УДК 512.534

Стабильные порядки полугруппы линейных отношений конечномерного векторного пространства над полем

М.И. Наумик, Е.С. Шайтор
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В данной работе продолжается изучение полугруппы линейных отношений. В 1953 году А.И. Мальцев описал конгруэнции на полугруппе линейных преобразований конечномерного векторного пространства над полем, а М.И. Наумик в 2004 году – все конгруэнции на полугруппе линейных отношений векторного пространства над телом.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение на полугруппе называется отношением порядка. Строением стабильных порядков на различных полугруппах занимались Е.С. Ляпин, М.Г. Могилевский, В.Д. Дереч и др. В этой статье нами дано описание строения стабильных порядков полугруппы линейных отношений конечномерного векторного пространства над полем. Эта работа обобщает результаты Е.С. Ляпина и М.Г. Могилевского.

Ключевые слова: *линейные отношения, ранг линейного отношения, замкнутые отношения порядка, стабильные отношения порядка, полугруппа линейных отношений.*

Stable semigroups of linear order relations of finite-dimensional space vector over the field

M.I. Naumik, E.S. Shaitor
Educational Establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

The study of semigroups of linear relations is continued in this work. In 1953 A.I. Maltsev described congruence on the semigroup of linear transformations of a finite-dimensional space vector over the field. In the 2004 M.I. Naumik described all congruence relations on a semigroup linear space vector over the body.

Reflexive, antisymmetric and transitive binary relation on the semigroup is called the relation of order. The structure of a stable order in various semigroups was explored by E.S. Lyapin, M.G. Mogilevsky, V.D. Derech, etc. In this article we give a description of the structure stable semigroups of linear ordens relations of finite-dimensional space vector over the field. This work summarizes the results by E.S. Lyapina M.G. Mogilevskogo.

Key words: *linear relationship, the rank of the linear relationship, the closed order relation, stable relations of order, the semigroup of linear relations.*

В последнее время в разных областях математики все чаще приходится применять гомоморфизмы, которые определены не на всем множестве, а на некотором его подмножестве и неоднозначно. Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем F. Бинарное ние $a \subseteq V \times V$ между элементами множества V называется линейным, если оно является подпространством $V \oplus V$ [1].

Другими словами, линейное отношение a – множество пар $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x}, \bar{y} \in V$, замкнутое относительно операций сложения и умножения на элементы из поля F: если $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in a$ и $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in a$ при каких-либо $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in V$, то $(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2, \alpha\bar{y}_1 + \beta\bar{y}_2) \in a$ для любых $\alpha, \beta \in F$.

Множество всех линейных отношений $LR(V)$ на пространстве V, как известно, является полугруппой относительно операций умножения бинарных отношений: для $a, b \in LR(V)$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in ab$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\bar{z} \in V$, что $(\bar{x}, \bar{z}) \in a$, $(\bar{z}, \bar{y}) \in b$.

При изучении линейных отношений $a \in LR(V)$ будем рассматривать следующие подпространства пространства

$$V{:}pr_1 a = \{\bar{x} \in V : \exists \bar{y} \in V, (\bar{x}, \bar{y}) \in a\};$$
$$ker\, a = \{\bar{x} \in V : (\bar{x}, 0) \in a\};$$
$$pr_2 a = \{\bar{y} \in V : \exists \bar{x} \in V, (\bar{x}, \bar{y}) \in a\};$$
$$coker\, a = \{\bar{y} \in V : (0, \bar{y}) \in a\};$$

Ранг линейного отношения обозначается $rank\, a = \dim(pr_1 a) - \dim(\ker a)$.

А.И. Мальцев [2] описал конгруэнции на полугруппе линейных преобразований конечномерного векторного пространства над полем. В работе [3] описаны конгруэнции на полугруппе линейных отношений векторного пространства над телом. Естественно, возникает задача описания стабильных порядков на полугруппе

Репозиторий ВГУ

$LR(V)$. На различных полугруппах описанием стабильных порядков занимались Е.С. Ляпин [4], М.Г. Могилевский [5–6], В.Д. Дереч [7] и др. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение на полугруппе называется порядком. В данной работе дано описание стабильных порядков на полугруппе линейных отношений $LR(V)$ n-мерного векторного пространства над полем.

Для описания стабильных порядков сначала опишем замкнутые стабильные порядки на полугруппе линейных отношений ранга ноль, а затем и опишем стабильные порядки на $LR(V)$.

Для произвольного подпространства $A\subseteq V$ обозначим $\omega_A = \{(\bar{x},\bar{0}): \bar{x} \in A\}$ и $\omega_{\bar{0}} = \omega$.

Если $a \in LR_1(V)$, то $dim\ pr_1a/kera=dim\ pr_2a/cokera$. Ясно, что для любого $a \in LR_1(V)$ имеем $a=\omega_A\omega_B^{-1}$, где $pr_1a=A$, $pr_2a=B$.

Отношение порядка δ будем называть отношением стабильного порядка, если для любых $a, b, c, d \in LR_1(V)$, из $a\delta b$ следует $cad\delta cbd$.

Стабильный порядок δ полугруппы $LR_1(V)$ будем называть замкнутым порядком δ, если для любых $a,b \in LR_1(V)$ и $c,d \in LR(V)$ из $a\delta b$ следует $cad\delta cbd$.

Определим отношение $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ на полугруппе $LR_1(V)$ следующим образом:

$$\omega_A\omega_C^{-1}\delta_1\omega_B\omega_D^{-1} \Leftrightarrow B\subseteq A;\ D\subseteq C;$$
$$\omega_A\omega_C^{-1}\delta_2\omega_B\omega_D^{-1} \Leftrightarrow B\subseteq A;\ C\subseteq D;$$
$$\omega_A\omega_C^{-1}\delta_3\omega_B\omega_D^{-1} \Leftrightarrow A=B;\ D\subseteq C;$$
$$\omega_A\omega_C^{-1}\delta_4\omega_B\omega_D^{-1} \Leftrightarrow A\subseteq B;\ C=D.$$

Теорема 1. *Отношения δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 являются замкнутыми порядками полугруппы. Любой замкнутый порядок, отличный от тождественного, полугруппы совпадает с одним из соотношений δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 или им обратным.*

Доказательство. I. Докажем, что отношения δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 являются замкнутыми порядками полугруппы.

Докажем, что δ_1 – замкнутый порядок полугруппы $LR_1(V)$.

Докажем рефлексивность. Из $A\supseteq A$ и $B\supseteq B$ следует $\omega_A\omega_B^{-1}\delta_1\omega_A\omega_B^{-1}$.

Проверяем выполнение транзитивности. Пусть $\omega_A\omega_C^{-1}\delta_1\omega_B\omega_D^{-1}$ и $\omega_B\omega_D^{-1}\delta_1\omega_M\omega_N^{-1}$. Имеем $B\subseteq A$, $D\subseteq C$ и $M\subseteq B$, $N\subseteq D$. Отсюда получаем $M\subseteq A$, $N\subseteq C$.

Значит $\omega_A\omega_C^{-1}\delta_1\omega_M\omega_N^{-1}$. Транзитивность выполняется.

Проверяем антисимметричность.

Пусть $\omega_A\omega_C^{-1}\delta_1\omega_B\omega_D^{-1}$ и $\omega_B\omega_D^{-1}\delta_1\omega_A\omega_C^{-1}$ тогда из определения отношения δ_1 получаем, что $B\subseteq A$, $C\subseteq D$, $D\subseteq C$, $A\subseteq B$. Имеем $A=B$, $C=D$, т.е. $\omega_A=\omega_B$, $\omega_C^{-1}=\omega_D^{-1}$. Антисимметричность выполняется.

Докажем, что отношение δ_1 замкнуто. Пусть $\omega_A\omega_C^{-1}\delta_1\omega_B\omega_D^{-1}$ и $a,b\in LR(V)$. Докажем, что $a\omega_A\omega_C^{-1}b\delta_1a\omega_B\omega_D^{-1}b$, т.е. что $pr_1a\omega_B \subseteq pr_1a\omega_A$ и $pr_2\omega_D^{-1}b\subseteq pr_2\omega_C^{-1}b$.

Имеем $pr_1a=kera\oplus V_1$, $pr_2a=cokera\oplus V_2$, где V_1, V_2 – некоторые фиксированные дополнения. Обозначим $A_2=\{\bar{x}: (\bar{x},\bar{y}) \in a$, где $\bar{y} \in pr_2a \cap A\}$ и $B_2=\{\bar{x}: (\bar{x},\bar{y}) \in a$, где $\bar{y} \in pr_2a \cap B\}$. Тогда $pr_1a\omega_A=kera\oplus(V_1\cap A_2)$, $pr_2a\omega_B=kera\oplus(V_1\cap B_2)$. Если по условию $B\subseteq A$, то и $B_2\subseteq A$, и значит $(pr_2a\cap B)\subseteq A$, а из этого следует что $(pr_2a\cap B)\subseteq(pr_2a\cap A)$.

Получаем, что

$$r_1a\omega_A=kera\oplus(V_1\cap A_2)\supseteq kera\oplus(V_1\cap B_2)=pr_1a\omega_B.$$

С другой стороны, имеем $pr_1b=kerb\oplus V_3$, $pr_2b=cokerb\oplus V_4$, где V_3,V_4 – некоторые фиксированные дополнения. Обозначим $C_2=\{\bar{y}: (\bar{x},\bar{y}) \in b$, где $\bar{x} \in pr_1b \cap C\}$ и $D_2=\{\bar{y}: (\bar{x},\bar{y}) \in b$, где $\bar{x} \in pr_1b \cap D\}$, $pr_2\omega_C^{-1}b = cokerb\oplus(V_4\cap C_2)$, $pr_2\omega_D^{-1}b = cokerb\oplus(V_4\cap D_2)$. Если по условию $C\supseteq D$, то и $(pr_1b\cap C)\supseteq(pr_1b\cap D)$. Тогда имеем $pr_2\omega_C^{-1}b\supseteq pr_2\omega_D^{-1}b$.

Значит, отношение δ_1 является отношением замкнутого стабильного порядка полугруппы $LR_1(V)$.

Аналогично доказывается, что δ_2, δ_3, δ_4 – замкнутый порядок на $LR_1(V)$.

II. Обратно, пусть δ – произвольный замкнутый порядок на $LR_1(V)$. Пусть даны подпространства A, B, C, $D\subseteq V$, такие, что $\omega_A\delta\omega_B$ и $\omega_C^{-1}\delta\omega_D^{-1}$.

Докажем, что δ совпадает с одним из соотношений δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 или им обратным. Представим A и B в виде $A = A \cap B \oplus A_1$ и $B = A \cap B \oplus B_1$, где A_1 и B_1 – фиксированные дополнения. Предположим, что A_1 и B_1 одновременно ненулевой размерности. Обозначим A_2 – базис A_1, B_2 – базис B_1. Определим отношения: $a =< (\bar{x},\bar{x}): \bar{x}\epsilon A_2 >$, $b =< (\bar{y},\bar{y}): \bar{y}\epsilon B_2 >$, $c =< (\bar{z},\bar{m}): \bar{z}\epsilon B_2, \bar{m} \in A_2 >$. Из $\omega_A\delta\omega_B, a\omega_A = \omega_{A_1}$ и $a\omega_B = \omega$, следует $\omega_{A_1}\delta\omega$. Аналогично из $\omega_A\delta\omega_B$, $b\omega_B = \omega_{B_1}$ и $b\omega_A = \omega$, ем $\omega\delta\omega_{B_1}$. А из $\omega_{A_1}\delta\omega$, $c\omega_{A_1} == \omega_{B_1}$ и $c\omega = \omega$, следует $\omega_{B_1}\delta\omega$. Из антисимметричности δ и того, что одновременно выполняются $\omega_{B_1}\delta\omega$ и $\omega\delta\omega_{B_1}$, получаем $\omega = \omega_{B_1}$. А это противоречит нашему предположению, что A_1 и B_1 одновременно ненулевой размерности. Значит, возможны варианты

Репозиторий ВГУ

$$A = B, A \subseteq B, A \supseteq B. (1)$$

Представим D и C в виде $D = D \cap C \oplus D_1$ и $C = D \cap C \oplus C_1$, где D_1 и C_1 – фиксированные дополнения. Предположим, что C_1 и D_1 одновременно ненулевой размерности. Обозначим C_2 – базис C_1, D_2 – базис D_1. Определим отношения: $d =< (\bar{x}, \bar{x}): \bar{x} \epsilon D_2 >$, $n =< (\bar{y}, \bar{y}): \bar{y} \epsilon C_2 >$, $t =< (\bar{z}, \bar{m}): \bar{z} \epsilon D_2,\ \bar{m} \in C_2 >$. Из $\omega_C^{-1} \delta \omega_D^{-1}$, $\omega_D^{-1} d = \omega_{D_1}^{-1}$ и $\omega_C^{-1} d = \omega$, следует $\omega \delta \omega_{D_1}^{-1}$. Аналогично, из $\omega_C^{-1} \delta \omega_D^{-1}$; $\omega_C^{-1} n = \omega_{C_1}^{-1}$ и $\omega_D^{-1} n = \omega$, получаем $\omega_{C_1}^{-1} \delta \omega$. А из $\omega \delta \omega_{D_1}^{-1}, \omega_{D_1}^{-1} t = \omega_{C_1}^{-1}$ и $\omega t = \omega$, следует $\omega \delta \omega_{C_1}^{-1}$.

Из антисимметричности δ, и того, что одновременно выполняются $\omega \delta \omega_{C_1}^{-1}$ и $\omega_{C_1}^{-1} \delta \omega$, получаем $\omega_{C_1}^{-1} = \omega$. А это противоречит нашему предположению, что D_1 и C_1 одновременно ненулевой размерности. Значит, возможны варианты

$$D = C, D \subseteq C, C \supseteq D. (2)$$

Из (1) и (2) для множеств A, B, C, D получаем следующие варианты: 1) если $A = B$ и $D \subseteq C$, то δ совпадает с δ_3; 2) если $A = B$ и $D \supseteq C$, то δ совпадает с δ_3^{-1}; 3) если $A \supseteq B$ и $D = C$, то δ совпадает с δ_4^{-1}; 4) если $A \supseteq B$ и $D \supseteq C$, то δ совпадает с δ_2; 5) если $A \supseteq B$ и $D \subseteq C$, то δ совпадает с δ_1; 6) если $A \subseteq B$ и $D = C$, то δ совпадает с δ_4; 7) если $A \subseteq B$ и $D \supseteq C$, то δ совпадает с δ_1^{-1}; 8) если $A \subseteq B$ и $D \subseteq C$, то δ совпадает с δ_2^{-1}; 9) если $A = B$ и $D = C$, δ – тождественное отображение.

Получили, что если $\omega_A \delta \omega_B$ и $\omega_C^{-1} \delta \omega_D^{-1}$, то δ совпадает с одним из соотношений δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 или им обратным.

Теорема доказана.

Пусть $LR_1(V)=\{a | rank a \leq 1\}$ – идеал [3] полугруппы $LR(V)$. Пусть $\mathcal{L}$ – цепочка таких подполугрупп $P_n \subset P_{n-1} \subset \cdots \subset P_1$ что $1 \in P_n$, $0 \notin P_i$ и $P_i^{-1} \cap P_i = \{1\}$, где $P_i^{-1} = \{\alpha^{-1} | \alpha \in P_i\}$, $(1 \leq i \leq n)$ и $P_1 \subset F$.

Обозначим через $\sum_{\mathcal{L}}^{1k} (1 \leq k \leq n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a \sum_{\mathcal{L}}^{1k} b \Leftrightarrow a, b \in LR_1(V)$ и $\sum_{\mathcal{L}}^{1k} = \delta_1$ на $LR_1(V)$, или $a \in LR_1(V)$, а $rank\ b \leq k$, $pr_1 b \subseteq pr_1 a$, $pr_2 b \subseteq pr_2 a$, или $rank\ a > 0$, а $a = \lambda b$, где $\lambda \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b}$.

Обозначим через $\sum_{\mathcal{L}}^{2k} (1 \leq k \leq n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a \sum_{\mathcal{L}}^{2k} b \Leftrightarrow a, b \in LR_1(V)$ и $\sum_{\mathcal{L}}^{2k} = \delta_1^{-1}$ на $LR_1(V)$, или $a \in LR_1(V)$, а $rank\ b \leq k$, $pr_1 a \subseteq \ker b$, $pr_2 a \subseteq coker\ b$, или $rank\ a > 0$, а $a = \lambda b$, где $\lambda \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b}$.

Обозначим через $\sum_{\mathcal{L}}^{3k} (1 \leq k \leq n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a \sum_{\mathcal{L}}^{3k} b \Leftrightarrow a, b \in LR_1(V)$ и $\sum_{\mathcal{L}}^{3k} = \delta_2$ на $LR_1(V)$, или $a \in LR_1(V)$, а $rank\ b \leq k$, $pr_1 b \subseteq pr_1 a$, $pr_2 a \subseteq coker\ b$, или $rank\ a > 0$, а $a = \lambda b$, где $\lambda \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b}$.

Обозначим через $\sum_{\mathcal{L}}^{4k} (1 \leq k \leq n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a \sum_{\mathcal{L}}^{4k} b \Leftrightarrow a, b \in LR_1(V)$ и $\sum_{\mathcal{L}}^{4k} = \delta_2^{-1}$ на $LR_1(V)$, или $a \in LR_1(V)$, а $rank\ b \leq k$, $pr_1 a \subseteq \ker b$, $pr_2 b \subseteq pr_2\ a$, или $rank\ a > 0$, а $a = \lambda b$, где $\lambda \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b}$.

Обозначим через $\sum_{\mathcal{L}}^{5k} (k = 1)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a \sum_{\mathcal{L}}^{51} b \Leftrightarrow a, b \in LR_1(V)$ и $\sum_{\mathcal{L}}^{51} = \delta_3$ на $LR_1(V)$, или $rank\ a > 0$, а $a = \lambda b$, где $\lambda \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b}$.

Обозначим через $\sum_{\mathcal{L}}^{6k} (k = 1)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a \sum_{\mathcal{L}}^{61} b \Leftrightarrow a, b \in LR_1(V)$ и $\sum_{\mathcal{L}}^{61} = \delta_3^{-1}$ на $LR_1(V)$, или $rank\ a > 0$, а $a = \lambda b$, где $\lambda \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b}$.

Обозначим через $\sum_{\mathcal{L}}^{7k} (k = 1)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a \sum_{\mathcal{L}}^{71} b \Leftrightarrow a, b \in LR_1(V)$ и $\sum_{\mathcal{L}}^{71} = \delta_4$ на $LR_1(V)$, или $rank\ a > 0$, а $a = \lambda b$, где $\lambda \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b}$.

Обозначим через $\sum_{\mathcal{L}}^{8k} (k = 1)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a \sum_{\mathcal{L}}^{81} b \Leftrightarrow a, b \in LR_1(V)$ и $\sum_{\mathcal{L}}^{81} = \delta_4^{-1}$ на $LR_1(V)$, или $rank\ a > 0$, а $a = \lambda b$, где $\lambda \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b}$.

Обозначим через $\sum_{\mathcal{L}}^{91}$ такое отношение на $LR(V)$, что $a \sum_{\mathcal{L}}^{9k} b \Leftrightarrow a, b \in LR_1(V)$ и $a = b$, или $rank\ a > 0$, а $a = \lambda b$, где $\lambda \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b}$.

Теорема 2. Отношение $\sum_{\mathcal{L}}^{tk}$ является стабильным порядком на полугруппе $LR(V)$. Обратно, каждый порядок на полугруппе $LR(V)$ единственным образом представим в виде $\sum_{\mathcal{L}}^{tk}$ или ${}^{-1}\sum_{\mathcal{L}}^{tk}$ для подходящих $\mathcal{L}$, t, k.

Для доказательства теоремы нам понадобятся две леммы, где стабильные порядки рассматриваются на $LR(V)$. Если ясно, о каком стабильном порядке идет речь, то часто вместо $a \sum_{\mathcal{L}}^{tk} b$ будем писать $a \sum b$.

Лемма 1. *Любое линейное отношение ранга ноль меньше или больше линейного отношения ранга отличного от нуля относительно любого подходящего стабильного порядка* $\sum$.

Доказательство. Предположим, что $\omega_A \omega_C^{-1} \sum a$ и $b \sum \omega_B \omega_D^{-1}, rank\ a > 0$, $rank\ b > 0$ и стабильный порядок совпадает с δ_1 на $LR_1(V)$. Имеем $pr_1 a \subseteq A$, $pr_2 a \subseteq C$ и $B \subseteq ker\ b$, $D \subseteq cokerb$. Из этого можем получить $\omega_M \omega_K^{-1} \sum a_1$ и $a_1 \sum \omega_M \omega_K^{-1}$, где $rank\ a_1 = 1$, а это противоречит антисимметричности. Аналогично получаем для остальных стабильных порядков. Тем самым лемма доказана.

Репозиторий ВГУ

Будем предполагать в дальнейшем, если не оговорено противное, что линейное отношение ранга ноль меньше линейного отношения ненулевого ранга относительно рассматриваемого стабильного порядка.

Лемма 2. *Если* $\sum$ *– стабильный порядок и* $a\sum b$, $rank\, a > 0$, *то* $a = \lambda b$ *для некоторого* $\lambda \in F$.

Доказательство. Пусть $a\sum b$ и $rank\, a > 0$. Это означает, что $pr_1 a = pr_1 b$, $pr_2 a = pr_2 b$, $ker\, a = ker\, b$, $coker\, a = coker\, b$. Найдутся $\alpha_1, \alpha_2 \in F\backslash\{0\}$ такие, что $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in a$ и $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in a$, где $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in pr_1 a \backslash ker a$, а $(\bar{x}_1, \lambda_1 \bar{y}_1) \in b$, $(\bar{x}_2, \lambda_2 \bar{y}_2) \in b$ для некоторых $\bar{y}_1, \bar{y}_2$. Покажем, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Действительно, имеем $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \lambda_1 \bar{y}_1 + \lambda_2 \bar{y}_2) \in b$ и $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \lambda(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)) \in b$. Отсюда получаем $\lambda(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) - (\lambda_1 \bar{y}_1 + \lambda_2 \bar{y}_2) \in cokerb$. Получаем $(\lambda - \lambda_1)\bar{y}_1 + (\lambda - \lambda_2)\bar{y}_2 = \bar{0}$. Отсюда следует $\lambda - \lambda_1 = \lambda - \lambda_2 = 0$, т.е. $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Итак, $a = \lambda b$. Лемма доказана.

Следствие. *Если* $rank\, a > 0$, $a\sum b$, *то* $rank\, a = rank\, b$.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы. Покажем, что $\sum_{\mathcal{L}}^{tk}$ (t = 1, 2, …, 9) является стабильным порядком. Рефлексивность вытекает непосредственно из того, что $1 \in P_n$.

Проверим транзитивность $\sum_{\mathcal{L}}^{tk}$. Пусть $a\sum_{\mathcal{L}}^{tk} b$ и $b\sum_{\mathcal{L}}^{tk} c$. Если хотя бы одно из линейных отношений является нулевым, то ясно, что $a\sum_{\mathcal{L}}^{tk} c$. Пусть $rank\, a > 0$. В силу леммы 2 $a = \lambda b$ и $b = \mu c$ для некоторых $\lambda, \mu \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b} = P_{rank\ c}$. Исходя из свойств P_i (i=1, 2, …. , n) $\lambda\mu \in P_{rank\ a}$, а так как $a = \lambda\mu c$, то $a\sum_{\mathcal{L}}^{tk} c$.

Проверяем антисимметричность $\sum_{\mathcal{L}}^{tk}$. Пусть $a\sum_{\mathcal{L}}^{tk} b$ и $b\sum_{\mathcal{L}}^{tk} a$. Если хотя бы одно из этих линейных отношений имеет ранг ноль, то и второе очевидно имеет ранг ноль. Пусть $rank\, a > 0$. Тогда $a = \lambda b$ и $b = \lambda^{-1} a$. Так как $a\sum_{\mathcal{L}}^{tk} b$ и $b\sum_{\mathcal{L}}^{tk} a$, то $\lambda, \lambda^{-1} \in P_{rank\ a} = P_{rank\ b}$ и в силу свойств P_i, $\lambda = \lambda^{-1} = 1$. Итак, $a = b$.

Покажем, что $\sum_{\mathcal{L}}^{tk}$ стабильно. Пусть $a\sum_{\mathcal{L}}^{tk} b$ и $c\sum_{\mathcal{L}}^{tk} d$. Если $rank\, a = 0$, то $rank\, b \le k$, а значит и $rank\, bd \le k$. Следовательно, $rank\, ac = 0$ и $ac\sum_{\mathcal{L}}^{tk} bd$, $\sum_{\mathcal{L}}^{tk} = \delta_t$ на $LR_1(V)$. Пусть $rank\, a > 0$ и $rank\, c > 0$. Тогда $a = \lambda b$ и $c = \mu d$, а следовательно и $ac = \mu\lambda bd$. Так как $rank\, ac \le \min\{rank\, a, rank\, c\}$ то, в силу свойств P_i, $\mu, \lambda \in P_{rank\ ac}$ а значит и $\lambda\mu \in P_{rank\ ac}$. Таким образом, $ac\sum_{\mathcal{L}}^{tk} bd$, то есть $\sum_{\mathcal{L}}^{tk}$ стабильно.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $\sum$ – произвольный стабильный порядок на $LR(V)$. Ввиду леммы 1 ненулевое линейное отношение ранга ноль меньше (больше) линейного отношения ранга, больше или равного нулю. Пусть будет меньше. Обозначим через k наибольший из рангов всех таких линейных отношений b что $\omega_A \omega_C^{-1} \sum b$. Тогда для любого линейного отношения c, для которого $rank c \le k$ найдутся такие u и v, что $c = ubv$ и в силу стабильности $\sum$, $\omega_M \omega_T^{-1} \sum$ c, M, T – подпространства пространства V.

Пусть $\sum = \delta_1$ на полугруппе $LR_1(V)$. Положим для каждого i = 1, 2, … , n $P_i = \{\lambda \in F\backslash\{0\} | \lambda e_i \sum e_i\}$, где $e_i = \{(\bar{x}, \bar{x}) | \bar{x} \in V_i\}$, V_i – подпространства V. Ясно, что $1 \in P_i$. Пусть $\lambda, \mu \in P_i$, то есть $\lambda e_i \sum e_i$ и $\mu e_i \Sigma e_i$. В силу стабильности $\sum$, $\lambda\mu e_i \sum e_i$, а это значит, что $\lambda\mu \in P_i$. Если при этом $\mu = \lambda^{-1}$, то $\lambda^{-1} e_i \sum e_i$. Умножим соотношение $\lambda e_i \Sigma e_i$ слева на $\lambda^{-1} e_i$. Получим $e_i \sum \lambda^{-1} e_i$. Используя антисимметричность $\sum$, заключаем, что $e_i = \lambda^{-1} e_i$, то есть $\lambda = 1$. Итак $P_i^{-1} \cap P_i = \{1\}$.

Покажем, что $P_n \subset P_{n-1} \subset \cdots \subset P_1$. Пусть $\lambda \in P_i$. Тогда $\lambda e_i \sum e_i$, а значит и $\lambda e_{i-1} = \lambda e_i e_{i-1} \sum e_i\, e_{i-1} = e_{i-1}$. Следовательно, $P_i \subset P_{i-1}$ (i=1, 2,…, n).

Таким образом, отношению $\sum$ соответствует натуральное число k, δ_1 и цепочка подполугрупп $P_n \subset P_{n-1} \subset \cdots \subset P_1$ поля F, удовлетворяющие вышеперечисленным условиям. Покажем, что $\sum = \sum_{\mathcal{L}}^{1k}$.

Если $\omega_A \omega_C^{-1} \sum b$, $rank\, b = 0$ и $pr_1 b \subseteq A, pr_2 b \subseteq C$, то, очевидно, что $\sum = \delta_1$ на полугруппе $LR_1(V)$ и $\omega_A \omega_C^{-1} \sum_{\mathcal{L}}^{1k} b$. Пусть $a\Sigma b$ и $rank\, a > 0$. Тогда ввиду леммы 2, $a = \lambda b$. Найдутся такие u, $v \in LR(V)$, что $e_{rank\ a} = ubv$. В силу стабильности $\sum$, $\lambda e_{rank\ a} \sum e_{rank\ a}$, значит, $\lambda \in P_{rank\ a}$ и, следовательно, $a\sum_{\mathcal{L}}^{1k} b$. Итак, $\sum \subset \sum_{\mathcal{L}}^{1k}$.

Проверим обратное включение. Пусть $a\sum_{\mathcal{L}}^{1k} b$. Ясно, что если $a \in LR_1(V)$, то $a\sum b$. Пусть $a \notin LR_1(V)$. Тогда $a = \lambda b$ для некоторого $\lambda \in P_{rank\ a}$. Последнее означает, что $\lambda e_{rank\ a} \sum e_{rank\ a}$. Выберем такие u, $v \in LR(V)$, что $b = ue_{rank\ a} v$. В силу стабильности $\sum, a = \lambda u e_{rank\ a} v \sum u e_{rank\ a} v = b$. Итак, $\sum_{\mathcal{L}}^{1k} \subset \sum$. Равенство $\sum_{\mathcal{L}}^{1k} = \sum$ доказано.

Аналогично если $\sum = \delta_t$ (t = 2, 3, … , 9) на $LR_1(V)$.

Репозиторий ВГУ

Мы получили, что если $a \in LR_1(V)$ является для $\sum$ меньше любого линейного отношения ранга больше чем ноль, то $\sum$ единственным образом представляется в виде $\sum_{\mathcal{L}}^{tk}$. Если же $a \in LR_1(V)$ является для $\sum$ больше любого линейного отношения ранга большего нуля, то ясно, что $\sum$ единственным образом представляется в виде ${}^{-1}\sum_{\mathcal{L}}^{tk}$. Теорема доказана.

Отметим в частности, что результаты [4] и [6] являются частными случаями нашей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маклейн, С. Алгебра аддитивных отношений / С. Маклейн // Математика: сб. пер. – 1963. – № 7:6. – С. 3–12.
2. Мальцев, А.И. Мультипликативное сравнение матриц / А.И. Мальцев // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 9, № 3. – С. 333–335.
3. Наумик, М.И. Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 3. – С. 34–37.
4. Ляпин, Е.С. Упорядоченности линейных преобразований, согласованные с суперпозицией / Е.С. Ляпин // Матем. сб. – 1964. – Т. 63, № 1. – С. 122–136.
5. Могилевский, М.Г. Отношение порядка на симметрической полугруппе частичных преобразований / М.Г. Могилевский // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 11. – С. 47–56.
6. Могилевский, М.Г. Стабильные порядки полугруппы всех квадратных матриц над произвольным полем / М.Г. Могилевский // Теория полугрупп и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр.; редкол.: Г.И. Житомирский [и др.]; Саратовский ун-т. – Саратов, 1987. – Вып. 8. – С. 41–45.
7. Дереч, В.Д. О квазипорядках на некоторых инверсных полугруппах / В.Д. Дереч // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 3. – С. 76–78.

Поступила в редакцию 20.05.2013. Принята в печать 17.06.2013

Адрес для корреспонденции: e-mail: naumik@tut.by – Наумик М.И.

Репозиторий ВГУ