ЛИТЕРАТУРА

1. Приближенное решение операторных уравнений: монография / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко. – Москва: Изд-во «Наука» , 1969. – 456 с. – Библиогр.: с. 437-452.
2. Красносельский, М. А. Позитивные линейные системы / М. А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А. В. Соболев. – М.: Наука, 1985. – 256 с.: – Библиогр.: с. 244 – 252.
3. Богатырев, А. Экстремальные многочлены и римановы поверхности / А. Богатырев. – М.: МЦНМО, 2005. – 172 с. – Библиогр.: с. 156 – 167.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ОТСУТСТВИЯ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДВУХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ СТЕПЕННОГО ВИДА

С.В. Сергеенко
Витебск, ВГУ

Рассматривается вопрос отсутствия и существования целых решений систем вида

$$\begin{cases} \Delta u = H(|x|)v^{\alpha} \\ \Delta v = K(|x|)u^{\beta} \end{cases} \qquad (1),$$

где $x \in \mathbf{R}^N$, $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 3$, α и β положительные постоянные, и функции $H, K : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ непрерывны. Под целым решением системы (1) будем понимать пару функций $(u,v) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^N) \times \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^N)$, которая удовлетворяет системе (1) в пространстве $\mathbf{R}^N$. Такое определение целым решениям дано, например в [1].

Были получены следующие достаточные условия существования целых решений.

Теорема 1. Пусть дана система (1), коэффициенты которой при $r > r_0$ удовлетворяют неравенствам

$$H(r) \leq \frac{L_1}{r^{\lambda} \ln^{\nu} r}, \quad K(r) \leq \frac{L_2}{r^{\mu} \ln^{\xi} r},$$

где $r_0 > e^{e^4}$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, λ, ν, μ, ξ, $\alpha > 1$, $\beta > 1$ – некоторые действительные числа.

Если выполняется одно из условий

а) $$\begin{cases} 2 - \lambda + \alpha(2 - \mu) < 0 \\ 2 - \mu + \beta(2 - \lambda) < 0 \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \lambda < 2 \\ 2 - \mu + \beta(2 - \lambda) = 0 \\ -\nu + \alpha(1 - \xi) < 0 \\ -\beta\nu + 1 - \xi < 0 \end{cases}$$

в) $\begin{cases} 2-\lambda+\alpha(2-\mu)=0 \\ \mu<2 \\ 1-\nu-\alpha\xi<0 \\ \beta(1-\nu)-\xi<0 \end{cases}$

г) $\begin{cases} \lambda=2 \\ \mu=2 \\ 1-\nu+\alpha(1-\xi)<0 \\ \beta(1-\nu)+1-\xi<0 \end{cases}$

то существует целое решение системы (1).

Для отсутствия целых решений была получена теорема, которая имеет более общий вид.

Теорема 2. Пусть $N\ge 3$, $\alpha>1$, $\beta>1$, при некоторых фиксированных значениях a и b таких, что $1<a<b\le 2$, и некоторых натуральных k, m, n функции $r^{1-m}H(r)$ и $r^{1-n}K(r)$ не возрастают на интервале (ρ,∞), где ρ – некоторая положительная постоянная, и при этом выполняется одно из условий

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\Bigg(\left(y_k^{\frac{1-\alpha\beta}{(n+1)\alpha+m+1}}(aR)-y_k^{\frac{1-\alpha\beta}{(n+1)\alpha+m+1}}(bR)\right)^{-1}\times$$

$$\times\int_{aR}^{bR}\left((s^{1-n}K(s))^{\alpha}s^{1-m}H(s)\right)^{\frac{1}{(n+1)\alpha+m+1}}ds\Bigg)=\infty,$$

или

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\Bigg(\left(z_k^{\frac{1-\alpha\beta}{(m+1)\beta+n+1}}(aR)-z_k^{\frac{1-\alpha\beta}{(m+1)\beta+n+1}}(bR)\right)^{-1}\times$$

$$\times\int_{aR}^{bR}\left(s^{1-n}K(s)(s^{1-m}H(s))^{\beta}\right)^{\frac{1}{(m+1)\beta+n+1}}ds\Bigg)=\infty,$$

где

$$y(r)=\int_R^r(r-s)^m s^{1-m}H(s)v_k^{\alpha}(s)ds,\quad z(r)=\int_R^r(r-s)^n s^{1-n}K(s)u_k^{\beta}(s)ds,$$

функции $u_k(r)$, $v_k(r)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$u_0(r)=1,\ \ v_0(r)=1,$$

$$u_k(r)=\int_\rho^r sH(s)\left(1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right)v_{k-1}^{\alpha}(s)ds,$$

$$v_k(r)=\int_\rho^r sK(s)\left(1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right)u_{k-1}^{\beta}(s)ds.$$

Тогда система (1) не имеет целых положительных решений.

Кроме того, было показано, что применение теоремы 2 для частного случая даёт следующие достаточные условия отсутствия целых решений:

Теорема 3. Пусть дана система (1), коэффициенты которой при $r>r_0$ удовлетворяют неравенствам

$$H(r) \geq \frac{L_1}{r^{\lambda} \ln^{\nu} r},$$

$$K(r) \geq \frac{L_2}{r^{\mu} \ln^{\xi} r},$$

где $r_0 > e^{e^4}$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, λ, ν, μ, ξ, $\alpha > 1$, $\beta > 1$ – некоторые действительные числа.

Если выполняется одно из следующих условий:

а) $\lambda < 2$, $\mu = 2 + \beta(2 - \lambda)$, $1 - \xi - \beta\nu > 0$;

б) $\lambda < 2$, $\mu = 2 + \beta(2 - \lambda)$, $\xi < 1$, $\alpha(1 - \xi) = \nu$;

в) $\lambda = 2$, $\mu = 2$, $\beta(1 - \nu) + 1 - \xi \geq 0$;

г) $\mu < 2$, $\lambda = 2 + \alpha(2 - \mu)$, $1 - \nu - \alpha\xi > 0$;

д) $\mu < 2$, $\lambda = 2 + \alpha(2 - \mu)$, $\nu < 1$, $\beta(1 - \nu) = \xi$;

е) $\lambda = 2$, $\mu = 2$, $\alpha(1 - \xi) + 1 - \nu \geq 0$;

то система (1) не имеет целых положительных решений.

Таким образом, получены результаты, которые являются более точными, чем изложенные в [1] или [2], и для них приведена предварительная оценка точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Teramoto, T. Existence and nonexistence of positive entire solutions of second order semilinear elliptic systems / T. Teramoto // Funkcialaj Ekvacioj. – 1999. – Vol. 42. – P. 241–260.
2. Сергеенко, С.В. Достаточные условия отсутствия целых решений систем полулинейных эллиптических уравнений / С.В. Сергеенко // Образование XXI века: материалы X(55) итоговой научно-практической конференции студентов и магистрантов, Витебск, 24–25 марта 2010 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова» 2010. – С. 14–16.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ В ЗАДАЧЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

Ю.В. Трубников, А.М. Воронов
Витебск, ВГУ

Вычислим полином наилучшего приближения в чебышевской метрике для дифференцируемой строго выпуклой функции.

Заметим, что любой отрезок $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$, можно записать в виде $[a(1-e),\ a(1+e)]$, где $a = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, $e = \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$. Для нас будет удобно использовать эту запись.

Теорема 1 [1]. *Пусть* $a > 0$, $0 < e < 1$ *и* $f(r)$ *– дифференцируемая, строго выпуклая функция на отрезке* $a(1-e) \leq r \leq a(1+e)$.