

# Асимптотическое решение дифференциальных уравнений, описывающих колебания слоистых вязкоупругих цилиндрических оболочек при давлении

**Е.А. Корчевская\*, Д.В. Дамирова\*, И.Н. Доронин\*, Т.В. Никонова\*\***

\*Учреждение образования «Витебский государственный  
университет имени П.М. Машерова»

\*\*Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

В данной статье рассматривается задача о свободных локализованных колебаниях шарнирно опертой слоистой цилиндрической вязкоупругой оболочки, находящейся под действием давления. В качестве исходных уравнений использованы уравнения уточненной теории слоистых оболочек, учитывающие поперечные сдвиги. Для решения данной задачи предложена методика, использующая асимптотический комплексный ВКБ-метод, согласно которой исходная начально-краевая задача сведена к последовательности одномерных краевых задач. Последовательное рассмотрение краевых задач позволяет найти искомую частоту колебаний и соответствующую моду, локализованную вблизи образующей.

Для автоматизации расчетов частот собственных колебаний, а также решения задачи оптимального проектирования слоистых оболочек разработано приложение на языке программирования C++ в среде разработки C++ Builder, позволяющее вычислять при заданных физических и геометрических параметрах оболочки частоты собственных колебаний, критические нагрузки, а также оптимальные толщины заполнителя.

**Ключевые слова:** слоистые вязкоупругие цилиндрические оболочки, частота колебаний, асимптотический комплексный ВКБ-метод.

## Asymptotic Solutions of Differential Equations which Describe Vibrations of Viscoelastic Laminated Cylindrical Shells under Pressure

**A.A. Karcheuskaya\*, D.V. Damirova\*, I.N. Doronin\*, T.V. Nikonova\*\***

\*Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

\*\*Educational establishment «Vitebsk State Technological University»

The problem of free localized vibrations of pivotally hinged layered cylindrical viscoelastic shell being under pressure is considered in this article. The equations of refined theory of laminated shells, which take into account lateral shifts, were used as the initial equations. The methodology of using the asymptotic complex WKB-method according to which the initial boundary value problem is reduced to a sequence of one-dimensional boundary value problems has been proposed to solve this problem. Consistent consideration of boundary value problems allows finding sought-for frequency of oscillation and the corresponding mode, localized near the generator.

The application in the programming language C++ development environment C++ Builder which allows to calculate natural vibration frequencies, critical loads and the optimal thickness of the filler under given physical and geometrical parameters of the shell was designed for automation of calculation of natural frequencies and solution of the problem of optimal design of laminated shells.

**Key words:** laminated viscous elastic cylindrical shells, frequency of vibration, asymptotic complex WKB-method.

Современная техника широко использует тонкостенные оболочки, изготовленные из вязкоупругих композитных материалов. Применение композитов в элементах ответственных инженерных конструкций, используемых в авиакосмической технике, судостроении, энергетическом и химическом машиностроении, приводит к необходимости развития и пополнения математических моделей расчета колебаний

композитных оболочек и методов. Среди многочисленных конструкций, выполненных из композитов, цилиндрические оболочки занимают особое место.

В упругой постановке и, как правило, в рамках классической теории Кирхгофа–Лява выполнено большое число работ, посвященных свободным и вынужденным колебаниям композитных оболочек. Значительно меньше исследо-

дованы эти задачи с позиций неклассических теорий, учитывающих деформации поперечного сдвига и сложность физико-механических свойств материала. Так, задача о собственных колебаниях слоистых композитных цилиндрических оболочек в рамках теории типа Тимошенко рассматривалась в [1]. Здесь для свободно открытых торцов решение получено в форме двойных тригонометрических рядов. Исследуется влияние угла намотки на фундаментальную частоту. Отмечается возможность повышения значений частот при изменении характеристик намотки волокон. Вибрационный изгиб вязкоупругих пластинок и оболочек с учетом поперечных сдвигов рассмотрен в [2]. В [3] модальное демпфирование колебаний анизотропных слоистых пластин исследовалось с помощью метода Релея–Ритца. В работах [4–5] для исследования слоистых вязкоупругих оболочек используются уравнения слоистых оболочек, учитывающие параметры поперечных сдвигов. Результаты исследования трехслойной балки, содержащей магнитореологический эластомер, представлены в [6].

В работе рассматриваются локальные формы колебаний слоистых вязкоупругих оболочек под действием статических нагрузок. Природа локализации свободных колебаний и форм потери устойчивости оболочек хорошо изучена. Переменность физических и геометрических характеристик материала, из которого изготовлена оболочка, неоднородность напряженно-деформированного состояния оболочки, вызванного характером статической нагрузки, могут быть причиной появления на поверхности оболочки «наиболее слабых» областей, которые приводят к сильной локализации форм колебаний и форм потери устойчивости.

Существует немало приближенных методов, используемых в теории оболочек: методы, основанные на представлении решений в виде рядов, вариационные методы, метод сеток и т.д. Но эти методы несовершены, так как при решении конкретных задач они предполагают фиксирование параметров, а также их применение связано с большими вычислительными трудностями. Использование точных аналитических методов также сопровождается математическими сложностями. Так как колебания происходят в окрестности некоторых линий, то наиболее эффективными в этом случае могут быть асимптотические методы, которые сочетают в себе простоту и точность.

В работе используются уравнения слоистых оболочек, учитывающие параметры попереч-

ных сдвигов, полученные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым с применением обобщенной кинематической гипотезы Тимошенко. Для исследования свободных колебаний здесь используется асимптотический метод П.Е. Товстика, согласно которому, благодаря локализации форм колебаний в окрестности некоторой образующей  $\phi = \phi_0$ , двумерные уравнения, описывающие состояние слоистых оболочек, можно свести к последовательности одномерных краевых задач. В работе этот метод распространяется на случай многослойных оболочек.

Цель работы – разработка методики построения форм локализованных собственных колебаний и определения соответствующих собственных частот слоистой цилиндрической вязкоупругой оболочки, находящейся под действием внешнего давления, с учетом поперечных сдвигов и наличия на поверхности оболочки «слабой» образующей.

**Материал и методы.** Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длины  $L$ , состоящую из  $N$  вязкоупругих слоев, характеризующихся толщиной  $h_k$ , модулем Юнга  $E_k$ , плотностью  $\rho_k$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-либо  $k$ -го слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам  $\alpha_1 = Rs$ ,  $\alpha_2 = R\varphi$  (рис.). Здесь  $R$  – радиус цилиндра исходной поверхности,  $\varphi$  и  $s$  – окружная и продольная координаты соответственно. Пусть  $\delta_k$  – расстояние между исходной поверхностью и верхней границей  $k$ -го слоя,  $u_i, w$  – тангенциальные и нормальное (прогиб) перемещения точек исходной поверхности,  $u_i^{(k)}$  – тангенциальные перемещения точек  $k$ -го слоя,  $\theta_i$  – углы поворота нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности оболочки вокруг векторов  $\mathbf{e}_i$ , где  $i=1, 2$ .

В качестве исходных используем уравнения, основанные на гипотезах, которые сформулированы Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [7] и отличаются от классических уравнений полубезмоментной теории тонких оболочек наличием дополнительных слагаемых, учитывающих поперечные сдвиги слоев. Отbrasывание последних приводит к уравнениям для изотропной оболочки с физическими характеристиками, равными осредненным по толщине параметрам слоистой вязкоупругой исходной оболочки, и может давать существенные погрешности при расчетах.

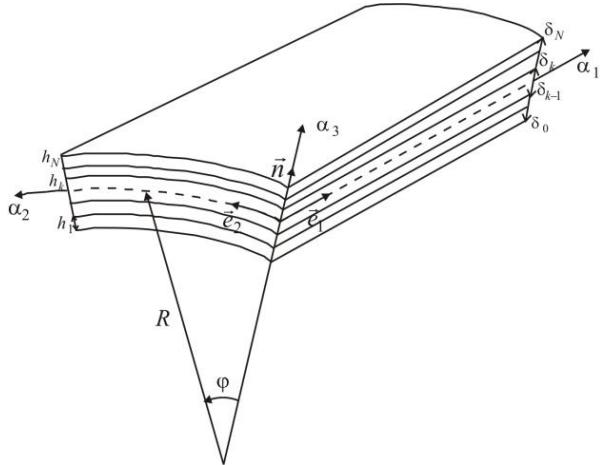


Рис. Система координат в слоистой цилиндрической оболочке.

$$\begin{cases} \frac{Eh^3\eta_3}{12(1-\nu^2)} \left(1 - \frac{\theta h^2}{b} \Delta\right) \Delta^2 \chi^* + \frac{1}{R(\alpha_2)} \frac{\partial^2 F^*}{\partial \alpha_1^2} - \\ - T_2^0 \frac{\partial^2 W^*}{\partial \alpha_2^2} - \rho h \Omega^2 W^* = 0, \\ \Delta^2 F^* = \frac{Eh}{R(\alpha_2)} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \alpha_1^2}, \quad W^* = \left(1 - \frac{h^2}{b} \Delta\right) \chi^*. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа в криволинейной системе координат  $\alpha_1, \alpha_2$ ;  $E, \nu, \rho$  – осредненные модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно;  $F^*$ ,  $\chi^*$  – функции напряжений и перемещений;  $W^*$  – нормальный прогиб;  $\Omega$  – частота собственных колебаний;  $T_2^0$  – усилие, возникающее в результате давления;  $\eta_3, \theta, b$  – параметры, учитывающие поперечные сдвиги и вязкоупругие свойства материала, определяемые по формулам [8].

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания

$$F = \Delta F = \chi = \Delta \chi = \Delta^2 \chi = 0, \text{ при } s=0, l. \quad (2)$$

Уравнения (1) отличаются от классических уравнений полубезмоментной теории тонких оболочек наличием дополнительных слагаемых, пропорциональных параметрам  $1/b, \theta/b$ , и учитывающих поперечные сдвиги слоев. Отбрасывание последних приводит к уравнениям для изотропной оболочки с физическими характеристиками, равными осредненным по толщине параметрам слоистой вязкоупругой исходной оболочки. Их влияние на собственные частоты колебаний зависит как от физических и геометрических параметров слоев, так и от характера нагрузления.

Уравнения (1) описывают состояние оболочки в окрестности безмоментного напряженно-деформированного состояния, характеризующегося давлением  $T_2$ .

В уравнениях (1) перейдем к безразмерной системе координат  $s, \phi$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= a_2/R, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \\ s &= a_1/R, \quad 0 \leq s \leq l(\varphi) = L(\varphi)/R. \end{aligned} \quad (3)$$

При таком выборе координат первая квадратичная форма срединной поверхности имеет вид

$$d\sigma^2 = R^2 \left( ds^2 + d\varphi^2 \right),$$

а радиус кривизны –

$$R_2 = Rk^{-1}(\varphi). \quad (4)$$

Переменность физических и геометрических характеристик материала, из которого изготовлена оболочка, непостоянство радиуса кривизны (4), зависимость длины оболочки от окружной координаты (3) являются причиной появления на поверхности оболочки «наиболее слабых» областей, которые приводят к сильной локализации форм колебаний.

Положим

$$\begin{aligned} K/\pi^2 &= \varepsilon^2 \kappa, \quad K\theta/\pi^2 = \varepsilon^3 \tau, \\ \kappa, \tau &\sim 1 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $K = \pi^2 h^2 / (bR^2)$ , а  $\varepsilon^8 = h^2 \eta_3 / [12R^2(1-\nu^2)]$  – малый параметр.

Уравнения (1) перепишутся в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon^4 \left(1 - \varepsilon^3 \tau \Delta\right) \Delta^2 \chi + k(\phi) \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \\ + \varepsilon^2 f \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left(1 - \varepsilon^2 \kappa \Delta\right) \chi - \Lambda \left(1 - \kappa \varepsilon^2 \Delta\right) \chi = 0, \\ \varepsilon^4 \Delta^2 F - k(\phi) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(1 - \varepsilon^2 \kappa \Delta\right) \chi = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь

$$T_2^0(\varphi) = -Eh\varepsilon^6 f, \quad \Lambda\varepsilon^4 = \frac{\rho R^2}{E} \Omega^2,$$

$$l = L/R, \quad \chi^* = R\chi, \quad F^* = \varepsilon^4 EhR^2 F.$$

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания

$$F = \Delta F = \chi = \Delta \chi = \Delta^2 \chi = 0, \text{ при } s=0, l. \quad (7)$$

Напряженно-деформированное состояние оболочки часто представляет собой сумму основного напряженного состояния и краевых эффектов. Первое из них распространяется на всю оболочку, а вторые имеют местный характер и локализуются вблизи определенных кривых – линий искажения напряженно-деформированного состояния (края оболочки, линии излома срединной поверхности и т.п.).

В качестве приближенного подхода к решению задач теории оболочек может быть использован следующий метод: на первых этапах расчета основное напряженное состояние и краевые эффекты строятся раздельно и рассматриваются совместно только для выполнения граничных условий. В работе рассмотрено лишь основное напряженное состояние, которое позволяет построить решение с точностью до величины  $O(\varepsilon^2)$ . Здесь и ниже запись  $\varphi = O(\mathfrak{I})$  означает существование не зависящей от  $\varepsilon$  постоянной  $e > 0$  такой, что  $|\varphi| \leq e|\mathfrak{I}|$ .

Положим  $\Lambda = \omega + i\alpha$ , где  $\omega$  – безразмерная собственная частота колебаний,  $\alpha$  – безразмерный декремент колебаний.

Разложим параметры, характеризующие собственную частоту колебаний, декремент и параметры поперечных сдвигов по степеням малого параметра  $\varepsilon$  (5):

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots, \quad \alpha = \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \dots, \\ \kappa &= \kappa_r + i\varepsilon\kappa_i, \quad \tau = \tau_r + i\varepsilon\tau_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Задача состоит в определении наименьшего значения  $\Lambda > 0$ , для которого краевая задача (6), (7) имеет ненулевое решение.

Считаем, что колебания происходят в окрестности некоторой образующей  $\varphi = \varphi_0$ , называемой «слабой образующей». Для расчетов введем растяжение масштаба в окрестности этой образующей:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi. \quad (9)$$

Согласно [9] для решения задачи (6) представим функции  $\chi(s, \varphi)$ ,  $F(s, \varphi)$  в виде:

$$\chi(s, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{2}} \chi_j(\xi, s) \exp\left(i\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}q\xi + \frac{1}{2}a\xi^2\right)\right), \quad (10)$$

$$F(s, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{2}} F_j(\xi, s) \exp\left(i\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}q\xi + \frac{1}{2}a\xi^2\right)\right), \quad (11)$$

где  $\chi_j(\xi, s)$ ,  $F_j(\xi, s)$  – полиномы по  $\xi$ , число  $q$  вещественно и определяет изменяемость формы потери устойчивости в направлении  $\varphi$ , образующая  $\varphi = \varphi_0$  – наиболее слабая, а параметр  $a$  характеризует скорость уменьшения глубины вмятин при удалении от нее. Положим

$$\operatorname{Im} a > 0. \quad (12)$$

Неравенство (12) гарантирует убывание амплитуды волн вдали от линии  $\varphi = \varphi_0$ . Разложим функцию  $k(\varphi)$  в ряд в окрестности этой образующей:

$$k(\varphi) = k(\varphi_0) + k'(\varphi_0)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi + \frac{1}{2}k''(\varphi_0)\varepsilon\xi^2 + \dots \quad (13)$$

Для решения необходимо подставить значения (9–13) в систему (6) и граничные условия (7).

Для определения неизвестных функций  $f_j(s, \xi)$ ,  $\chi_j(s, \xi)$  и чисел  $q$ ,  $a$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha_n$ ,  $\omega_n$  приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon^{1/2}$ . Результатом исследования является рекуррентная последовательность дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^j H_k X_{j-k} = 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (14)$$

и последовательность соответствующих граничных условий

$$\sum_{k=0}^j \Gamma_k^i X_{j-k} = 0, \quad i = 0, 1 \quad j = 0, 1, \dots \quad s = 0, l. \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_0 \chi_0 &= \left( \frac{1 + \kappa_r q^2}{q^4} \right) k^2(\varphi_0) \frac{\partial^4 \chi_0}{\partial s^4} + \\ &+ \left( q^4 - f q^2 (1 + \kappa_r q^2) - \omega_0 (1 + \kappa_r q^2) \right) \chi_0 \end{aligned}$$

А операторы  $H_k$  и  $\Gamma_k^i$  при  $k \geq 1$  выражаются через производные по  $q$  и  $\varphi_0$  [9].

$$H_1 \chi_0 = \left( a \frac{\partial H_0}{\partial q} + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} \right) \xi \chi_0 - i \frac{\partial H_0}{\partial q} \frac{\partial \chi_0}{\partial \xi},$$

$$H_2\chi_0 = \frac{1}{2} \left( a^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} + 2a \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \phi_0} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial \phi_0^2} \right) \xi^2 \chi_0 - \\ - i \left( a \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \phi_0} \right) \xi \frac{\partial \chi_0}{\partial \xi} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} \left( ia \chi_0 + \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \xi^2} \right) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} \chi_0 + H^* \chi_0.$$

В случае шарнирного опирания одного из краев оболочки граничные условия для первых трех приближений примут вид:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} = 0, \quad \chi_1 + \xi s' \frac{\partial \chi_0}{\partial s} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial s^2} + \xi s' \frac{\partial^3 \chi_0}{\partial s^3} = 0, \\ \chi_2 + \xi s' \frac{\partial \chi_1}{\partial s} + \frac{\xi^2}{2} \left( s'^2 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} + s'' \frac{\partial \chi_0}{\partial s} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial s^2} + \xi s' \frac{\partial^3 \chi_1}{\partial s^3} + \frac{\xi^2}{2} \left[ s'' \frac{\partial^3 \chi_0}{\partial s^3} + s'^2 \frac{\partial^4 \chi_0}{\partial s^4} \right] - & \\ - \frac{4is'}{q} \frac{\partial^3 \chi_0}{\partial s^3} &= 0. \end{aligned}$$

В случае, если на каком-то крае задано условие жесткой заделки, граничные условия для первых трех приближений на соответствующем крае  $s = 0$  или  $s = l$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{\partial \chi_0}{\partial s} = 0, \quad \chi_1 + \xi s' \frac{\partial \chi_0}{\partial s} = 0, \\ &\frac{\partial \chi_1}{\partial s} + \xi s' \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} = 0, \\ \chi_2 + \xi s' \frac{\partial \chi_1}{\partial s} + \frac{\xi^2}{2} \left( s'^2 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} + s'' \frac{\partial \chi_0}{\partial s} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial s} + \xi s' \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial s^2} + \frac{\xi^2}{2} \left[ s'' \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} + s'^2 \frac{\partial^3 \chi_0}{\partial s^3} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим краевую задачу, возникающую в нулевом приближении:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1 + \kappa_r q^2}{q^4} \right) k^2(\phi_0) \frac{\partial^4 \chi_0}{\partial s^4} + \\ &+ \left( q^4 - f q^2 (1 + \kappa_r q^2) - \omega_0 (1 + \kappa_r q^2) \right) \chi_0 = 0, \\ \chi_0 &= \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s = 0, \quad s = l. \quad (16) \end{aligned}$$

Очевидно, что наименьшей частоте колебаний оболочки соответствует наименьшее положительное собственное значение краевой задачи (16). Из (16) следует, что  $\Lambda_0 = \Lambda_0(q, \phi_0)$ .

Положим

$$\Lambda_0^0 = \min_{q, \phi_0} \Lambda_0(q, \phi_0) = \Lambda_0(q^0, \phi_0^0), \quad (17)$$

где параметры  $q^0, \phi_0^0$  будут определяться из соотношений:

$$\frac{\partial \Lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \phi_0} = 0 \quad \text{при } q = q^0, \quad \phi = \phi_0^0. \quad (18)$$

Решением краевой задачи (16) будет функция

$$\chi_0(\xi, s) = P_0(\xi) \chi_0^0(s), \quad (19)$$

где  $\chi_0^0(s)$  – собственная функция задачи (16) при условиях (17)–(18),  $P_0(\xi)$  – пока неопределенная функция.

При  $j=1$  имеем тождественное равенство.

Решение уравнения, полученного в первом приближении, можно представить в виде [19]:

$$\chi_1(\xi, s) = P_1(\xi) \chi_0^0 + \xi P_0 \left( a \chi_q + \chi_\varphi \right) - i \frac{dP_0}{d\xi} \chi_q, \quad (20)$$

где  $\chi_q, \chi_\varphi$  – решения задач, полученных при дифференцировании задачи (16) по параметрам  $q$  и  $\phi_0$  при  $\chi_0 = \chi_0^0$ , а функция  $P_1(\xi)$  еще не определена.

Во втором приближении имеем уравнение, из которого получаем условие существования решения  $\chi_2$ :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \omega_{qq} \frac{d^2 P_0}{d\xi^2} + \xi \beta \frac{dP_0}{d\xi} + \\ &+ \left( \eta - (\omega_1 + i\alpha_1) + \frac{1}{2} \beta + c \xi^2 \right) P_0 = 0 \end{aligned}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \beta &= -i(a\omega_{qq} + \omega_{q\varphi}), \\ 2c &= a^2 \Lambda_{qq} + 2a \Lambda_{q\varphi} + \Lambda_{\varphi\varphi}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\eta = \frac{(\tau_r q^6 - i\kappa_i f q^4 - i\kappa_i q^2 \omega_0) \chi_0^0 q^2 + i\kappa_i k^2(\phi_0) d^4 \chi_0^0}{q^2} \frac{d^4 \chi_0^0}{ds^4}. \quad (23)$$

Условие  $c=0$  необходимо для существования решения уравнения (21) в виде полинома [9]. Из квадратного уравнения  $c=0$  находим единственную величину  $a$  такую, что  $\text{Im } a > 0$ :

$$a = i \left( \frac{\omega_{q\varphi}^0}{\omega_{qq}^0} \right)^{1/2}. \quad (24)$$

При  $c=0$

$$\omega_1 + i\alpha_1 = \beta \left( \frac{1}{2} + n \right) + \eta, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (25)$$

уравнение (21) имеет решение  $P_0(\xi) = H_n(\xi)$ , где  $H_n(\xi)$  – полином Эрмита  $n$ -ой степени. Ве-

личина  $\omega_1 + i\alpha_1$  минимальна при  $n=0$ . И в этом случае  $H_n(\xi) \equiv 1$ . Тогда наименьшая частота колебаний и декремент колебаний будут:

$$\omega_1^{(0)} = \operatorname{Re} \left( \beta \frac{1}{2} + \eta \right), \quad \alpha_1^{(0)} = \operatorname{Im} \left( \beta \frac{1}{2} + \eta \right).$$

Найденная здесь поправка учитывает наличие поперечных сдвигов (зависимость от параметров  $\tau$  и  $\kappa$ ).

Для автоматизации расчетов частот собственных колебаний, а также решения задачи оптимального проектирования слоистых оболочек разработано приложение на языке программирования C++ в среде разработки C++ Builder, позволяющее вычислять при заданных физических и геометрических параметрах оболочки частоты собственных колебаний, критические нагрузки, а также оптимальные толщины заполнителя.

В режиме работы «оптимальное проектирование» приложение рассчитывает толщины слоев заполнителя автоматически, исходя из условия постоянства массы оболочки и максимальной критической нагрузки, которую способна выдержать оболочка, а также учитывая допуски погрешности, установленные пользователем.

**Заключение.** Результаты работы позволяют избежать проведения дорогостоящих лабораторных экспериментов и связанных с ними энергетических и материальных затрат при оп-

ределении критических нагрузок реальных конструкций, оценки технико-эксплуатационных свойств промышленных изделий и сооружений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sun, C.T. Axisymmetric vibrations of laminated composite cylindrical shells / C.T. Sun, J. M. Whitney // J. Acoustical Soc. Amer. – 1974. – Vol. 55. – P. 1238–1246.
2. Барышев, А.А. Вибрационный изгиб вязкоупругих пластинок и оболочек с учетом поперечных сдвигов: автореф. ... дис. канд. физ.-мат. наук / А.А. Барышев. – Саратов, 2004. – 23 с.
3. Solclatos, K.P. On the buckling and vibration of antisymmetric angle-ply laminated circular cylindrical shells / K.P. Solclatos // Int. J. Eng. Sci. 1983. – Vol. 21, № 3. – С. 217–222.
4. Корчевская, Е.А. Применение асимптотических методов для решения дифференциальных уравнений, описывающих устойчивость слоистых композитных цилиндрических оболочек при кручении / Е.А. Корчевская, Г.И. Михасев, А.С. Шибут // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2010. – № 3(57). – С. 20–26.
5. Корчевская Е.А. Свободные колебания вязкоупругой слоистой оболочки при действии неоднородных осевых сил / Е.А. Корчевская, Г.И. Михасев // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2010. – № 4(58). – С. 34–37.
6. Korobko, E.V. On Damping Vibrations of Three Layered Beam Containing Magnetoreological Elastomer / E.V. Korobko, Z.A. Novikova, M.A. Zhurauski, G.I. Mikhasev // Electro-Rheological Fluids and Magneto-Rheological Suspensions. Proceedings of the 12th International Conference, Philadelphia, USA, 16–20 August 2010. – World Scientific. – 2011. – P. 644–650, DOI No: 10.1142/9789814340236\_0088.
7. Григорюк, Э.И. К теории упругих слоистых анизотропных оболочек / Э.И. Григорюк, Г.М. Куликов // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 275, № 5. – С. 1077–1079.
8. Ботогова, М.Г. Свободные колебания слоистых вязкоупругих цилиндрических оболочек / М.Г. Ботогова, Г.И. Михасев, Е.А. Корчевская // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фунд. науки. Механика. – 2006. – № 10. – С. 125–133.
9. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.

Поступила в редакцию 10.12.2012. Принята в печать 17.06.2013

Адрес для корреспонденции: e-mail: korchevskaya.elena@tut.by – Корчевская Е.А.