Идемпотентные полугруппы линейных отношений

М.И. Наумик, Т.К. Петрова
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В настоящей статье изучаются идемпотентные полугруппы линейных отношений, т.е. частичные многозначные линейные преобразования конечномерного векторного пространства над полем.

Цель работы – получение строения идемпотентных полугрупп линейных отношений.

***Материал и методы.** Применяются методы общей алгебры и линейной алгебры, а также методы теории полугрупп для изучения идемпотентных полугрупп линейных отношений.*

***Результаты и их обсуждение.** Пусть V – произвольное конечномерное векторное пространство над полем. Для того чтобы множество идемпотентных линейных отношений было полугруппой левых нулей, необходимо и достаточно, чтобы совпадали вторые проекции и коядра. Аналогично, для того чтобы множество идемпотентов линейных отношений было полугруппой правых нулей, необходимо и достаточно, чтобы совпали их первые проекции и ядра. Доказано, что любая идемпотентная полугруппа линейных отношений есть конечная полурешетка прямоугольных полугрупп.*

***Заключение.** Результаты можно применять в дальнейшем для изучения полугрупп идемпотентов линейных отношений, т.е. для коммутативных полугрупп идемпотентов и медиальных полугрупп идемпотентов линейных отношений, а также для инверсных полугрупп линейных отношений.*

***Ключевые слова:** линейные отношения, идемпотент, полурешетка, решетка.*

Idempotent Semigroups of Linear Relations

M.I. Naumik, T.K. Petrova
Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

Idempotent semigroups of linear relations, i.e. partial multivalued linear transformations of finite vector space over the field, are studied in the article.

The purpose is to obtain the composition of idempotent semigroups of linear relations.

***Material and methods.** Methods of general algebra and linear algebra are used as well as methods of the semigroup theory for the study of idempotent semigroups of linear relations.*

***Findings and their discussion.** Let V be an arbitrary finite vector space over the field. For the multitude of idempotent linear relations to be a semigroup of left nils, it is necessary and sufficient that secondary projections and co-nuclei should coincide. Similarly, for the multitude of idempotents of linear relations to be a semigroup of right nils, it is necessary and sufficient that their first projections and nuclei should coincide. It is proven that any idempotent semigroup of linear relations is a finite semigrate of rectangular semigroups.*

***Conclusion.** The results can be further applied in studying semigroups of idempotents of linear relations, i.e. for commutation semigroups of idempotents and medial semigroups of idempotents of linear relations as well as for inverse semigroups of linear relations.*

***Key words:** linear relations, idempotent, semigrate, grate.*

Полугруппа называется идемпотентной (используется также термин «связка»), если она удовлетворяет тождеству $a^2 = a$.

Как известно, на каждой идемпотентной полугруппе отношение $a \leq b$, вводимое посредством условия $ab = ba = a$, определяет порядок. Мы всегда будем именно в этом смысле писать знак неравенства между элементами идемпотентной полугруппы.

Очевидно, что идемпотентная полугруппа коммутативна только в том случае, когда соответствующее упорядоченное множество является нижней полурешеткой. Еще один важный класс составляют полугруппы идемпотентов, порядок на которых совпадает с равенством. Это вполне простые полугруппы идемпотентов и называются прямоугольными. Частными случаями прямоугольных являются сингулярные полугруппы – правосингулярные (или полугруппы правых нулей) и левосингулярные (или полугруппы левых нулей).

Важную роль полурешеток и прямоугольных полугрупп во многом определяет следующий известный результат. Пусть *S* – произвольная идемпотентная полугруппа. Отношение *D*, удовлетворяющее для $a, b \in S$ условию $(a, b) \in D \Leftrightarrow aba = a \wedge bab = b$, является конгруэнцией на *S*. Факторполугруппа *S*/*D*, обозначаемая в дальнейшем через S^D, есть полурешетка, а классы конгруэнтности суть максимальные прямоугольные полугруппы в *S*.

Материал и методы. Пусть *V* – *n*-мерное векторное пространство над полем *F*. Напомним, что линейным отношением на *V* называется подпространство пространства $V \oplus V$. Множество всех линейных отношений на *V* с операцией умножения является полугруппой, которая обозначается *LR(V)* [1; 2].

Пусть $a \in LR(V)$. Положим

$pr_1 a = \{x \in V / (\exists y \in V), (x, y) \in a\}$; $\ker a = \{x \in V / (x, 0) \in a\}$;

$pr_2 a = \{y \in V / (\exists y \in V), (x, y) \in a\}$; $\operatorname{coker} a = \{y \in V / (0, y) \in a\}$.

Ясно, что $\ker a \in pr_1 a$ и $\operatorname{coker} a \subseteq pr_2 a$.

Лемма [3]. Каждое линейное отношение *a* индуцирует изоморфизм $\bar{a} : pr_1 a \,/\ker a \cong pr_2 a \,/ \operatorname{coker} a$, определяемый равенством $(x + \ker a)\bar{a} = y + \operatorname{coker} a$ для каждой пары $(x, y) \in a$.

Ранг линейного отношения $a \in LR(V)$ определяется формулой $\operatorname{rank} a = \dim (pr_1 a) - \dim (\ker a)$.

Согласно предыдущей лемме $\operatorname{rank} a = \dim (pr_2 a) - \dim (\operatorname{coker} a)$.

Обозначим полугруппу $S \subseteq LR(V)$ и $\operatorname{Pr}_1 S = \sum_{a \in S} pr_1 a$, $\operatorname{Pr}_2 S = \sum_{a \in S} pr_2 a$,

$$\ker S = \sum_{a \in S} \ker a, \ \operatorname{coker} S = \sum_{a \in S} \operatorname{coker} a.$$

Если *a* – идемпотент, то для любого подпространства $V_0 \subseteq V$, $pr_1 a = V_0 \oplus \ker a$, $pr_2 a = V_0 + \operatorname{coker} a$ имеем $(x, x) \in a$ для любого $x \in V_0$.

Если $V_0, V_1 \in V$ подпространства пространства *V*, то линейное отношение $(V_0, V_1) = \{(x, y) / x \in V_0, y \in V_1\}$.

Полугруппу из *LR(V)* будем называть полугруппой линейных отношений степени *n*, если *n* размерность пространства *V*.

Результаты и их обсуждение. Данная работа обобщает [4; 5].

Теорема 1. *Пусть V – произвольное конечномерное векторное пространство над полем F. Для того чтобы множество идемпотентов* $S \subseteq LR(V)$ *было левосингулярной (полугруппой левых нулей) полугруппой, необходимо и достаточно, чтобы совпали их вторые проекции и коядра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S \subseteq LR(V)$ – идемпотентная полугруппа линейных отношений и $a, b \in S$, т.е. $ab = a$, $ba = b$. Отсюда имеем $pr_2 a \subseteq pr_2 b$, $pr_2 b \subseteq pr_2 a$, т.е. $pr_2 a \subseteq pr_2 b$ и $\operatorname{coker} b \subseteq \operatorname{coker} a$, $\operatorname{coker} a \subseteq \operatorname{coker} b$, т.е. $\operatorname{coker} a = \operatorname{coker} b$.

Обратно, пусть $S \subseteq LR(V)$ идемпотентная полугруппа линейных отношений и $a, b \in S$, т.е. $pr_2 a = pr_2 b$ и $\operatorname{coker} a = \operatorname{coker} b$. Имеем $\operatorname{rank} a = \dim (pr_2 a) - \dim (\operatorname{coker} a) = \dim (pr_2 b) - \dim (\operatorname{coker} b) = \operatorname{rank} b$. Существует подпространство $V_0 \subseteq V$ такое, что $pr_1 a = V_0 \oplus \ker a$, $pr_2 a = V_0 \oplus \operatorname{coker} a$, $pr_1 b = V_0 \oplus \ker b$, $pr_2 b = V_0 \oplus \operatorname{coker} b$ и для любого $x \in V_0$ имеем $(x, x) \in a$ и $(x, x) \in b$. Отсюда следует, что $ab = a$, т.е. полугруппа *S* есть полугруппа левых нулей. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть V – произвольное конечномерное векторное пространство над полем F. Для того чтобы множество идемпотентов* $S \subseteq LR(V)$ *было правосингулярной (полугруппой правых нулей) полугруппой, необходимо и достаточно, чтобы совпадали их первые проекции и ядра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично теореме 1.

Теорема 3. *Если S – идемпотентная полугруппа линейных отношений степени n, то длина любой цепи в* S^D *не превосходит n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть *V* – *n*-мерное векторное пространство над полем *F*, *S* – идемпотентная полугруппа линейных отношений степени *n* и Δ – идемпотентная прямоугольная полугруппа линейных отношений. Для любых $a, b \in \Delta$ имеем: $\operatorname{rank} a = \operatorname{rank}(aba) \le \operatorname{rank} b$; $\operatorname{rank}(bab) \le \operatorname{rank} a$. Следовательно, ранги всех линейных отношений в Δ совпадают. Поэтому можно определить ранг прямоугольной полугруппы Δ: $\operatorname{rank} \Delta = \operatorname{rank} a$ для любого $a \in \Delta$.

Рассмотрим теперь такие прямоугольные компоненты $\Delta_0, \Delta_1 \in S^D$, что $\Delta_0 < \Delta_1$. Если $a \in \Delta_0, b \in \Delta_1$, то идемпотент $c = bab \in \Delta_0$ служит нулем для *b*. Из равенства $cb = bc = c$ вытекают включения $pr_1 c \subseteq pr_1 b$, $pr_2 c \subseteq pr_2 b$, $\ker b \subseteq \ker c$, $\operatorname{coker} b \subseteq \operatorname{coker} c$. Поскольку $c \neq b$, очевидно, что эти включения строгие. Поэтому $\operatorname{rank} \Delta_0 = \operatorname{rank} c = \dim(pr_2 c) - \dim (\operatorname{coker} c) < \dim (pr_2 b) - \dim (\operatorname{coker} b) = \operatorname{rank} b = \operatorname{rank} \Delta_1$.

Отсюда следует утверждение теоремы.

Докажем основную теорему.

Теорема 4. *Любая идемпотентная полугруппа линейных отношений есть конечная полурешетка прямоугольных полугрупп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S – любая фиксированная идемпотентная полугруппа из $LR(V)$. Докажем конечность полурешетки S^D. Поскольку ограниченность длин цепей в S^D установлена в предыдущей теореме, осталось показать, что мощность множества прямоугольных компонент, покрывающих произвольную данную компоненту, ограничена некоторым натуральным числом.

Пусть Δ_0 – произвольная прямоугольная компонента полугруппы S и компонента Δ_1 покрывает Δ_0 в полурешетке S^D. Возьмем произвольный элемент $b \in \Delta_1$ и покажем, что хотя бы одно из линейных отношений $b_1 = b \cap (\ker \Delta_0; V)$, $b_2 = b \cap (V / \mathrm{Pr}_1 \Delta_0, V)$ является линейным отношением ненулевого ранга. Допустим противное. Отсюда следует, что $\beta \in \Delta_0$, и это противоречит исходному неравенству $\Delta_0 < \Delta_1$.

Рассмотрим множество $\{\Delta_\nu / \nu \in A\}$ всех компонент, покрывающих Δ_0. Выберем по одному представителю $b_\nu \in \Delta_\nu$ и определим идемпотенты $\delta_\upsilon = b_\upsilon \cap (\ker \Delta_0 \times V / \mathrm{Pr}_1 \Delta_0; V)$.

Так как $\Delta_0 \cap (\ker \Delta_0 \times V / \mathrm{Pr}_1 \Delta_0; V)$ – линейное отношение ненулевого ранга и $b_\mu \cdot b_\nu; b_\nu \cdot b_\mu \in \Delta_0$ для любых различных $\mu, \nu \in A$, имеем $\delta_\mu \cdot b_\upsilon$, $b_\upsilon \cdot \delta_\mu$ – линейные отношения ненулевого ранга. В силу ранее доказанного все b_υ имеют ненулевой ранг и, следовательно, различные, т.е. отображение $b_\upsilon \to \delta_\upsilon$ взаимно-однозначно. Но число попарно «ортогональных» идемпотентов ненулевого ранга не может превосходить размерность пространства. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В доказательстве этой теоремы вместо b_1 и b_2 можно было брать линейные отношения b_1' и b_2' такие, что $b_1' = b \cap (V; \mathrm{coker}\, \Delta_0)$, $b_2' = b \cap (V; \mathrm{coker}\, \Delta_0)$.

Заключение. В работе дано строение идемпотентной полугруппы линейных отношений конечномерного векторного пространства над полем. Одновременно доказаны теоремы 1 и 2.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Sneperman, L.B. The Shur theorem for periodic semigroups of linear relation / L.B. Sneperman // Semigroups Forum. – 1982. – Vol. 25. – S. 203–211.
2. Наумик, М.И. Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 3. – С. 34–37.
3. Маклейн, С. Алгебра аддитивных отношений / С. Маклейн // Сб. переводов. Математика. – 1963. – № 7:6. – С. 1–12.
4. Коряков, И.О. Матричные полугруппы идемпотентов / И.О. Коряков // XIII Всесоюз. алгебр. Симпозиум: тез. докл. – Гомель, 1975. – С. 219–222.
5. Коряков, И.О. Линейные полугруппы идемпотентов / И.О. Коряков // Матем. зап. Урал. ун-та. – Т. 11, № 1(1978). – С. 54–96.

R E F E R E N C E S

1. Sneperman, L.B. The Shur theorem for periodic semigroups of linear relation / L.B. Sneperman // Semigroups Forum. – 1982. – Vol. 25. – S. 203–211.
2. Naumik M.I. *Dokladi NAN Belarusi* [Reports of NASc of Belarus], 2004, 48(3), pp. 34–37.
3. Maclein S. *Sb. perevodov. Matematika* [Collection of Translations. Mathematics], 1963, 7:6, pp. 1–12.
4. Koriakov I.O. *XIII Vsesoyuzn. algebr. simpozium. Tez. dokl.* [XIII Union Algebra Symposium. Abstracts of reports], Gomel, 1975, pp. 219–222.
5. Koriakov I.O. *Matem. zap. Ural. un-ta* [Mathem. Abstracts of Ural University], 11(1), 1978, pp. 54–96.

Поступила в редакцию 08.09.2017

Адрес для корреспонденции: e-mail: naumik@tut.by – Наумик М.И.