МАТЭМАТЫКА

УДК 517.977

О единственности граничных управлений косыми производными на концах струны за любой короткий промежуток времени

Ф.Е. Ломовцев, С.П. Ходос
Белорусский государственный университет

В настоящей статье исследована единственность управлений $\{\mu_1, \mu_2\}$ *задачи граничного управления для финальных моментов времени* T, *удовлетворяющих неравенствам* $n-1<T\le n$, *где индекс* n *принимает любое из трех значений* 1; 2; 3.

Цель работы – изучение единственности граничных управлений задачи управления колебаниями ограниченной струны во множестве ее классических решений посредством нехарактеристических нестационарных первых косых производных в граничных условиях на концах струны.

Материал и методы. *Материалом служит задача управления колебаниями струны с помощью данных граничных условий на концах струны в случае нехарактеристических нестационарных первых косых производных. Исследование единственности управлений проводится путем анализа условий управляемости вместе с требованиями гладкости и условиями согласования исходных данных задачи управления на основе явных рекуррентных формул классических решений соответствующей смешанной задачи.*

Результаты и их обсуждение. *Согласно теореме существования классических решений задачи граничного управления в случае непрерывно дифференцируемого и нехарактеристического граничного режима эти решения существуют для тех и только тех исходных данных задачи (правой части, начальных и финальных данных), которые удовлетворяют соответствующим требованиям гладкости и условиям управляемости. Доказано, что для любых исходных данных, для которых выполняются такие требования и условия, всегда существует пара управлений* $\{\mu_1, \mu_2\}$, *удовлетворяющих соответствующим условиям согласования граничного режима с уравнением колебаний струны, начальным состоянием и финальным состоянием струны. Установлено, что эта пара управлений* $\{\mu_1, \mu_2\}$ *единственна для любого финального момента времени* $0<T\le 2$ *и не единственна для любого финального момента времени* $2<T\le 3$.

Заключение. *Указаны алгоритм и формулы для последовательного вычисления этих единственных и неединственных управлений в явном виде. В дальнейшем неединственные управления подлежат оптимизации. Алгоритм доказательства и формулы вычисления управлений не используют метод продолжений исходных данных задачи управления вне множеств задания этих данных при постановке изучаемой задачи.*

Ключевые слова: *задача граничного управления, финальный момент управления, классическое решение задачи управления, граничное управление, требование гладкости, условие управляемости, условие согласования.*

On the Uniqueness of Boundary Controls by Oblique Derivatives at the Ends of a String in Arbitrary Short Time Interval

F.E. Lomovtsev, S.P. Hodos
Belarusian State University

In this paper we study the uniqueness of controls $\{\mu_1, \mu_2\}$ *of the boundary control problem for the final instants of time* T, *satisfying the inequalities* $n-1<T\leq n,$ *where the index* n *takes any of the three values* $1; 2; 3.$ *The purpose of the article is to study the uniqueness of boundary controls for the problem of controlling the oscillations of a bounded string in the set of its classical solutions by means of the non-characteristic non-stationary first oblique derivatives in the boundary conditions at the ends of the string.*

Material and methods. *The material of this work is the problem of controlling the string oscillations with the help of given boundary conditions at the ends of a string in the case of non-characteristic non-stationary first oblique derivatives. The uniqueness of controls is investigated by analyzing the controllability conditions together with the smoothness requirements and the matching conditions for the given data of the control problem on the basis of explicit recurrence formulas for classical solutions of the corresponding mixed problem.*

Results and its discussion. *According to the existence theorem for classical solutions of the boundary control problem in the case of a continuously differentiable and non-characteristic boundary regime, these solutions exist for those and only those input data of the problem (the right-hand side, initial and final data) that satisfy the corresponding smoothness requirements and controllability conditions. It is proved that for any given data for which such requirements and conditions are fulfilled, there always exists a pair of controls* $\{\mu_1, \mu_2\},$ *satisfying the matching conditions for the boundary regime with the equation of the string oscillations, the initial state and the final state of the string. It is established that this pair of controls* $\{\mu_1, \mu_2\},$ *is unique for any final time moment* $0<T\leq 2$ *and is not unique for any final time moment* $2<T\leq 3.$

Conclusion. *The algorithm and formulas for the sequential calculation of these unique and not unique controls in explicit form are indicated. In the future, not unique controls is subject to optimization. The proof algorithm and the formulas for calculating controls do not use the method of continuations of the input data of the control problem outside the sets of the specification of these data when the control problem is formulated.*

Key words: *the problem of boundary control, the final control moment, the classical solution of the control problem, the boundary control, the smoothness requirement, the controllability condition, the matching condition.*

В работе исследуется единственность управлений вынужденными колебаниями ограниченной струны с помощью граничных значений первых косых производных в случае зависящих от времени коэффициентов, при этом не используется метод продолжений (отражений) входных данных (правой части уравнения, начальных и финальных данных) и граничных данных вне множеств их задания за короткое финальное время. Доказано, что во множестве классических решений за произвольно короткий промежуток времени, который не превосходит длину струны, при необходимых и достаточных условиях гладкости и управляемости на входные данные этой задачи существует единственная пара управлений, удовлетворяющая начальным и финальным условиям согласования (теорема 3). Если же финальное время хоть чуть больше длины струны, то во множестве классических решений при необходимых и достаточных условиях гладкости и управляемости на входные данные исследуемой задачи существует неединственная пара управлений, удовлетворяющая начальным и финальным условиям согласования (теорема 3). В доказательстве теоремы 3 построен алгоритм последовательного вычисления таких управлений в явном аналитическом виде через промежуточные смещения и скорости из теоремы 2. Эти результаты получены на основе рекуррентных формул решения и критерия однозначной устойчивой везде разрешимости (теорема 1) из работ [1–3] благодаря необходимым и достаточным условиям гладкости, управляемости и согласования на входные и граничные данные исследуемой задачи управления (теорема 2) из [4]. Существование единственных управлений для этой же задачи граничного управления за время, равное длине струны, установлено в [5], но в случае периодического четного продолжения правой части уравнения по пространственной переменной. Результаты настоящего исследования согласуются с результатами В.А. Ильина и других по (неоптимальному) управлению колебаниями струны с помощью стационарных граничных условий и продолжений входных и граничных данных вне множества задания задач управления [6–11].

Цель статьи – изучение единственности граничных управлений задачи управления колебаниями ограниченной струны во множестве ее классических решений посредством нехарактеристических нестационарных первых косых производных в граничных условиях на концах струны.

Материал и методы. За произвольно заданный финальный момент времени $t=T>0$ требуется привести струну длины d, вынужденные колебания которой моделируются уравнением

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t), a>0, \{x,t\}\in Q_T=[0,d]\times[0,T], \quad (1)$$

из произвольно заданного начального состояния

$$u|_{t=0}=\phi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x), x\in[0,d], \quad (2)$$

с помощью выбора значений $\{\mu_1,\mu_2\}$ граничного режима

$$[\Gamma_i(t)u]|_{x=d(i-1)}\equiv[\alpha_i(t)u_t+\beta_i(t)u_x+\gamma_i(t)u]|_{x=d(i-1)}=\mu_i(t), t\in[0,T], i=1,2, \quad (3)$$

в произвольно заданное финальное состояние

$$u|_{t=T}=\phi(x), u_t|_{t=T}=\psi(x), x\in[0,d]. \quad (4)$$

Определение 1. *Задача* (1)–(4) *называется задачей граничного управления. Функции* u *называются решениями, граничные данные* $\mu_i, i=1,2,$ *– управлениями, время* $t=0$ *– начальным моментом управления и время* $t=T$ *– финальным моментом управления задачи граничного управления* (1)–(4).

Задача граничного управления (1)–(4) заменой $x'=2x/d, t'=2at/d$ сводится к задаче граничного управления (1)–(4) при $a=1, d=2$ и наоборот. Для любого короткого финального момента времени $T>0$ исследуем единственность граничных управлений μ_1,μ_2 задачи (1)–(4) при $a=1$ и $d=2$ во множестве классических решений. Необходимые и достаточные требования гладкости, условия согласования и условия управляемости на входные данные для существования управлений этой задачи устанавливаются следующими вспомогательными утверждениями.

Вспомогательные утверждения. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество всех k-раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω и $C^0(\Omega)=C(\Omega)$ – множество всех непрерывных функций на Ω. Из постановки задачи управления (1)–(4) при $a=1, d=2$ и гладкости ее решений $u\in C^2(Q_T)$ непосредственно вытекает необходимость требований гладкости:

$$f\in C(Q_T),\ \phi,\phi\in C^2[0,2],\psi,\psi\in C^1[0,2],\ \mu_1,\mu_2\in C^1[0,T], \quad (5)$$

а также необходимость соответствующих пар начальных и финальных условий согласования:

$$\alpha_i(0)\psi(2i-2)+\beta_i(0)\phi'(2i-2)+\gamma_i(0)\phi(2i-2)=\mu_i(0),$$

$$\alpha_i(0)[\phi''(2i-2)+f(2i-2,0)]+[\alpha_i'(0)+\gamma_i(0)]\psi(2i-2)+$$

$$+\beta_i(0)\psi'(2i-2)+\beta_i'(0)\phi'(2i-2)+\gamma_i'(0)\phi(2i-2)=\mu_i'(0), i=1,2, \quad (6)$$

$$\alpha_i(T)\psi(2i-2)+\beta_i(T)\phi'(2i-2)+\gamma_i(T)\phi(2i-2)=\mu_i(T),$$

$$\alpha_i(T)[\phi''(2i-2)+f(2i-2,T)]+[\alpha_i'(T)+\gamma_i(T)]\psi(2i-2)+$$

$$+\beta_i(T)\psi'(2i-2)+\beta_i'(T)\phi'(2i-2)+\gamma_i'(T)\phi(2i-2)=\mu_i'(T), i=1,2. \quad (7)$$

Необходимость еще требования гладкости (11) на f содержится в формулировке теоремы 1.

Существование управлений поставленной задачи граничного управления (1)–(4) доказывается с помощью рекуррентных формул классических решений $u \in C^2(Q)$ и необходимых и достаточных условий однозначной устойчивой везде разрешимости смешанной задачи (1)–(3), которая решается и исследуется в [1] методом «вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [3]. Мы будем использовать следующий вариант теоремы из работы [1] для ограниченных прямоугольников $Q_n = [0,2]\times[0,n],\ n = 1,2,\ldots$ Для записи рекуррентных формул решений эти прямоугольники Q_n разбиваются на прямоугольники $Q^{(k)} = [0,2]\times[k-1,k]$ и характеристиками уравнения (1) на треугольники:

$$\Delta_{3k-2} = \{\{x,t\} : k-1 \le t < x+k-1, t < k+1-x, 0 < x < 2\},\ \Delta_{3k-1} = \{\{x,t\} : x+k-1 \le t \le k-x, 0 \le x \le 1\},$$

$$\Delta_{3k} = \{\{x,t\} : k+1-x \le t \le k, 1 \le x \le 2\},\ k = 1,2,\ldots,n.$$

Теорема 1 [1]. *Пусть выполняются условия гладкости:* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in C^1[0,n]$, *и нехарактеристичности косых производных:* $\alpha_i(t) \ne (-1)^{i+1}\beta_i(t),\ t\in[0,n],\ i = 1,2.$ *Смешанная задача* (1)–(3) *при* $a = 1, d = 2$ *имеет единственное устойчивое классическое решение* $u \in C^2(Q_n)$:

$$u_{3k-2}(x,t) = 2^{-1}[\phi_k(x+t_k) + \phi_k(x-t_k) + \Psi_k(x-t_k, x+t_k) + F_{1,k}(x,t)],\ \{x,t\}\in\Delta_{3k-2}, \tag{8}$$

$$u_{3k-1}(x,t) = 2^{-1}[\phi_k(x+t_k) - \phi_k(t_k-x) + \Psi_k(t_k-x, x+t_k) + F_{1,k}(x,t)] +$$

$$+\Phi_1^{(k)}(t-x) - F_1^{(k)}(t-x),\ \{x,t\}\in\Delta_{3k-1}, \tag{9}$$

$$u_{3k}(x,t) = 2^{-1}[\phi_k(x-t_k) - \phi_k(4-x-t_k) + \Psi_k(x-t_k, 4-x-t_k) + F_{2,k}(x,t)] +$$

$$+\Phi_2^{(k)}(t+x-2) - F_2^{(k)}(t+x-2),\ \{x,t\}\in\Delta_{3k},\ k = 1,2,\ldots,n, \tag{10}$$

где промежуточные начальные состояния и рекуррентные слагаемые решения равны

$$\phi_1(x) = \phi(x),\ \psi_1(x) = \psi(x), x\in[0,2];\ \phi_k(x) = u_{3k-5+j}(x,k-1),$$

$$\psi_k(x) = (u_{3k-5+j})_t(x,k-1), x\in[j-1,j], j = 1,2, k = 2,3,\ldots,n;\ t_k = t-k+1;$$

$$\Psi_k(b,c) = \int_b^c \psi_k(s)ds,\quad F_{i,k}(x,t) = \int_{k-1}^{t}\int_{p_i(x)-t+\tau}^{p_i(x)+t-\tau} f(p_i(|s|),\tau)\,ds\,d\tau,\quad p_i(x) = 2i-2-(-1)^i x,$$

$$\Phi_i^{(k)}(\xi) = \int_{k-1}^{\xi} \frac{\chi_i(\xi,\nu)}{\alpha_i(\nu)+(-1)^i\beta_i(\nu)}\{\mu_i(\nu) - \beta_i(\nu)[\phi_k{}'(1+(-1)^i(k-\nu)) -$$

$$-(-1)^i\psi_k(1+(-1)^i(k-\nu))]\}d\nu + \phi_k(2i-2)\chi_i(\xi,k-1),\ \chi_i(b,c) = \exp\left\{\int_b^c \frac{\gamma_i(s)}{\alpha_i(s)+(-1)^i\beta_i(s)}ds\right\},$$

$$F_i^{(k)}(\xi) = \int_{k-1}^{\xi} \frac{\chi_i(\xi,\nu)}{\alpha_i(\nu)+(-1)^i\beta_i(\nu)}\left\{\gamma_i(\nu)\int_{k-1}^{\nu}\int_0^{\nu-\tau} f(2i-2-(-1)^i s,\tau)dsd\tau +\right.$$

$$+\alpha_i(\nu)\int\limits_{k-1}^{\nu} f(2i-2-(-1)^i(\nu-\tau),\tau)d\tau\Bigg\}d\nu, i=1,2,$$

тогда и только тогда, когда функции f,ϕ,ψ,μ_1,μ_2 *удовлетворяют требованиям гладкости* (5), *начальным условиям согласования* (6) *и выполняются требования гладкости*

$$\int_{k-1}^{t} f(|2-|2-x\pm(t-\tau)||,\tau)\,d\tau\in C^1(Q^{(k)}), k=1,2,...,n. \tag{11}$$

З а м е ч а н и е 1. Необходимые и достаточные требования гладкости (5), (11) и условия согласования (6) не зависят от свойств каких-либо продолжений исходных данных f,ϕ,ψ,μ_i,μ_2 вне прямоугольников Q_n. Выражения (8) являются аналогами известной полной формулы Даламбера–Эйлера классического решения задачи Коши.

Пусть $T>0$ – любой финальный момент времени управления, $n-1<T\le n, n=1,2,...$ Если обозначить $T_n=T-n+1,$ то $0<T_n\le 1, n=1,2,...$ Существование пары управлений $\{\mu_1,\mu_2\}$ в задаче граничного управления (1)–(4) очевидно вытекает из существования ее классического решения.

Теорема 2 [4]. *Пусть финальный момент* $n-1<T\le n$ *при некотором* $n=1,2,...,$ *и граничный режим* (3) *непрерывно дифференцируем и не имеет характеристических направлений:*

$$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\in C^1[0,T],\ \alpha_i(t)\ne(-1)^{i+1}\beta_i(t),\ t\in[0,T], i=1,2. \tag{12}$$

Классическое решение $u\in C^2(Q_T)$ *задачи управления* (1)–(4) *при* $a=1, d=2$ *существует для тех и только тех функций* $f,\phi,\psi,\phi,\psi,\mu_1,\mu_2,$ *которые при этом же* $n=1,2,...,$ *удовлетворяют на* Q_T *требованиям гладкости* (5), (11), *условиям согласования* (6), (7) *и условиям управляемости:*

$$U_{3n-1}(x)\equiv\phi_n(x+T_n)+\phi_n(0)+\int\limits_0^{x+T_n}\psi_n(s)ds+\int\limits_0^{T_n}\int\limits_{\tau}^{x+T_n-\tau} f(s,n-1+\tau)\,ds\,d\tau-$$

$$-\phi(x)-\phi(T_n)-\int\limits_{T_n}^{x}\psi(s)ds=0,\ x\in[0,T_n[,\ T_n=T-n+1,\ n=1,2,..., \tag{13}$$

$$U_{3n}(x)\equiv\phi_n(2)+\phi_n(x-T_n)+\int\limits_{x-T_n}^{2}\psi_n(s)ds+\int\limits_0^{T_n}\int\limits_{\tau}^{2-x+T_n-\tau} f(2-s,n-1+\tau)\,ds\,d\tau-$$

$$-\phi(2-T_n)-\phi(x)-\int\limits_{x}^{2-T_n}\psi(s)ds=0, x\in]2-T_n,2], n=1,2..., \tag{14}$$

при $T_n<1$ *для* $x\in[T_n,2-T_n]$ *условиям управляемости*

$$\left.\begin{aligned}&\phi_n'(x+T_n)+\psi_n(x+T_n)+\int\limits_0^{T_n} f(x+T_n-\tau,n-1+\tau)d\tau=\phi'(x)+\psi(x),\\&\phi_n'(x-T_n)-\psi_n(x-T_n)-\int\limits_0^{T_n} f(x-T_n+\tau,n-1+\tau)d\tau=\phi'(x)-\psi(x),\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

или при $T_n=1$ *вместо условий* (15) *для* $x=1$ *условиям управляемости*

$$\left.\begin{aligned} &\phi_n(2)+\phi_n(0)+\int_0^2 \psi_n(s)ds+\int_0^1\int_\tau^{2-\tau} f(s,n-1+\tau)\,ds\,d\tau=2\phi(1),\\ &\phi_n{}'(2)-\phi_n{}'(0)+\psi_n(2)+\psi_n(0)+\int_0^1[\,f(2-\tau,n-1+\tau)+f(\tau,n-1+\tau)]d\tau=2\psi(1). \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

З а м е ч а н и е 2. Действительно теорема 2 является теоремой существования управлений для задачи управления (1)–(4) при $a=1, d=2,$ потому что если существует ее классическое решение $u\in C^2(Q_T),$ то функции $\mu_i(t)=[\Gamma_i(t)u]\big|_{x=2(i-1)}\in C^1[0,T], i=1,2,$ будут ее управлениями.

Результаты и их обсуждение. Сформулируем основной результат настоящей работы о единственности и неединственности управлений задачи граничного управления (1)–(4) при $a=1, d=2$ во множестве классических решений.

Теорема 3. *Пусть* T *– финальные моменты управления,* $n-1<T\le n$ *при* $n=1,2,3,$ *для коэффициентов* $\alpha_i,\beta_i,,\gamma_i, i=1,2,$ *справедливо условие* (12), *для функций* f,ϕ,ψ,ϕ,ψ *на* Q_T *выполняются требования гладкости* (5), (11) *и условия управляемости* (13)–(16) *из теоремы 2 при соответствующем* $n=1,$ *или* $n=2,$ *или* $n=3.$ *Тогда для этих* f,ϕ,ψ,ϕ,ψ *задача граничного управления* (1)–(4) *при* $a=1, d=2$ *имеет удовлетворяющие условиям согласования (*6), (7) *управления* $\mu_1,\mu_2\in C^1[0,T],$ *которые единственны для любого* $0<T\le 2$ *и не единственны для любого* $2<T\le 3.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 в предположениях теоремы 3 существует, по крайней мере, одно классическое решение $u\in C^2(Q_T)$ задачи управления (1)–(4) и, следовательно, ее управления $\mu_1,\mu_2\in C^1[0,T],$ потому что условия управляемости (13)–(16) обеспечивают выполнение финального состояния (4) для любого $T>0$. Рассмотрим единственность управлений этой задачи граничного управления. В исследовании однозначности управлений в случае $\gamma_i\neq 0,\gamma_i\in C^1[0,T], i=1,2,$ можно воспользоваться следующим представлением управлений (см. аналог в [5, с. 1674]):

$$\mu_i(t)=\breve{\mu}_i(t)+\gamma_i(t)\breve{u}(2i-2,t), t\in[0,T], i=1,2, \quad (17)$$

где $\breve{\mu}_i, i=1,2,$ – управления задачи управления (1)–(4) в случае $\gamma_1=\gamma_2=0$ и $\breve{u}$ – решение задачи управления (1), (2), (4) с граничным режимом (см. аналог формулы (22) в [5, с. 1674]):

$$[\alpha_i(t)u_t+\beta_i(t)u_x]\big|_{x=2(i-1)}=\breve{\mu}_i(t),\ t\in[0,T],\ i=1,2, \quad (18)$$

где $\gamma_1=\gamma_2=0,$ для тех же самых функций $f,\phi,\psi,\phi,\psi.$ Пусть $\mu_1^{(j)},\mu_2^{(j)}, j=1,2,$ – две произвольные пары управлений задачи (1)–(4). Тогда в силу линейности исследуемой задачи управления пара их разностей $\mu_i=\mu_i^{(1)}-\mu_i^{(2)}, i=1,2,$ является управлением задачи управления (1)–(4) при $f=0,\phi=\psi=0,\phi=\psi=0.$ Аналогично работе [5] выводятся формулы пары управлений

$$\mu_1(t)=2^{-1}(\alpha_1(t)-\beta_1(t))[\psi(T-t)-\phi'(T-t)+(h_{3n-1})_t(T-t,T)-(h_{3n-1})_x(T-t,T)]+$$

$$+\gamma_1(t)[\phi(T-t)+h_{3n-1}(T-t,T)],\quad t\in]n-1,T], \quad (19)$$

$$\mu_2(t)=2^{-1}(\alpha_2(t)+\beta_2(t))[\psi(2-T+t)+\phi'(2-T+t)+(h_{3n})_t(2-T+t,T)+(h_{3n})_x(2-T+t,T)]+$$

$$+\gamma_2(t)[\phi(2-T+t)+h_{3n}(2-T+t,T)],\quad t\in]n-1,T],\qquad n=1,\ 2,\ 3, \quad (20)$$

где

$$h_{3n-1}(x,t)=2^{-1}[\phi_n(t_n-x)-\phi_n(t_n+x)-\Psi_n(t_n-x,t_n+x)-F_{1,n}(x,t)]+$$

$$+\int_{n-1}^{t-x}\frac{\chi_1(t-x,\nu)}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)}\beta_1(\nu)[\phi_n{}'(\nu-n+1)+\psi_n(\nu-n+1)]d\nu+F_1^{(n)}(t-x)-\phi_n(0)\chi_1(t-x,n-1),$$

$$h_{3n}(x,t)=2^{-1}[\phi_n(4-t_n-x)-\phi_n(x-t_n)-\Psi_n(x-t_n,4-t_n-x)-F_{2,n}(x,t)]+$$

$$+\int_{n-1}^{t+x-2}\frac{\chi_2(t+x-2,\nu)}{\alpha_2(\nu)+\beta_2(\nu)}\beta_2(\nu)[\phi_n{}'(1+n-\nu)-\psi_n(1+n-\nu)]d\nu+F_2^{(n)}(t+x-2)-\phi_n(2)\chi_2(t+x-2,n-1).$$

1) Пусть $n=1,$ т.е. финальный момент $0<T\le 1.$ Однородные правая часть $f=0$ уравнения, начальные $\phi=\psi=0$ и финальные $\phi=\psi=0$ данные очевидно удовлетворяют требованиям гладкости (5), (11) и условиям управляемости (13)–(16). Поэтому для $f=0,$ $\phi=\psi=0$ и $\phi=\psi=0$ по формулам (19), (20) находим управления $\breve{\mu}_i(t)=0, t\in[0,T], i=1,2,$ которые также удовлетворяют требованию гладкости из (5) и условиям согласования (6), (7). Поскольку однородная задача управления (1), (2), (4), (18) имеет лишь тривиальное решение $\breve{u}\equiv 0$ на $Q_T,$ то $\mu_i(t)=0, t\in[0,T], i=1,2,$ в силу представления (17) и, следовательно, для всех $\gamma_i\ne 0, \gamma_i\in C^1[0,T], i=1,2,$ управления задачи (1)–(4) единственны и выражаются в явном аналитическом виде формулами (19) и (20) при $n=1$.

2) Пусть $n=2,$ т.е. финальный момент $1<T\le 2.$ Согласно выражениям (9) и (10) теоремы 1 промежуточные смещение и скорость струны при $t=1$ соответственно равны:

$$\phi_2(x)=u_2(x,1)=\int_0^{1-x}\frac{\chi_1(1-x,\nu)\mu_1(\nu)}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)}d\nu,$$

$$\psi_2(x)=(u_2)_t(x,1)=\frac{\mu_1(1-x)}{\alpha_1(1-x)-\beta_1(1-x)}-\frac{\gamma_1(1-x)}{\alpha_1(1-x)-\beta_1(1-x)}\int_0^{1-x}\frac{\chi_1(1-x,\nu)\mu_1(\nu)}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)}d\nu,\ x\in[0,1],$$

$$\phi_2(x)=u_3(x,1)=\int_0^{x-1}\frac{\chi_2(x-1,\nu)\mu_2(\nu)}{\alpha_2(\nu)+\beta_2(\nu)}d\nu,$$

$$\psi_2(x)=(u_3)_t(x,1)=\frac{\mu_2(x-1)}{\alpha_2(x-1)+\beta_2(x-1)}-\frac{\gamma_2(x-1)}{\alpha_2(x-1)+\beta_2(x-1)}\int_0^{x-1}\frac{\chi_2(x-1,\nu)\mu_2(\nu)}{\alpha_2(\nu)+\beta_2(\nu)}d\nu,\ x\in[1,2].$$

Отсюда заключаем, что

$$\psi_2(x)-(-1)^j\phi_2{}'(x)=0,\ x\in[j-1,j],\ j=1,2. \tag{21}$$

В случае $\gamma_i(t)=0, t\in[0,T], i=1,2,$ из формул (19) и (20) для $t\in]1,T]$ соответственно находим значения

$$\breve{\mu}_1(t)=\frac{\alpha_1(t)-\beta_1(t)}{2}[(h_5)_t-(h_5)_x](T-t,T)=\frac{\alpha_1(t)+\beta_1(t)}{2}[\psi_2(t-1)+\phi_2{}'(t-1)]=0, \tag{22}$$

$$\breve{\mu}_2(t)=\frac{\alpha_2(t)+\beta_2(t)}{2}[(h_6)_t+(h_6)_x](2-T+t,T)=\frac{\alpha_2(t)-\beta_2(t)}{2}[\psi_2(3-t)-\phi_2{}'(3-t)]=0, \tag{23}$$

в силу свойств (21), так как $t-1\le 1$ и $3-t\ge 1$ для $t\in]1,T], T\le 2.$

Для $f=0$ и $\phi=\psi=0$ условие управляемости (13) имеет вид

$$J_1(x)=\phi_2(x+T_2)+\phi_2(0)+\int_0^{x+T_2}\psi_2(s)ds=0,\ x\in[0,T_2[. \tag{24}$$

i) Если $1<T\le 3/2,$ то $x+T_2\le 2T_2\le 1,$ благодаря свойствам (21) интегрируем

$$\int_0^{x+T_2}\psi_2(s)ds=-\int_0^{x+T_2}\phi_2{}'(s)ds=-\phi_2(x+T_2)+\phi_2(0)\,,$$

и поэтому условие управляемости (24) при $\gamma_1=0$ приводится к виду

$$J_1(x)=2\phi_2(0)=2\int_0^1\frac{\breve{\mu}_1(\nu)\,d\nu}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)}=0,\ x\in[0,T_2[. \tag{25}$$

ii) Если же $3/2<T\le 2,$ то возможны оба случая: а) $x+T_2<1$ и в) $x+T_2\ge 1.$ В первом случае, когда $x+T_2<1,$ т.е. $x<1-T_2,$ условие управляемости (24) очевидно сводится к виду (25) для $x\in[0,1-T_2[.$ В другом случае, когда $x+T_2\ge 1,$ т.е. $x\ge 1-T_2,$ благодаря свойствам (21) вычисляем интеграл

$$\int_0^{x+T_2}\psi_2(s)ds=-\int_0^1\phi_2{}'(s)ds+\int_1^{x+T_2}\phi_2{}'(s)ds=\phi_2(x+T_2)+\phi_2(0)-2\phi_2(1)\,,$$

и поэтому условие управляемости (24) при $\gamma_1=\gamma_2=0$ имеет вид

$$J_1(x)=2\left[\int_0^1\frac{\breve{\mu}_1(\nu)\,d\nu}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)}+\int_0^{x+T_2-1}\frac{\breve{\mu}_2(\nu)\,d\nu}{\alpha_2(\nu)+\beta_2(\nu)}\right]=0,\ x\in[1-T_2,T_2[, \tag{26}$$

так как $\phi_2(1)=0$ и $1-T_2<T_2$ для $T>3/2.$

Для $f=0$ и $\phi=\psi=0$ условием управляемости (14) является условие

$$J_2(x)=\phi_2(2)+\phi_2(x-T_2)+\int_{x-T_2}^{2}\psi_2(s)ds=0, x\in]2-T_2,2]. \tag{27}$$

i) Если $1<T\le 3/2,$ то $x-T_2>2-2T_2\ge 1,$ благодаря свойствам (21) интегрируем

$$\int_{x-T_2}^{2}\psi_2(s)ds=\int_{x-T_2}^{2}\phi_2{}'(s)ds=\phi_2(2)-\phi_2(x-T_2)\,,$$

и для $\gamma_2=0$ из равенства (27) получаем условие управляемости

$$J_2(x)=2\phi_2(2)=2\int_0^1\frac{\breve{\mu}_2(\nu)\,d\nu}{\alpha_2(\nu)+\beta_2(\nu)}=0, x\in]2-T_2,2]. \tag{28}$$

ii) Если $3/2<T\le 2,$ то возможны оба случая: а) $x-T_2>1$ и в) $x+T_2\le 1.$ Первый случай $x-T_2>1,$ т.е. $x>T,$ естественно сводится к условию управляемости (28) для $x\in]T,2].$ Второй случай $x-T_2\le 1,$ т.е. $x\le T,$ в силу (21) позволяет проинтегрировать

$$\int_{x-T_2}^{2} \psi_2(s)ds = -\int_{x-T_2}^{1} \phi_2'(s)ds + \int_{1}^{2} \phi_2'(s)ds = \phi_2(x-T_2) + \phi_2(2) - 2\phi_2(1),$$

и для $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ прийти к условию управляемости

$$J_2(x) = 2\left[\int_0^{T-x} \frac{\breve{\mu}_1(\nu)d\nu}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)} + \int_0^1 \frac{\breve{\mu}_2(\nu)d\nu}{\alpha_2(\nu)+\beta_2(\nu)}\right] = 0, x \in]2-T_2, T], \tag{29}$$

так как $2-T_2 < T$ для $T > 3/2.$

Когда $T_2 < 1,$ тогда для $f = 0$ и $\phi = \psi = 0$ два условия управляемости (15) соответственно заменами $s = x + T_2$ и $s = x - T_2$ сводятся к условиям:

$$\psi_2(s) + \phi_2'(s) = 0,\ s \in [2T_2, 2], \tag{30}$$

$$\psi_2(s) - \phi_2'(s) = 0,\ s \in [0, 2-2T_2]. \tag{31}$$

i) Если $1 < T \le 3/2,$ то $2T_2 = 2T - 2 \le 1,$ $2 - 2T_2 = 4 - 2T \ge 1,$ и поэтому ввиду (21) условие (30) требуется только для $s \in [1,2],$ что при $\gamma_2 = 0$ эквивалентно условию

$$\psi_2(s) + \phi_2'(s) = 2\psi_2(s) = 2\breve{\mu}_2(s-1)/[\alpha_2(s-1)+\beta_2(s-1)] = 0,\ s \in [1,2], \tag{32}$$

и условие (31) требуется только для $s \in [0,1],$ что при $\gamma_1 = 0$ эквивалентно условию

$$\psi_2(s) - \phi_2'(s) = 2\psi_2(s) = 2\breve{\mu}_1(1-s)/[\alpha_1(1-s)-\beta_1(1-s)] = 0,\ s \in [0,1]. \tag{33}$$

ii) Если $3/2 < T \le 2,$ то $2T_2 = 2T - 2 > 1,$ $2 - 2T_2 = 4 - 2T < 1,$ и поэтому ввиду (21) равенства (30) и (31) при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ соответственно эквивалентны равенствам:

$$\psi_2(s) + \phi_2'(s) = 2\psi_2(s) = 2\breve{\mu}_2(s-1)/[\alpha_2(s-1)+\beta_2(s-1)] = 0,\ s \in [2T_2, 2], \tag{34}$$

$$\psi_2(s) - \phi_2'(s) = 2\psi_2(s) = 2\breve{\mu}_1(1-s)/[\alpha_1(1-s)-\beta_1(1-s)] = 0,\ s \in [0, 2-2T_2]. \tag{35}$$

Когда $T_2 = 1,$ т.е. $T = 2,$ тогда для $f = 0,$ $\phi = \psi = 0$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ в силу (21) два условия управляемости (16) соответственно равны условиям:

$$2\left[\int_0^1 \frac{\breve{\mu}_1(\nu)d\nu}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)} + \int_0^1 \frac{\breve{\mu}_2(\nu)d\nu}{\alpha_2(\nu)+\beta_2(\nu)}\right] = 0, \tag{36}$$

$$2\left[\frac{\breve{\mu}_1(1)}{\alpha_1(1)-\beta_1(1)} + \frac{\breve{\mu}_2(1)}{\alpha_2(1)+\beta_2(1)}\right] = 0. \tag{37}$$

Таким образом, в случае i) $1 < T \le 3/2,$ когда $T_2 \le 1,$ тогда условия управляемости (32) и (33) соответственно требуют того, чтобы управления $\breve{\mu}_2(t) = 0$ и $\breve{\mu}_1(t) = 0$ для $t \in [0,1].$ Ввиду равенств (22), (23) в задаче управления (1), (2), (4), (18) возможны лишь тривиальные управления $\breve{\mu}_i(t) = 0,$ $t \in [0,T], i = 1,2,$ с которыми выполняются условия управляемости (25), (28) и вместе с $f = 0,$ $\phi = \psi = 0,$ $\phi = \psi = 0$ условия согласования (6) и (7).

В случае ii) $3/2 < T \le 2,$ когда $T_2 \le 1,$ тогда условия управляемости (34) и (35) соответственно требуют того, чтобы управления

$$\breve{\mu}_2(t) = 0,\ \breve{\mu}_1(t) = 0,\ t \in [2T_2 - 1, 1]. \qquad (38)$$

Методом от обратного покажем, что среди управлений $\breve{\mu}_i \in C^1[0,T], i = 1,2,$ со свойствами (38) только тривиальные на $[0, 2T_2 - 1]$ могут удовлетворять условиям управляемости (25) (для $x \in [0, T_2[$), (26) для $x \in [1 - T_2, T_2[,$ (28) (для $x \in]2 - T_2, 2]$), (29) для $x \in]2 - T_2, T].$ Пусть такие $\breve{\mu}_i, i = 1,2,$ не одновременно равные нулю, существуют. Дифференцируя один раз по x равенство (26), находим, что $\breve{\mu}_2(x + T_2 - 1) = 0, x \in [1 - T_2, T_2[,$ т.е. $\breve{\mu}_2(t) = 0, t \in [0, 2T_2 - 1[.$ Дифференцируя один раз по x равенство (29), находим, что $\breve{\mu}_1(T - x) = 0, x \in]2 - T_2, T],$ т.е. $\breve{\mu}_1(t) = 0, t \in [0, 2T_2 - 1[.$ Для проверки подставляем найденные значения функций $\breve{\mu}_i(t) = 0,$ $t \in [0, 2T_2 - 1[, i = 1,2,$ в равенства (25), (28) и в интегральные уравнения Вольтерра первого рода (26), (29) и, используя значения (38), убеждаемся в их справедливости. Полученное противоречие показывает истинность исходного утверждения. Как и выше, на основе равенств (22), (23) заключаем, что для $f = 0,$ $\phi = \psi = 0,$ $\phi = \psi = 0$ задача управления (1), (2), (4), (18) имеет только тривиальные управления $\breve{\mu}_i(t) = 0,$ $t \in [0,T], i = 1,2,$ для которых выполняются условия согласования (6) и (7). Это распространяется на случай $T = 2,$ потому что условие (36) представляет собой предел условия (26) при $T = 2$ и $x \to 1, x < 1,$ (и предел условия (29) при $T = 2$ и $x \to 1, x > 1$), а справедливость условия (37) вытекает из значений (38) при $T = 2.$ Так же, как и выше, из тривиальности решения $\breve{u} \equiv 0$ однородной задачи управления (1), (2), (4), (18) для $f = 0,$ $\phi = \psi = 0,$ $\phi = \psi = 0$ и представления управлений (17) следует единственность управлений $\mu_i, i = 1,2,$ в задаче (1)–(4) с $\gamma_i \ne 0, \gamma_i \in C^1[0,T], i = 1,2,$ для всех нетривиальных функций $f, \phi, \psi, \phi, \psi,$ удовлетворяющих условиям (5)–(7), (11), (13)–(16) на Q_T. Эти управления можно найти последовательно в явном виде, используя представления (19), (20) и указанные выше промежуточные смещение ϕ_2 и скорость ψ_2.

3) Пусть $n = 3,$ т.е. финальный момент $2 < T \le 3.$ Докажем неединственность управлений $\mu_i, i = 1,2,$ в задаче управления (1)–(4), используя их представление (17). В теореме 1 промежуточные смещение и скорость струны при $t = 2$ в силу рекуррентных формул решений (9), (10) и свойств (21) при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ соответственно равны:

$$\phi_3(x) = u_5(x,2) = \frac{1}{2}\left[\phi_2(x+1) - \phi_2(1-x) + \int_{1-x}^{x+1} \psi_2(s)\,ds\right] + \int_1^{2-x} \frac{\breve{\mu}_1(\nu)\,d\nu}{\alpha_1(\nu) - \beta_1(\nu)} + \phi_2(0),\ x \in [0,1],$$

$$\phi_3(x) = u_6(x,2) = \frac{1}{2}\left[\phi_2(x-1) - \phi_2(3-x) + \int_{x-1}^{3-x} \psi_2(s)\,ds\right] + \int_1^{x} \frac{\breve{\mu}_2(\nu)\,d\nu}{\alpha_2(\nu) + \beta_2(\nu)} + \phi_2(2),\ x \in [1,2].$$

В сумме производных $(u_5)_t(x,2) + \phi_3{}'(x)$ от функций (9) и ϕ_3 для $x \le 1$ сокращаются первые производные по t и x от тех зависящих от выражений вида $x \pm t + c, c \in R,$ слагаемых, в которых переменные t и x имеют противоположные знаки. Аналогично в разности $(u_6)_t(x,2) - \phi_3{}'(x)$ от функций (10) и ϕ_3 для $x \ge 1$ сокращаются первые производные по t и x от тех зависящих от выражений такого же вида слагаемых, в которых переменные t и x имеют одинаковые знаки. Поэтому верны соотношения

$$\psi_3(x) - (-1)^j \phi_3{}'(x) = \psi_2(x - (-1)^j) - (-1)^j \phi_2{}'(x - (-1)^j),\ x \in [j-1, j],\ j = 1,2. \qquad (39)$$

В случае $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ из представлений (19) и (20) для $f = 0,$ $\phi = \psi = 0$ и $t \in]2,T]$ соответственно

$$\breve{\mu}_1(t)=\frac{\alpha_1(t)-\beta_1(t)}{2}[(h_8)_t-(h_8)_x](T-t,T)=\frac{\alpha_1(t)+\beta_1(t)}{\alpha_2(t-2)+\beta_2(t-2)}\breve{\mu}_2(t-2), \tag{40}$$

$$\breve{\mu}_2(t)=\frac{\alpha_2(t)+\beta_2(t)}{2}[(h_9)_t+(h_9)_x](2-T+t,T)=\frac{\alpha_2(t)-\beta_2(t)}{\alpha_1(t-2)-\beta_1(t-2)}\breve{\mu}_1(t-2), \tag{41}$$

в силу (21) и (39), так как $t-2,3-t\le 1$ и $t-1,4-t\ge 1$ для $t\in]2,T],T\le 3.$

Для $f=0,$ $\phi=\psi=0$ имеем условие управляемости (13) вида

$$J_3(x)=\phi_3(x+T_3)+\phi_3(0)+\int_0^{x+T_3}\psi_3(s)ds=0,\ x\in[0,T_3[. \tag{42}$$

i) Если $2<T\le 5/2,$ то $x+T_3\le 2T_3\le 1$, и с помощью (21) и (39) интегрируем

$$\int_0^{x+T_3}\psi_3(s)ds=\int_0^{x+T_3}[\psi_2(s+1)+\phi_2{}'(s+1)-\phi_3{}'(s)]ds=$$

$$=\int_0^{x+T_3}[2\phi_2{}'(s+1)-\phi_3{}'(s)]ds=2\phi_2(x+T_2)-2\phi_2(1)-\phi_3(x+T_3)+\phi_3(0)$$

и видим, что условие управляемости (42) при $\gamma_1=\gamma_2=0$ приобретает вид

$$J_3(x)=2\left[\int_0^2\frac{\breve{\mu}_1(\nu)d\nu}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)}+\int_0^{x+T_3}\frac{\breve{\mu}_2(\nu)d\nu}{\alpha_2(\nu)+\beta_2(\nu)}\right]=0,\ x\in[0,T_3[. \tag{43}$$

ii) Если $5/2<T\le 3,$ то имеем случаи: $x+T_3<1$ и $x+T_3\ge 1.$ В случае $x+T_3<1,$ т.е. когда $x<1-T_3,$ тогда условие (42) приводится к виду (43) для $x\in[0,1-T_3[.$ В случае $x+T_3\ge 1,$ т.е. когда $x\ge 1-T_3,$ тогда в силу (21) и (39) верны равенства

$$\int_0^{x+T_3}\psi_3(s)ds=\int_0^1\psi_3(s)ds+\int_1^{x+T_3}\psi_3(s)ds=\int_0^1[\psi_2(s+1)+\phi_2{}'(s+1)-\phi_3{}'(s)]ds+$$

$$+\int_1^{x+T_3}[\psi_2(s-1)-\phi_2{}'(s-1)+\phi_3{}'(s)]ds=\int_0^1[2\phi_2{}'(s+1)-\phi_3{}'(s)]ds-\int_1^{x+T_3}[2\phi_2{}'(s-1)-\phi_3{}'(s)]ds=$$

$$=2\phi_2(2)-2\phi_2(1)-2\phi_3(1)+\phi_3(0)-2\phi_2(x+T_3-1)+2\phi_2(0)+\phi_3(x+T_3).$$

Можно убедиться в том, что в отличие от случая $n=2$ условие (42) приобретает ту же форму

$$J_3(x)=2[\phi_3(x+T_3)+\phi_2(2)-\phi_3(1)-\phi_2(x+T_3-1)+\phi_2(0)+\phi_3(0)]=$$

$$=2\left[\int_0^2\frac{\breve{\mu}_1(\nu)d\nu}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)}+\int_0^{x+T_3}\frac{\breve{\mu}_2(\nu)d\nu}{\alpha_2(\nu)+\beta_2(\nu)}\right]=0,\ x\in[1-T_3,T_3[,$$

так как $\phi_2(1)=0$ и $5-x-T\ge 5-T_3-T\ge 1,$ $x+T_3-1<2T_3-1\le 1$ и $1-T_3<T_3$ для $5/2<T\le 3.$ Итак, в случаях i) и ii) условие (42) совпадает с условием (43).

Для $f=0$ и $\phi=\psi=0$ условие управляемости (14) имеет вид

$$J_4(x)=\phi_3(2)+\phi_3(x-T_3)+\int\limits_{x-T_3}^{2}\psi_3(s)ds=0,\ x\in]2-T_3,2]. \tag{44}$$

i) Если $2<T\le 5/2,$ то $x-T_3\ge 2-2T_3\ge 1.$ Это позволяет интегрировать с помощью соотношений (21) и (39)

$$\int\limits_{x-T_3}^{2}\psi_3(s)ds=\int\limits_{x-T_3}^{2}[\psi_2(s-1)-\phi_2'(s-1)+\phi_3'(s)]ds=$$

$$=\int\limits_{x-T_3}^{2}[-2\phi_2(s-1)+\phi_3'(s)]ds=2\phi_2(x-T_2)-2\phi_2(1)+\phi_3(2)-\phi_3(x-T_3).$$

В результате условие (44) при $\gamma_1=\gamma_2=0$ становится условием управляемости

$$J_4(x)=2\left[\int\limits_0^{T-x}\frac{\breve{\mu}_1(\nu)\,d\nu}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)}+\int\limits_0^{2}\frac{\breve{\mu}_2(\nu)\,d\nu}{\alpha_2(\nu)+\beta_2(\nu)}\right]=0,\ x\in]2-T_3,2]. \tag{45}$$

ii) Если $5/2<T\le 3,$ то могут быть случаи $x-T_3>1$ и $x-T_3\le 1.$ Когда $x-T_3>1,$ т.е. $x>T_3+1,$ тогда условие (44) совпадает с условием (45) для $x\in]T_3+1,2].$ Когда $x-T_3\le 1,$ т.е. $x\le T_3+1,$ тогда интегрируем с помощью (21) и (39)

$$\int\limits_{x-T_3}^{2}\psi_3(s)ds=\int\limits_{x-T_3}^{1}[\psi_2(s+1)+\phi_2'(s+1)-\phi_3'(s)]ds+\int\limits_1^2[\psi_2(s-1)-\phi_2'(s-1)+\ \phi_3'(s)]ds=$$

$$=\int\limits_{x-T_3}^{1}[2\phi_2'(s+1)-\phi_3'(s)]ds-\int\limits_1^2[2\phi_2'(s-1)-\phi_3'(s)]ds=$$

$$=2\phi_2(2)-2\phi_2(x-T_3+1)-2\phi_3(1)+\phi_3(x-T_3)+2\phi_2(0)-2\phi_2(1)+\phi_3(2).$$

Нетрудно показать, что условие управляемости (44) при $\gamma_1=\gamma_2=0$ также приобретает форму (45), но для $x\in]2-T_3,T_3+1],$ так как $x-T_3+1\ge 3-2T_3\ge 1,$ $T_2-x<2T_2-2\le 1$ и $2-T_3<T_3+1$ для $5/2<T\le 3.$ Случаи i) и ii) свелись к одному условию (45).

Когда $T_3<1,$ тогда для $f=0$ и $\phi=\psi=0$ условия управляемости (15) заменами $s=x+T_3$ и $s=x-T_3$ соответственно сводятся к условиям:

$$\psi_3(s)+\phi_3'(s)=0,\ \ s\in[2T_3,2], \tag{46}$$

$$\psi_3(s)-\phi_3'(s)=0,\ \ s\in[0,2-2T_3]. \tag{47}$$

i) Если $2<T\le 5/2,$ то $2T_3\le 1,$ $2-2T_3\ge 1.$ Поэтому в силу (21) и (39) равенство (46) при $\gamma_2=0$ соответственно для $s\in[2T_3,1]$ и $s\in[1,2]$ равно условиям:

$$\psi_3(s)+\phi_3'(s)=\psi_2(s+1)+\phi_2'(s+1)=2\psi_2(s+1)=2\breve{\mu}_2(s)/[\alpha_2(s)+\beta_2(s)]=0, \tag{48}$$

$$\psi_3(s)+\phi_3'(s)=\psi_2(s-1)-\phi_2'(s-1)+2\phi_3'(s)=2\{\psi_2(s-1)+\phi_3'(s)\}=\ 2\{\psi_2(s-1)+$$
$$+2^{-1}[\phi_2'(s-1)+\phi_2'(3-s)-\psi_2(3-s)-\psi_2(s-1)]\ +\breve{\mu}_2(s)/[\alpha_2(s)+\beta_2(s)]\}=2\breve{\mu}_2(s)/[\alpha_2(s)+\beta_2(s)]=0,$$

которые в сумме дают одно равенство

$$\breve{\mu}_2(t) = 0,\ t \in [2T_3, 2]. \tag{49}$$

Аналогично условие (47) при $\gamma_1 = 0$ для $s \in [0,1]$ и $s \in [1, 2-2T_3]$ соответственно равно условиям:

$$\psi_3(s) - \phi_3'(s) = \psi_2(s+1) + \phi_2'(s+1) - 2\phi_3'(s) = 2\{\psi_2(s+1) - \phi_3'(s)\} =$$

$$= 2\{\psi_2(s+1) - 2^{-1}[\phi_2'(s+1) + \phi_2'(1-s) + \psi_2(s+1) + \psi_2(1-s)] +$$

$$+\breve{\mu}_1(2-s)/[\alpha_1(2-s) - \beta_1(2-s)]\} = 2\breve{\mu}_1(2-s)/[\alpha_1(2-s) - \beta_1(2-s)] = 0,$$

$$\psi_3(s) - \phi_3'(s) = \psi_2(s-1) - \phi_2'(s-1) = 2\psi_2(s-1) = 2\breve{\mu}_1(2-s)/[\alpha_1(2-s) - \beta_1(2-s)] = 0, \tag{50}$$

которые в сумме дают одно равенство

$$\breve{\mu}_1(t) = 0,\ t \in [2T_3, 2]. \tag{51}$$

ii) Если $5/2 < T \le 3,$ то $2T_3 > 1,\ 2 - 2T_3 < 1$, и поэтому ввиду преобразований (48), (50) условия (46) и (47) эквивалентны соответственно условиям (49) и (51).

Когда $T_3 = 1,$ т.е. $T = 3,$ тогда для $f = 0,\ \phi = \psi = 0$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ условия управляемости (16) в силу соотношений (21) и (39) соответственно равны условиям:

$$2\left[\int_0^2 \frac{\breve{\mu}_1(\nu)\,d\nu}{\alpha_1(\nu) - \beta_1(\nu)} + \int_0^2 \frac{\breve{\mu}_2(\nu)\,d\nu}{\alpha_2(\nu) + \beta_2(\nu)}\right] = 0, \tag{52}$$

$$2\left[\frac{\breve{\mu}_1(2)}{\alpha_1(2) - \beta_1(2)} + \frac{\breve{\mu}_2(2)}{\alpha_2(2) + \beta_2(2)}\right] = 0. \tag{53}$$

Из тождества (43) однократным дифференцированием по x получаем $\breve{\mu}_2(x + T_3) = 0, x \in [0, T_3[,$ т.е. $\breve{\mu}_2(t) = 0, t \in [T_3, 2T_3[.$ Из тождества (45) однократным дифференцированием по x получаем $\breve{\mu}_1(T - x) = 0, x \in]2 - T_3, 2],$ т.е. $\breve{\mu}_1(t) = 0, t \in [T_3, 2T_3[.$ Для проверки подставляем эти значения $\breve{\mu}_1,\ \breve{\mu}_2$ в интегральные уравнения Вольтерра первого рода (43) и (45) и ввиду значений (49) и (51) приходим к уравнению

$$\int_0^{T_3} \frac{\breve{\mu}_1(\nu)\,d\nu}{\alpha_1(\nu) - \beta_1(\nu)} + \int_0^{T_3} \frac{\breve{\mu}_2(\nu)\,d\nu}{\alpha_2(\nu) + \beta_2(\nu)} = 0\,. \tag{54}$$

Отсюда заключаем, что управления $\breve{\mu}_i, i = 1,2,$ – любые функции из множества $C^1[0,T],$ которые являются решениями уравнения (54) при $t \in [0, T_3]$, удовлетворяют равенствам $\breve{\mu}_i(0) = \breve{\mu}_i'(0) = 0, i = 1,2,$ для условий согласования (6) при $f = 0,\ \phi = \psi = 0,$ равны $\breve{\mu}_i(t) = 0,\ t \in [T_3, 2], i = 1,2,$ определяются равенствами (40), (41) для $t \in]2, T]$ через значения друг друга на отрезке $[0, T_3]$ и удовлетворяют равенствам $\breve{\mu}_i(T) = \breve{\mu}_i'(T) = 0, i = 1,2,$ для условий согласования (7) при $f = 0,\ \phi = \psi = 0.$ В частности, решениями уравнения (54) являются функции $\breve{\mu}_1(t)$ и $\breve{\mu}_2(t) = -\breve{\mu}_1(t)\{[\alpha_2(t) + \beta_2(t)]/[\alpha_1(t) - \beta_1(t)]\}$ $\forall \breve{\mu}_1 \in C^1[0, T_3].$

Когда $T = 3,$ тогда условие (52) представляет собой предел условия (43) при $T = 3$ и $x \to 1, x < 1,$ (и условия (45) при $T = 3$ и $x \to 1, x > 1$), а справедливость условия (53) следует из равенств (49) и (51) при $T = 3.$

Чтобы убедиться в том, что в задаче управления (1)–(4) для $f=0,$ $\phi=\psi=0,$ $\phi=\psi=0$ и $\forall\gamma_i\neq 0,$ $\gamma_i\in C^1[0,T], i=1,2,$ всегда существует нетривиальная пара управлений $\{\mu_1,\mu_2\}\neq 0,$ т.е. $\mu_1\neq 0$ или $\mu_2\neq 0$ на $]0,T[,$ достаточно показать, что $\exists\,\varepsilon_1>0,$ при котором $\mu_1(t)\neq 0, t\in]0,\varepsilon_1[.$ От противного пусть $\forall\varepsilon>0$ в этой задаче (1)–(4) при $a=1, d=2$ управление $\mu_1(t)=0, t\in]0,\varepsilon[.$ Выше для задачи управления (1), (2), (4), (18) нами установлено существование $\varepsilon_1=T_3>0$ и управления $\breve{\mu}_1(t)\neq 0, t\in]0,\varepsilon_1[.$ Согласно выражению (9) при $k=1,$ $f=0,$ $\phi=\psi=0,$ $\phi=\psi=0,$ $\gamma_1=0$ и $\breve{\mu}_1\neq 0, t\in]0,\varepsilon_1[,$ решение $\breve{u}$ задачи управления (1), (2), (4), (18) в Δ_2 при $x=0$ имеет след

$$\breve{u}(0,t)=\int_0^t \frac{\breve{\mu}_1(\nu)\,d\nu}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)},\ \ t\in]0,\varepsilon_1[.$$

Тогда согласно предположению тривиальности управления $\mu_1(t)=0, t\in]0,\varepsilon[, \forall\varepsilon>0,$ от представления (17) приходим к однородному уравнению Вольтерра второго рода

$$\mu_1(t)=\breve{\mu}_1(t)+\int_0^t \frac{\gamma_1(t)\breve{\mu}_1(\nu)\,d\nu}{\alpha_1(\nu)-\beta_1(\nu)}=0,\ \ t\in[0,\varepsilon_1],$$

которое, как известно, имеет только тривиальное решение $\breve{\mu}_1\equiv 0$ на $[0,\varepsilon_1].$ Это противоречит действительности. С помощью выражения (10) из теоремы 1 точно также можно доказать существование нетривиального управления $\breve{\mu}_2\neq 0, t\in]0,T_3[,$ в задаче управления (1)–(4) при $a=1, d=2$ для $f=0,$ $\phi=\psi=0,$ $\phi=\psi=0,$ $\forall\gamma_i\in C^1[0,T], i=1,2.$

Таким образом, для $2<T\leq 3$ в задаче управления (1)–(4) при $\gamma_1=\gamma_2=0$ для всех $f,$ $\phi,\psi,$ $\phi,\psi,$ удовлетворяющих условиям (5)–(7), (11), (13)–(16), управления μ_1 и μ_2 не единственны и отличаются друг от друга на указанные выше функции $\breve{\mu}_1$ и $\breve{\mu}_2.$ Тогда управления μ_1 и μ_2 задачи (1)–(4) при $\forall\gamma_i\neq 0,$ $\gamma_i\in C^1[0,T], i=1,2,$ отличаются друг от друга на функции, которые определяются выражением (17), где $\breve{u}$ – решение задачи управления (1), (2), (4), (18) при $\gamma_1=\gamma_2=0$ и тех же самых $f,$ $\phi,\psi,$ $\phi,\psi,$ с неединственными описанными выше граничными данными $\breve{\mu}_1$ и $\breve{\mu}_2.$

Отметим, что в случае $n=3$ наше доказательство тоже содержит алгоритм последовательного вычисления управлений $\mu_i, i=1,2,$ в явном аналитическом виде с помощью их представлений (19), (20) и указанных выше промежуточных смещений ϕ_i и скоростей $\psi_i, i=2,3.$ Теорема 3 доказана.

Заключение. В работе исследована единственность граничных управлений $\mu_1,\mu_2\in C^1[0,T]$ задачи управления (1)–(4) для финальных моментов времени $T,$ удовлетворяющих неравенствам $n-1<T\leq n,$ где индекс n принимает любое из трех значений $1;2;3.$ Согласно теореме существования классических решений $u\in C^2(Q_T)$ задачи граничного управления (1)–(4) в случае непрерывно дифференцируемого и нехарактеристического граничного режима (3), т.е. когда справедливы предположения (12), эти решения существуют для тех и только тех правой части $f,$ начальных данных ϕ,ψ и финальных данных $\phi,\psi,$ которые удовлетворяют требованиям гладкости (5), (11) и условиям управляемости (13)–(16). В работе доказано, что в задаче граничного управления (1)–(4) для любых таких исходных данных f,ϕ,ψ,ϕ,ψ без их продолжений вне множеств задания всегда существуют управления $\mu_1,\mu_2\in C^1[0,T],$ удовлетворяющие условиям согласования (6), (7) граничного режима (3) с уравнением (1), начальным (2) и финальным (4) состояниями. Установлено, что эта пара управлений $\{\mu_1,\mu_2\}$ единственна для любого финального момента $0<T\leq 2$ и не единственна для любого финального момента $2<T\leq 3.$ Указаны алгоритм и формулы последовательного вычисления этих единственных и неединственных управлений в явном виде. Основные результаты настоящего исследования без доказательств анонсированы в [12]. Следует разработать метод оптимального управления колебаниями струны в задаче (1)–(4) для всех моментов $T>2.$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ломовцев, Ф.Е. Решение без продолжения данных смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний струны при граничных косых производных / Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 8. – С. 1128–1132.
2. Ломовцев, Ф.Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при первых косых производных в нестационарных граничных условиях / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Материалы Воронеж. зимней мат. шк. «Современные методы теории функций и смежные вопросы», Воронеж, 27 янв. – 2 фев. 2015 г. – Воронеж, 2015. – С. 73–76.
3. Ломовцев, Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф.Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: материалы междунар. матем. конф. Минск, 7–10 дек. 2015 г.: в 2 ч. – Минск, 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
4. Ломовцев, Ф.Е. Теорема существования управлений вынужденными колебаниями ограниченной струны нестационарными первыми косыми производными / Ф.Е. Ломовцев // Материалы Воронеж. весенней мат. шк. «Современные методы теории краевых задач», Воронеж, 3–9 мая 2016 г. – Воронеж, 2016. – С. 168–170.
5. Ломовцев, Ф.Е. Граничное управление вынужденными колебаниями струны первыми косыми производными за короткий промежуток времени / Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 12. – С. 1669–1675.
6. Ильин, В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса / В.А. Ильин, В.В. Тихомиров // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 5. – С. 692–704.
7. Ильин, В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией / В.А. Ильин // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1513–1528.
8. Сергеев, С.А. Необходимые и достаточные условия существования граничного управления колебаниями струны и сферического слоя при малых временах / С.А. Сергеев // Дифференц. уравнения. – 2011. Т. 47, № 5. – С. 744–755.
9. Романовский, Р.К. Граничное управление гиперболической системой с одной пространственной переменной / Р.К. Романовский, Ю.А. Медведев // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 3. – С. 355–361.
10. Куркина, А.В. Аналитический вид обобщенного из класса W_p^1 решения смешанной задачи, описывающей радиально симметричные колебания трехмерного шара / А.В. Куркина // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 48–54.
11. Крицков, Л.В. О задачах граничного управления для уравнения Клейна–Гордона–Фока с суммируемым коэффициентом / Л.В. Крицков // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 5. – С. 688–696.
12. Ломовцев, Ф.Е. О единственности граничных управлений нестационарными первыми косыми производными вынужденных колебаний струны за любое короткое время / Ф.Е. Ломовцев // XII Белорус. матем. конф.: материалы междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г.: в 5 ч. – Минск, 2016. – Ч. 2. – С. 111–113.

R E F E R E N C E S

1. Lomovtsev F.E. Resheniye bez prodolzheniya dannykh smeshannoy zadachi dlya neodnorodnogo uravneniya kolebaniy struny pri granichnykh kosykh proizvodnykh [Resolution of a Mixed Problem with Oblique Derivatives in the Boundary Conditions for the Inhomogeneous String Vibration Equation without Continuing the Data] // Differents. Equations, 2016, Vol. 52, No. 8, pp. 1128–1132.
2. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. Smeshannaya zadacha dlya neodnorodnogo uravneniya kolebaniy ogranichennoy struny pri pervykh kosykh proizvodnykh v nestatsionarnykh granichnykh usloviyakh [A Mixed Problem for the Inhomogeneous Oscillation Equation of a Bounded String Under the First Oblique Derivatives in Non-Stationary Boundary Conditions] // Mater. Voronezh winter mat. shk. «Modern Methods of the Theory of Functions and Related Questions», Voronezh, January 27 – February 2, 2015. – Voronezh, 2015. – P. 73–76.
3. Lomovtsev F.E. Metod vspomogatel'nykh smeshannykh zadach dlya poluogranichennoy struny [The method of auxiliary mixed problems for a semibounded string] // Sixth Bogdanovsky Readings on Ordinary Differential Equations: Mater. Intern. Math. Conf. Minsk, 7–10 December. 2015: 2 parts. – Minsk, 2015. – Part 2. – P. 74–75.
4. Lomovtsev F.E. Teorema sushchestvovaniya upravleniy vynuzhdennymi kolebaniyami ogranichennoy struny nestatsionarnymi pervymi kosymi proizvodnymi [A Theorem on the Existence of Controls by Forced Oscillations of a Bounded String by Non-Stationary First Oblique Derivatives] // Mater. Voronezh spring. mat. shk. «Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems», Voronezh, May 3–9, 2016. – Voronezh, 2016. – P. 168–170.
5. Lomovtsev F.E. Granichnoye upravleniye vynuzhdennymi kolebaniyami struny pervymi kosymi proizvodnymi za korotkiy promezhutok vremeni [Boundary Control of Forced Oscillations of a String by First Oblique Derivatives in a Short Time Interval] // Differents. Equations. – 2015, Vol. 51, No. 12, pp. 1669–1675.
6. Ilyin V.A., Tikhomirov V.V. Volnovoye uravneniye s granichnym upravleniyem na dvukh kontsakh i zadacha o polnom uspokoyenii kolebatel'nogo protsessa [The Wave Equation with Boundary Control at Two Ends and the Problem of Complete Quiescence of the Oscillatory Process] // Differents. Equations, 1999, Vol. 35, No. 5, pp. 692–704.
7. Ilyin V.A. Granichnoye upravleniye protsessom kolebaniy na dvukh kontsakh v terminakh obobshchennogo resheniya volnovogo uravneniya s konechnoy energiyey [Boundary Control of the Oscillation Process at Two Ends in Terms of the Generalized Solution of the Wave Equation with Finite Energy] // Differents. Equations, 2000, Vol. 36, No. 11, pp. 1513–1528.
8. Sergeyev S.A. Neobkhodimyye i dostatochnyye usloviya sushchestvovaniya granichnogo upravleniya kolebaniyami struny i sfericheskogo sloya pri malykh vremenakh [Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Boundary Control of the Vibrations of a String and a Spherical Layer for Small Times] // Differents. Equations, 2011, T. 47, No. 5, pp. 744–755.
9. Romanovsky R.K., Medvedev Y.A. Granichnoye upravleniye giperbolicheskoy sistemoy s odnoy prostranstvennoy peremennoy [Boundary Control of a Hyperbolic System with One Space Variable] // Differents. Equations, 2017, Vol. 53, No. 3, pp. 355–361.
10. Kurkina A.V. Analiticheskiy vid obobshchonnogo iz klassa resheniya smeshannoy zadachi, opisyvayushchey radial'no simmetrichnyye kolebaniya trokhmernogo shara [Analytic View of a Generalized Solution of a Mixed Problem Describing Radially Symmetric Vibrations of a Three-Dimensional Ball] // Differents. Equations, 2015, Vol. 51, No. 1, pp. 48–54.
11. Kritskov L.V. O zadachakh granichnogo upravleniya dlya uravneniya Kleyna–Gordona–Foka s summiruyemym koeffitsiyentom [On Problems of Boundary Control for the Klein–Gordon–Fock Equation with Summable Coefficient] // Differents. Equations, 2015, Vol. 51, No. 5, pp. 688–696.
12. Lomovtsev F.E. O yedinstvennosti granichnykh upravleniy nestatsionarnymi pervymi kosymi proizvodnymi vynuzhdennykh kolebaniy struny za lyuboye korotkoye vremya [On the Uniqueness of Boundary Controls for the Non-Stationary First Oblique Derivatives of Forced Oscillations of a String in Any Short Time] / F.E. Lomovtsev // XII Belarusian Mathematical Conference: Mater. Intern. Sci. Conf. Minsk, 5–10 Sept. 2016: at 5 parts. – Minsk, 2016. – Part 2. – P. 111–113.

Поступила в редакцию 17.07.2017
Адрес для корреспонденции: e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.