Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

**М.Н. Подоксёнов, Ж.В. Иванова,
Т.Л. Сурин, С.М. Бородич**

Индивидуальные задания с примерами решения задач для самостоятельной работы студентов

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2017*

УДК 512(075.6)+517(075.6)+519(075.6)
ББК 22.11я73
И60

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 4 от 28.04.2017 г.

Авторы: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов;** доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин;** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.М. Бородич**

Р е ц е н з е н т :
заведующий кафедрой высшей математики УО «ПГУ»,
кандидат физико-математических наук, доцент *А.А. Козлов*

И60 **Индивидуальные задания с примерами решения задач для самостоятельной работы студентов** / М.Н. Подоксёнов, Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.М. Бородич. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 52 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с учебными программами по курсам «Прикладная математика», «Актуарная математика», «Современные главы высшей математики», «Методы оптимизации и алгоритмы принятия решений» для студентов дневного и заочного отделений факультета М и ИТ, обучающихся по специальности «Программное обеспечение информационных технологий». Излагаются теоретический материал и примеры решения задач.

УДК 512(075.6)+517(075.6)+519(075.6)
ББК 22.11я73

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ 1. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

§ 1. *Векторное пространство. Линейная зависимость векторов*

Определение. Пусть L – произвольное множество, для элементов которого заданы две операции: сложение элементов и умножение элемента на действительное число, так что $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ и $\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ выполнено $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in L$, $\lambda\mathbf{x} \in L$ (т.е. операции не выводят за пределы L), и при этом имеют место следующие аксиомы.

A1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (коммутативность сложения);

A2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (ассоциативность сложения);

A3. $\exists\, \mathbf{o} \in L$ такой что $\mathbf{x}+\mathbf{o}=\mathbf{x}$ (существование нулевого элемента);

A4. $\exists\, (-\mathbf{x}) \in L$ такой что $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{o}$ (существование противоположного элемента);

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{A5.} & \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y} \\ \textbf{A6.} & (\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}\end{array}\right\} \text{ дистрибутивность;}$$

A7. $(\lambda\mu)\mathbf{x}=\lambda(\mu\mathbf{x})$;

A8. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

Тогда L вместе с данными операциями называется *линейным или векторным пространством*. Элементы этого пространства будем называть *векторами*.

Примеры. **1.** Пространство V^2, состоящее из всех геометрических векторов на плоскости, или V^3, состоящее из всех векторов в пространстве. Тогда **A1** – **A8** представляют собой свойства операций над векторами. Эти свойства мы доказывали в главе 1.

2. Арифметическое пространство $\boldsymbol{R}^3$, элементами которого являются тройки действительных чисел, которые могут быть записаны в виде строки или столбца. Мы будем записывать эти тройки в виде столбца:

$$\boldsymbol{R}^3=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}\right\}.$$

Операции в $\boldsymbol{R}^3$ определяются следующим образом. Если

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

то

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix}, \qquad \lambda\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\lambda x_3\end{pmatrix}.$$

Роль нулевого элемента и элемента, противоположного к $\boldsymbol{X}$ очевидно, играют столбцы

$$\mathbf{O}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad -\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\\-x_3\end{pmatrix}.$$

3. Пространство P_n, которое состоит из всех многочленов с действительными коэффициентами, степени не превосходящей n:

$$P_n=\{a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n \mid a_0, a_1,\ldots, a_n\in\boldsymbol{R}\}$$

с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число.

4. Пространство $C^0([0,1])$, которое состоит из всех функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$.

Можно привести ещё массу примеров. Главное – уяснить себе, что векторное пространство может состоять из совершенно любых математических объектов, которые можно складывать и умножать на число, если, конечно, выполняются **A1** – **A8**. Для простоты восприятия, можно представлять себе, что речь идет о геометрических векторах.

Определение. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2,\ldots, \mathbf{x}_n\in L$ – произвольные векторы, а $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ – произвольные числа. Тогда выражение

$$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n \tag{1}$$

называется *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2,\ldots, \mathbf{x}_n$. Числа $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ называются *коэффициентами линейной комбинации*. Линейная комбинация (3.1) называется *тривиальной*, если все её коэффициенты равны нулю: $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. Соответственно, линейная комбинация (1) называется *нетривиальной*, если среди её коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ есть хотя бы одно ненулевое число.

Определение. Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2,\ldots, \mathbf{x}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n=\mathbf{o}. \tag{2}$$

Соответственно векторы $x_1, x_2,\ldots, x_n$ называются *линейно независимыми*, если равенство (2) возможно только для тривиальной комбинации, т.е. когда $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

Примеры. **1.** Векторы $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ в пространстве V^3 линейно независимы, а векторы $\mathbf{a}_1=\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}$, $\mathbf{a}_2=\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}+\vec{\mathbf{k}}$, $\mathbf{a}_3=\vec{\mathbf{k}}$ линейно зависимы, т.к. $1\cdot\mathbf{a}_1+(-1)\cdot\mathbf{a}_2+1\cdot\mathbf{a}_3=\mathbf{o}$.

2. В пространстве $\boldsymbol{R}^3$ столбцы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

линейно независимы. Действительно,

$$\lambda_1\mathbf{E}_1 + \lambda_2\mathbf{E}_2 + \lambda_3\mathbf{E}_3 = O \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0,$$

т.е. только тривиальная комбинация столбцов $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ может быть равна нулевому столбцу. Если к столбцам $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ добавить произвольный столбец $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, то получим линейно зависимую систему столбцов $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{X}\}$, т.к.

$$x_1\cdot\mathbf{E}_1 + x_2\cdot\mathbf{E}_2 + x_3\cdot\mathbf{E}_3 + (-1)\cdot\mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

3. В пространстве P_n многочлены $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы. Если к ним добавить любой многочлен $f(t)$ степени n, то получим линейно зависимую систему.

Упражнение. Самостоятельно покажите, что функции $f(t) \equiv 1$, $g(t) = \cos t$, $h(t) = \sin 2t$ в пространстве $C^{\mathrm{o}}([0,1])$ линейно зависимы.

***Предложение* 1.** *Векторы* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ $(k>1)$ *линейно зависимы, тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных.*

***Предложение* 2.** *Если среди векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ *есть нулевой, то эти векторы линейно зависимы.*

§ 2. *Базис и координаты в векторном пространстве*

Определение. Пусть в векторном пространстве L выполнены еще две аксиомы:

А9. Существуют n линейно независимых векторов;

А10. Любые $n+1$ векторов линейно зависимы.

Тогда говорим, что <u>*векторное пространство*</u> L <u>*имеет размерность*</u> n и пишем $\dim L = n$. Для векторного пространства размерности n используется обозначение L^n.

Определение. <u>*Базисом*</u> в L^n называется любая упорядоченная система, состоящая из n линейно независимых векторов. Векторы, входящие в базис, называются <u>*базисными*</u>.

Пусть $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ – базис в L^n, а $\mathbf{x} \in L^n$ – любой вектор. Тогда система $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ состоит из $n+1$ векторов, а значит, эти векторы линейно зависимы. Исходя из этого можем доказать, что вектор $\mathbf{x}$ можно выразить через базисные векторы:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n . \qquad (3)$$

Определение. Выражение (3) называется *разложением вектора* $\mathbf{x}$ *по базису* $\mathcal{B}$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* $\mathcal{B}$. Пишем: $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots x_n)_{\mathcal{B}}$.

Можно доказать, что разложение (2) единственно. А также легко вывести правило: *при сложении векторов их координаты складываются*, *а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*.

Сопоставим каждому вектору $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ столбец, составленный из его координат:

$$\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots x_n) \leftrightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(y_1, y_2, \ldots y_n) \leftrightarrow \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda\mathbf{x} \leftrightarrow \lambda\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что операциям над векторами соответствуют точно такие же операции над их координатными столбцами. Поэтому с точки зрения линейной алгебры произвольное векторное пространство L^n устроено точно также, как и $\boldsymbol{R}^n$. Говорят, что L^n *изоморфно* $\boldsymbol{R}^n$ или, что $\boldsymbol{R}^n$ *является моделью пространства* L^n.

Пример решения задачи и задания для самостоятельного решения

Задача. Докажите, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ линейно независимы и найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим линейную комбинацию векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и приравняем её к нулевому вектору:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_2\\ 0\\ -\lambda_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2\lambda_3\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 = 0,\\ \lambda_1+2\lambda_3=0,\\ -\lambda_2=0.\end{cases}$$

Решаем систему (в индивидуальном задании следует подробно написать весь ход решения) и находим, что существует только одно тривиальное решение $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Это и означает, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ линейно независимы. Поскольку их три, и размерность пространства равна 3, то они образуют базис.

Составим теперь линейную комбинацию базисных векторов и приравняем к вектору $\mathbf{x}$.

$$x_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 3\end{pmatrix};$$

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-1,\\ x_1+2x_3=0,\\ -x_2=3.\end{cases}$$

Решаем систему (в индивидуальном задании следует подробно написать весь ход решения) и находим $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=-1$.

Ответ: $\mathbf{x}(2,-3,-1)$.

Задачи для самостоятельного решения. Докажите, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ линейно независимы и найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

Вар-т	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{x}$	Вар-т	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{x}$
1	$\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -4\end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 8\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 6\end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 5\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$

4	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

§ 3. *Решение однородной системы уравнений. Фундаментальная система решений*

Система линейных уравнений (СЛУ) называется *однородной*, если её правая часть состоит только из нулей. В матричном виде однородная СЛУ записывается так: $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$. Пусть n – количество неизвестных, r – ранг матрицы этой системы.

Если $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – два решения системы, то их сумма $X+Y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$ тоже является решением, и произведение решения на любое число $\lambda X=(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ тоже является решением. Это означает, что *все решения однородной СЛУ образуют векторное* (*линейное*) *пространство*. Размерность этого пространства равна $n-r$. Следовательно, существует базис в пространстве решений, состоящий из $n-r$ линейно независимых решений: $\boldsymbol{\mathcal{B}}=(X_1, X_2, \ldots, X_{n-r})$. Такой базис называется фундаментальной системой решений.

Произвольное решение X системы может быть разложено по базису:

$$X=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\ldots+\alpha_{n-r}X_{n-r}.$$

Если мы будем считать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ произвольными параметрами, то получим общее решение системы.

Примеры решения задачи

***Пример* 1.** Найти общее решение однородной системы линейных уравнений и выписать фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3-10x_4-5x_5=0, \\ x_1-x_2-6x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-6x_2-x_3-14x_4-10x_5=0, \\ -2x_1+x_2+6x_3+7x_4-7x_5=0. \end{cases}$$

Будем искать решение *методом Гаусса*. Можно совершать преобразования над самой системой уравнений, но для удобства мы составим матрицу этой системы.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & -3 & -1 & -10 & -5 \\ 1 & \mathbf{-1} & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -6 & \mathbf{-1} & -14 & -10 \\ -2 & 1 & 6 & \mathbf{7} & -7 \end{pmatrix}.$$

<u>*Элементарными преобразованиями*</u> строк матрицы называются:

1) перестановка строк;
2) умножение строки на число, не равное нулю;
3) прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на некоторое число;
4) вычёркивание строки, состоящей целиком из нулей.

Элементы, выделенные жирным шрифтом, образуют диагональ. Наша цель – с помощью элементарных преобразований строк матрицы занулить элементы, стоящие ниже диагонали; т.е. мы пытаемся привести матрицу к виду

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Если при этом у нас получается строка, состоящая полностью из нулей, мы её вычеркиваем (на практике, если получим две одинаковые или пропорциональные строки, то можно вычёркивать одну из них; если таких строк будет три – можем вычеркнуть две из них). При этом может возникнуть и любая из двух следующих ситуаций.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Главное – добиться, чтобы мы могли выделить в оставшейся матрице треугольный минор, на диагонали которого все числа не равны нулю. Такой минор составляют обведенные столбцы. Этот минор называется <u>*базисным*</u>. В каждом из случаев, мы можем вместо второго столбца взять первый. Во втором случае мы можем вместо третьего столбца взять четвёртый.

Первым действием мы пытаемся получить нули в первом столбце ниже диагонали. Для этого сначала мы выбираем строку, которую мы поставим на первое место. В ней первый элемент желательно должен быть равен ± 1, но точно не ноль. Возможно, для этого потребуется разделить какую-либо строку на целое число. Мы поставим на первое место вторую строку. Затем мы к новой второй строке прибавляем первую, умноженную на (–2), к третьей – первую, умноженную на (–3), а к четвёртой – первую, умноженную на 2. При этом сама первая строка остаётся без изменений. Эти действия обозначаются следующим образом:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -10 & -5 \\ 3 & -6 & -1 & -14 & -10 \\ -2 & 1 & 6 & 7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -13 \end{pmatrix}
$$

Вторым действием мы пытаемся получить нули во втором столбце ниже диагонали. Наши действия уже показаны выше. Возможно, в вашей индивидуальной задаче предварительно надо будет переставить строки, или какая-либо строка делится на целое число.

$$
\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ :2 \\ :7 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)
$$

Мы разделили 3 строку на 2, а 4 строку – на 7. Получили две одинаковые строки. Одну из них можем вычеркнуть. Вторую строку умножим на –1.

Базисный минор обведён. Неизвестные, коэффициенты около которых входят в базисный минор, называются *базисными*, а все остальные – *параметрическими*. Мы вновь возвращаемся к системе линейных уравнений и составляем её по последней матрице. Базисные неизвестные при этом остаются в левой части, а параметрические неизвестные переносим в левую часть. После этого параметрическим неизвестным придаём значения произвольных параметров (можно сразу писать вторую из следующих систем).

$$
\begin{cases} x_1 - x_2 = 6x_4 + 3x_5, \\ x_2 + x_3 = 2x_4 + x_5, \\ x_3 = x_4 + 2x_5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 6\alpha_1 + 3\alpha_2, \\ x_2 + x_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ x_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_4 = \alpha_1, \\ x_5 = \alpha_2;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}. \end{cases}
$$

Подставляем значение x_3 во второе уравнение и находим x_2; подставляем значение x_2 в первое уравнение и находим x_1:

$$
\begin{cases} x_1 = x_2 + 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = 7\alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_2 = -x_3 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \\ x_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_4 = \alpha_1, \\ x_5 = \alpha_2 \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}. \end{cases}
$$

$X = (7\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ – общее решение системы.

Подставляя вместо α_1 и α_2 конкретные числа, мы будем получать частные решения. Подставляя в общее решение следующие частные значения параметров, получаем решения

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0, \qquad X_1 = (7, 1, 1, 1, 0),$$
$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1, \qquad X_2 = (2, -1, 2, 0, 1).$$

Тогда $\{X_1, X_2\}$ – фундаментальная система решений (базис в пространстве решений). Произвольное частное решение системы можно представить в виде линейной комбинации решений, входящих в фундаментальную систему. Например, $Y = 1\cdot X_1 - 2X_2 = (3,\ 3, -3,\ 1, -2)$ – частное решение. Следующая запись называется <u>*разложением общего решения*</u> по базису:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}.$$

Обязательно следует сделать проверку, подставив решения X_1, X_2 в исходную систему:

$$\begin{cases} 2\cdot 7 - 3\cdot 1 - 1 - 10\cdot 1 - 5\cdot 0 = 0, \\ 7 - 1 - 6\cdot 1 - 3\cdot 0 = 0, \\ 3\cdot 7 - 6\cdot 1 - 1 - 14\cdot 1 - 10\cdot 0 = 0, \\ -2\cdot 7 + 1 + 6\cdot 1 + 7\cdot 1 - 7\cdot 0 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\cdot 2 - 3\cdot(-1) - 2 - 10\cdot 0 - 5\cdot 1 = 0, \\ 2 - (-1) - 6\cdot 0 - 3\cdot 1 = 0, \\ 3\cdot 2 - 6\cdot(-1) - 2 - 14\cdot 0 - 10\cdot 1 = 0, \\ -2\cdot 2 - 1 + 6\cdot 2 + 7\cdot 0 - 7\cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Если проверка показывает, что хотя бы одно равенство не выполняется, то сдавать ваше решение не следует – нужно искать ошибку.

Ответ:

$X = (7\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ – общее решение системы;

$X_1 = (7, 1, 1, 1, 0)$, $X_2 = (2, -1, 2, 0, 1)$; (X_1, X_2) – фундаментальная система решений;

$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ – разложение общего решения по базису.

***Пример* 2.**
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Мы действуем по тому же алгоритму, что и в примере 1 и получаем сразу нули не только в первом столбце, но и во втором, а кроме этого, мы получаем три пропорциональные строки, из которых две вычёркиваем:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-3} \end{pmatrix}$$

Здесь важно правильно выбрать базисный минор (он обведён). Мы получаем две базисных неизвестных: x_2, x_3, и три свободных неизвестных: x_1, x_4, x_5. Этот выбор не является однозначным, поэтому ответ может иметь и другой вид! Дальнейшие действия такие же, как в примере 1.

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 3x_1 - 2x_4 - 2x_5, \\ x_3 = x_4 + 3x_5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = -3a - 2b - 2c, \\ x_3 = b + 3c, \\ x_1 = a,\ x_4 = b, \\ x_5 = c;\ a, b, c \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Отдельно произведём вычисления для x_2:

$$x_2 = \frac{1}{2}(-3a - 2b - 2c - 2x_3) = \frac{1}{2}(-3a - 2b - 2c - 2b - 6c) = \frac{1}{2}(-3a - 4b - 8c).$$

Окончательно выписываем общее решение:

$X = (a;\ 1{,}5a - 2b - 4c;\ b + 3c;\ b;\ c),\ a, b, c \in \boldsymbol{R}.$

Остаётся найти фундаментальную систему решений и выписать разложение общего решения по базису.

$a = 1,\ b = 0,\ c = 0, \quad X_1 = (1; -1{,}5; 0; 0; 0),$
$a = 0,\ b = 1,\ c = 0, \quad X_2 = (0; -2; 1; 1; 0),$
$a = 0,\ b = 0,\ c = 1, \quad X_3 = (0; -4; 3; 0; 1),$

$\{X_1, X_2, X_3\}$ – фунд. сист. решений (базис в пространстве решений),
$X = aX_1 + bX_2 + cX_3$ – разложение общего решения по базису.

Проверка: (нули мы не писали)

$$\begin{cases} 3\cdot 1 + 2\cdot(-1{,}5) = 0, \\ 3\cdot 1 + 2\cdot(-1{,}5) = 0, \\ 6\cdot 1 + 4\cdot(-1{,}5) = 0, \\ 6\cdot 1 + 4\cdot(-1{,}5) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 = 0, \\ 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 1 = 0, \\ 4\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 5\cdot 1 = 0, \\ 4\cdot(-2) + 5\cdot 1 + 3\cdot 1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2\cdot(-4) + 2\cdot 3 + 2\cdot 1 = 0, \\ 2\cdot(-4) + 3\cdot 3 - 1 = 0, \\ 4\cdot(-4) + 3\cdot 3 + 7\cdot 1 = 0, \\ 4\cdot(-4) + 5\cdot 3 + 1 = 0. \end{cases}$$

Советы по поводу особых ситуаций

Если после зануления первого столбца получается $a_{22} = 0$, то на второе место переставляем другую строку, в которой второй элемент не равен нулю:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & a & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & a & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Если во втором столбце все числа «нехорошие», то можно сделать дополнительное действие с тем, чтобы получить среди них единицу. Например:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 6 & * & * & * \\ 0 & 4 & * & * & * \\ 0 & 5 & * & * & * \end{pmatrix} {}_{-1} \sim \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 4 & * & * & * \\ 0 & 5 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Тем самым вы избежите использования дробных чисел.

Если все коэффициенты в уравнении делятся на какое-либо целое число, то следует разделить уравнение на это число. Возможно, после этого данное уравнение окажется самым простым из всех уравнений системы. Тогда будет удобно поставить именно его на первое место.

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение однородной системы линейных уравнений и выписать фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 14x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 9x_4 - 13x_5 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 4x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 9x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 8x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 6x_4 - 4x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 10x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_4 + 6x_5 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 - 14x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10x_5 = 0. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 0, \\ -2x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 13x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

ЧАСТЬ 2. АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА

§ 1. *Наращение по простым и сложным процентам*

Под *процентными деньгами* или, кратко, *процентами* в финансовых расчётах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме.

Пусть P – первоначальная сумма долга (ссуды), I – проценты, полученные за определённый промежуток времени $(t_0, t_0 + t)$. Величина $i = I/P$ называется *процентной ставкой* за рассматриваемый промежуток времени. Процентную ставку часто выражают в форме процентов, умножив i на 100, но в расчетных формулах i – это десятичная или, реже, обыкновенная дробь.

Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называется *периодом начисления*, его не следует путать со *сроком начисления (сроком ссуды)*. В качестве периода начисления обычно принимают год, полугодие, квартал, месяц или даже день. Чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками.

Процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов к сумме долга называют *наращением*. Под *наращенной суммой* ссуды понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока начисления.

На практике существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют разные виды процентных ставок.

Ниже используем следующие обозначения: P – первоначальная сумма долга, S – наращенная сумма.

Простые проценты. *Простая процентная ставка* – это ставка, которая применяется к одной и той же первоначальной сумме долга на протяжении всего срока ссуды.

Наращение по простым процентам (т.е. с применением простой процентной ставки) осуществляется по формуле

$$S = P(1 + ni), \qquad (1)$$

где n – срок ссуды (количество периодов начисления), i – процентная ставка.

К простым процентам обычно прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (на срок до 1 года) или в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются.

Если i – годовая ставка простых процентов, а срок ссуды измеряется не в годах, а в днях, то в формуле (1)

$$n = t/T,$$

где t – число дней ссуды, T – расчётное число дней в году (временнáя база).

Используются две временные базы: $T = 365\,(366)$ дней или $T = 360$ дней. В первом случае начисляемые проценты называют *точными*, во втором – *обыкновенными* (или *коммерческими*).

Расчет числа дней ссуды может быть *точным* или *приближенным*. В первом случае вычисляется фактическое число дней между датами. Во втором случае число дней любого целого месяца полагают равным 30, а оставшиеся дни считают точно.

Применяются три варианта расчета простых процентов:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды – обозначение $365/365$;

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (*банковский* метод) – обозначение $365/360$;

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды – обозначение $360/360$.

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. Если это простые ставки, то наращенная на конец срока сумма определяется следующим образом:

$$S = P\left(1 + \sum_{k=1}^{m} n_k i_k\right),$$

где i_k – ставка простых процентов в k-м периоде, n_k – продолжительность этого периода.

В случае если сумма, на которую начисляются проценты, изменяет свою величину во времени, суммарные проценты за весь срок их начисления вычисляются по формуле

$$I = \sum_k R_k n_k i\,, \tag{2}$$

где R_k – остаток средств на счете в момент очередного поступления или списания средств, n_k – срок хранения до нового изменения остатка средств на счете.

В банковско-сберегательном деле формула (2) используется в следующем представлении:

$$I = \frac{\sum_k R_k t_k}{100} : \frac{T}{i(\%)}, \tag{3}$$

где t_k – срок в днях между последовательными изменениями остатков на счёте, T – число дней в году, $i(\%)$ – годовая процентная ставка, выраженная в процентах. Величины $\frac{R_k t_k}{100}$ называют *процентными числами*.

Сложные проценты. К наращению по сложным процентам прибегают в долгосрочных финансово-кредитных операциях (более 1 года), если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к основной сумме долга называется *капитализацией процентов*.

Сложная процентная ставка – это ставка, которая применяется к наращенной сумме долга, т.е. к первоначальной сумме долга вместе с начисленными за весь предыдущий период процентами.

Наращенная сумма по сложной процентной ставке i определяется формулой

$$S = P(1+i)^n, \tag{4}$$

где n – число периодов начисления.

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращения имеет следующий вид:

$$S = P \cdot \prod_{k=1}^{m} (1+i_k)^{n_k},$$

где i_k – ставка процентов в k-м периоде, n_k – продолжительность этого периода.

Часто n не является целым числом. Пусть $n = a + b$, где a – целое число периодов начисления, b – дробная часть периода начисления. Применяются два метода:

1. *Общий* метод заключается в прямом расчёте по формуле (4).

2. *Смешанный* метод расчёта предполагает для целого числа периодов начисления использовать формулу сложных процентов, а для дробной части срока – формулу простых процентов:

$$S = P(1+i)^a (1+bi). \tag{5}$$

Номинальная и эффективная ставки. Проценты могут капитализироваться не один, а несколько раз в году – по полугодиям, кварталам, месяцам и т.д. Однако на практике в контрактах обычно фиксируется не ставка за период начисления, а годовая ставка (в процентах), одновременно указывается период начисления процентов. Указанная в договоре годовая ставка называется *номинальной*. Если номинальная годовая ставка равна j , а число периодов начисления в году – m, то каждый раз проценты начисляются по ставке j/m. Непосредственно из формулы (4) получается формула наращения по номинальной ставке:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^N,$$

где N – общее количество периодов начисления.

Эффективная ставка – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке j/m.

Связь между эффективной ставкой i и номинальной ставкой j выражается соотношениями

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1, \qquad j = m\left((1+i)^{1/m} - 1\right).$$

Примеры решения задач

***Пример* 1.** Движение средств на счете характеризуется следующими данными: 05.02 поступило 12 млн. руб., 10.07 снято 4 млн. руб. и 20.10 поступило 8 млн. руб. Найти сумму на счете на конец года, если ставка – простые 18% годовых, год невисокосный, способ расчета процентов – 365/365.

Решение. Воспользуемся формулой (3). В нашем случае

$$T/i(\%) = 365/18 = 20{,}27778.$$

Расчет суммы процентных чисел приведен в следующей таблице:

Дата	Движение средств	Остаток (R_k)	Срок (t_k)	Процентное число
05.02	12	12	155	18,6
10.07	–4	8	102	8,16
20.10	8	16	72	11,52
31.12	–	16	–	–
Итого				38,28

Сумма процентов за весь срок $I = \dfrac{38{,}28}{20{,}27778} = 1{,}888$ млн. руб. Сумма на счете на конец года $S = 16 + 1{,}888 = 17{,}888$ млн. руб.

Ответ: 17,888 млн. руб.

***Пример* 2.** В банке получен кредит под 9,5% годовых в размере 250 тыс. руб. со сроком погашения 2 года и 9 месяцев. Определить сумму, которую необходимо вернуть по истечении срока займа двумя способами – общим и смешанным. Использовать способ расчета 360/360.

Решение. Здесь $n = 2 + \dfrac{270}{360} = 2{,}75$ года. Таким образом, по общему методу (формула (4))

$$S = 250(1 + 0{,}095)^{2{,}75} = 320{,}87 \text{ тыс. руб.},$$

а по смешанному (формула (5))

$$S = 250(1 + 0{,}095)^2(1 + 0{,}75 \cdot 0{,}095) = 321{,}11 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 320,87 тыс. руб., 321,11 тыс. руб.

Задачи для самостоятельного решения

1. Ссуда в сумме 3000 руб. выдана в невисокосном году 10.02 до 15.09 включительно под 12% годовых. Рассчитать сумму к погашению при различных способах начисления процентов: а) 365/365; б) 365/360; в) 360/360.

2. Определить простую годовую процентную ставку, при которой первоначальный капитал в размере 2000 руб. достигнет через 90 дней 2060 руб. Способ расчета процентов – 365/360.

3. На какой срок клиент банка может взять кредит в размере 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 14% годовых с условием, чтобы величина возврата долга не превышала 110 тыс. руб.? Способ начисления процентов – 365/365, год високосный.

4. Клиент 4 января положил в банк 5 тыс. руб. и закрыл счет 10 сентября этого же года, являющегося високосным. Какую сумму банк выдал клиенту, если в течение всего срока начислялись простые проценты способом 365/365, но процентная ставка менялась: в начале года – 5%, с 1 апреля – 4% и с 1 июня – 3% годовых?

5. Сберегательный счет был открыт 15 февраля, и на него была положена сумма 5 тыс. руб. 10 апреля на счет было дополнительно внесено 3 тыс. руб. Затем 20 мая со счета было снято 2 тыс. руб., а 1 сентября добавлена 1 тыс. руб. 4 декабря счет был закрыт. Определить сумму, полученную владельцем счета, если процентная ставка – простые 12% годовых, год невисокосный, способ расчета – 365/360.

6. Ссуда в размере 30 тыс. руб. выдана на 3 года и 160 дней под сложную процентную ставку 12% годовых. Определить сумму долга на конец срока общим и смешанным методами, используя схему 365/360.

7. При заданной ставке сложных процентов 10 тыс. руб. прирастают до 15 тыс. руб. за 10 лет. Какой будет наращенная сумма в конце 6 года?

8. Банк выдал кредит 5 тыс. руб. В договоре в первые полгода указана сложная ставка 8% годовых, каждые полгода ставка увеличивается на 1%, срок договора 2 года. Определить наращенную сумму за весь срок кредита.

9. На вклад ежемесячно начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 10%. За какой срок первоначальный капитал увеличится в 2 раза?

10. Сумма в 10 тыс. руб. помещена на банковский депозит. Какой должна быть номинальная процентная ставка при ежемесячном начислении процентов, чтобы через три месяца наращенная сумма была равна 10,3 тыс. руб.?

11. Определить номинальную ставку с квартальным начислением процентов, которая безубыточно заменит номинальную ставку 12% при месячном начислении процентов.

12. Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку в 12% годовых.

§ 2. *Дисконтирование*

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной наращенной сумме S, которую следует выплатить через некоторое заданное время n, необходимо определить первоначальную сумму долга P. В этих случаях говорят, что сумма S *дисконтируется* (или *учитывается*), сам процесс начисления процентов и их удержания называют *учетом*, а удержанные проценты – *дисконтом* (или *скидкой*). Таким образом, разность $S-P$ можно рассматривать не только как проценты, начисленные на P, но и как дисконт D с суммы S:

$$D = S - P.$$

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, называют *современной стоимостью (современной величиной, текущей стоимостью)* будущего платежа S.

Исходя из методики начисления процентов, применяют два вида дисконтирования: *математическое дисконтирование* по процентной ставке i и *банковский (коммерческий) учет* по учетной ставке d.

Математическое дисконтирование. Этот вид дисконтирования представляет собой решение следующей задачи: какую сумму P следует выдать в долг, чтобы в конце заданного срока n получить сумму S при заданной ставке процента? Величина P находится из соответствующих формул наращения:

а) если i – простая процентная ставка, то

$$P = S(1+ni)^{-1};$$

б) если i – сложная процентная ставка, то

$$P = S(1+i)^{-n};$$

в) если j – номинальная ставка, проценты начисляются m раз в году, n – срок ссуды в годах, то

$$P = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}.$$

Банковский учет. Банковский учет – второй вид дисконтирования, при котором исходя из известной суммы S в будущем, определяют сумму P в данный момент времени, удерживая дисконт. При этом применяется *учетная ставка* d.

Учетные ставки, как и процентные, могут быть *простыми* и *сложными*.

Дисконт по простой учетной ставке, также как и наращение по простым процентам, обычно используется для краткосрочных периодов (до 1 года).

Операцию банковского учета с простой учетной ставкой рассмотрим на примере учета векселя. Суть этой операции состоит в том, что банк до наступления срока платежа по векселю покупает его у владельца по цене

P, меньшей той суммы S, которая будет выплачена по векселю в конце срока. Разница в цене $(S - P)$ и есть дисконт, который получает банк при наступлении срока векселя. В свою очередь владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги ранее указанного на нем срока, хотя и не в полном объеме.

Согласно методу банковского учета с простой учетной ставкой проценты за пользование ссудой P в виде дисконта начисляются на сумму S, подлежащую уплате в конце срока. При этом размер дисконта, или суммы учета, определяется по формуле

$$D = ndS,$$

где d – учетная ставка, n – срок от момента учета векселя до даты его погашения (если d – годовая учетная ставка, то n измеряется в годах). Таким образом,

$$P = S - D = S(1 - nd).$$

Учет посредством учетной ставки чаще всего осуществляется при временной базе $T = 360$ дней, число дней ссуды обычно берется точным.

В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, по которому предусматривается начисление процентов, происходит совмещение начисления процентов по процентной ставке i и дисконтирования по учетной ставке d:

$$P_2 = P_1(1 + ni)(1 - n'd), \tag{6}$$

где P_1 – первоначальная сумма долга, P_2 – сумма, получаемая при учете обязательства, n – общий срок платежного обязательства, n' – срок от момента учета до даты погашения.

Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P = S(1 - d)^n, \tag{7}$$

где d – учетная ставка, n – число периодов дисконтирования (если d – годовая учетная ставка, то n измеряется в годах).

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

Номинальная и эффективная учетные ставки. При дисконтировании m раз в году используется *номинальная учетная ставка* f. В каждом периоде, равном $1/m$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учётной ставке f/m. В этом случае

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn},$$

где n – срок долгового обязательства в годах.

Эффективная учетная ставка d – это сложная годовая учетная ставка, которая дает тот же финансовый результат, что и m-разовое дисконтирование в год по ставке f/m.

Эффективная и номинальная учетные ставки связаны следующими соотношениями:

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m, \qquad f = m\left(1 - (1-d)^{1/m}\right).$$

Примеры решения задач

***Пример* 1.** Долговое обязательство в сумме 2000 руб. должно быть погашено через 90 дней по ставке 10% годовых. Владелец обязательства учел его в банке за 30 дней до наступления срока по учетной ставке 12%. Найти полученную при учете векселя сумму.

Решение. Используем формулу (6). В нашем случае $P_1 = 2000$, $n = 90/360 = 1/4$, $n' = 30/360 = 1/12$, $i = 0{,}1$, $d = 0{,}12$. Имеем:

$$P_2 = 2000\left(1 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}1\right)\left(1 - \frac{1}{12}\cdot 0{,}12\right) = 2029{,}50 \text{ руб.}$$

Ответ: 2029,50 руб.

***Пример* 2.** За долговое обязательство в 300 тыс. руб. банком было выплачено 200 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка 8%?

Решение. Имеем: $P = 200$, $S = 300$, $d = 0{,}08$. Из формулы (7) получаем

$$n = \frac{\ln(P/S)}{\ln(1-d)}.$$

Таким образом,

$$n = \frac{\ln(200/300)}{\ln(1-0{,}08)} = 4{,}863.$$

Ответ: 4,863 года.

Задачи для самостоятельного решения

1. Через полгода после выдачи кредита должник обязан заплатить 2,14 тыс. руб. Какова сумма выданного кредита, если он выдан под простую процентную ставку 14% годовых? Чему равен дисконт?

2. Какой необходимо вложить капитал, чтобы получить 4 тыс. руб. через 5 лет наращением по сложным процентам по ставке 12% годовых, если наращение осуществляется: а) ежегодно; б) ежеквартально?

3. Вексель на сумму 10 тыс. руб. со сроком погашения 12 ноября 2016 г. предъявлен в банк 13 сентября 2016 г. Банк согласен учесть вексель по простой учетной ставке 12% годовых. Какую сумму получит владелец векселя?

4. Определить доход банка при погашении векселя номиналом 10 тыс. руб. при его учете по простой ставке 4,5% за 135 дней до погашения.

5. При учете предъявленного векселя на сумму 15 тыс. руб. за 200 дней до срока его погашения доход банка составил 1,2 тыс. руб. Определите: а) доходность этой финансовой операции для банка в виде простой годовой процентной ставки; б) по какой простой учетной ставке был учтен вексель. Расчетное число дней в году принимается равным 360.

6. Вексель номиналом 6 тыс. руб. со сроком погашения 15 августа 2016 г. продан 16 мая 2016 г. за 5,9 тыс. руб. Определить значение простой учетной ставки, по которой банк учел вексель.

7. Обязательство уплатить через 100 дней сумму долга в размере 5 тыс. руб. с начисляемыми на неё точными процентами по простой ставке 8% годовых было учтено за 25 дней до срока погашения по учётной ставке 5%. Определить сумму, полученную при учёте обязательства.

8. Чему равна разница в стоимости при учете векселя номиналом 35 тыс. рублей за два с половиной года до погашения, если при дисконтировании использовать вместо сложной учетной ставки в 13,5% сложную процентную ставку той же величины?

9. Определить современную стоимость векселя номиналом 45 тыс. рублей с номинальной ставкой 12%, по которой предусмотрен ежеквартальный учет.

10. Долговое обязательство было учтено за 2 года до срока погашения, при этом его владелец получил $4/5$ от написанной в нем суммы. По какой годовой номинальной учетной ставке было учтено это обязательство, если производилось: а) полугодовое дисконтирование; б) поквартальное дисконтирование?

11. За долговое обязательство в 8 тыс. руб. банком было выплачено 6,2 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка 12% годовых?

12. Определить номинальную учетную ставку, если годовая эффективная учетная ставка равна 13% годовых и учет осуществляется: а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

§ 3. *Потоки платежей и финансовые ренты. Наращенная сумма и современная стоимость постоянной ренты постнумерандо*

Как правило, различные финансовые операции предусматривают не отдельные платежи, а некоторую их последовательность во времени, например, погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплаты пенсии и т.д. Такого рода последовательность платежей называют *потоком платежей*. Отдельный элемент этой последовательности (величина отдельного платежа) называется *членом потока*.

Члены потока могут быть как положительными величинами (поступления), так и отрицательными (выплаты), а временны́е интервалы между членами потока могут быть равными и неравными.

Поток платежей, все члены которого имеют одинаковый знак, а временные интервалы между последовательными платежами постоянны, называется *финансовой рентой* или *аннуитетом*.

Рента описывается следующими параметрами:

▪ *член ренты (R)* – размер отдельного платежа,

▪ *период ренты (t)* – временной интервал между двумя последовательными платежами,

▪ *срок ренты (n)* – время от начала первого периода ренты до конца последнего,

▪ *процентная ставка (i)* – ставка, используемая при наращении платежей, из которых состоит рента.

По количеству платежей в году ренты делятся на *годовые* (платежи производятся раз в год) и *p-срочные* (платежи производятся *p* раз в год).

По числу начислений процентов на протяжении года различают ренты с начислением *1 раз* в году и ренты с начислением *m раз* в году.

Если все рентные платежи равны между собой, рента называется *постоянной*.

Рента, в которой платежи осуществляются в конце рентных периодов, называется *обыкновенной* или *постнумерандо*.

Обобщающими характеристиками ренты являются наращенная сумма и современная стоимость.

Наращенная сумма ренты – это сумма всех членов ренты с начисленными на них к концу срока процентами.

Современная (текущая) стоимость ренты – это сумма всех членов ренты, дисконтированных на начало срока (или некоторый более ранний, чем начало срока, момент времени).

Приведем формулы для расчета наращенной суммы S и современной стоимости A постоянной ренты постнумерандо. Современная стоимость в этих формулах рассчитана на начало срока ренты. Срок ренты – n лет.

Годовая рента с начислением процентов 1 раз в году. Рентные платежи размером R вносятся 1 раз в год в конце года. На взносы начисляются сложные проценты по годовой ставке i. В этом случае:

наращенная сумма

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \qquad (8)$$

современная стоимость ренты

$$A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Годовая рента с начислением процентов *m* раз в году. Как и выше, рассматривается годовая постоянная рента постнумерандо, только проценты начисляются m раз в году. Для начисления процентов используется номинальная ставка j.

Наращенная сумма ренты имеет вид

$$S = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}.$$

Современная стоимость ренты вычисляется по формуле

$$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}. \qquad (9)$$

***p*-срочная рента с начислением процентов 1 раз в году.** Платежи производятся p раз в году через равные промежутки времени. Каждый платеж равен R/p, где R – годовая выплата. Проценты начисляются по сложной годовой ставке i. В этом случае

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}, \qquad A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}.$$

***p*-срочная рента с начислением процентов *m* раз в году.** Наращенная сумма и современная стоимость этой ренты находятся по формулам

$$S = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)}, \qquad A = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)}.$$

В частности, при $p = m$ имеем

$$S = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{j}, \qquad A = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Какую сумму необходимо поместить в банк, начисляющий ежемесячно сложные проценты по номинальной ставке 8% годовых, чтобы в течение 5 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 3 тыс. руб., исчерпав счет полностью?

Решение. Необходимо определить современную стоимость постоянной ренты постнумерандо. По формуле (9) при $R = 3$, $j = 0{,}08$, $m = 12$, $n = 5$ находим

$$A = 3 \cdot \frac{1 - \left(1 + \dfrac{0{,}08}{12}\right)^{-12 \cdot 5}}{\left(1 + \dfrac{0{,}08}{12}\right)^{12} - 1} = 11{,}884.$$

Ответ: 11884 руб.

Пример 2. Акционерное общество решило создать резервный фонд. Размер фонда 6 млн. руб., и создать его необходимо за 5 лет. Взносы в фонд вносятся ежегодно равными платежами в конце каждого года. Определить размер одного платежа, если банк начисляет сложные проценты по ставке 16% годовых.

Решение. Из формулы (8) следует, что

$$R = \frac{S \cdot i}{(1 + i)^n - 1}.$$

Отсюда при $S = 6$, $i = 0{,}16$, $n = 5$ получаем

$$R = \frac{6 \cdot 0{,}16}{(1 + 0{,}16)^5 - 1} = 0{,}872456.$$

Ответ: 872 456 руб.

Задачи для самостоятельного решения

1. Производственная фирма приняла решение о создании инвестиционного фонда. С этой целью в течение 3 лет в конце каждого года в банк вносится 100 тыс. руб. На взносы начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых. Определить накопленную сумму к концу срока ренты.

2. Взносы в специальный пенсионный фонд вносятся в конце каждого квартала с ежеквартальным начислением процентов по номинальной ставке 12% годовых. Определить накопленную сумму и сумму начисленных процентов в фонде через 5 лет, если размер каждого взноса составляет 100 рублей.

3. По условиям договора о страховании платежи размером 10 тыс. руб. должны поступать в страховую компанию ежеквартально, образуя при этом ренту постнумерандо. Срок договора – 3 года. Банк, обслуживающий страховую компанию, начисляет проценты ежемесячно по ставке 8% годовых. Определить сумму накоплений по этому контракту.

4. Определить современную стоимость облигации (величину ренты), если купоны (платежи) выплачиваются в течение 4 лет в конце каждого года в размере 190 руб. и на них в конце каждого полугодия начисляются проценты по ставке 8% годовых.

5. В течение 7 лет один раз в конце года в фонд поступают средства по 850 руб. На них ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке 15% годовых. Определить современную стоимость фонда.

6. Вкладчик намеревается положить в банк такую сумму, чтобы, снимая в конце каждого года по 10 тыс. руб., через пять лет израсходовать весь вклад. Определить сумму вклада, если известно, что банк ежегодно начисляет сложные проценты по ставке 12% годовых.

7. Предприятие решило в течение трех лет создать фонд для обеспечения инвестиций в сумме 100 тыс. руб. С этой целью планируется вносить в банк в конце каждого квартала одинаковые суммы. Банк в конце года начисляет 15% сложных годовых. Определить размер платежа для накопления указанной суммы.

8. Найти размер ежемесячных платежей постоянной ренты постнумерандо, современная стоимость которой 100 тыс. руб., срок 3 года. Проценты начисляются ежемесячно по номинальной ставке 12% годовых.

9. Должник обязался вернуть 1 млн. руб. равными ежегодными платежами в течение 20 лет. Каким должен быть размер одного платежа, если на остаток долга начисляются сложные проценты по ставке 10% годовых и выплаты образуют ренту постнумерандо?

10. Определить срок, за который сумма фонда составит 100 тыс. руб., если в фонд вносится по 10 тыс. руб. в конце каждого года и на них ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке 8% годовых.

11. В фонд ежегодно поступают средства, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся одинаковыми суммами в конце каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Величина фонда на конец срока – 100 тыс. руб., годовая выплата – 10 тыс. руб. Определить срок ренты.

12. Долг в 200 тыс. руб. возвращается равными ежегодными платежами в 50 тыс. руб. Через какое время долг будет погашен, если на него ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых?

Литература

1. Актуарная математика (элементы финансовой математики): учебное пособие / В.Н. Баскаков [и др.] – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 64 с.

2. Фалин А.Г. Введение в математику финансов и инвестиций для актуариев: учеб. пособие / А.Г.Фалин, Г.И.Фалин. – М.: МАКС Пресс, 2016 – 248 с.

3. Четыркин Е.М. Финансовая математика: учебник / Е.М. Четыркин. – 10-е изд. – М.: Дело, 2011. – 392 с.

ЧАСТЬ 3. СОВРЕМЕННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1. *Нахождение криволинейного интеграла первого рода*

1. Пусть кривая L – плоская кривая, заданная параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad a \le t \le b,.$$

где функции $x\,(t)$ и $y\,(t)$ имеют непрерывные на отрезке $[a,\ b]$ производные, для которых выполняется неравенство $x'^2(t) + y'^2(t) \ne 0$. Такую кривую будем называть **гладкой.** Тогда криволинейный интеграл первого рода от функции $f\,(x,\,y)$ по этой кривой находится по формуле

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \qquad (1)$$

2. Кривая L – кривая на плоскости, заданна явно уравнением $y = y\,(x)$, $a \le x \le b$, тогда формула для нахождения криволинейного интеграла первого рода имеет вид

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \qquad (2)$$

3. Если кривая L пространственная кривая, заданная параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \gamma(t), \quad a \le t \le b,$$

то длина кривой L находится по формуле

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt. \qquad (3)$$

Примеры решения задач

Пример 1. Найти криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{y}$, если L есть кривая, заданная уравнением $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \le x \le a$.

Решение. Кривая L задана явно, поэтому воспользуемся формулой (2), учитывая, что $y' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, тогда $dl = \sqrt{1+y'^2}dx =$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2}dx = \sqrt{\frac{e^x + 2 + e^{-x}}{4}}dx = \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}dx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})dx.$$

$$\int\limits_L \frac{dl}{y} = \int\limits_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

***Пример* 2.** Найти криволинейный интеграл $\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L – четверть окружности, полученной в результате пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскости $y = x$, лежащей в первом октанте.

Решение. Кривая L задана пересечением двух поверхностей: сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскости $y = x$. Зададим эту кривую параметрически. Положим $x = t$. Тогда $y = t$, $z = \sqrt{R^2 - 2t^2}$.

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt = \sqrt{1 + 1 + \frac{4t^2}{R^2 - 2t^2}}\,dt = \frac{R\sqrt{2}dt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}.$$

Определим пределы интегрирования. Из параметрических уравнений линии находим, что для точки $A(0, 0, R)$ $t = 0$, для $B\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $t = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Тогда, по формуле (3),

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} (t+t)\frac{R\sqrt{2}dt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} =$$

$$= R\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{2tdt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = R\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{dt^2}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = -R\sqrt{2}\left(R^2 - 2t^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = R^2\sqrt{2}.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти криволинейный интеграл первого рода.

1. $\int\limits_C \frac{ds}{y-x}$, где кривая С – контур треугольника ABO, где $A\,(0,–2)$, $B\,(4,0)$, $O\,(0,0)$.

2. $\int\limits_C xyds$, где С – контур треугольника с вершинами $O\,(0, 0)$, $A\,(4,0)$, $D\,(0,4)$.

3. $\int\limits_c (\sqrt{x} + \sqrt{y})ds$, где С − контур треугольника с вершинами $O\,(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

4. $\int\limits_C yds$, где С – дуга астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, заключенная между точками $A(1,0)$, $B(0,1)$

5. $\int\limits_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2})ds$, где С – первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

6. $\int\limits_C \sqrt{2y}\,ds$, где кривая C – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

7. $\int\limits_C \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}ds$, где кривая C – дуга кардиоиды $\rho=(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

8. $\int\limits_C \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}ds$, где кривая C – дуга кривой $\rho=9\sin 2\varphi$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$.

9. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, где C − окружность $x^2+y^2=ax$.

10. $\int\limits_c (x+2y)ds$, где C – дуга кривой $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^2$, $0\le t\le 1$.

§ 2. *Нахождение криволинейного интеграла второго рода*

1. Пусть кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, тогда криволинейный интеграл второго рода от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ находится по формуле

$$\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b (P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x))dx. \qquad (4)$$

2. Пусть кривая L задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad a\le t\le b \\ z=z(t), \end{cases}$$

тогда криволинейный интеграл второго рода для функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ сводится к определенному интегралу по формуле:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t))]dt. \quad (5)$$

Теорема. *Пусть область D ограничена кусочно-гладкой границей L, ориентированной против часовой стрелки. Если на замыкании области D заданы функции* $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, *непрерывные вместе со своими частными производными* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, *то имеет место формула*

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \qquad (6)$$

Формула (6) называется ***формулой Грина.***

Примеры решения задач

***Пример* 1.** Даны точки $A\,(0,1)$, $B\,(2,5)$, $C\,(0,5)$. Вычислить интеграл $\int\limits_L (x+y)dx-2ydy$: *а*) по прямой *AB*; *б*) по ломаной *ACB* (рисунок 1).

Решение. *а*) Применим уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

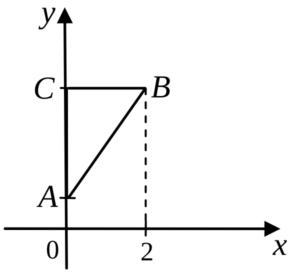

Рис. 1

Находим, что уравнение прямой *AB* имеет вид $y=2x+1$ $(0\le x\le 2)$. В этом случае $dy=2dx$. Тогда по формуле (4) сводим данный интеграл к определенному

$$\int\limits_L (x+y)dx-2ydy=\int\limits_0^2((x+2x+1)-2(2x+1)\cdot 2)dx=$$

$$=\int\limits_0^2(-5x-3)\,dx=\left(-\frac{5}{2}x^2-3x\right)\Bigg|_0^2=-16.$$

б) Ломаная *ACB* состоит из отрезков *AC* и *CB*, тогда по свойствам криволинейных интегралов второго рода получим

$$\int\limits_{ACB}(x+y)dx-2ydy=\int\limits_{AC}(x+y)dx-2ydy+\int\limits_{CB}(x+y)dx-2ydy.$$

Уравнение прямой *AC* имеет вид $x=0$. Тогда $dx=0$ и, учитывая что при движении от точки *A* к точке *B* переменная y изменяется от 1 до 5, имеем

$$\int\limits_{AC}(x+y)dx-2ydy=\int\limits_1^5(-2y)\,dy=(-y^2)\Big|_0^5=-25+1=-24.$$

Уравнение прямой *CB* имеет вид $y=5$ $(0\le x\le 2)$. Тогда $dy=0$, получим

$$\int\limits_{CB}(x+y)dx-2ydy=\int\limits_0^2(x+5)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+5x\right)\Bigg|_0^2=12.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{ACB}(x+y)dx-2ydy=12-24=-12.$$

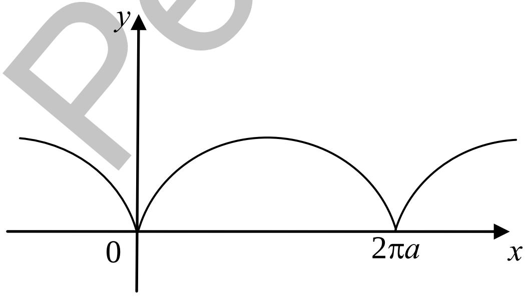

Рис. 2

***Пример* 2.** Найти $\int\limits_L (2a-y)dx-(a-y)dy$, где L – первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$ (см. рисунок 2).

Решение. Кривая L в этом случае задана параметрически, следовательно, криволинейный интеграл сводится к определенному по формулам (4), (5). При этом,

$$dx = a(1-\cos t)dt,\ \ dy = a\sin t\,dt.$$

Так как при движении из начальной точки O (0, 0) в конечную A ($2\pi a$, 0) переменная интегрирования t в определенном интеграле изменяется от 0 до $2a$. то по формулам (4) и (5)

$$\int_L (2a-y)dx-(a-y)dy =$$

$$\int_0^{2\pi}((2a-a(1-\cos t))\,a(1-\cos t)-(a-a(1-\cos t))\,a\sin t))\,dt =$$

$$=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos^2 t-\cos t\sin t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(\sin^2 t-\cos t\sin t)\,dt =$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt - a^2\int_0^{2\pi}\cos t\,d(\cos t) =$$

$$=\frac{a^2}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}+a^2\frac{\cos^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi}=\pi a^2.$$

***Пример* 3.** Используя формулу Грина, найти интеграл $\int_C (x-y)dx+(x+y)dy$, где С представляет собой окружность, заданную уравнением $x^2+y^2=a^2$.

Решение. Рассмотрим формулу (6). В нашем случае:

$$P(x,y)=x-y,\ Q(x,y)=x+y, \text{ тогда } \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(x+y)}{\partial x}=1,\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(x-y)}{\partial y}=-1$$

Следовательно, $\int_C (x-y)dx+(x+y)dy = \iint_D 2\,dxdy$, где область D – круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=a^2$. Учитывая, что интеграл $\iint_D dxdy$ равен площади области D, т.е. πa^2, получим $\int_C (x-y)dx+(x+y)dy = 2\pi a^2$

Задания для самостоятельного решения

Найти криволинейный интеграл второго рода

1. $\int_C xdy - ydx$ вдоль кривой С, заданной уравнением $y = x^3$ от точки (0, 0) до точки (2, 8).

2. $\int_C \sqrt{x}dx-\sqrt{y}dy$ вдоль кривой $y = x^2$ от точки O(0, 0) до A(1, 1).

3. $\int\limits_C y^2dx + xydy$, где C – дуга эллипса, заданного параметрически уравнениями $x = a\cos t, y = b\sin t$, $0 \le t \le \pi$.

4. $\int\limits_C x^2dx + xydy$, где C – дуга окружности радиуса *a*, лежащая в первом квадранте (направление обхода – против часовой стрелки).

5. $\int\limits_{AB} xdx + ydy + (x + y - z)dz$ где AB – отрезок прямой от точки A(1,1,1) до точки B(2,3,4).

6. $\int\limits_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где C – окружность радиуса *a*, пробегаемая против часовой стрелки.

Найти криволинейный интеграл второго рода, используя формулу Грина.

7. $\oint\limits_C yx^2dx - xy^2dy$, где C – окружность $x^2 + y^2 = a^2$, обход которой производится против часовой стрелки.

8. $\oint\limits_C (x + y)\, dx - (x - y)dy$, где C – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

9. $\oint\limits_C y^2\, dx + (x + y)^2 dy$, где контур C представляет собой треугольник ABD с вершинами в точках $A(a, 0)$, $B(a, a)$, $D(a, a)$.

10. $\oint\limits_c e^x(1-\cos y)dx - e^x(1-\sin y)dy$, где C - пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$.

§ 3. *Нахождение поверхностных интегралов первого и второго рода*

Пусть поверхность *Ф*, заданная явно уравнением $z = \varphi(x, y)$ и однозначно проектируется в область *D* плоскости *Oxy*, тогда поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x, y)$ можно найти по формуле:

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2}\, dxdy \qquad (7)$$

Пусть *Ф* – гладкая, ограниченная, полная, двусторонняя поверхность. Пусть на поверхности заданы непрерывная векторная функция $\vec{r}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ и непрерывная векторная функция $\vec{n}(M)$ $= (\cos X(M), \cos Y(M), \cos Z(M))$ единичных нормалей к поверхности *Ф*.. Скалярное произведение векторов $\vec{r}(M)$ и $\vec{n}(M)$ находится по формуле

$$\vec{r}(M) \cdot \vec{n}(M) = P(M)\cdot\cos X(M) + Q(M)\cdot\cos Y(M) + R(M)\cdot\cos Z(M).$$

Отсюда следует, что поверхностный интеграл второго рода можно записать в виде:

$$\iint_{\Phi} (P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)\cdot dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_{\Phi} (P(x,y,z)\cdot \cos X + Q(x,y,z)\cdot \cos Y + R(x,y,z)\cdot \cos Z\,)dS =$$

$$= \iint_{\Phi} \vec{r}(M)\cdot \vec{n}(M)dS\,. \qquad (8)$$

Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти поверхностный интеграл первого рода $\iint_{\Phi} \sqrt{x^2+y^2}\, dS$, где Φ – часть поверхности конуса, заданного уравнением $z = \frac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 3$.

Решение. Поверхностный интеграл находим по формуле (7). Для этого найдем : $z'_x = \frac{3x}{4\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{3y}{4\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$dS = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy = \sqrt{1+\frac{9x^2}{16(x^2+y^2)}+\frac{9y^2}{16(x^2+y^2)}}\,dxdy = \frac{5}{4}\,dxdy\,.$$

Проекцией (D) поверхности Φ на плоскость XOY является круг $x^2+y^2 \le 4$. Тогда

$$\iint_{\Phi} \sqrt{x^2+y^2}\,dS = \frac{5}{4}\iint_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dS = \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 4 \end{matrix} \right| =$$

$$= = \frac{5}{4}\iint_{G} \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\cdot r\,drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r^2 dr \quad \frac{160\pi}{3}.$$

Пример 2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $I = \iint_{\Phi} zdydz + (x+y)dxdz + ydxdy$, где Φ – верхняя сторона части плоскости $2x+y+2z=2$, отсечённой координатными плоскостями.

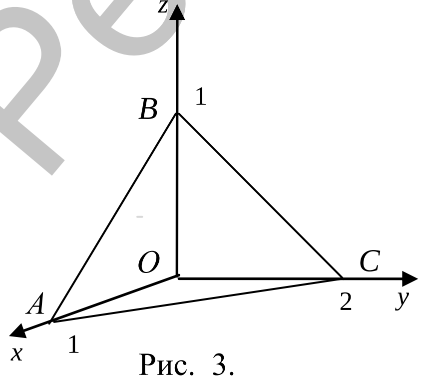

Рис. 3.

Решение. Данная поверхность – это треугольник ABC (рисунок 3), вектор нормали к верхней стороне плоскости, в которой лежит треугольник, имеет координаты (2, 1, 2), вектор единичной нормали: $\bar{n} = \frac{2\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}\bar{i}+\frac{1}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k}$. Векторная функция $\vec{r}(M) = (z,\ x+y,\ y)$. Тогда по формуле (8) приводим поверхностный интеграл второго рода к поверхностному интегралу первого рода.

$$I_4 = \iint\limits_{\Phi} (\bar{r},\bar{n})ds = \iint\limits_{\Phi} (\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}(x+y) + \frac{2}{3}y)\, ds = \iint\limits_{\Phi} (\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}x + y)ds\,.$$

Проекцией треугольника ABC к на плоскость Oxy является треугольник AOC, Плоскость $2x + y + 2z = 2$ можно задать явно уравнением $z = 1 - x - \frac{y}{2}$, тогда дифференциал плоскости $ds = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}dxdy == \frac{3}{2}dxdy$.

Следовательно,

$$I_4 = \iint\limits_{D} (\frac{2}{3}(1 - x - \frac{y}{2}) + \frac{1}{3}x + y)\frac{3}{2}dxdy = = \frac{3}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} (\frac{2}{3}(1 - x - \frac{y}{2}) + \frac{1}{3}x + y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} (2 - x + 2y)\, dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\,2y - xy + y^2)\Big|_0^{2-2x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (4 - 7x + 3x^2)dx = (4x - \frac{7}{2}x^2 + x^3)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

1.1. $\iint\limits_{\Phi} xy\, dS$, где Φ – часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащей в первом октанте;

1.2. $\iint\limits_{\Phi} (x + 2z)\, dS$, где Φ – часть плоскости $6x + 3y + 2z = 6$, лежащей в первом октанте;

1.3. $\iint\limits_{\Phi} (x^2 + y^2)\, dS$, где Φ – поверхность куба $|x| \le a,\ |y| \le a,\ |z| \le a$;

1.4. $\iint\limits_{\Phi} \frac{dS}{(1 - x - y)^2}$, где Φ – поверхность тетраэдра $x + y + z \le 1$, $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;

1.5. $\iint\limits_{\Phi} z\, dS$, где Φ – часть параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченная плоскостью $z = 1$;

1.6. $\iint\limits_{\Phi} \sqrt{x^2 + y^2}\, dS$, где Φ – часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \le 1$;

1.7. $\iint\limits_{\Phi} z^2\, dS$, где Φ – часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0.\ z \ge 0$, отсеченной плоскостью $z = 1$;

1.8. $\iint\limits_{\Phi} z\,dS$, где Φ–полусфера $x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0$;

1.9. $\iint\limits_{\Phi} (x^2+y^2)\,dS$, где Φ– полусфера $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x\ge 0$;

1.10. $\iint\limits_{\Phi} \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где Φ– часть поверхности $z = xy$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=a^2$.

2. Найти поверхностный интеграл второго рода.

2.1. $\iint\limits_{\Phi} (x^2+y^2)dxdy$ где $x^2+y^2\le 4, z=0.$ Ф – нижняя сторона плоскости $z=0$, отсеченная цилинлром $x^2+y^2=4$;

2.2. $\iint\limits_{\Phi} (2z-x)dydz+(x+2z)dzdx+3zdxdy,$ где Ф – верхняя сторона плоскости $x+4y+z=4,$ отсеченная координатными плоскостями;

2.3. $\iint\limits_{\Phi} yzdydz+zxdzdx+xydxdy,$ где Ф – внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0.$

2.4. $\iint\limits_{\Phi} x^2y^2zdxdy,$ где Ф – внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\le 0.$

2.5. $\iint\limits_{\Phi} (x^5+z)dydz;$ где Ф – внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\le 0.$

2.6. $\iint\limits_{\Phi} x^2y^2zdxdy,$ где Ф – внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\le 0.$

2.7. $\iint\limits_{\Phi} (x^5+z)dydz$, где Ф – внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\le 0.$

2.8. $\iint\limits_{\Phi} xdydz+ydxdz+zdxdy,$ где *а*) Ф – внешняя сторона поверхности куба $\{(x,y,z): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\},$ *б*) Ф – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$;

2.9. $\iint\limits_{\Phi} (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy,$ где Ф – нижняя сторона части конуса $z^2=x^2+y^2,\ 0<z\le H$;

2.10. $\iint\limits_{\Phi} yzdxdy+zxdydz+xydzdx,$ где Ф – внешняя сторона части цилиндра $x^2+y^2=R^2,\ x\le 0, y\ge 0,\ 0\le z\le H$.

§ 4. *Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса*

Пусть *Ф* – кусочно-гладкая, полная, двусторонняя поверхность, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой *Г*.

Определение. *Направление на контуре Г называется* ***положительным****, если с учетом выбранной стороны поверхности при обходе контура в заданном направлении поверхность остается слева.*

Пусть *Ф* – гладкая, односвязная поверхность с кусочно-гладкой замкнутой границей Г. Пусть на поверхности *Ф* и на ее границе Г определены дифференцируемые функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$. Пусть контур *Г* ориентирован в положительном направлении с учетом выбранной стороны поверхности. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\iint_{\Phi}\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot\cos X+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot\cos Y+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\cos Z\right)dS=$$
$$=\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz \qquad (9)$$

Формула (3.11) называется ***формулой Стокса.***

Формулу Стокса легко запомнить, если записать ее в следующем виде:

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz =$$
$$=\iint_{\Phi}\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot\cos X+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot\cos Y+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\cos Z\right)dS=$$
$$\iint_{\Phi}\begin{vmatrix}\cos X & \cos Y & \cos Z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS.$$

Пусть *Ф* – замкнутая кусочно-гладкая, полная, двусторонняя поверхность, ограничивающая некоторую область (*V*) пространства. Справедлива следующая теорема. Пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ дифференцируемы в области (*V*) и на ее границе *Ф*. Тогда справедлива следующая формула

$$\iint_{\Phi} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz, \qquad (10)$$

где на поверхности Ф выбрана внешняя сторона.

Формула (10) называется ***формулой Остроградского-Гаусса.***

Примеры решения задач

***Пример* 1.** С помощью формулы Стокса вычислить интеграл $\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, где *Г* – окружность, полученная при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ и плоскости $x + y + z = 0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси Ox.

Решение. Контур Γ можно рассматривать как границу круга, лежащего в плоскости Φ: $x + y + z = 0$. Тогда на плоскости выбирается верхняя сторона, вектор единичной нормали к которой имеет координаты: $\bar{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. При этом $P(x,y,z) = y - z$, $Q(x,y,z) = z - x$, $R(x,y,z) = x - y$. Тогда $P'_x = 0$, $P'_y = 1$, $P'_z = -1$, $Q'_x = -1$, $Q'_y = 0$, $Q'_z = 1$, $R'_x = 1$, $R'_y = -1$, $R'_z = 0$.

По формуле (9) имеем

$$I = \oint_{\Gamma} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz =$$

$$= \iint_{\Phi} ((-1-1)\cos X + (-1-1)\cos Y + (-1-1)\cos Z)dS,$$

где $\cos X = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos Y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos Z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда $I = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Phi} dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} S_{кр}$,

где $S_{кр}$ – площадь круга, ограниченного окружностью Γ, лежащего в плоскости Φ. Тогда $I = -\frac{6\pi}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}\pi$.(Здесь мы использовали формулу $S_{\Phi} = \iint_{\Phi} dS$).

***Пример* 2.** С помощью формулы Остроградского-Гаусса найти поверхностный интеграл $\iint_{\Phi} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где Φ – внешняя сторона тетраэдра, ограниченного плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой (10), где $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = z$. Тогда $P'_x = 1$, $Q'_y = 1$, $R'_z = 1$. Область V, по которой находится тройной интеграл – это область, ограниченная поверхностью тетраэдра $AOBC$ (рис.6).

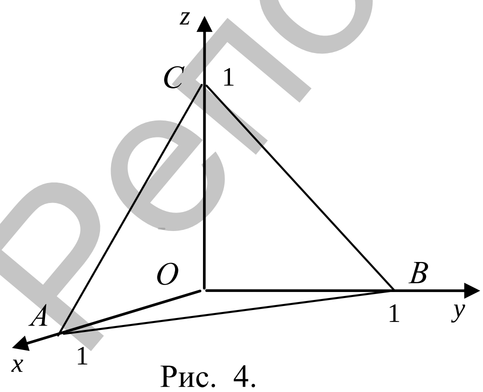

Рис. 4.

$$I = \iint_{\Phi} xdydz + ydxdz + zdxdy =$$

$$= \iiint_{V} (1+1+1)dxdydz = 3\iiint_{V} dxdydz = 3V_т,$$

где $V_т$ – объем тетраэдра, высота которого $OC = 1$, основанием служит прямоугольный треугольник AOB с катетами $AO = 1$, $OB = 1$. $V_т = \frac{1}{3} OC \cdot S_{\Delta AOB} = \frac{1}{6}$. Следовательно, $I = \frac{1}{2}$.

Задания для самостоятельного решения

Используя формулу Стокса вычислить интегралы:

1. $\oint\limits_{L} (x+z)dx+(x-y)dy+xdz$ где L – эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=c$, ориентированный отрицательно относительно вектора (0, 0, 1).

2. $\oint\limits_{L} ydx+zdy+xdz$ где L – витки винтовой линии $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t,\ \ 0\le t\le 2\pi$, пробегаемой от точки (1, 0, 0) до точки $(1,0,2\pi)$.

3. $\oint\limits_{L} y^2dx+z^2dy+x^2dz$, где L – граница треугольника с вершинами в точках $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$, ориентированная положительно относительно вектора $\vec{j}\,(0,1,0)$.

4. $\int\limits_{L} \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+zdz$, где L– окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$, ориентированная положительно относительно вектора $\vec{k}\,(0,0,1)$.

5. $\oint\limits_{L} (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, где L – окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, ориентированная положительно относительно вектора $\vec{i}\,(1,0,0)$.

С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить интегралы:

6. $\iint\limits_{\Phi} (1+2x)dydz+(3x+3y)dxdz+(4y+5z)dxdy$, где Φ – внешняя сторона поверхности пирамиды $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\ z\ge 0.$

7. $\iint\limits_{\Phi} xdydz+ydxdz+zdxdy$, где Φ – сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

8. $\iint\limits_{\Phi} (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$, где Φ – внешняя часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2,\ 0\le z\le 3$.

9. $\iint\limits_{\Phi} yzdydz+zxdxdz+xydxdy$, где Φ – внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z\le 1,\quad x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

10. $\iint\limits_{\Phi} (5x+y)dydz+zdxdy$, где Φ – внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2=z^2,\quad 0\le z\le 4$.

ЧАСТЬ 4. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И АЛГОРИТМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§1. *Условный экстремум функции при ограничениях-равенствах*

п.1. Основные теоретические сведения.

Постановка задачи:

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ и функции ограничений $g_j(x) = g_j(x_1, ..., x_n) = 0, (j = \overline{1,m})$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум на множестве $X = \left\{x / g_j(x) = 0,\ j = \overline{1,m}\right\}$.

Число ограничений m (уравнений связи) меньше n.

Есть два метода решения данной задачи.

1) **<u>Метод исключения части переменных.</u>**

При решении задачи этим методом

а) Разрешают уравнения связи относительно каких-либо m переменных, например $x_1, ..., x_m$.

б) Подставляют эти переменные в функцию $f(x)$ и получают $f(x) = F(x_{m+1}, ..., x_n)$.

в) Исследуют на безусловный экстремум новую функцию n-m переменных.

г) Подставляют координаты полученных точек экстремума в выражения для $x_j, (j = \overline{1,m})$ и находят точки экстремума функции $f(x)$.

2) **<u>Метод Лагранжа</u>**.

Задача об условном экстремуме функции $f(x)$ эквивалентна задаче об условном экстремуме функции Лагранжа $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x)$, где λ_j – произвольные числа.

***Теорема* 1 (*необходимые условия экстремума первого порядка*).**

Пусть x^0 есть точка условного экстремума функции $f(x)$. Тогда найдутся числа $\lambda_1^0, ..., x_m^0$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются условия:

– условие стационарности функции Лагранжа по x: $\dfrac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_i} = 0, (i = \overline{1,n})$.

– условия допустимости решения: $g_j(x) = 0, (j = \overline{1,m})$.

Замечание. Предполагается, что в точке x^0 выполняется условие регулярности, т.е. градиенты функции $g_j(x)$ линейно независимы.

Точки, удовлетворяющие условиям теоремы 1, называют условно-стационарными.

***Теорема* 2** (*необходимые условия экстремума второго порядка*).

Пусть x^0 регулярная точка экстремума функции $f(x)$. Тогда второй дифференциал функции Лагранжа, вычислений в точке $(x^{0.}, \lambda^0)$ неотрицателен для точки минимума и не положителен для точки максимума $d^2L(x^{0.}, \lambda^0) \geq 0$ $(d^2L(x^{0.}, \lambda^0) \leq 0)$ для всех $dx = (dx_1, \ldots, dx_n) \in R^n$, таких что $dg_j(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^0)}{\partial x_i} dx_i = 0, (j = \overline{1,m}).$ (1)

***Теорема* 3** (*достаточные условия экстремума*).

Пусть $(x^{0.}, \lambda^0)$ - точка удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_i} = 0, (i = \overline{1,n})$$

$$g_j(x^0) = 0, (j = \overline{1,m}).$$

Если в этой точке $d^2L(x^{0.}, \lambda^0) > 0$ $(d^2L(x^{0.}, \lambda^0) < 0)$ для всех ненулевых $dx \in R^n$ таких, что выполнено условие (1), то точка x^0 является точкой локального минимума (максимума).

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия первого порядка:

а) $\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_i} = 0, (i = \overline{1,n})$

б) $g_j(x^0) = 0, (j = \overline{1,m})$.

Шаг 3. Решить систему и найти точки (x^0, λ^0).

Шаг 4. Для полученных точек проверить достаточные условия экстремума:

а) Найти $\partial^2 L(x^0, \lambda^0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$;

б) Продифференцировать уравнения связи:

$$dg_j(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^0)}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (j = \overline{1,m});$$

в) Из полученной системы выразить любые m дифференциалов через остальные (n-m) и подставить в $\partial^2 L(x^0, \lambda^0)$;

г) Если $\partial^2 L(x^0, \lambda^0) > 0$ при ненулевых dx, то в точке x^0 - условный локальный минимум, если $\partial^2 L(x^0, \lambda^0) < 0$ при ненулевых dx, то в точке x^0 - условный локальный максимум. Если достаточные условия не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (теорема 2). Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если не выполняются, то в точке x^0 нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

п.2 Примеры решения задач

***Пример* 1.** Методом Лагранжа найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$$

и рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ F_1 = z - x - 1 = 0, \\ F_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение: $x = -1, y = 1, z = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1,$ т.е. $M_0(-1,1,0) -$ единственная точка возможного экстремума функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$. Отметим, что в окрестности точки M_0 система $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$ определяет единственную пару неявных функций $y(x), z(x)$. Хотя в данном случае их легко найти в явном виде, нам эти явные выражения не понадобятся. Предполагая, что в систему $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$ подставлено её решение $y(x), z(x)$, и дифференцируя полученные тождества, приходим к равенствам $\begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy - xdz - zdx = 0. \end{cases}$

Отсюда находим $\begin{cases} dz = dx\,, \\ dy = (x+z)dx. \end{cases}$

Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$d^2\Phi = 2(dz)^2 - 2\lambda_2 dxdz$, и подставляя $\lambda_2 = -1$ и выражение $\begin{cases} dz = dx\,, \\ dy = (x+z)dx. \end{cases}$ для dz, получаем положительно определённую квадратичную форму от одной переменной $dx: 4(dx)^2$.Отсюда следует, что функция $u = x + y + z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z - x = 1\,, \\ y - xz = 1. \end{cases}$ имеет в точке M_0 условный минимум. ▲

***Пример* 2.** На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удалённую от точки $(0, 0, 3)$ определяется формулой $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}$. Поэтому исходная задача равносильна задаче об условном максимуме функции $u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$ при условии связи $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = x^2 + y^2 + (z-3)^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8)$$

и рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y + 4\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 2z - 6 + 8\lambda z = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8. \end{cases}$$

Так как эллипсоид $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ более всего вытянут вдоль оси Ox, то абсцисса искомой точки не может быть равна нулю, т.е. $x \neq 0$. Поэтому из первого уравнения системы следует, что $\lambda = -1$. Тогда из второго третьего уравнений системы имеем $y = 0,\ z = -1$. Наконец, из последнего уравнения системы находим $x = \pm 2$. Итак, функция $u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$ имеет две точки возможного условного максимума, $M_1(2, 0, -1)$ и $M_2(-2, 0, -1)$. Предполагая, что в уравнении $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ подставлено его решение $z = z(x, y)$, и дифференцируя полученное тождество, находим $xdx + 2ydy + 4zdz = 0$, откуда

$$dz = -\frac{x}{4z}dx - \frac{y}{2z}dy\,.$$

Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа $d^2\hat{O} = 2(1+\lambda)(dx)^2 + 2(1+2\lambda)(dy)^2 + 2(1+8\lambda)(dz)^2$, и подставляя $\lambda = -1$, координаты точки M_1 или M_2 и выражение $dz = -\frac{x}{4z}dx - \frac{y}{2z}dy$ для dz, получаем в каждом случае отрицательно определённую квадратичную форму от двух переменных $dx, dy - 2(dy)^2 - 3{,}5(dx)^2$. Отсюда следует, что функция $u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$ имеет в точках M_1 и M_2 условный максимум при условиях связи $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$, т.е. на эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ имеются две точки, $M_1(2,0,-1)$ и $M_2(-2,0,-1)$, наиболее удалённые от точки $(0, 0, 3)$ ▲

Задания для самостоятельной работы

***Задание* 1.** Решить следующие экстремальные задачи:

1. $f(x) = x_1 x_2 \to extr,$
$g(x) = 3x_1 + x_2 - 6 = 0.$

2. $f(x) = e^{x_1 x_2} \to extr,$
$g(x) = x_1 + x_2 - 1 = 0.$

3. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 \to extr,$
$g(x) = 2x_1 + x_2 - 1 = 0.$

4. $f(x) = x_1 + x_2 + x_3^2 \to extr,$
$g(x) = -x_1 + x_3 - 1 = 0.$

5. $f(x) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \to extr,$
$g(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$

6. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \to extr,$
$g_1(x) = x_1 + x_2 - x_4 - 6 = 0;$
$g_2(x) = x_1 + x_3 + x_4 - 9 = 0;$

7. $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \to extr,$
$g(x) = x_1 + x_2 - a = 0.$

8. $f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to extr,$
$g(x) = x_1 - x_2 - 10 = 0.$

9. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3 \to extr,$
$g(x) = x_1^3 + x_2^3 - 1 = 0.$

10. $f(x) = 2x_1 \to extr,$
$g(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 = 0.$

11. $f(x) = 4x_1 x_2 \to extr,$
$g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0.$

12. $f(x) = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 3x_1 + 3x_2 \to extr,$
$g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$

13. $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to extr,$
$g(x) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - 1 = 0.$

14. $f(x) = x_1 \to \min,$
$g(x) = 9x_1^3 - x_2^2 = 0.$

15. $f(x) = x_2 \to \min,$
$g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
$g_2(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0;$

***Задание* 2.** Решить задачу

$$f(x) = ax_1^2 + 2x_1 x_2 + bx_2^2 \to \min(\max)$$
$$g(x) = 4x_1^2 + cx_2^2 - 9 = 0,$$

где числа a, b, c заданы в таблице

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	3	1	1	1	3	5	3	7	5	5	5	9	9	3
b	1	4	1	2	1	2	4	5	9	2	8	3	3	7	6
c	3	5	2	6	1	2	3	6	5	1	6	2	1	3	7

***Задание* 3.** Решить задачу

$$f(x) = ax_1^3 + bx_2^3 \to \min(\max)$$
$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 - c^2 = 0,$$

где числа a, b, c заданы в таблице

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	3	7	1	7	3	3	4	1	5	3	1	4	5	2	2
b	2	3	2	2	4	1	3	4	2	5	8	1	3	5	1
c	2	3	5	1	2	3	4	5	2	1	1	5	4	3	2

***Задание* 4.** Найти условный экстремум функции $f(x)$ при данных уравнениях связи:

	$f(x)$	Уравнения связи
1.	$f(x) = x_1 + x_2$	$x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$
2.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2$	$x_1^2 + 2x_2^2 - 8 = 0$
3.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2$	$x_2^2 - x_1 = 0$
4.	$f(x) = 2x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 3$	$x_1 + x_2 + 6 = 0$
5.	$f(x) = x_1 - 2x_2^2 + 4x_2$	$-3x_1 - 2x_2 = 6$
6.	$f(x) = -4x_1^2 - 8x_1 + x_2 + 3$	$-x_1 - x_2 = 2$
7.	$f(x) = 4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5$	$2x_1 - x_2 = 6$
8.	$f(x) = -8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7$	$2x_1 + 3x_2 = -6$
9.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$
10.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 2$
11.	$f(x) = x_1 + x_2$	$x_1^2 + x_2^2 = 2$
12.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2$	$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0$
13.	$f(x) = x_1^2 - x_2^2$	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
14.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$
15.	$f(x) = \frac{1}{2}((x_1 - 1)^2 + x_2^2)$	$-x_1 + 2x_2^2 = 0$

§ 2. *Условный экстремум функции при ограничениях-неравенствах*

п. 1. Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ и функции ограничений $g_j(x) = g_j(x_1, ..., x_n) \le 0, (j = \overline{1,m})$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум на множестве $X = \{x / g_j(x) \le 0,\ j = \overline{1,m}\}$.

п. 2 Основные теоретические сведения

Строится функция Лагранжа $L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$, где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ -некоторый неизвестный числовой вектор(множитель Лагранжа).

***Теорема* 1** (*необходимые условия экстремума первого порядка*).

Пусть x^0- точка локального минимума (максимума) в данной задаче. Тогда найдётся такой вектор λ^0, что будут выполняться следующие условия:

– условие стационарности функции Лагранжа по *x*: $\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_i} = 0, (i = \overline{1,n})$ (1)

– условия допустимости решения: $g_j(x^0) \le 0, (j = \overline{1,m})$ (2)

– условие неотрицательности для условного минимума:

$$\lambda_j^0 \ge 0\ (j = \overline{1,m}) \quad (3)$$

(условие неположительности для условного максимума: $\lambda_j^0 \le 0\ (j = \overline{1,m})$)

– условия дополняющей нежёсткости: $\lambda_j^0 g_j(x^0) = 0, (j = \overline{1,m})$ (4)

***Замечание* 1.** Предполагается, что точка x^0является регулярной точкой.

***Замечание* 2.** Точки x^0, удовлетворяющие системе (1) – (4) называются условно стационарными.

***Замечание* 3.** Ограничения $g_j(x)$ называются активным в точке x^0, если $g_j(x^0) = 0$.

Множество индексов ограничений, активных в точке x^0 обозначим через J_a.

***Теорема* 2** (*достаточные условия экстремума первого порядка*).

Пусть точка $(x^{0.}, \lambda^0)$ удовлетворяет системе (1) – (4) и число активных ограничений в точке x^0 совпадает с числом n переменных. Если $\lambda_j^0 > 0$ для всех $j \in J_a$, то точка x^0 – точка условного локального минимума. Если $\lambda_j^0 < 0$ для всех $j \in J_a$, то точка x^0 – точка условного локального максимума.

***Теорема* 3** (*необходимое условие экстремума второго порядка*).

Пусть x^0 регулярная точка экстремума в рассматриваемой задаче и имеется решение $(x^{0.}, \lambda^0)$ системы (1) – (4). Тогда второй дифференциал функции Лагранжа, вычислений в точке $(x^{0.}, \lambda^0)$, неотрицателен (для минимума) (неположителен (для максимума)):

$$d^2L(x^{0.}, \lambda^0) \geq 0 \quad (d^2L(x^{0.}, \lambda^0) \leq 0) \quad (5)$$

для всех $dx \in R^n$, таких что $dg_j(x^0) = 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^0 > 0 (\lambda_j^0 < 0))$

$dg_j(x^0) \leq 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^0 = 0)$.

***Теорема* 4** (*достаточные условия экстремума второго порядка*).

Пусть имеется точка $(x^{0.}, \lambda^0)$ удовлетворяющая системе (1) – (4)($x^{0.}$ – регулярная точка). Если в этой точке $d^2L(x^{0.}, \lambda^0) > 0 \quad (d^2L(x^{0.}, \lambda^0) < 0)$ для всех ненулевых $dx \in R^n$, таких что

$dg_j(x^0) = 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^0 > 0 (\lambda_j^0 < 0)$,

$dg_j(x^0) \leq 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^0 = 0$, то точка x^0 является точкой локального минимума (максимума).

П.3 Алгоритм решения задачи

<u>Шаг 1</u>. Составить функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x).$$

<u>Шаг 2</u>. Записать необходимые условия экстремума первого порядка, т.е. условия (1) – (4).

<u>Шаг 3</u>. Решить систему, т.е. найти условно-стационарные точки.

Начинать решение системы следует с рассмотрения $2^{m.}$ вариантов удовлетворения условий (4) дополняющей нежёсткости.

<u>Шаг 4</u>. Для выделенных точек проверить достаточные условия первого порядка.

Для этого необходимо:

а) определить число k активных в точке $x^{0.}$ ограничений;

б) если $k = n$ и $\lambda_j^0 > 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке $x^{0.}$ – локальный минимум, если

$\lambda_j^0 < 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке $x^{0.}$ – локальный максимум.

в) если $k < n$ или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, то переходят к шагу 5;

Шаг 5. Проверяем достаточные условия второго порядка.

Для этого необходимо:

а) записать выражение для второго дифференциала функции Лагранжа в точке $(x^{0.}, \lambda^0)$:

$$d^2L(x^0,\lambda^0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j\ ;$$

б) записать условие, накладываемые на первые дифференциалы активных ограничений:

$$\begin{cases} dg_j(x^0) = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g_j(x^0)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = J_a,\ \lambda_j^0 > 0\ (\lambda_j^0 < 0) \\ dg_j(x^0) = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g_j(x^0)}{\partial x_i} dx_i \le 0, \quad j = J_a,\ \lambda_j^0 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

в) исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых dx, удовлетворяющих систем (6). Если $d^2L(x^0,\lambda^0) > 0$, то в точке x^0 – условный локальный минимум, если $d^2L(x^0,\lambda^0) < 0$, то в точке x^0 – условный локальный максимум;

Если достаточные условия первого и второго порядка не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если нет, то в точке x^0 нет условного экстремума.

Шаг 6. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

п.4. Примеры решения задач

Пример. Найти условный минимум в задаче $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 0, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3. \end{cases}$$

Решение. Запишем ограничения в виде неравенств "≤" и составим функцию Лагранжа.

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) + \lambda_2(-x_1 - 3x_2 + 3).$$

2. Выпишем необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$;

$\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$;

$\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_3} = 4x_3 - \lambda_1 = 0$;

б) $-x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0$;

$-x_1 - 3x_2 + 3 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0 \quad \lambda_2 \ge 0$;

г) $\lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) = 0$;

$\lambda_2(-x_1 - 3x_2 + 3) = 0$.

3. Решим систему. Рассмотрим 4 варианта удовлетворяющие условию “2” дополняющей нежёсткости:

1) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$.Тогда из “а” следует $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. При этом условия “б” не выполняются.

2) $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$. Тогда $g_1(x) = 0$.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 - \lambda_1 = 0, \\ 2x_2 - \lambda_1 = 0, \\ 4x_3 - \lambda_1 = 0. \end{cases} \qquad x_1 = \frac{\lambda_1}{2}, \quad x_2 = \frac{\lambda_1}{2}, \quad x_3 = \frac{\lambda_1}{4}.$$

Тогда $\lambda_1 = \frac{4}{5}, \quad x_1 = x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_3 = \frac{1}{5}$.

Второе неравенство в условии “б” не выполняется.

3) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0$. Тогда $g_2(x) = 0$ и получаем $\lambda_2 = \frac{3}{5}, \quad x_1 = \frac{3}{10}, \quad x_2 = \frac{9}{10}, \quad x_3 = 0$.

Первое неравенство в условии “б” выполняется. Имеем условно-стационарную точку $A\left(\frac{3}{10}; \frac{9}{10}; 0\right) \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{3}{5}$.

4) $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 \ne 0$. Тогда $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$.

Решая полученную систему, находим $\lambda_1 = -\frac{4}{9}, \lambda_2 = \frac{7}{9}$. Так как $\lambda_1 < 0$, то условие “в” не выполняется.

4. Проверим достаточные условия экстремума. В точке A одно активное ограничение. Поэтому $k = 1 < n = 3$ и достаточность минимума первого порядка не выпол. Проверим достаточные условия второго порядка:

$d^2L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 + 4dx_3^2$;

$dg_2(A) = -dx_1 - 3dx_2 = 0$;

$dx_1 = -3dx_2$;

$d^2L(A) = 2(-3dx_2)^2 + 2dx_2^2 + 4dx_3^2 > 0$ при $dx \ne 0$. Значит, в точке A условий локальный минимум.

5. $f(A) = \frac{9}{100} + \frac{81}{100} + 0 = \frac{9}{10}$.

Задания для самостоятельной работы

***Задание* 1.**

	$f(x)$	*Ограничения*
1.	$f(x)=(x_1+4)^2+(x_2-4)^2+1$	$\begin{cases}2x_1-x_2-2\le 0\\ -x_1\le 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$
2.	$f(x)=(x_1+2)^2+(x_2-2)^2$	$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 1\\ x_1\ge 0\\ x_2\le 0\end{cases}$
3.	$f(x)=x_1^2+x_2^2$	$\begin{cases}x_1+4x_2^2\le 16\\ x_1\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$
4.	$f(x)=x_1^2+x_2^2$	$(x_1-2)^2+4x_2^2\le 16$
5.	$f(x)=x_1^2+x_2^2$	$2x_1^2+(x_2-4)^2\le 1$
6.	$f(x)=x_1+x_2$	$\begin{cases}2x_1+x_2\le 4\\ x_1\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$
7.	$f(x)=x_1^2+(x_2-4)^2$	$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 4\\ 4x_1^2+x_2^2\ge 4\end{cases}$
8.	$f(x)=2x_1^2+x_2^2$	$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 4\\ 4x_1^2+x_2^2\ge 4\end{cases}$
9.	$f(x)=(x_1-2)^2+x_2^2$	$\begin{cases}x_1+x_2\le 1\\ x_1\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$
10.	$f(x)=(x_1+3)^2+(x_2+3)^2+2$	$\begin{cases}x_1^2+x_2^2-1\le 0\\ x_1\le 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$
11.	$f(x)=-x_1-x_2-x_3$	$\begin{cases}x_1^2+x_2^2-x_3\le 0\\ x_3\le 2\end{cases}$
12.	$f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-3)^2$	$\begin{cases}3x_1^2+2x_2^2\le 21\\ 4x_1+5x_2\le 20\\ x_1\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$

***Задание* 2.**

	$f(x)$	*Ограничения*
1.	$f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-3)^2$	$\begin{cases}3x_1^2+2x_2^2\le 21\\ 4x_1+5x_2\le 20\\ x_1\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$
2.	$f(x)=3x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$	$\begin{cases}x_1+x_2\ge 4\\ x_1\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$

3.	$f(x)=(x_1+2)^2+(x_2+2)^2-10$	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-1\le 0 \\ x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \end{cases}$
4.	$f(x)=(x_1+4)^2+(x_2-4)^2$	$\begin{cases} 2x_1-x_2\le 0 \\ x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \end{cases}$
5.	$f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$	$\begin{cases} 3x_1+2x_2\ge 7 \\ 10x_1-x_2\le 8 \\ -18x_1+4x_2\le 12 \\ x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \end{cases}$
6.	$f(x)=6x_1-x_1^2+x_2$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 24 \\ x_1+2x_2\le 15 \\ 3x_1+2x_2\le 24 \\ x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \\ x_2\le 4 \end{cases}$
7.	$f(x)=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2\ge 6 \\ 3x_1-2x_2\le 18 \\ -x_1+2x_2\le 8 \\ x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \end{cases}$
8.	$f(x)=x_1+x_2$	$x_1^2+x_2^2-1\le 0$
9.	$f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$	$x_1^2+x_2^2-52\le 0$
10.	$f(x)=(x_1-2)^2+x_2^2$	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 1 \\ x_1\ge 0 \end{cases}$
11.	$f(x)=(x_1-1)^2+x_2^2$	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 1 \\ x_1\ge 0 \end{cases}$
12.	$f(x)=x_1^2+(x_2-2)^2$	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 1 \\ x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \end{cases}$

Литература

1. Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. Методы оптимизации. – Минск: БГУ, 1981. – 350 с.
2. В.В. Альсевич. Методы оптимизации: упражнения и задания. – Минск: БГУ, 2005. – 405 с.
3. А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. Высшая математика. Математическое программирование. – Минск: Вышэйшая школа,1994.– 288 с.
4. С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. Математические методы и модели в экономике. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.
5. А.В. Пантелеев. Методы оптимизации в примерах и задачах. – Минск: Высшая школа, 2002. – 544 с.

Учебное издание

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич
ИВАНОВА Жанна Викторовна
СУРИН Татьяна Леонидовна
БОРОДИЧ Сергей Митрофанович

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать .2017. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 3,38. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.