АЛГЕБРА, ИНДУЦИРОВАННАЯ УРАВНЕНИЕМ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

А.А. Яхновец, Т.Н. Козловская
Витебск, ВГУ

Задача о гармоническом осцилляторе в квантовой механике как физическая модель многих процессов имеет исключительно важное значение. Дело в том, что в определенном приближении движение сложных систем «можно рассматривать как совокупность нормальных колебаний, формально эквивалентных колебания гармонических осцилляторов» [1]. К таким процессам относятся: колебания атомов и ионов в сложных молекулах и в кристаллах, а так же задачи квантования волновых полей, и множество других.

Стационарное уравнение Шредингера для такого классического гармонического осциллятора имеет вид:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-\frac{m\omega^2x^2}{2})\psi=0 \quad (1)$$

Согласно [2] вводим безразмерную переменную для координаты x по формуле:

$$\xi=(\frac{m\omega}{\hbar})^{\frac{1}{2}}x \quad (2)$$

После обезразмеривания уравнение (1) запишем в виде:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+(\lambda-\xi^2)\psi=0 \quad (3)$$

Здесь $\lambda=(\frac{2E}{\hbar\omega})$, (4); в формуле (4) E - полная энергия КГО.

Алгебра, индуцированная уравнением (3) работает в пятимерном многообразии. Количество переменных можно уменьшить, трансформируя (3) с помощью [2] подстановки:

$$\psi(\xi)=U(\xi)\exp(-0{,}5\xi^2)=0 \quad (5)$$

После выполнения несложных математических преобразований получаем уравнение для $U(\xi)$:

$$\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}-2\xi\frac{dU(\xi)}{d\xi}+(\lambda-1)U(\xi)=0 \quad (6)$$

Представим уравнение (6) в виде системы:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2U(\xi)}{d\xi}=y(\xi)\\[2mm]\dfrac{dy(\xi)}{d\xi}=2\xi y+(1-\lambda)U\end{cases} \quad (7)$$

Для того чтобы можно было применить алгоритм [3] построения алгебры индуцируемой уравнением (6) дополним систему (7) и преобразуем к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\xi} = x_2 x_4; \\ \dfrac{dx_2}{d\xi} = 2x_3 x_2 + \beta x_1 x_4; \\ \dfrac{dx_3}{d\xi} = x_4^2; \\ \dfrac{dx_4}{d\xi} = 0; \end{cases} \qquad (8)$$

Система (8) получается из (7) после следующих замен и преобразований:

$1 - \lambda = \beta;$ (9). $U = x_1; y = x_2; \xi = x_3; w = x_4;$ (10)

Согласно [3] правая часть (8) должна быть записана ввиде квадратичных форм, для этого вводится формально переменная $w(\xi) = 1$ по всей области изменения переменной ξ. Если в (6) положить что $\beta = 2n$, где n - целочисленные значения, то оно в точности совпадает с известным уравнением для полиномов Чебышева – Эрмита.

Правая часть системы (8) может быть записана в матричном виде:

$$\frac{d\vec{x}(\xi)}{d\xi} = \vec{x}_T * \hat{A} * \vec{x} \quad (11)$$

Где $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4$; $\vec{x}_T$ - транспонированный вектор.

Для $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (12.1) Для $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (12.2)

Для $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (12.3) Для $A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (12.3)

Алгебра согласно [3] будет определена на множестве векторов $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4$; если мы будем знать результат перемножения пар базисных векторов $\vec{e}_j * \vec{e}_k$, тогда можно будет выполнять операцию умножения с векторами $\vec{x}$.

Результаты перемножения пар [3] удовлетворяют соотношению:

$$\vec{e}_j * \vec{e}_k = A_{jk}^{(1)} * \vec{e}_1 + A_{jk}^{(2)} * \vec{e}_2 + A_{jk}^{(3)} * \vec{e}_3 \quad (13)$$

В результате подстановки в (13) явного вида матриц $A^{(i)}$ получаем таблицу для пар базисных векторов:

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$
$\vec{e}_1$	0	0	0	$\frac{\beta}{2}\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	0	0	$\vec{e}_2$	$\frac{1}{2}\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	0	$\vec{e}_2$	0	0
$\vec{e}_4$	$\frac{\beta}{2}\vec{e}_2$	$\frac{1}{2}\vec{e}_1$	0	$\vec{e}_3$

$= \vec{e}_j * \vec{e}_k$ (14)

Таблица (14) потребуется для построения решения системы (8). В квантовой механике выполнение схемы, предлагаемой в [3] наталкивается на определенные сложности. Чтобы воспользоваться методом, нужно знать начальные состояния, не совместимые с принципом неопределенности. Работа по поиску решения будет продолжена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифф, Л. Квантовая механика / Л. Шифф. – М. ИЛ,-1959.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. «Наука», 1974. – т.3.
3. Ньюком, Р.У. Системы нелинейных дифференциальных уравнений. Канонические многомерные представления / Р.У. Ньюком. – ТИИЭР, 1977. – т.65, №6. – с. 138-145