



О центрах l -арных группоидов

Ю.И. Кулаженко

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»

В статье на множестве A^J всех отображений произвольного множества J в произвольный группоид A определяется l -арная операция $[]_{l, \sigma, J}$, где σ – подстановка множества J , и изучается перестановочность элементов в полученном l -арном группоиде. В частности, установлена неабелевость этого l -арного группоида для нетождественной подстановки σ и группоида A , содержащего единицу и элемент, отличный от нее. Кроме того, в работе определены шесть l -арных аналогов центра группоида: левый центр; малый левый центр; большой левый центр; правый центр; малый правый центр; большой правый центр и найдены достаточные условия пустоты этих аналогов для l -арного группоида $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$. Отдельно рассматривается случай, когда σ – цикл длины $l-1$. Сформулированы следствия из основных результатов для множеств $J = N$, $J = Z$ и $J = \{1, 2, \dots, k\}$.

Ключевые слова: l -арная группа, подстановка, l -арный группоид.

About the Centers of l -ar Groupoids

Y.I. Kulazhenko

Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»

The paper defines an l -ar operation $[]_{l, \sigma, J}$ on the set A^J of all mappings of the set J into the groupoid A , where σ is a substitution of the set J . It also studies the permutability of elements in the obtained l -ar groupoid. In particular, the paper establishes the non-commutativity of the l -ar groupoid for non-identity substitution σ and the groupoid A containing a unity and an element different from it. Besides, 6 l -ar analogues of the groupoid center: the left center; smaller left center; bigger left center; right center; smaller right center; bigger right center are established in the article; sufficient conditions of the emptiness of these analogues for l -ar groupoid of $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ are found. Separately the case of σ -cycle of $l-1$ length is considered. Findings of basic results for the multitude of $J = N$, $J = Z$ and $J = \{1, 2, \dots, k\}$ are formulated.

Key words: l -ar group, substitution, l -ar groupoid.

1. Введение. В [1] для любого целого $l \geq 2$, произвольного множества J , любой подстановки σ множества J и любого группоида A на множестве A^J всех отображений множества J в группоид A была определена l -арная операция $[]_{l, \sigma, J}$. Если $J = \{1, 2, \dots, k\}$, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, J}$ совпадает с l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k}$, которая была определена в [2] и подробно изучению свойств которой посвящена [3].

В [4] автор определил шесть l -арных аналогов центра группоида и нашел достаточные условия пустоты этих аналогов для l -арного группоида $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. В настоящей статье эти результаты обобщаются для l -арного группоида $[]_{l, \sigma, J}$.

Определения большинства понятий, используемых в этой работе, можно найти в [3]. Напомним только, что l -арным группоидом называют универсальную алгебру с одной основной l -арной операцией.

Будем использовать стандартные обозначения: S_J – множество всех биекций множества J на себя; A^J – множество всех отображений множества J во множество A . Элементы множества S_J называют подстановками. Необходимую информацию о подстановках множеств произвольной мощности можно найти в [5–6]. Если $J = \{1, 2, \dots, k\}$, то полагают $S_J = S_k$. Если множество J совпадает с одним из множеств

$$\{1, 2, \dots, k\}, N = \{1, 2, \dots\}, \\ Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

то значение функции $\mathbf{x} \in A^J$ в точке $j \in J$ удобно обозначать символом x_j : $\mathbf{x}(j) = x_j$. В связи с этим, если $\mathbf{x}$ принадлежит одному из множеств $A^{\{1, 2, \dots, k\}}$, A^N или A^Z , то соответственно полагают

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots), \\ \mathbf{x} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

2. Предварительные результаты. Определение 2.1 [1]. Пусть A – группоид, $l \geq 2$, J –

произвольное множество, σ – подстановка из S_J . Определим на A^J вначале бинарную операцию

σ
 $x \circ y$, полагая

$$(x \circ y)(j) = x(j)y(\sigma(j)), j = 1, 2, \dots, k, \quad (2.1)$$

а затем l -арную операцию

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, \sigma, J} = \\ = x_1 \circ (x_2 \circ (\dots (x_{l-2} \circ (x_{l-1} \circ x_l)) \dots)). \quad (2.2)$$

Понятно, что операция $[]_{l, \sigma, J}$ совпадает с операцией $\circ$.

Замечание 2.1. Если $J = \{1, 2, \dots, k\}$, то операции $\circ$ и $[]_{l, \sigma, J} = []_{l, \sigma, k}$ определены на k -ой декартовой степени A^k [2–3]. При этом (2.1) может быть записано в виде

$$\sigma \\ x \circ y = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \dots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

где

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k), y = (y_1, y_2, \dots, y_k).$$

Теорема 2.1 [1]. Пусть A – группоид, $x_1, x_2, \dots, x_l \in A^J$, $\sigma \in S_J$. Тогда

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, \sigma, J}(j) = x_1(j)(x_2(\sigma(j)) \square \\ \square (\dots (x_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))x_l(\sigma^{l-1}(j))) \dots)), j \in J.$$

Заменяя в теореме 2.1 группоид полугруппой, получим

Следствие 2.1 [1]. Пусть A – полугруппа, $x_1, x_2, \dots, x_l \in A^J$, $\sigma \in S_J$. Тогда

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, \sigma, J}(j) = \\ = x_1(j)x_2(\sigma(j)) \dots x_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))x_l(\sigma^{l-1}(j)), j \in J.$$

Полагая в следствии 2.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 2.2 [3]. Пусть A – полугруппа, $l \geq 2, k \geq 2, \sigma \in S_k$,

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, 2, \dots, k.$$

3. Основные результаты. Многие утверждения из [1] об операции $[]_{l, \sigma, k}$ определенной на множестве A^k , могут быть обобщены на случай операции $[]_{l, \sigma, J}$ определенной на множестве A^J . Например, следующие две леммы, являющиеся следствиями определений 2.1, обобщают соответственно леммы 2.2.4 и 2.2.5 из [3].

Лемма 3.1. Пусть A – группоид, $m \in \{1, \dots, l-2\}$, $\sigma \in S_J$, $x_1, \dots, x_l \in A^J$. Тогда

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, \sigma, J} = \\ = [x_1 \dots x_m [x_{m+1} \dots x_l]_{l-m, \sigma, J}]_{m+1, \sigma, J},$$

в частности,

$$[x_1 \dots x_l]_{l, \sigma, J} = x_1 \circ [x_2 \dots x_l]_{l-1, \sigma, J},$$

$$[x_1 \dots x_l]_{l, \sigma, J} = [x_1 \dots x_{l-2} (x_{l-1} \circ x_l)]_{l-1, \sigma, J}.$$

Лемма 3.2. Пусть A – группоид, содержащий единицу 1, $m \in \{1, \dots, l-1\}$, $\sigma \in S_J$, $x_1, \dots, x_m, e \in A^J$, где $e(j) = 1$ для любого $j \in J$. Тогда

$$[\underbrace{e \dots e}_l]_{l, \sigma, J} = e; [x_1 \dots x_m \underbrace{e \dots e}_{l-m}]_{l, \sigma, J} = \\ = [x_1 \dots x_m]_{m, \sigma, J}.$$

Теорема 3.1. Пусть σ – нетождественная подстановка из S_J , группоид A содержит единицу 1 и элемент a , отличный от нее. Тогда l -арный группоид $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ неабелев.

Доказательство. Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in J$, что $\sigma(j) \neq j$. Положив $e(s) = 1$ для любого $s \in J$, $a(j) = a$, $a(s) = 1$ для любого $s \neq j$, $s \in J$, и, применив лемму 2.3.2, получим

$$[\underbrace{a e \dots e}_{l-1}]_{l, \sigma, J} = a,$$

$$[\underbrace{e a e \dots e}_{l-2}]_{l, \sigma, J} = [ea]_{2, \sigma, J} = e \circ a,$$

откуда

$$[\underbrace{a e \dots e}_{l-1}]_{l, \sigma, J}(j) = a(j) = a, [\underbrace{e a e \dots e}_{l-2}]_{l, \sigma, J}(j) = \\ = e(j)a(\sigma(j)) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Следовательно,

$$[\underbrace{a e \dots e}_{l-1}]_{l, \sigma, J} \neq [\underbrace{e a e \dots e}_{l-2}]_{l, \sigma, J},$$

то есть l -арный группоид $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$ не является абелевым. Теорема доказана.

Если в теореме 3.1 положить $J = \{1, 2, \dots, k\}$, $\sigma = (12 \dots k)$, то получим предложение 2.8.1 [3].

Если в теореме 3.1 в качестве группоида A взять полугруппу и положить $J = \{1, 2, \dots, k\}$, то получим предложение 3.5.1 [3].

Полагая в теореме 3.1 $J = N$, получим

Следствие 3.1. Пусть σ – нетождественная подстановка из S_N , группоид A содержит единицу и элемент a , отличный от нее. Тогда l -арный группоид $\langle A^N, []_{l, \sigma, N} \rangle$ неабелев.

Полагая в теореме 3.1 $J = Z$, получим

Следствие 3.2. Пусть σ – нетождественная подстановка из S_Z , группоид A содержит единицу и элемент a , отличный от нее. Тогда l -арный группоид $\langle A^Z, []_{l, \sigma, Z} \rangle$ неабелев.

Утверждение теоремы 3.1 можно усилить, если потребовать, чтобы в группоиде A выполнялась сократимость слева (справа).

Определим для l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$

шесть аналогов центра группоида: *левый центр*

$$\mathbf{Z}_L(A, []) = \{z \in A \mid [zxy_1 \dots y_{l-2}] = [xyz_1 \dots y_{l-2}], \forall x, y_i \in A\};$$

малый левый центр

$$\mathbf{KZ}_L(A, []) = \{z \in A \mid [zxy \dots y] = [xyz \dots y], \forall x, y \in A\};$$

большой левый центр

$$\mathbf{GZ}_L(A, []) = \{z \in A \mid [zx \dots x] = [xzx \dots x], \forall x \in A\};$$

правый центр

$$\mathbf{Z}_R(A, []) = \{z \in A \mid [y_1 \dots y_{l-2}xz] = [y_1 \dots y_{l-2}zx], \forall x, y_i \in A\};$$

малый правый центр

$$\mathbf{KZ}_R(A, []) = \{z \in A \mid [y \dots yxz] = [y \dots yzx], \forall x, y \in A\};$$

большой правый центр

$$\mathbf{GZ}_R(A, []) = \{z \in A \mid [x \dots xz] = [x \dots xzx], \forall x \in A\}.$$

При $l = 2$ все шесть аналогов совпадают с центром $\mathbf{Z}(A)$ группоида A .

Ясно, что

$$\mathbf{Z}_L(A, []) \subseteq \mathbf{KZ}_L(A, []) \subseteq \mathbf{GZ}_L(A, []),$$

$$\mathbf{Z}_R(A, []) \subseteq \mathbf{KZ}_R(A, []) \subseteq \mathbf{GZ}_R(A, []).$$

В случаях, когда не возникает разночтений, символ $[]$ l -арной операции в обозначениях всех шести аналогов указывать не будем, то есть полагаем

$$\mathbf{Z}_L(A, []) = \mathbf{Z}_L(A), \mathbf{KZ}_L(A, []) = \mathbf{KZ}_L(A), \mathbf{GZ}_L(A, []) = \mathbf{GZ}_L(A),$$

$$\mathbf{Z}_R(A, []) = \mathbf{Z}_R(A), \mathbf{KZ}_R(A, []) = \mathbf{KZ}_R(A), \mathbf{GZ}_R(A, []) = \mathbf{GZ}_R(A).$$

Для l -арной группы $\langle A, [] \rangle$ все шесть аналогов совпадают с ее центром $\mathbf{Z}(A, []) = \mathbf{Z}(A)$.

Представляет интерес следующая

Лемма 3.3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \mathbf{GZ}_L(A^J, []_{l, \sigma, J});$$

2) *если A – полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \mathbf{GZ}_R(A^J, []_{l, \sigma, J});$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из 1) и 2).*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Выше отмечалось, что имеют место включения

$$\mathbf{Z}_L(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_L(A^J) \subseteq \mathbf{GZ}_L(A^J).$$

Пусть $z \in \mathbf{GZ}_L(A^J)$, то есть

$$[zx \dots x]_{l, \sigma, J} = [xzx \dots x]_{l, \sigma, J}$$

для любого $x \in A^J$. Тогда

$$[zx \dots x]_{l, \sigma, J(j)} = [xzx \dots x]_{l, \sigma, J(j)}$$

для любого $j \in J$, откуда, согласно следствию 2.1,

$$z(j)x(\sigma(j))x(\sigma^2(j)) \dots x(\sigma^{l-2}(j))x(\sigma^{l-1}(j)) = x(j)z(\sigma(j))x(\sigma^2(j)) \dots x(\sigma^{l-2}(j))x(\sigma^{l-1}(j)).$$

Используя сокращение справа в полугруппе A , из последнего равенства получим

$$z(j)x(\sigma(j)) = x(j)z(\sigma(j)). \quad (3.1)$$

Если $y, y_1, \dots, y_{l-2}$ – произвольные элементы из A^J , то из (3.1) следует

$$\begin{aligned} z(j)x(\sigma(j))y_1(\sigma^2(j)) \dots y_{l-2}(\sigma^{l-1}(j)) &= x(j)z(\sigma(j))y_1(\sigma^2(j)) \dots y_{l-2}(\sigma^{l-1}(j)), j \in J, \\ z(j)x(\sigma(j))y(\sigma^2(j)) \dots y(\sigma^{l-1}(j)) &= x(j)z(\sigma(j))y(\sigma^2(j)) \dots y(\sigma^{l-1}(j)), j \in J, \end{aligned}$$

откуда, согласно следствию 2.1,

$$\begin{aligned} [zxy_1 \dots y_{l-2}]_{l, \sigma, J(j)} &= [xzy_1 \dots y_{l-2}]_{l, \sigma, J(j)}, \\ [zxy \dots y]_{l, \sigma, J(j)} &= [xzy \dots y]_{l, \sigma, J(j)}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} [zxy_1 \dots y_{l-2}]_{l, \sigma, J} &= [xzy_1 \dots y_{l-2}]_{l, \sigma, J}, \\ [zxy \dots y]_{l, \sigma, J} &= [xzy \dots y]_{l, \sigma, J}. \end{aligned}$$

Следовательно, $z \in \mathbf{Z}_L(A^J)$, $z \in \mathbf{KZ}_L(A^J)$, откуда

$$\mathbf{GZ}_L(A^J) \subseteq \mathbf{Z}_L(A^J), \mathbf{GZ}_L(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_L(A^J).$$

Учитывая приведенные выше включения, получаем

$$\mathbf{GZ}_L(A^J) = \mathbf{Z}_L(A^J), \mathbf{GZ}_L(A^J) = \mathbf{KZ}_L(A^J).$$

Докажем утверждение 2). Выше отмечалось, что имеют место включения

$$\mathbf{Z}_R(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_R(A^J) \subseteq \mathbf{GZ}_R(A^J).$$

Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{GZ}_R(A^J)$, то есть

$$[\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-1} \mathbf{z}]_{l, \sigma, J} = [\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J}$$

для любого $\mathbf{x} \in A^J$. Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-1} \mathbf{z}]_{l, \sigma, J(j)} = [\underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J(j)}$$

для любого $j \in J$, откуда, согласно следствию 2.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) \dots \mathbf{x}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ = \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) \dots \mathbf{x}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)). \end{aligned}$$

Используя сокращение слева, из последнего равенства получим

$$\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)). \quad (3.2)$$

Если $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{l-2}$ – произвольные элементы из A^J , то из (3.2) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(j)\mathbf{y}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ = \mathbf{y}_1(j)\mathbf{y}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)), \\ j \in J, \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)) \dots \mathbf{y}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ = \mathbf{y}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)) \dots \mathbf{y}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)), j \in J,$$

откуда, согласно следствию 2.1,

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J(j)} &= [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J(j)}, \\ [\underbrace{\mathbf{y} \dots \mathbf{y}}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J(j)} &= [\underbrace{\mathbf{y} \dots \mathbf{y}}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J(j)}, \\ [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J} &= [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J}, \\ [\underbrace{\mathbf{y} \dots \mathbf{y}}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J} &= [\underbrace{\mathbf{y} \dots \mathbf{y}}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}_R(A^J)$, $\mathbf{z} \in \mathbf{KZ}_R(A^J)$, откуда $\mathbf{GZ}_R(A^J) \subseteq \mathbf{Z}_R(A^J)$, $\mathbf{GZ}_R(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_R(A^J)$.

Учитывая приведенные выше включения, получаем

$$\mathbf{GZ}_R(A^J) = \mathbf{Z}_R(A^J), \mathbf{GZ}_R(A^J) = \mathbf{KZ}_R(A^J).$$

Теперь 3) следует из 1) и 2). Лемма доказана.

Теорема 3.2. Пусть σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее. Тогда:

- 1) если A – полугруппа с левым сокращением, то $\mathbf{Z}_L(A^J, [\]_{l, \sigma, J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\]_{l, \sigma, J}) = \emptyset$;
- 2) если A – полугруппа с правым сокращением, то $\mathbf{Z}_R(A^J, [\]_{l, \sigma, J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\]_{l, \sigma, J}) = \emptyset$;
- 3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_L(A^J, [\]_{l, \sigma, J}) &= \mathbf{KZ}_L(A^J, [\]_{l, \sigma, J}) = \\ &= \mathbf{GZ}_L(A^J, [\]_{l, \sigma, J}) = \mathbf{Z}_R(A^J, [\]_{l, \sigma, J}) = \\ &= \mathbf{KZ}_R(A^J, [\]_{l, \sigma, J}) = \mathbf{GZ}_R(A^J, [\]_{l, \sigma, J}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in J$, что $\sigma(j) \neq j$. Зафиксируем элемент $a \in A$, отличный от единицы 1 полугруппы A .

Докажем утверждение 1). Если $\mathbf{z} \in \mathbf{KZ}_L(A^J)$, то определим функции $\mathbf{e}, \mathbf{x} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(s) = 1$ для любого $s \in J$, $\mathbf{x}(j) = 1$, $\mathbf{x}(\sigma(j)) = a$. Тогда

$$\begin{aligned} [\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1}]_{l, \sigma, J} &= [\underbrace{\mathbf{e} \mathbf{z} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2}]_{l, \sigma, J}, \\ [\underbrace{\mathbf{zx} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2}]_{l, \sigma, J} &= [\underbrace{\mathbf{xz} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2}]_{l, \sigma, J}, \end{aligned}$$

в частности,

$$\begin{aligned} [\underbrace{\mathbf{z} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1}]_{l, \sigma, J(j)} &= [\underbrace{\mathbf{e} \mathbf{z} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2}]_{l, \sigma, J(j)}, \\ [\underbrace{\mathbf{zx} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2}]_{l, \sigma, J(j)} &= [\underbrace{\mathbf{xz} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2}]_{l, \sigma, J(j)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(j)\mathbf{e}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{e}(\sigma^{l-1}(j)) &= \\ = \mathbf{e}(j)\mathbf{z}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{e}(\sigma^{l-1}(j)), \\ \mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{e}(\sigma^{l-1}(j)) &= \\ = \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \dots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{e}(\sigma^{l-1}(j)). \end{aligned}$$

Из этих равенств, учитывая определение функций $\mathbf{e}$ и $\mathbf{x}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(j)\underbrace{1 \dots 1}_{l-1} &= \mathbf{1z}(\sigma(j))\underbrace{1 \dots 1}_{l-2}, \\ \mathbf{z}(j)a \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} &= \mathbf{1z}(\sigma(j))\underbrace{1 \dots 1}_{l-2}, \end{aligned}$$

то есть

$$\mathbf{z}(j) = \mathbf{z}(\sigma(j)), \mathbf{z}(j)a = \mathbf{z}(\sigma(j)),$$

откуда $\mathbf{z}(j) = \mathbf{z}(j)a$. Так как A – полугруппа с левым сокращением, то $a = 1$, что невозможно, ввиду выбора элемента $a \neq 1$. Следовательно, $\mathbf{KZ}_L(A^J) = \emptyset$.

Так как $\mathbf{Z}_L(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_L(A^J)$, то $\mathbf{Z}_L(A^J) = \emptyset$.

Докажем утверждение 2). Если $\mathbf{z} \in \mathbf{KZ}_R(A^J)$, то определим функции $\mathbf{e}, \mathbf{x} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(s) = 1$ для любого $s \in J$, $\mathbf{x}(j) = a$, $\mathbf{x}(\sigma(j)) = 1$. Положим также $t = (\sigma^{-1})^{l-2}(j)$. Тогда

$$\begin{aligned} [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1} \mathbf{z}]_{l, \sigma, J} &= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{ze}]_{l, \sigma, J}, \\ [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{xz}]_{l, \sigma, J} &= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J}, \end{aligned}$$

в частности,

$$\begin{aligned} [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1} \mathbf{z}]_{l, \sigma, J(t)} &= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{ze}]_{l, \sigma, J(t)}, \\ [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{xz}]_{l, \sigma, J(t)} &= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{zx}]_{l, \sigma, J(t)}, \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t)\mathbf{e}(\sigma(t)) \dots \mathbf{e}(\sigma^{l-3}(t))\mathbf{e}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) &= \\ = \mathbf{e}(t)\mathbf{e}(\sigma(t)) \dots \mathbf{e}(\sigma^{l-3}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{e}(\sigma^{l-1}(t)), \\ \mathbf{e}(t)\mathbf{e}(\sigma(t)) \dots \mathbf{e}(\sigma^{l-3}(t))\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) &= \\ = \mathbf{e}(t)\mathbf{e}(\sigma(t)) \dots \mathbf{e}(\sigma^{l-3}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(t)). \end{aligned}$$

Из этих равенств, учитывая определение функций $\mathbf{e}$ и $\mathbf{x}$, получаем

$$\begin{aligned} \underbrace{1 \dots 1}_{l-1} \mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) &= \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)) 1, \\ \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(t)) \mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) &= \\ = \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)) \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(t)), \end{aligned}$$

то есть

$$\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(t)) \mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)) \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(t)). \quad (3.4)$$

Из (3.4), учитывая равенства

$$\mathbf{x}(j) = a, \mathbf{x}(\sigma(j)) = 1, t = (\sigma^{-1})^{l-2}(j),$$

последовательно получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\sigma^{l-2}((\sigma^{-1})^{l-2}(j))) \mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) &= \\ = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)) \mathbf{x}(\sigma^{l-1}((\sigma^{-1})^{l-2}(j))), \\ \mathbf{x}(j) \mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) &= \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)) \mathbf{x}(\sigma(j)), \\ a \mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) &= \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)). \end{aligned}$$

В последнем равенстве и в (3.3) правые части равны, поэтому

$$a \mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)).$$

Так как A – полугруппа с правым сокращением, то $a = 1$, что невозможно ввиду выбора элемента $a \neq 1$. Следовательно, $\mathbf{KZ}_R(A^J) = \emptyset$.

Так как $\mathbf{Z}_R(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_R(A)$, то $\mathbf{Z}_R(A^J) = \emptyset$.

Утверждение 3) следует из утверждений 1) и 2) данной теоремы и утверждения 3) леммы 2.3.3. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Легко проверяется, что если ε – тождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$, полугруппа A содержит единицу, то

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_L(A^J, []_{l, \varepsilon, J}) &= \mathbf{KZ}_L(A^J, []_{l, \varepsilon, J}) = \\ = \mathbf{Z}_R(A^J, []_{l, \varepsilon, J}) &= \mathbf{KZ}_R(A^J, []_{l, \varepsilon, J}) = \mathbf{Z}(A^J), \end{aligned}$$

где $\mathbf{Z}(A^J)$ – центр группоида A^J , с операцией

$$(\mathbf{x}y)(j) = \mathbf{x}(j)y(j), j \in J.$$

В частности, если полугруппа A коммутативна, то

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_L(A^J, []_{l, \varepsilon, J}) &= \mathbf{KZ}_L(A^J, []_{l, \varepsilon, J}) = \\ = \mathbf{Z}_R(A^J, []_{l, \varepsilon, J}) &= \mathbf{KZ}_R(A^J, []_{l, \varepsilon, J}) = A^J. \end{aligned}$$

Полагая в теореме 3.2 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 3.3 [4]. Пусть σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_k$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее. Тогда:

1) если A – полугруппа с левым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \mathbf{KZ}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \emptyset;$$

2) если A – полугруппа с правым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \mathbf{KZ}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \emptyset;$$

3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) &= \mathbf{KZ}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \\ \mathbf{GZ}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) &= \mathbf{Z}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \\ = \mathbf{KZ}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) &= \mathbf{GZ}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Полагая в теореме 3.2 $J = \mathbf{N}$, получим

Следствие 3.4. Пусть σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_\mathbf{N}$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее. Тогда:

1) если A – полугруппа с левым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_L(A^\mathbf{N}, []_{l, \sigma, \mathbf{N}}) = \mathbf{KZ}_L(A^\mathbf{N}, []_{l, \sigma, \mathbf{N}}) = \emptyset;$$

2) если A – полугруппа с правым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_R(A^\mathbf{N}, []_{l, \sigma, \mathbf{N}}) = \mathbf{KZ}_R(A^\mathbf{N}, []_{l, \sigma, \mathbf{N}}) = \emptyset;$$

3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_L(A^\mathbf{N}, []_{l, \sigma, \mathbf{N}}) &= \mathbf{KZ}_L(A^\mathbf{N}, []_{l, \sigma, \mathbf{N}}) = \\ = \mathbf{GZ}_L(A^\mathbf{N}, []_{l, \sigma, \mathbf{N}}) &= \mathbf{Z}_R(A^\mathbf{N}, []_{l, \sigma, \mathbf{N}}) = \\ = \mathbf{KZ}_R(A^\mathbf{N}, []_{l, \sigma, \mathbf{N}}) &= \mathbf{GZ}_R(A^\mathbf{N}, []_{l, \sigma, \mathbf{N}}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Полагая в теореме 3.2 $J = \mathbf{Z}$, получим

Следствие 3.5. Пусть σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_\mathbf{Z}$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее. Тогда:

1) если A – полугруппа с левым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_L(A^\mathbf{Z}, []_{l, \sigma, \mathbf{Z}}) = \mathbf{KZ}_L(A^\mathbf{Z}, []_{l, \sigma, \mathbf{Z}}) = \emptyset;$$

2) если A – полугруппа с правым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_R(A^\mathbf{Z}, []_{l, \sigma, \mathbf{Z}}) = \mathbf{KZ}_R(A^\mathbf{Z}, []_{l, \sigma, \mathbf{Z}}) = \emptyset;$$

3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_L(A^\mathbf{Z}, []_{l, \sigma, \mathbf{Z}}) &= \mathbf{KZ}_L(A^\mathbf{Z}, []_{l, \sigma, \mathbf{Z}}) = \\ = \mathbf{GZ}_L(A^\mathbf{Z}, []_{l, \sigma, \mathbf{Z}}) &= \mathbf{Z}_R(A^\mathbf{Z}, []_{l, \sigma, \mathbf{Z}}) = \\ = \mathbf{KZ}_R(A^\mathbf{Z}, []_{l, \sigma, \mathbf{Z}}) &= \mathbf{GZ}_R(A^\mathbf{Z}, []_{l, \sigma, \mathbf{Z}}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Считая в теореме 3.2 и следствиях из нее, что A является группой, получим еще четыре утверждения.

Теорема 3.3. Пусть σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$, группа A содержит более одного элемента. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_L(A^J, []_{l, \sigma, J}) &= \mathbf{KZ}_L(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \\ = \mathbf{GZ}_L(A^J, []_{l, \sigma, J}) &= \mathbf{Z}_R(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \\ = \mathbf{KZ}_R(A^J, []_{l, \sigma, J}) &= \mathbf{GZ}_R(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Полагая в теореме 3.3 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 3.6 [3]. Пусть σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_k$, группа A содержит более одного элемента. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) &= \mathbf{KZ}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \\ = \mathbf{GZ}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) &= \mathbf{Z}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \\ = \mathbf{KZ}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) &= \mathbf{GZ}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Полагая в теореме 3.3 $J = \mathbf{N}$, получим

Следствие 3.7. Пусть σ – нетождественная подстановка из S_N , группа A содержит более одного элемента. Тогда

$$\begin{aligned} Z_L(A^N, []_{l, \sigma, N}) &= KZ_L(A^N, []_{l, \sigma, N}) = \\ &= GZ_L(A^N, []_{l, \sigma, N}) = Z_R(A^N, []_{l, \sigma, N}) = \\ &= KZ_R(A^N, []_{l, \sigma, N}) = GZ_R(A^N, []_{l, \sigma, N}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Полагая в теореме 3.3 $J = Z$, получим

Следствие 3.8. Пусть σ – нетождественная подстановка из S_Z , группа A содержит более одного элемента. Тогда

$$\begin{aligned} Z_L(A^Z, []_{l, \sigma, Z}) &= KZ_L(A^Z, []_{l, \sigma, Z}) = \\ &= GZ_L(A^Z, []_{l, \sigma, Z}) = Z_R(A^Z, []_{l, \sigma, Z}) = \\ &= KZ_R(A^Z, []_{l, \sigma, Z}) = GZ_R(A^Z, []_{l, \sigma, Z}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Покажем, что если в условии теоремы 3.2 в качестве нетождественной подстановки σ взять цикл длины $l-1 \geq 2$, то в утверждениях 1) и 2) этой теоремы пустота малых центров $KZ_L(A)$ и $KZ_R(A)$ распространяется соответственно на большие центры $GZ_L(A)$ и $G_R(A)$.

Теорема 3.4. Пусть σ – цикл длины $l-1 \geq 2$ из S_J , полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее. Тогда:

1) если A – полугруппа с левым сокращением, то

$$\begin{aligned} Z_L(A^J, []_{l, \sigma, J}) &= KZ_L(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \\ &= GZ_L(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \emptyset; \end{aligned}$$

2) если A – полугруппа с правым сокращением, то

$$\begin{aligned} Z_R(A^J, []_{l, \sigma, J}) &= KZ_R(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \\ &= GZ_R(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \emptyset; \end{aligned}$$

3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из 1) и 2).

Доказательство. Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in J$, что $\sigma(j) \neq j$. Зафиксируем элемент $a \in A$, отличный от единицы 1 полугруппы A .

Докажем утверждение 1). Ввиду теоремы 3.2 достаточно доказать равенство

$$GZ_L(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \emptyset.$$

Если $z \in GZ_L(A^J)$, то определим функции $e, x \in A^J$ так, что $e(s) = 1$ для любого $s \in J$,

$$\begin{aligned} x(\sigma(j)) &= a, x(j) = x(\sigma^2(j)) = \dots = \\ &= x(\sigma^{l-2}(j)) = x(\sigma^{l-1}(j)) = 1. \end{aligned}$$

Такое определение функции x возможно, так как все значения

$$j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots, \sigma^{l-2}(j)$$

различны и, кроме того, $\sigma^{l-1}(j) = j$. Тогда

$$\begin{aligned} [ze \dots e]_{l, \sigma, J} &= [eze \dots e]_{l, \sigma, J}, \\ [zx \dots x]_{l, \sigma, J} &= [xx \dots x]_{l, \sigma, J}, \end{aligned}$$

в частности,

$$[ze \dots e]_{l, \sigma, J(j)} = [eze \dots e]_{l, \sigma, J(j)},$$

$$[zx \dots x]_{l, \sigma, J(j)} = [xx \dots x]_{l, \sigma, J(j)}.$$

Из этих равенств, учитывая определение функций e и x , получаем

$$z(j) \underbrace{1 \dots 1}_{l-1} = 1z(\sigma(j)) \underbrace{1 \dots 1}_{l-2},$$

$$z(j) \underbrace{a 1 \dots 1}_{l-2} = 1z(\sigma(j)) \underbrace{1 \dots 1}_{l-2},$$

то есть

$$z(j) = z(\sigma(j)), z(j)a = z(\sigma(j)),$$

откуда $z(j) = z(j)a$. Так как A – полугруппа с левым сокращением, то $a = 1$, что невозможно ввиду выбора элемента $a \neq 1$. Следовательно, $GZ_L(A^J) = \emptyset$.

Докажем утверждение 2). Ввиду теоремы 3.2 достаточно доказать равенство

$$GZ_R(A^J, []_{l, \sigma, J}) = \emptyset.$$

Если $z \in GZ_R(A^J)$, то положим $t = \sigma(j)$ и определим функции $e, x \in A^J$ так, что $e(s) = 1$ для любого $s \in J$,

$$\begin{aligned} x(j) &= x(\sigma^{l-1}(j)) = a, x(\sigma(j)) = \\ &= x(\sigma^2(j)) = \dots = x(\sigma^{l-2}(j)) = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$[e \dots e z]_{l, \sigma, J} = [e \dots e ze]_{l, \sigma, J},$$

$$[x \dots x z]_{l, \sigma, J} = [x \dots x zx]_{l, \sigma, J},$$

в частности,

$$[e \dots e z]_{l, \sigma, J(t)} = [e \dots e ze]_{l, \sigma, J(t)},$$

$$[x \dots x z]_{l, \sigma, J(t)} = [x \dots x zx]_{l, \sigma, J(t)},$$

Из этих равенств, учитывая определение функции e , равенство $t = \sigma(j)$, а также тождественность подстановки σ^{l-1} , получаем вначале

$$\underbrace{1 \dots 1}_{l-1} z(t) = \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} z(\sigma^{l-2}(t)) 1,$$

$$\begin{aligned} x(t)x(\sigma(t)) \dots x(\sigma^{l-3}(t))x(\sigma^{l-2}(t))z(\sigma^{l-1}(t)) &= \\ = x(t)x(\sigma(t)) \dots x(\sigma^{l-3}(t))z(\sigma^{l-2}(t))x(\sigma^{l-1}(t)), \end{aligned}$$

а затем

$$z(t) = z(\sigma^{l-2}(t)), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} x(\sigma(j))x(\sigma(\sigma(j))) \dots x(\sigma^{l-3}(\sigma(j)))x(\sigma^{l-2}(\sigma(j)))z(t) &= \\ = x(\sigma(j))x(\sigma(\sigma(j))) \dots x(\sigma^{l-3}(\sigma(j)))z(\sigma^{l-2}(t))x(t). \end{aligned}$$

Последнее равенство принимает вид

$$\begin{aligned} x(\sigma(j))x(\sigma^2(j)) \dots x(\sigma^{l-2}(j))x(j)z(t) &= \\ = x(\sigma(j))x(\sigma^2(j))x(\sigma^3(j)) \dots x(\sigma^{l-2}(j)) \times \\ \times z(\sigma^{l-2}(t))x(\sigma(j)), \end{aligned}$$

откуда, учитывая определение функции x , получаем $az(t) = z(\sigma^{l-2}(t))$. В последнем равенстве и в (3.5) правые части равны, поэтому

$az(t) = z(t)$. Так как A – полугруппа с правым сокращением, то $a = 1$, что невозможно ввиду выбора элемента $a \neq 1$. Следовательно, $\mathbf{GZ}_R(A^J) = \emptyset$.

Утверждение 3) следует как из утверждения 3) теоремы 3.2, так и из утверждений 1) и 2) данной теоремы. Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.4 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 3.9. Пусть σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из S_k , полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее. Тогда:

1) если A – полугруппа с левым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \mathbf{KZ}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \\ = \mathbf{GZ}_L(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \emptyset;$$

2) если A – полугруппа с правым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \mathbf{KZ}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \\ = \mathbf{GZ}_R(A^k, []_{l, \sigma, k}) = \emptyset;$$

3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из 1) и 2).

Если в следствии 3.9 положить $l = k + 1$, то получится

Следствие 3.10. Пусть σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее. Тогда:

1) если A – полугруппа с левым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_L(A^k, []_{k+1, \sigma, k}) = \mathbf{KZ}_L(A^k, []_{k+1, \sigma, k}) = \\ = \mathbf{GZ}_L(A^k, []_{k+1, \sigma, k}) = \emptyset;$$

2) если A – полугруппа с правым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_R(A^k, []_{k+1, \sigma, k}) = \mathbf{KZ}_R(A^k, []_{k+1, \sigma, k}) = \\ = \mathbf{GZ}_R(A^k, []_{k+1, \sigma, k}) = \emptyset;$$

3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из 1) и 2).

Полагая в следствии 3.10 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 3.11. Пусть $\sigma = (12 \dots k) \in S_k$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее. Тогда:

1) если A – полугруппа с левым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_L(A^k, []_{k+1, (12 \dots k), k}) = \mathbf{KZ}_L(A^k, []_{k+1, (12 \dots k), k}) = \\ = \mathbf{GZ}_L(A^k, []_{k+1, (12 \dots k), k}) = \emptyset;$$

2) если A – полугруппа с правым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_R(A^k, []_{k+1, (12 \dots k), k}) = \mathbf{KZ}_R(A^k, []_{k+1, (12 \dots k), k}) = \\ = \mathbf{GZ}_R(A^k, []_{k+1, (12 \dots k), k}) = \emptyset;$$

3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из 1) и 2).

Полагая в теореме 3.4 $J = \mathbb{N}$, получим

Следствие 3.12. Пусть σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из $S_{\mathbb{N}}$, полугруппа A содержит единицу

и элемент, отличный от нее. Тогда:

1) если A – полугруппа с левым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_L(A^{\mathbb{N}}, []_{l, \sigma, \mathbb{N}}) = \mathbf{KZ}_L(A^{\mathbb{N}}, []_{l, \sigma, \mathbb{N}}) = \\ = \mathbf{GZ}_L(A^{\mathbb{N}}, []_{l, \sigma, \mathbb{N}}) = \emptyset;$$

2) если A – полугруппа с правым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_R(A^{\mathbb{N}}, []_{l, \sigma, \mathbb{N}}) = \mathbf{KZ}_R(A^{\mathbb{N}}, []_{l, \sigma, \mathbb{N}}) = \\ = \mathbf{GZ}_R(A^{\mathbb{N}}, []_{l, \sigma, \mathbb{N}}) = \emptyset;$$

3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из 1) и 2).

Полагая в теореме 3.4 $J = \mathbb{Z}$, получим

Следствие 3.13. Пусть σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из $S_{\mathbb{Z}}$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее. Тогда:

1) если A – полугруппа с левым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_L(A^{\mathbb{Z}}, []_{l, \sigma, \mathbb{Z}}) = \mathbf{KZ}_L(A^{\mathbb{Z}}, []_{l, \sigma, \mathbb{Z}}) = \\ = \mathbf{GZ}_L(A^{\mathbb{Z}}, []_{l, \sigma, \mathbb{Z}}) = \emptyset;$$

2) если A – полугруппа с правым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_R(A^{\mathbb{Z}}, []_{l, \sigma, \mathbb{Z}}) = \mathbf{KZ}_R(A^{\mathbb{Z}}, []_{l, \sigma, \mathbb{Z}}) = \\ = \mathbf{GZ}_R(A^{\mathbb{Z}}, []_{l, \sigma, \mathbb{Z}}) = \emptyset;$$

3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из 1) и 2).

Полагая в теореме 3.4, что подстановка σ является транспозицией, получим

Следствие 3.14. Пусть $\sigma = (ij)$ – транспозиция из S_J , полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее. Тогда:

1) если A – полугруппа с левым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_L(A^J, []_{3, (ij), J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, []_{3, (ij), J}) = \\ = \mathbf{GZ}_L(A^J, []_{3, (ij), J}) = \emptyset;$$

2) если A – полугруппа с правым сокращением, то

$$\mathbf{Z}_R(A^J, []_{3, (ij), J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, []_{3, (ij), J}) = \\ = \mathbf{GZ}_R(A^J, []_{3, (ij), J}) = \emptyset;$$

3) если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из 1) и 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Об операции $[]_{l, \sigma, J}$ / А.М. Гальмак // Материалы междунар. науч.-практ. конф., посвященной 100-летию МГУ имени А.А. Кулешова. – Могилев, 2013. – С. 34–38.
2. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Кулаженко, Ю.И. О центрах l -арных группоидов / Ю.И. Кулаженко // Материалы междунар. науч.-практ. конф., посвященной 100-летию МГУ имени А.А. Кулешова. – Могилев, 2013. – С. 34–38.
5. Супруненко, Д.А. Группы подстановок / Д.А. Супруненко. – Минск: Навука і тэхніка, 1996. – 366 с.
6. Wielandt, H. Unendliche Permutationsgruppen / H. Wielandt. – Vorlesungen an der Universität Tübingen WS 1959–1960. – Tübingen, 1960. – S. 1–45.

Поступила в редакцию 10.12.2013. Принята в печать 17.06.2013

Адрес для корреспонденции: 246019, г. Гомель, ул. Советская, д. 104, УО «ГТУ имени Ф. Скорины» – Кулаженко Ю.И