t_0,\tau)\, u_1(\tau) \|\, d\tau \geqslant$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} \sum_{j=1}^{3} | q_{1j}(t_0,\tau)\, |d\tau\, | \geqslant 1/\gamma,$$

противоречащие нашему предположению.

Зафиксируем какие-либо $k_1 \in \{1,\ldots,4r\}$ и $l_1 \in \{1,\ldots,r\}$, которые обеспечивают выполнение неравенства (15). Положим $M_1 := \mathfrak{S}_{k_1 l_1}^{1}$ и $\Phi_1^{'} := \mathrm{cl}\,\Phi_{k_1 l_1}^{1}$. Рассмотрим множество $\Phi_1^{'}$ и покажем, что найдется такой выпуклый круговой конус $\Phi_1$ угловой меры, не превосходящей $4\varphi_1$, при котором выполняется включение $\Phi_1^{'} \subseteq \Phi_1$. Для случая $\Phi_1^{'} = \Phi_{4rr}^{1} = K_0$ в качестве $\Phi_1$ возьмем конус $K_0$, который, исходя из его определения, очевидно, удовлетворяет условиям выбора. Рассмотрим теперь случай, когда $\Phi_1^{'} = \mathrm{cl}\,\Phi_{k_1 l_1}^{1}$, $k_1 \in \{1,\ldots,4r\}$, $l_1 \in \{1,\ldots,r-1\}$ (случай $k_1 \in \{1,\ldots,4r\}$ и $l_1 = r$ невозможен в силу формул (11) и непустоты множества $\Phi_1^{'}$). Поскольку вектор $\zeta_1$, определенный формулой (15), принадлежит $\Phi_1^{'}$, то ввиду формулы (12) для любого ненулевого вектора $w \in \Phi_1^{'}$ выполняется неравенство $\sphericalangle(\zeta_1, w) \leqslant \varphi_2$. Отсюда и из неравенства треугольника вытекают соотношения

$$\sup\{\sphericalangle(\xi_1,\xi_2) : \xi_1,\xi_2 \in \Phi_1^{'}\} \leqslant \sup\{\sphericalangle(\xi_1,\zeta_1) +$$
$$+ \sphericalangle(\zeta_1,\xi_2) : \xi_1,\xi_2 \in \Phi_1^{'}\} \leqslant \sup\{\sphericalangle(\xi_1,\zeta_1) :$$
$$: \xi_1 \in \Phi_1^{'}\} + \sup\{\sphericalangle(\zeta_1,\xi_2) : \xi_2 \in \Phi_1^{'}\} \leqslant \varphi_2 +$$
$$+ \varphi_2 = 2\varphi_2.$$

В качестве конуса $\Phi_1$ возьмем выпуклый круговой конус угловой меры $2\varphi_2$, ось которого содержит вектор $\zeta_1$. Тогда из последних соотношений следует включение $\Phi_1^{'} \subset \Phi_1$, из которого с учетом определения величины $\varphi_2$ вытекает, что выбранный таким образом конус $\Phi_1$ удовлетворяет требованиям теоремы. Кроме того, при найденных $M_1$ и $\Phi_1$ имеют место неравенства $\sphericalangle\Phi_1 \leqslant 4\varphi_1 \leq 4\varphi$, а также, поскольку справедлива оценка $\varphi \leqslant \theta/16 < \pi/2$, выполняются соотношения

$$4r^2\gamma \leqslant 4r^2\gamma_1 \leqslant 4(1+\pi/(2\varphi))^2\gamma_1 =$$
$$= (\pi+2\varphi)^2\gamma_1/\varphi^2 \leqslant 4\pi^2\gamma_1/\varphi^2,$$

и, значит, в силу формулы (15) неравенство

$$\|\zeta_1\| := \|\sum_{j\in M_1} w_j(u_1)\| \geqslant \frac{\varphi^2}{4\pi^2\gamma_1} \geqslant \ell(\varphi). \qquad (16)$$

Перейдем теперь к поиску управления $u_2$, конуса $\Phi_2$ и множества $M_2$, удовлетворяющих теореме 1. Пусть прямая $o_1 \subset \mathbb{R}^3$ – ось конуса $K(\Phi_1) := \Phi_1 \cup (-\Phi_1)$, тогда $\zeta_1 \in o_1$. Обозначив $\nu_1 := \zeta_1/\|\zeta\|$, имеем соотношения $\|\nu_1\| = 1$ и $\nu_1 \in o_1$. Возьмем единичный вектор $y_1 \in \mathbb{R}^3$, ортогональный $\nu_1$. Поскольку система (1) $\sigma$ -равномерно вполне управляема, то на отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$ найдется допустимое управление $u_2$, переводящее состояние $y_1$ системы (1) в ноль на $[t_0, t_0+\sigma]$, и такое, что имеет место оценка $\|u_2(t)\| \leq \gamma\|y_1\| = \gamma \leq \gamma_1$ для всех $t \in [t_0, t_0+\sigma]$. Фиксируя это управление, получим равенство

$$0 = y_1 + \int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,\tau)u_2(\tau)d\tau. \qquad (17)$$

Возьмем такое натуральное число $r_2$, при котором справедливы соотношения $\theta_1 := r_2\varphi_1 \leqslant \theta < (r_2+1)\varphi_1 = \theta_1 + \varphi_1$, где, как и ранее, $\theta = 2\arcsin(4\gamma_1 b \exp a)^{-1}$. Обозначим через $\Psi_1 \subset \mathbb{R}^3$ выпуклый круговой конус угловой меры $\theta_1$, ось которого лежит на прямой $o_1$ и для которого выполняется включение $\Phi_1 \subset \Psi_1$. Этот конус существует в силу неравенств $4\varphi_1 < 15\varphi_1 < \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \pi/18$, которые следуют из соотношений

$\theta_1 > \theta - \varphi_1 \geqslant 16\varphi - \varphi_1 \geqslant 16\varphi_1 - \varphi_1 = 15\varphi_1$ и определения величин $\theta$ и $\theta_1$. Пусть $I_1$ – множество тех индексов $i \in \{1,\ldots,p\}$, при которых справедливо включение $w_i(u_2) := w_i(t_0,u_2) \in K(\Psi_1) \subset \mathbb{R}^3$, где $K(\Psi_1) := \Psi_1 \cup (-\Psi_1)$. Обозначим через $I_k$, $k = 2, 3$, множество индексов $i \in \{1,\ldots,p\}$, для которых имеет место включение $w_i(u_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus K(\Psi_1)$ и выполняется неравенство

$$(-1)^k \cos(w_i(u_2), y_1) \geqslant 0. \qquad (18)$$

Докажем, что для множества $I_3$ справедливо неравенство $\|\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)\| \geqslant 3/4.$

Умножая равенство (17) скалярно на $-y_1^T$, получим соотношения

$$1=\|y_1\|^2=-y_1^T\int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,\tau)u_2(\tau)d\tau=$$
$$=-y_1^T\sum_{i\in I_1} w_i(u_2)-y_1^T\sum_{j\in I_2} w_j(u_2)-$$
$$-y_1^T\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)=-\sum_{i\in I_1}\|y_1^T\|\|w_i(u_2)\|\cdot$$
$$\cdot\cos\alpha_i-\sum_{j\in I_2}\|y_1^T\|\|w_j(u_2)\|\cos\alpha_j-$$
$$-\|y_1^T\|\|\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)\|\cos\alpha,$$

где $\alpha_i$, $i\in I_1$, $\alpha_j$, $j\in I_2$, и $\alpha$ – меры углов между вектором $y_1$ и соответственно векторами $w_i(u_2)$, $w_j(u_2)$ и $\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)$. Так как для всех $j\in I_2$ выполняются неравенства (18), то $-\sum_{j\in I_2}\|y_1^T\|\|w_j(u_2)\|\cos\alpha_j\leqslant 0.$ Отсюда с учетом последних равенств и соотношения $\|y_1\|=1$ следуют оценки

$$1\leqslant -\sum_{i\in I_1}\|w_i(u_2)\|\cos\alpha_i-$$
$$-\|\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)\|\cos\alpha\leqslant\sum_{i\in I_1}\|w_i(u_2)\|\cdot$$
$$\cdot|\cos\alpha_i|+\|\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)\||\cos\alpha|,\ \text{т.е.}$$
$$1\leqslant\sum_{i\in I_1}\|w_i(u_2)\||\cos\alpha_i|+\|\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)\||\cos\alpha|. \quad (19)$$

Конус $\Psi_1$, векторы $y_1$ и $w_i(u_2)$, $i\in I_1$, удовлетворяют условиям леммы 5, поэтому для всех $i\in I_1$ справедливы оценки $|\cos\alpha_i|\leqslant\sin(\theta_1/2).$ Но поскольку $0<\theta_1/2\leqslant\theta/2<\pi/2$ и функция sin возрастает на промежутке $[0,\pi/2)$, то из последних оценок следуют неравенства $|\cos\alpha_i|\leqslant\sin(\theta/2)$, $i\in I_1$. Отсюда и из формулы (19), с учетом замечания 2 и равенства $\theta=2\arcsin(4\gamma_1 b\exp a)^{-1}$, используя определение величин $a$ и $b$, векторов $y_1$ и $w_i(u_2)$, $i\in I_1$, а также управления $u_2$, получим соотношения

$$1\leq\sum_{i\in I_1}\|w_i(u_2)\|\sin(\theta/2)+\|\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)\|\cdot$$
$$\cdot|\cos\alpha|\leqslant\|\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)\|+$$
$$+\sum_{i\in I_1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|Q(t_0,\tau)u_2(\tau)\|d\tau\sin(\theta/2)\leqslant$$
$$\leqslant\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\|Q(t_0,\tau)u_2(\tau)\|d\tau(4b\gamma_1\exp a)^{-1}+$$
$$+\|\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)\|\leqslant\|\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)\|+$$
$$+b\gamma_1\exp a/(4b\gamma_1\exp a),$$

и поэтому

$$\|\xi_1\|:=\|\sum_{s\in I_3} w_s(u_2)\|\geqslant 3/4. \quad (20)$$

Кроме того, из определения $I_3$ вытекают включения $\xi_1, w_s(u_2)\in\mathbb{R}^3\setminus K(\Psi_1)$, $s\in I_3$.

**Замечание 4.** Для удобства последующего доказательства теоремы 1 повернем исходный репер (векторы $e_1,e_2,e_3$) таким образом, чтобы базисный вектор $e_1'$ совпал с вектором $\nu_1$ (а значит, стал сонаправленным с вектором $\zeta_1$), вектор $e_2'$ совпал с вектором $(-y_1)$, а вектор $e_3'$ – с вектором $e_1'\times e_2'$, и в дальнейшем при доказательстве данной теоремы будем работать с таким репером, считая его исходным. Очевидно, что базисные векторы полученного репера ортонормированы. Координаты векторов в этом базисе будем обозначать со штрихом. Здесь же заметим, что при повороте системы координат (ортогональном преобразовании) ранее найденные в процессе доказательства элементы (векторы, конусы и др.) и соотношения между ними, а именно: длины векторов, величины углов между векторами, угловые меры конусов – не изменятся.

В силу определения множества $I_3$ и репера $e_1', e_2', e_3'$ векторы $\xi_1, w_s(u_2)$, $s\in I_3$, принадлежат множеству $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\setminus K(\Psi_1)$ в новом базисе. Пусть $\tilde{\mathbb{S}}_+\subset\mathbb{R}^3$ – полусфера единичного радиуса с центром в нуле, лежащая в полупространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ нового базиса. Удалим из $\tilde{\mathbb{S}}_+$ часть сферического сегмента, отсекаемую конусом $K(\Psi_1)$. Обозначив полученное множество через $\mathrm{S}_2$, определим отображение

$$\tilde{f}:[-\pi/2,\pi/2]\times((-\pi+\theta_1)/2,(\pi-\theta_1)/2)\ni$$
$$\ni(\psi,\vartheta)\to(x_1',x_2',x_3')\in\mathrm{S}_2$$

равенствами

$$x_1'=\sin\vartheta,\quad x_2'=\cos\psi\cos\vartheta,$$
$$x_3'=\sin\psi\cos\vartheta. \quad (21)$$

Легко видеть, что такое отображение взаимнооднозначно. Поскольку

$$(\pi-\theta_1)/\varphi_1=\pi/\varphi_1-r_2=2r-r_2=:r_3\in\mathbb{N}$$

в силу определений величин $r$ и $r_2$, то разобьем полуоткрытый прямоугольник

$$[-\pi/2,\pi/2]\times((-\pi+\theta_1)/2,\ (\pi-\theta_1)/2)$$

на $2r\cdot 2(r-r_2)=2rr_3=:r_4$ квадрата

$$\Pi_{kl}^2:=\{-\pi/2+\varphi_1(k-1)\leqslant\psi<-\pi/2+\varphi_1 k,$$
$$(-\pi+\theta_1)/2+\varphi_1(l-1)\leqslant\vartheta<$$
$$<(-\pi+\theta_1)/2+\varphi_1 l,\quad k=\overline{1,2r},\ l=\overline{2,r_3}\}$$

и $\Pi_{k1}^2:=\{\varphi_1(k-1)\leqslant\psi<\varphi_1 k,$

$$(-\pi+\theta_1)/2<\vartheta<(-\pi+\theta_1)/2+\varphi_1,\quad k=\overline{1,2r}\}.$$

Тогда множество $\mathrm{S}_2$ соответственно разобьется на полуоткрытые множества $\tilde{f}(\Pi_{kl}^2)$, $k=\overline{1,2r}$, $l=\overline{1,r_3}$. Положим $\mathrm{P}_2:=\mathbb{P}((\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\setminus K(\Psi_1))$ и рассмотрим отображение $\tilde{g}:\mathrm{S}_2\to\mathrm{P}_2$, ставящее в соответствие каждой точке множества $\mathrm{S}_2$ луч, выходящий из нуля и проходящий через эту точку. Очевидно, что такое отображение является взаимно однозначным. Кроме того, выполняются соотношения

$$\tilde{g}(\tilde{f}(\Pi_{ij}^2))=\mathrm{Con}(\tilde{f}(\Pi_{ij}^2)):=\{v\in\mathbb{R}^3:$$
$$v=\sum_{i=1}^{k}\alpha_s v_s;\quad k\in\mathbb{N},\ v_s\in\tilde{f}(\Pi_{ij}^2),$$
$$\alpha_s\geqslant 0,\ s=\overline{1,k}\},\ i=\overline{1,2r},\quad j=\overline{1,r_3},$$

и

$$\coprod_{i=1}^{2r}\coprod_{j=1}^{r_3}\tilde{g}(\tilde{f}(\Pi_{ij}^2))=(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\setminus K(\Psi_1).$$

Для всех $i=\overline{1,2r}$ и $j=\overline{1,r_3}$ положим $\Phi_{ij}^2:=\tilde{g}(\tilde{f}(\Pi_{ij}^2))$ и обозначим через $\mathfrak{S}_{ij}^2$ множество тех индексов $s\in I_3\subset\{1,\ldots,p\}$, при которых имеет место соотношение $w_s(u_2)\in\Phi_{ij}^2$. Ввиду включения $\xi_1\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\setminus K(\Psi_1)$, а также оценки (20), применяя рассуждение, аналогичное использованному для доказательства соотношения (15), можно показать, что найдутся такие числа $k_2\in\{1,\ldots,2r\}$ и $l_2\in\{1,\ldots,r_3\}$, которые обеспечивают справедливость неравенства

$$\|\zeta_2\|:=\|\sum_{s\in\mathfrak{S}_{k_2 l_2}^2}w_s(u_2)\|\geqslant\frac{3}{4r_4}. \qquad (22)$$

Зафиксируем какие-либо $k_2\in\{1,\ldots,2r\}$ и $l_2\in\{1,\ldots,r_3\}$, при которых выполняется неравенство (22). Положим $M_2:=\mathfrak{S}_{k_2 l_2}^2$ и $\Phi_2':=\mathrm{cl}\,\Phi_{k_2 l_2}^2$. Используя найденное множество $\Phi_2'$, на основе рассуждений, аналогичных применяемым для поиска кругового конуса $\Phi_1$, найдем такой выпуклый круговой конус $\Phi_2$, на оси которого лежит вектор $\zeta_2$, и для которого справедливы следующие свойства: $\Phi_2'\subseteq\Phi_2$ и $\sphericalangle\Phi_2\leqslant 4\varphi$. Кроме того, поскольку из определения величин $r$, $r_i$, $i=\overline{2,4}$, следуют соотношения

$$4r_4=8rr_3=16r(r-r_2)\leqslant 16r^2\leqslant$$
$$\leqslant 16(1+\pi/(2\varphi))^2=16((2\varphi+\pi)/(2\varphi))^2\leqslant$$
$$\leqslant 16\pi^2/\varphi^2,$$

то в силу формулы (22) для множества $M_2$ получим неравенство

$$\|\zeta_2\|=\|\sum_{j\in M_2}w_j(u_2)\|\geqslant\frac{3\varphi^2}{16\pi^2}\geqslant\ell(\varphi). \qquad (23)$$

Обозначим $\nu_2:=\zeta_2/\|\zeta_2\|$, тогда в силу равенства $\|\nu_2\|=1$ и определений вектора $\zeta_2$ и множества $\mathrm{S}_2$ следует включение $\nu_2\in\mathrm{S}_2$, и, значит, вектор $\nu_2$ в ортонормированном базисе $e_1'$, $e_2'$, $e_3'$ представим в виде

$$\nu_2=(\sin\vartheta_1,\cos\psi_1\cos\vartheta_1,\sin\psi_1\cos\vartheta_1),$$

где $(\psi_1,\vartheta_1)\in[-\pi/2,\pi/2]\times((-\pi+\theta_1)/2,(\pi-\theta_1)/2)$.

Тогда верны соотношения

$$\cos\sphericalangle(e_1',\nu_2)=\|e_1'\|\,\|\nu_2\|\cos\sphericalangle(e_1',\nu_2)=$$
$$=(e_1')^T\nu_2=\sin\vartheta_1\leqslant\sin((\pi-\theta_1)/2)=$$
$$=\cos(\theta_1/2),$$

т.е.

$$\cos\sphericalangle(e_1',\nu_2)=\sin\vartheta_1\leqslant\cos(\theta_1/2). \qquad (24)$$

Возьмем такой единичный вектор $\nu_2'\in\mathbb{R}^3$, что выполняются соотношения $\nu_2'\perp e_1'$ и $\det[e_1',\nu_2,\nu_2']=0$, т.е. вектор $\nu_2'$ ортогонален $e_1'$ и принадлежит подпространству $L(e_1',\nu_2)$ (линейной оболочке векторов $e_1'$ и $\nu_2$). Легко проверить, что в базисе $e_1'$, $e_2'$, $e_3'$ этот вектор представим в виде $\nu_2'=(0,\ \cos\psi_1,\ \sin\psi_1)$.

Повернем систему координат таким образом, чтобы базисный вектор $e_1''$ совпал с вектором $e_1'$, вектор $e_2''$ – с вектором $\nu_2'$, а вектор $e_3''$ был равен $e_3'':=e_1'\times\nu_2'$. Очевидно, что векторы $e_1''$, $e_2''$ и $e_3''$ составляют ортонормированный базис. Далее будем использовать эту систему координат. Координаты вектора в базисе $e_1''$, $e_2''$, $e_3''$ будем обозначать с двумя штрихами. Здесь, как и выше, заметим, что при повороте системы координат (ортогональном преобразовании) ранее найденные в процессе доказательства элементы (векторы, конусы и др.) и соотношения между ними, а именно: длины векторов, величины углов между векторами – не изменяются. В полученном базисе координаты единичных векторов, лежащих на осях конусов $\Phi_1$ и $\Phi_2$, будут соответственно

$$\nu_1=(1,\ 0,\ 0) \text{ и } \nu_2=(\sin\vartheta_1,\ \cos\vartheta_1,\ 0),\quad \vartheta_1\in((-\pi+\theta_1)/2,\ (\pi-\theta_1)/2), \tag{25}$$

в силу равенств $\nu_1=e_1'=e_1''$, $\|\nu_2\|=\|\nu_1\|=1$ и соотношений

$$(e_1'')^T\nu_2=\cos\sphericalangle(\nu_2,e_1'')=\\=\cos\sphericalangle(\nu_2,e_1')=\sin\vartheta_1,$$

верных ввиду ортонормированности базиса $e_1''$, $e_2''$, $e_3''$ и формулы (24).

Перейдем теперь к поиску управления $u_3$, конуса $\Phi_3$ и множества $M_3$ с описанными в теореме 1 свойствами. Для такого поиска воспользуемся рассуждениями, аналогичными примененным при нахождении управления $u_2$, конуса $\Phi_2$ и множества $M_2$. Возьмем вектор $y_2:=-e_3''\in\mathbb{R}^3$, тогда $\|y_2\|=1$ и $\nu_1=e_1''\perp(-e_3'')=y_2$, $\nu_2'=e_2''\perp(-e_3'')=y_2$. Поскольку система (1) $\sigma$-равномерно вполне управляема, то на отрезке $[t_0,t_0+\sigma]$ найдется допустимое управление $u_3$, переводящее состояние $y_2$ системы (1) в ноль на $[t_0,t_0+\sigma]$, и такое, что имеет место оценка $\|u_3(t)\|\leqslant\gamma\|y_2\|=\gamma\leqslant\gamma_1$, $t\in[t_0,t_0+\sigma]$. Фиксируя это управление, получим равенство, аналогичное (17),

$$0=y_2+\int_{t_0}^{t_0+\sigma}Q(t_0,\tau)u_3(\tau)d\tau. \tag{26}$$

Обозначим через $\Psi_2\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$ выпуклый круговой конус угловой меры $\theta_1<\pi/2$, ось которого содержит вектор $e_3''$. Пусть $J_1$ – множество тех индексов $i\in\{1,\dots,p\}$, при которых справедливо включение $w_i(u_3):=w_i(t_0,u_2)\in\Psi_2$. Обозначим через $J_2$ множество индексов $i\in\{1,\dots,p\}$, для которых имеет место включение $w_i(u_3)\in\mathbb{R}^3\setminus\Psi_2$, а через $J_2'$ – совокупность тех индексов из $J_2$, при которых выполняется неравенство $\cos\sphericalangle(w_i(u_3),e_3'')\geqslant0$. Докажем теперь, что для множества $J_1$ справедливо неравенство $\|\sum_{s\in J_1}w_s(u_3)\|\geqslant3/4$.

Умножая скалярно равенство (26) на $-y_2^T=e_3''$, получим соотношения

$$1=\|y_2\|^2=-y_2^T\int_{t_0}^{t_0+\sigma}Q(t_0,\tau)u_3(\tau)d\tau=$$
$$=(e_3'')^T\int_{t_0}^{t_0+\sigma}Q(t_0,\tau)u_3(\tau)d\tau=$$
$$=\sum_{i\in J_2}\|(e_3'')^T\|\,\|w_i(u_3)\|\cos\alpha_i+\|(e_3'')^T\|\cdot$$
$$\cdot\|\sum_{j\in J_1}w_j(u_3)\|\cos\alpha\leqslant$$
$$\leq\sum_{i\in J_2'}\|w_i(u_3)\|\cos\alpha_i+\|\sum_{j\in J_1}w_j(u_3)\|\cdot|\cos\alpha|,$$

где $\alpha$ и $\alpha_i$, $i\in J_2'$, – угловые меры соответственно между векторами $e_3''$ и $\sum_{j\in J_1}w_j(u_3)$ и векторами $e_3''$ и $w_i(u_3)$, $i\in J_2'$. По определению векторов $w_i(u_3)$, $i\in J_2'$, выполняются включения $\sphericalangle(w_i(u_3),e_3'')\in(\pi/2-\theta_1/2,\pi/2]$ для всех $i\in J_2'$, из которых, ввиду убывания функции cos на отрезке $[0,\pi/2]$ следуют оценки

$$\cos\alpha_i=\cos\sphericalangle(w_i(u_3),e_3'')\leq\\\leqslant\cos(\pi/2-\theta_1/2)=\sin(\theta_1/2).$$

Тогда отсюда и из последнего соотношения, ввиду определения величин $b$, $\theta_1$, $\theta$, векторов $e_3''$ и $w_i(u_3)$, $i\in J_2'$, управления $u_3$, и замечания 2, следуют неравенства, аналогичные соотношениям, сделанным при выводе оценки (20). Таким образом, получим оценку

$$\|\xi_2\|:=\|\sum_{j\in J_1}w_j(u_3)\|\geqslant3/4. \tag{27}$$

Пусть $\overline{\mathbb{S}}_+$ – полусфера единичного радиуса с центром в нуле, лежащая в полупространстве $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$. Рассмотрим множество

$S_3 := \overline{\mathbb{S}}_+ \cap \Psi_2$. Удалим из этого множества сферический сегмент, отсекаемый выпуклым круговым конусом $\overline{K}_0$ угловой меры $2\varphi_1$, ось которого содержит вектор $e_3''$. Обозначим это множество $\bar{S}_3$. Определим отображение

$$\overline{f} : (\psi, \vartheta) \in [0, 2\pi] \times [(\pi - \theta_1)/2,\ \pi/2 - \varphi_1) \to$$
$$\to (x_1'',\ x_2'',\ x_3'') \in \bar{S}_3$$

равенствами

$$x_1'' = \cos\psi \cos\vartheta, \quad x_2'' = \sin\psi \cos\vartheta,$$
$$x_3'' = \sin\vartheta. \qquad (28)$$

Легко видеть, что такое отображение взаимнооднозначно. Поскольку $\theta_1 = r_2\varphi_1$ и $\pi/2 = r\varphi_1$, то

$$\pi/2 - \varphi_1 - (\pi - \theta_1)/2 = (r - 1 - (r - r_2)\varphi_1 =$$
$$= (r_2 - 1)\varphi_1.$$

Разобьем полуоткрытый прямоугольник $[0,2\pi] \times [(\pi - \theta_1)/2, \pi/2 - \varphi_1)$ на $4r(r_2 - 1) := 4rr_5$ полуоткрытых квадрата

$$\Pi_{kl}^3 := \{\varphi_1(k-1) \leqslant \psi < \varphi_1 k,$$
$$(\pi - \theta_1)/2 + \varphi_1(l-1) \leqslant \vartheta < (\pi - \theta_1)/2 + \varphi_1 l,$$
$$k = \overline{1, 4r},\ l = \overline{1, r_5}\}.$$

Тогда множество $\bar{S}_3$ соответственно разобьется на непересекающиеся полуоткрытые подмножества $\overline{f}(\Pi_{kl}^3)$, $k = \overline{1, 4r}$, $l = \overline{1, r_5}$, в силу взаимной однозначности отображения $\overline{f}$. Положим $P_3 := \mathbb{P}(\Psi_2 \setminus \overline{K}_0)$ и рассмотрим отображение $\overline{g} : \bar{S}_3 \to P_3$, ставящее в соответствие каждой точке множества $\bar{S}_3$ луч, выходящий из нуля и проходящий через эту точку. Очевидно, что такое отображение является взаимнооднозначным. Кроме того, выполняются соотношения

$$\overline{g}(\overline{f}(\Pi_{ij}^3)) = \mathrm{Con}(\overline{f}(\Pi_{ij}^3))$$

и $\coprod_{i=1}^{4r}\coprod_{j=1}^{r_5} \overline{g}(\overline{f}(\Pi_{ij}^3)) = \Psi_2 \setminus \overline{K}_0$. Для всех $i = \overline{1, 4r}$ и $j = \overline{1, r_2 - 1}$ положим $\Phi_{ij}^3 := \overline{g}(\overline{f}(\Pi_{ij}^3))$, $\Phi_{kr_2}^3 := \varnothing$, $k = \overline{1, 4r - 1}$, $\Phi_{4rr_2} := \overline{K}_0$, тогда справедливо равенство $\coprod_{i=1}^{4r}\coprod_{j=1}^{r_2} \Phi_{ij}^3 = \Psi_2$. Обозначим через $\mathfrak{S}_{ij}^2$ множество тех индексов $s \in J_1 \subset \{1, \dots, p\}$, при которых имеет место включение $w_s(u_3) \in \Phi_{ij}^3$. Ввиду включения $\xi_2 \in \Psi_2$, а также оценки (27), применяя рассуждение, аналогичное использованному для доказательства соотношения (22), можно показать, что найдутся такие числа $k_3 \in \{1, \dots, 4r\}$ и $l_3 \in \{1, \dots, r_2\}$, которые обеспечивают справедливость неравенства

$$\|\sum_{s \in \mathfrak{S}_{k_3 l_3}^3} w_s(u_3)\| \geqslant \frac{3}{16 r r_2}. \qquad (29)$$

Зафиксируем какие-либо $k_3 \in \{1, \dots, 2r\}$ и $l_2 \in \{1, \dots, r_2\}$, при которых выполняется неравенство (29). Положим $M_3 := \mathfrak{S}_{k_3 l_3}^3$ и $\Phi_3' := \mathrm{cl}\,\Phi_{k_3 l_3}^2$. Используя найденное множество $\Phi_3'$, на основе рассуждений, аналогичных применяемым для поиска кругового конуса $\Phi_1$, найдем такой выпуклый круговой конус $\Phi_3$, на оси которого лежит вектор $\zeta_3$, и для которого справедливы следующие свойства $\Phi_3' \subseteq \Phi_3$ и $\sphericalangle\Phi_3 \leqslant 4\varphi$. Кроме того, поскольку из определения величин $r$, $r_2$ следуют соотношения

$$16 r r_2 \leqslant 16 r^2 \leqslant 16(1 + \pi/(2\varphi))^2 =$$
$$= 16((2\varphi + \pi)/(2\varphi))^2 \leqslant 16\pi^2/\varphi^2,$$

то в силу формулы (29) для множества $M_3$ получим неравенство

$$\|\zeta_3\| := \|\sum_{j \in M_3} w_j(u_3)\| \geqslant \frac{3\varphi^2}{16\pi^2} \geqslant \ell(\varphi). \qquad (30)$$

Обозначим $\nu_3 := \zeta_3/\|\zeta_3\|$, тогда в силу равенства $\|\nu_3\| = 1$ и определений вектора $\zeta_3$ и конуса $\Psi_2$ следует включение $\nu_3 \in \Psi_2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, и, значит, вектор $\nu_3$ в базисе $e_1''$, $e_2''$, $e_3''$ представим в виде

$$\nu_3 = (\cos\psi_2 \cos\vartheta_2,\ \sin\psi_2 \cos\vartheta_2,\ \sin\vartheta_2),$$
$$(\psi_2,\ \vartheta_2) \in [0, 2\pi] \times [(\pi - \theta_1)/2,\ \pi/2). \qquad (31)$$

Найдем определитель, состоящий из векторов $\nu_i$, $i = \overline{1, 3}$. Поскольку эти векторы в базисе $e_1''$, $e_2''$, $e_3''$ представляются в виде (25) и (31), то ввиду неравенств

$$\theta_1 > \theta - \varphi_1 \geqslant \theta - \varphi \geqslant \theta - \theta/16 = 15\theta/16$$

и верхнетреугольности матрицы $[\nu_1, \nu_2, \nu_3] \in \mathrm{M}_3$ получим оценки

$$|\det[\nu_1, \nu_2, \nu_3]| = |1 \cdot \cos\vartheta_1 \cdot \sin\vartheta_2| \geqslant$$
$$\geqslant |\cos((\pm\pi \mp \theta_1)/2)|\,|\sin((\pi - \theta_1)/2)| =$$

$= |\sin\theta_1|/2 \geqslant |\sin(15\theta/16)/2| = \sin(15\theta/16)/2.$

Пусть $\mathrm{J}_1$ и $\mathrm{J}_2$ – операторы поворота при переходе от базиса $e_1, e_2, e_3$ к базису $e_1', e_2', e_3'$ и $e_1', e_2', e_3'$ к базису $e_1'', e_2'', e_3''$ соответственно, тогда в силу ортогональности преобразований модуль их определителей равен 1. Осуществим обратное преобразование от базиса $e_1'', e_2'', e_3''$ к базису $e_1', e_2', e_3'$, а затем от базиса $e_1', e_2', e_3'$ вернемся к базису $e_1, e_2, e_3$. Очевидно, что матрицы соответствующих преобразований будут также ортогональными и имеют вид $\mathrm{J}_2^{-1}$ и $\mathrm{J}_1^{-1}$. Тогда векторы $v_i$, $i = \overline{1,3}$, в базисе $e_1, e_2, e_3$ представляются в виде $q_i := \mathrm{J}_1^{-1}\mathrm{J}_2^{-1}v_i$. Отсюда в силу равенств $|\det \mathrm{J}_i^{-1}| = |\det \mathrm{J}_i|^{-1} = 1$, $i = 1, 2$, для векторов $q_i$, $i = \overline{1,3}$, выполняются соотношения $\|q_i\| = \|v_i\| = 1$ и

$$\det[q_1, q_2, q_3] = \det[\mathrm{J}_1^{-1}\mathrm{J}_2^{-1}v_1,\ \mathrm{J}_1^{-1}\mathrm{J}_2^{-1}v_2,$$
$$\mathrm{J}_1^{-1}\mathrm{J}_2^{-1}v_3] = |\det(\mathrm{J}_1^{-1}\mathrm{J}_2^{-1})\det[v_1, v_2, v_3]| =$$
$$= |\det \mathrm{J}_1^{-1}|\,|\det \mathrm{J}_2^{-1}|\,|\det[v_1, v_2, v_3]| =$$
$$= |\det \mathrm{J}_1|^{-1}|\det \mathrm{J}_2|^{-1}|\det[v_1, v_2, v_3]| \geqslant$$
$$\geqslant \sin(15\theta/16)/2.$$

Теорема 1 доказана.

**Результаты и их обсуждение.** Таким образом, в работе получены обобщения на трехмерный случай лемм и вспомогательных теорем, установленных в работах [11–12] для двумерного случая и необходимых для решения задачи глобального управления показателями Ляпунова трехмерных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами. Основополагающую роль среди таких утверждений для решения этой задачи играет теорема 1, устанавливающая существование для трехмерной линейной равномерно вполне управляемой системы (1) трех измеримых и ограниченных векторных управлений таких, что решения (траектории движения) системы (1) с этими управлениями на произвольном отрезке времени фиксированной длины лежат в трех выпуклых круговых конусах достаточно малой угловой меры и образуют базис евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ достаточно большого объема.

**Заключение.** Представленные в работе леммы и теоремы позволяют доказать фундаментальную для решения задачи глобального управления характеристическими показателями Ляпунова трехмерных систем (2) теорему, а именно:

**Теорема 2.** *Если система (1) равномерно вполне управляема и матрица $A(t)$, $t \geqslant 0$, этой системы является нижнетреугольной, то для любых положительных чисел $\lambda_{ii}$, $i = \overline{1,3}$, найдется такая величина $\delta = \delta(\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}) > 0$, что при всяком $t_0 \geqslant 0$ на отрезке $[t_0, t_0 + 6\sigma]$ существует допустимое матричное управление $U$, удовлетворяющее для всех $t \in [t_0, t_0 + 6\sigma]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \delta$ и обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, замкнутой системы (2) выполнение равенства $X_U(t_0 + 6\sigma, t_0) = \Lambda$, в котором матрица $\Lambda := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^3 \in \mathrm{M}_3$ – нижнетреугольная и для ее элементов $\lambda_{ij}$, $j = 1,2$, $i > j$, имеют место неравенства $|\lambda_{ij}| \leqslant \delta$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (гранты № Ф10М-032 и № Ф13М-055) и Министерства образования (№ госрегистрации 20130402).

*ЛИТЕРАТУРА*


1. Былов, Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. Изобов, Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.А. Изобов // Итоги науки и техн. мат. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1974. – Т. 12. – С. 71–146.
3. Смирнов, Е.Я. Стабилизация программных движений / Е.Я. Смирнов. – С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1997. – 308 с.
4. Тонков, Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы / Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 10. – С. 1804–1813.
5. Kalman, R.E. Contribution to the theory of optimal control / R.E. Kalman // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. – 1960. – Vol. 5, № 1. – P. 102–119.
6. Тонков, Е.Л. Задачи управления показателями Ляпунова / Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 10. – С. 1682–1686.
7. Зайцев, В.А. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова / В.А. Зайцев, Е.Л. Тонков // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 2(441). – С. 60–67.
8. Макаров, Е.К. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 97–106.
9. Попова, С.Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 41–46.
10. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов, Е.К. Макаров // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
11. Макаров, Е.К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 407 с.
12. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова

двумерных линейных систем с локально-интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
13. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
14. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
15. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебник / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: БГУ, 2006. – 430 с.
16. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
17. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: учеб. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 591 с.: ил.
18. Глазман, И.М. Конечномерный линейный анализ / И.М. Глазман, Ю.И. Любич. – М.: Наука, 1969. – 476 с.


*Поступила в редакцию 18.04.2013. Принята в печать 17.06.2013*

***Адрес для корреспонденции:*** 211440, г. Новополоцк, ул. Молодежная, д. 186, корп. 4, кв. 33, тел.: (+375-29)-719-93-66 – Козлов А.А.