УДК 517.537.32

Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В настоящее время существует незначительное число алгоритмов приближенного аналитического решения алгебраических уравнений через их коэффициенты. Еще менее известны приближенные аналитические формулы для нахождения решения через коэффициенты уравнения.

Цель статьи – разработать новый прямой алгоритм нахождения корня алгебраического уравнения через его коэффициенты.

Материал и методы. *Материалами исследования были прямые алгоритмы приближенного нахождения корней алгебраических уравнений. Использованы методы математического анализа и система компьютерной математики Maple 2015.*

Результаты и их обсуждение. *Основным источником для получения формул приближенного аналитического нахождения решения алгебраических уравнений является теорема 1. Данная теорема раскрывает связь между минимальным по модулю решением алгебраического уравнения и отношением соседних слагаемых степенного ряда, составленного для функции 1/f(x).*

Получен явный аналитический вид некоторых формул приближенного нахождения минимального по модулю решения алгебраического уравнения третьей степени.

Заключение. *Предложен новый алгоритм для получения формул приближенного нахождения наименьшего по модулю корня алгебраического уравнения третьей степени через его коэффициенты. Полученные формулы имеют простой вид и удобны для использования на практике. Применяя предложенный в статье алгоритм, можно получить формулы приближенного нахождения решения алгебраических уравнений более высоких степеней.*

Ключевые слова: *алгебраические уравнения, приближенное решение, расходящийся ряд.*

Role of Divergent Power Series in Some Algorithms of the Approached Analytical Solution of the Algebraic Equations

Yu.V. Trubnikov, M.M. Chernyavsky, A.M. Voronov
Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

Currently there is an insignificant quantity of algorithms of the approached analytical solution of the algebraic equations through their coefficients. The approached analytical formulas for solution determination through equation coefficients are even less known.

The purpose of the article is to receive new direct algorithm of determination of the solution of the algebraic equation through its coefficients.

Material and methods. *Direct algorithms of the approached determination of solutions of the algebraic equations were research materials. Methods of the mathematical analysis and System of computer mathematics Maple 2015 were used in the research.*

Findings and their discussion. *The basic source for deriving of formulas of the approached analytical determination of a solution of the algebraic equations is the theorem 1. The given theorem open relation between minimum modulo a solution of the algebraic equation and the ration of the next items of the ascending power series made for function 1/f (x).*

The explicit analytical form of some formulas of the approached determination minimum modulo solutions of the algebraic equation of the third degree is received.

Conclusion. *The new algorithm for deriving of formulas of the approached determination of the least modulo the radical of the algebraic equation of the third degree through its coefficients is offered. The formulas obtained have a simple form and are convenient for use in practice. Using the algorithm offered in article, it is possible to receive formulas of the approached determination of a solution of the algebraic equations of higher degrees.*

Key words: *algebraic equations, approximate solution, divergent series.*

Вопросы получения формул приближенного нахождения решений алгебраических уравнений через коэффициенты данных уравнений возникают уже не одно столетие. Одной из причин тому является невозможность получения точного аналитического выражения корней алгебраического уравнения пятой и более высоких степеней через его коэффициенты (теорема Абеля) [1, с. 103]. Тем не менее до настоящего времени математиками было получено незначительное число прямых алгоритмов нахождения приближенного решения алгебраических уравнений, выраженного через коэффициенты исходного уравнения. Среди данных алгоритмов следует отметить, например, алгоритм Бернулли нахождения наибольшего по модулю решения алгебраического уравнения и «г/ф-алгоритм», предлагаемый В.И. Шмойловым [2]. Последний алгоритм позволяет получать приближенное решение в виде цепной дроби, что не всегда удобно для использования на практике. Алгоритм Бернулли [2, с. 33] также не дает готовых формул для нахождения искомого приближенного решения уравнения и применим не ко всем произвольным алгебраическим уравнениям. Таким образом, получение более простых формул приближенного нахождения решений алгебраических уравнений через коэффициенты данных уравнений является актуальной задачей.

Цель статьи – разработать новый прямой алгоритм нахождения корня алгебраического уравнения через его коэффициенты.

Материал и методы. Материалом исследования являются прямые алгоритмы приближенного нахождения корней данных уравнений. Методы исследования: методы математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2015.

Результаты и их обсуждение. В теории разложения функций комплексного аргумента в степенные ряды возникает следующая теорема, которая играет важную роль в построении некоторых алгоритмов приближенного нахождения решения алгебраических уравнений.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)$ *– многочлен комплексного аргумента степени* n, *и пусть разложение функции* $\frac{1}{f(x)}$ *в ряд Тейлора* [3, с. 177] *имеет вид* (1):

$$\frac{1}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k. \tag{1}$$

Тогда если $f(x)$ *имеет только один минимальный по модулю корень, например,* $|x_1|<|x_2|\le|x_3|\le\ldots\le|x_n|$, *то в минимальной по модулю точке* x_1 *расхождения ряда* (1) *предел отношения соседних слагаемых ряда* (1) *стремится к единице с увеличением их порядкового номера, то есть справедливо выражение* (2):

$$\lim_{m\to\infty}\frac{c_m x^m}{c_{m+1}x^{m+1}}=1. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим простейший случай, когда $f(x)$ является квадратным полиномом, имеющим корни x_1 и x_2, причем $|x_1|<|x_2|$. После разложения на множители $f(x)$ принимает вид (3):

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2). \tag{3}$$

Разложим $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$ в ряд Тейлора вида (1) и, введя замену $x_1=\frac{x_1}{x_2}x_2=tx_2$, вычислим отношение третьего слагаемого ряда (1) к четвертому в точке x_1:

$$\frac{c_3x_1^3}{c_4x_1^4}=\frac{c_3}{c_4x_1}=\frac{(t+1)(t^2+1)}{t^4+t^3+t^2+t+1}.$$

Для большей наглядности представим последнюю дробь в виде разложения в ряд Тейлора по переменной t:

$$\frac{c_3}{c_4 x_1} = 1 - t^4 + t^5 - t^9 + t^{10} - t^{14} + t^{15} - t^{19} + t^{20} - t^{24} + t^{25} - \ldots \tag{4}$$

Проведем аналогичные вычисления для отношения четвертого слагаемого ряда (1) к пятому, пятого к шестому и восемнадцатого к девятнадцатому:

$$\frac{c_4}{c_5 x_1} = \frac{\left(t^4+t^3+t^2+t+1\right)}{\left(t+1\right)\left(t^2+t+1\right)\left(t^2-t+1\right)} = 1 - t^5 + t^6 - t^{11} + t^{12} - t^{17} + t^{18} - \ldots; \tag{5}$$

$$\frac{c_5}{c_6 x_1} = \frac{\left(t+1\right)\left(t^2+t+1\right)\left(t^2-t+1\right)}{t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1} = 1 - t^6 + t^7 - t^{13} + t^{14} - t^{20} + t^{21} - \ldots; \tag{6}$$

$$\frac{c_{18} x_1^{18}}{c_{19} x_1^{19}} = \frac{c_{18}}{c_{19} x_1} = 1 - t^{19} + t^{20} - t^{39} + t^{40} + \ldots. \tag{7}$$

Поскольку $|t| < 1$, то из выражений (4)–(7) отчетливо видно, что предел отношения соседних слагаемых ряда (1) стремится к единице с увеличением их порядкового номера, что в свою очередь доказывает справедливость теоремы 1.

То есть доказательство носит вычислительный характер.

Отталкиваясь от вышеуказанных рассуждений, осуществим доказательство справедливости теоремы 1 для случая, когда $f(x)$ является кубическим полиномом, имеющим корни x_1, x_2, x_3, причем $|x_1| < |x_2| \le |x_3|$. После разложения на множители $f(x)$ принимает вид (8):

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \tag{8}$$

Разложим $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$ в ряд Тейлора вида (1) и, введя замену $x_1 = \frac{x_1}{x_3} x_3 = t_1 x_3$, $x_2 = \frac{x_2}{x_3} x_3 = t_2 x_3$, вычислим отношение третьего слагаемого ряда (1) к четвертому в точке x_1 и представим его в виде разложения в ряд Тейлора по переменной t_1:

$$\begin{gathered}\frac{c_3 x_1^3}{c_4 x_1^4} = \frac{c_3}{c_4 x_1} = 1 - \frac{t_2^4+t_2^3+t_2^2+t_2+1}{t_2^4} t_1^4 + \frac{\left(t_2^4+t_2^3+t_2^2+t_2+1\right)\left(t_2+1\right)}{t_2^5} t_1^5 - \\ - \frac{t_2^4+t_2^3+t_2^2+t_2+1}{t_2^4} t_1^6 - \frac{\left(t_2^4+t_2^3+t_2^2+t_2+1\right)\left(t_2^2+t_2+1\right)\left(t_2^2-t_2+1\right)}{t_2^9} t_1^9 + \ldots\end{gathered} \tag{9}$$

Проведем аналогичные вычисления для отношения четвертого слагаемого ряда (1) к пятому, шестого к седьмому и восемнадцатого к девятнадцатому:

$$\begin{gathered}\frac{c_4 x_1^4}{c_5 x_1^5} = 1 - \frac{\left(t_2^2+t_2+1\right)\left(t_2^2-t_2+1\right)\left(t_2+1\right)}{t_2^5} t_1^5 + \frac{\left(t_2+1\right)^2\left(t_2^2+t_2+1\right)\left(t_2^2-t_2+1\right)}{t_2^6} t_1^6 - \\ - \frac{\left(t_2+1\right)\left(t_2^2+t_2+1\right)\left(t_2^2-t_2+1\right)}{t_2^6} t_1^7 + \ldots;\end{gathered} \tag{10}$$

$$\frac{c_4 x_1^6}{c_5 x_1^7} = 1 - \frac{\left(t_2+1\right)\left(t_2^2+1\right)\left(t_2^4+1\right)}{t_2^7} t_1^7 + \frac{\left(t_2+1\right)^2\left(t_2^2+1\right)\left(t_2^4+1\right)}{t_2^8} t_1^8 - \ldots; \tag{11}$$

$$\frac{c_{18} x_1^{18}}{c_{19} x_1^{19}} = 1 - \frac{\left(t_2+1\right)\left(t_2^2+1\right)\left(t_2^4+t_2^3+t_2^2+t_2+1\right)\left(t_2^8-t_2^6+t_2^4-t_2^2+1\right)}{t_2^{19}} t_1^{19} + \ldots. \tag{12}$$

Поскольку $|t_1| < 1$ и $|t_1| < |t_2|$, то из выражений (9)–(12) отчетливо видно, что предел отношения соседних слагаемых ряда (1) стремится к единице с увеличением их порядкового номера, что в свою очередь доказывает справедливость теоремы 1 для случая кубического полинома.

Аналогичным вычислительным образом можно доказать справедливость теоремы 1 для алгебраического полинома четвертой степени.

Сама по себе теорема 1 имеет высокое прикладное значение и является источником для построения цепочки формул, позволяющих приближенно находить минимальный по модулю корень алгебраического уравнения через его коэффициенты. Ниже будет приведен алгоритм получения данных формул и представлен явный вид некоторых из них для случая кубического уравнения и уравнения четвертой степени, а также на конкретных примерах будет показана их эффективность.

Пусть

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Разложим функцию $\frac{1}{f(x)}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c} - \frac{b}{c^2}x + \left(\frac{b^2}{c^3} - \frac{a}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{(ac-b^2)b}{c^4} + \frac{ba}{c^3} - \frac{1}{c^2}\right)x^3 +$$
$$+\left(\frac{(c^2-2abc+b^3)b}{c^5} + \frac{(ac-b^2)a_3}{c^4} + \frac{b}{c^3}\right)x^4 +$$
$$+\left(\frac{(c^2-2abc+b^3)a}{c^5} + \frac{(ac-b^2)}{c^4} + \frac{(3ab^2c-a^2c^2-2bc^2-b^4)b}{c^6}\right)x^5 +$$
$$+\left(\frac{(c^2-2abc+b^3)}{c^5} + \frac{(3ab^2c-a^2c^2-2bc^2-b^4)a}{c^6} + \right.$$
$$\left. + \frac{(3a^2b^2c^2-4ab^3c)b}{c^7} + \frac{(3b^2c^2-2ac^3+b^5)b}{c^7}\right)x^6 + \ldots \tag{13}$$

Пусть x_* является единственным минимальным по модулю корнем алгебраического уравнения $f(x)=0$. Тогда для некоторого m-го слагаемого ряда (1) согласно выражению (2) можно приближенно считать

$$\frac{c_m x_*^m}{c_{m+1} x_*^{m+1}} = \frac{c_m}{c_{m+1} x_*} \approx 1,$$

следовательно,

$$x_* \approx \frac{c_m}{c_{m+1}}. \tag{14}$$

Сравнивая выражения (14) и (13), находим

$$x_* \approx \frac{c_3}{c_4} = \frac{(2abc - b^3 - c^2)c}{a^2c^2 - 3ab^2c + 2bc^2 + b^4}; \tag{15}$$

$$x_* \approx \frac{c_4}{c_5} = \frac{(a^2c^2 - 3ab^2c + 2bc^2 + b^4)c}{2ac(2b^3 + c^2) - 3bc^2(a^2+b) - b^5}; \tag{16}$$

$$x_* \approx \frac{c_5}{c_6} = \frac{(3bc^2(a^2+b) - 2ac(2b^3+c^2) + b^5)c}{a^3c^3 + 5ab^4c - 4b^3c^2 - 6abc^2(ab-c) - c^4 - b^6}; \tag{17}$$

$$x_* \approx \frac{c_6}{c_7} = \frac{(4b^3c^2 - a^3c^3 - 5ab^4c + 6abc^2(ab-c) + c^4 + b^6)c}{(2a^2bc^2(2ac-5b^2) + 6ab^2c(b^3+2c^2) - 3c^4(a^2+b) - 5b^4c^2 - b^7}. \tag{18}$$

Таким образом, формулы (15)–(18) позволяют найти приближенное значение наименьшего корня алгебраического уравнения третьей степени.

Рассмотрим применение данных формул на конкретном числовом примере. Пусть

$$f(x) = x^3 + (-9-9i)x^2 + (14+81i)x - 126i = (x-2)(x-7)(x-9i).$$

Тогда подстановка коэффициентов многочлена в формулы с (15) по (18) соответственно дает следующие приближенные значения корня:

$$x_{*3/4} \approx 1,99209 + 0,00132i\ ;$$
$$x_{*4/5} \approx 1,99757 + 0,00115i\ ;$$
$$x_{*5/6} \approx 1,99948 + 0,00037i\ ;$$
$$x_{*6/7} \approx 1,99986 + 0,00007i\ .$$

Заключение. В статье предложен новый алгоритм для получения формул приближенного нахождения наименьшего по модулю корня алгебраического уравнения третьей степени через его коэффициенты. Наиболее простые из них явно представлены под номерами (15)–(18). Рассмотрение конкретных примеров подтвердило эффективность применения данных формул. Главными их достоинствами являются быстрота вычислений и удобство использования на практике. Полученные формулы включают в себя только 4 арифметические операции над коэффициентами уравнения.

Основным ограничением на применение формул (15)–(18) является наличие только одного минимального по модулю корня уравнения.

Используя предложенный в статье алгоритм, можно получить формулы приближенного нахождения наименьшего по модулю решения алгебраических уравнений более высоких степеней.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Alekseev, V.B. Abel's Theorem in Problems and Solutions / V.B. Alekseev. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 285 p.
2. Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ-алгоритма / В.И. Шмойлов. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.
3. Власова, Е.А. Ряды: учебник для вузов / Е.А. Власова; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 616 с.

R E F E R E N C E S

1. Alekseev, V.B. *Abel's Theorem in Problems and Solutions*, New York, Kluwer Academic Publishers, 2004, 285 p.
2. Shmoylov, V.I. *Resheniye algebraicheskikh uravneniy pri pomoshchi r/φ-algoritma* [Solution of algebraic equations by means of a r/φ-algorithm], Taganrog, Taganrog Institute of technology, 2011, 330 p.
3. Vlasova, E.A. *Ryady* [Series], Moscow, MSTU, 2006, 616 p.

Поступила в редакцию 15.11.2017

Адрес для корреспонденции: e-mail: yrii_trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.