УДК 517.538.52+517.538.53

Равномерная сходимость многочленов Эрмита–Паде

Е.П. Кечко
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Представленная статья относится к изучению сходимости многочленов Эрмита–Паде для системы экспонент.

Цель работы – изучение асимптотики диагональных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент.

Материал и методы. *Материалом исследования являются многочлены Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент. При этом использовались метод Лапласа и метод перевала.*

Результаты и их обсуждение. *Сформулирована теорема о равномерной сходимости диагональных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент* $\left\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\right\}_{p=0}^{k}$, *где* $\left\{\tilde{\lambda}_p\right\}_{p=0}^{k}$ *лежат на произвольной прямой комплексной плоскости. Для доказательства данной теоремы к интегральным представлениям многочленов Эрмита–Паде применяется метод Лапласа.*

Заключение. *В работе найдена асимптотика многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент. Сформулированные теоремы дополняют и обобщают известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского, А.П. Старовойтова и А.В. Астафьевой.*

Ключевые слова: *многочлены Эрмита–Паде, асимтотика многочленов Эрмита–Паде, система экспонент, метод Лапласа.*

Uniform Convergence of Hermite–Pade Polynomials

E.P. Kechko
Educational Establishment «Gomel State F. Skorina University»

The represented article refers to the study of the convergence of Hermite–Pade polynomials for exponential system.

The purpose of the work is to study asymptotic of diagonal Hermite–Pade polynomials of type I for exponential system.

Material and methods. *The object of the research is Hermite–Pade polynomials of type I for exponential system. Laplace's method and saddle-point method are used in the research.*

Findings and their discussion. *A theorem of uniform convergence of Hermite–Pade polynomials of type I for exponential system* $\left\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\right\}_{p=0}^{k}$, *where* $\left\{\tilde{\lambda}_p\right\}_{p=0}^{k}$ *are located on an arbitrary line of the complex plane, is formulated. To prove the theorem to integral representations of Hermite–Pade polynomials Laplace's method is used.*

Conclusion. *In the paper asymptotic of Hermite–Pade polynomials of type I for exponential system was found. The formulated theorems complement and generalize the known findings by P. Borwein, F. Wielonsky, A.P. Starovoitov and A.V. Astafieva.*

Key words: *Hermite–Padé polynomials, asymptotic of Hermite–Padé polynomials, exponential system, Laplace's method.*

В работе Эрмита [1], посвященной доказательству трансцендентности числа *e*, были введены в рассмотрение рациональные функции

$$\pi_{n,n}^{j}(z;e^{j\xi})=\frac{P_n^j(z)}{Q_n(z)},\quad j=1,2,\dots,k,$$

где многочлены $Q_n(z)$, $P_n^j(z)$ имеют степени не выше kn и определяются из равенств

$$Q_n(z)e^{jz}-P_n^j(z)=O(z^{kn+n-1}),\quad j=1,2,\dots,k. \tag{1}$$

В современной терминологии многочлены $Q_n(z)$, $\left\{P_n^j(z)\right\}_{j=1}^{k}$ называются диагональными многочленами Эрмита–Паде 2-го рода, а дроби $\left\{\pi_{n,n}^{j}(z;e^{j\xi})\right\}_{j=1}^{k}$ – аппроксимациями Эрмита–Паде 2-го рода для системы экспонент $\left\{e^{jz}\right\}_{j=1}^{k}$.

Позже Эрмит [2] определил многочлены $A_0(z), A_1(z), \dots, A_k(z)$ степени не выше $n-1$, которые тождественно не равны нулю и удовлетворяют условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z) e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \to 0. \tag{2}$$

Многочлены $\{A_p(z)\}_{p=0}^{k}$ принято называть диагональными многочленами Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$.

В одномерном случае общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1), (2), принадлежит Паде [3], а построенные в обоих случаях многочлены выражаются друг через друга:

$$A_0(z) = -P_{n-1}^{1}(z), \; A_1(z) = Q_{n-1}(z).$$

Теорема Паде утверждает, что если нормировать многочлены так, чтобы $A_1(0) = 1$, то при $n \to \infty$ локально равномерно по $z \in \mathbb{C}$, т.е. на любом компакте в $\mathbb{C}$ справедливы асимптотические равенства

$$A_0(z) = -e^{z/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \; A_1(z) = e^{z/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

В многомерном случае, когда $k \geq 2$, начало интенсивного и систематического изучения свойств многочленов Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода для произвольных систем аналитических функций связано с появлением работ К. Малера [4; 5]. Оба типа многочленов, явно различные в многомерном случае, имеют множество приложений в различных областях анализа (см. [6–8]).

В работе [9] П. Борвейн нашел асимптотику квадратичных диагональных многочленов Эрмита–Паде для системы экспонент $\{1, e^{z}, e^{2z}\}$. Ф. Вилонский [10] получил аналогичный результат для системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$ при произвольном k. В [11] найдена асимптотика диагональных многочленов Эрмита–Паде в случае системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ с произвольными различными отличными от нуля числами $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$, лежащими на действительной прямой.

В данной работе изучается асимптотика диагональных многочленов Эрмита–Паде для системы экспонент $\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\}_{p=0}^{k}$ в случае, когда числа $\{\tilde{\lambda}_p\}_{p=0}^{k}$ лежат на произвольной прямой комплексной плоскости.

Предварительные результаты. Полиномы $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^{k}$, удовлетворяющие равенствам (2), могут быть получены решением линейной системы $kn+n-1$ однородных уравнений с $kn+n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть $\tilde{C}_p$ – граница круга с центром в точке $\tilde{\lambda}_p$ столь малого радиуса, что все остальные $\tilde{\lambda}_j$ лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\tilde{\lambda}_p z}}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\tilde{\varphi}(\xi)]^n}, \; 0 \leq p \leq k, \tag{3}$$

где $\tilde{\varphi}(\xi) = (\xi - \tilde{\lambda}_0)(\xi - \tilde{\lambda}_1)\cdots(\xi - \tilde{\lambda}_k)$, удовлетворяют (2) и всем другим условиям. Равенство (3) не является новым и, по всей видимости, было известно еще Эрмиту (см. [1; 2]).

Далее при изучении асимптотики полиномов (3) будем использовать известные методы комплексного анализа. Приведем без доказательства в удобном для нас виде необходимые леммы [12, с. 398, с. 415].

Лемма 1 (метод Лапласа). *Пусть $f(x)$, $S(x)$ непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, при этом $S(x)$ принимает только действительные значения, а $f(x)$ может быть комплекснозначной. Полагаем*

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{nS(x)} dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ в точке $x_0 \in (a,b)$ имеет абсолютный максимум на отрезке $[a,b]$, т.е. $S(x) < S(x_0)$, $x \neq x_0$, $S''(x_0) \neq 0$, и функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0. Тогда при $n \to +\infty$ и $f(x_0) \neq 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{nS(x_0)} \left(f(x_0) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \qquad (4)$$

Лемма 2 (метод перевала). *Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ регулярны в некоторой односвязной области G, содержащей кусочно гладкую кривую γ и*

$$F_n = \int_\gamma f(\xi) e^{nS(\xi)} d\xi .$$

Предположим, что $\max_{\xi\in\gamma} S(\xi)$ достигается только в точке z_0, которая является внутренней точкой контура γ и простой точкой перевала, т.е. $S'(z_0)=0$, $S''(z_0)\neq 0$. Считаем также, что в окрестности z_0 контур γ проходит через оба сектора (см. [12, с. 414]), в которых $\mathrm{Re}S(\xi) < \mathrm{Re}S(z_0)$. Тогда при $n \longrightarrow +\infty$ и $f(z_0)\neq 0$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}} e^{nS(z_0)} \left(f(z_0) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \qquad (5)$$

Выбор ветви корня в (5) определяется из условий

$$\arg\sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0 ,$$

где φ_0 – угол между касательной к кривой l в z_0 и положительным направлением действительной оси, а l – линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку z_0, т.е. для l в окрестности z_0 выполняются условия: $\mathrm{Im}S(z) = \mathrm{Im}S(z_0)$ при $z\in l$, $\mathrm{Re}S(z) < \mathrm{Re}S(z_0)$ при $z\in l$, $z\neq z_0$.

Основная часть. Рассмотрим полиномы $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$, удовлетворяющие равенству (3), где $\tilde{\lambda}_p = e^{i\alpha}\lambda_p + b$, $p=0,1,\ldots,k$, $b\in\mathbb{R}$, а $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные действительные числа занумерованные так, что $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$. Если сделать замену $\xi = e^{i\alpha}\tau + b$ в равенстве (3), то получим

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha}\lambda_p z}}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{C_p} \frac{e^{e^{i\alpha}\tau z} d\tau}{[\varphi(\tau)]^n} , \ 0\le p\le k ,$$

где $\varphi(\tau) = (\tau-\lambda_0)(\tau-\lambda_1)\cdots(\tau-\lambda_k)$.

Пусть x_j, $j=1,2,\ldots,k$ – нули функции $\varphi'(\tau)$, т.е. $\varphi'(x_j)=0$, $j=1,2,\ldots,k$. Ясно, что x_j – действительные числа и $x_j\in(\lambda_{j-1},\lambda_j)$, $j=1,2,\ldots,k$. Считаем, что G – такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^k \subset G \in \mathbb{C}\setminus\{\lambda_p\}_{p=0}^k$. Тогда (см. [12]) функция

$$S(\tau) = -\ln\varphi(\tau) ,$$

где

$$S(x_1) = -\ln|\varphi(x_1)|, \text{ если } \varphi(x_1) > 0 ,$$
$$S(x_1) = -\ln|\varphi(x_1)| - i\pi , \text{ если } \varphi(x_1) < 0 ,$$

является однозначной аналитической функцией в G. Значения функции $S(\tau)$ вычисляются по формуле

$$S(\tau) = -\ln|\varphi(\tau)| - i[\mathrm{Im}\, S(x_1) + \Delta_\gamma \arg\varphi(\tau)],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и τ, а $\Delta_\gamma \arg\varphi(\tau)$ – приращение аргумента $\varphi(\tau)$ вдоль кривой γ.

Если $\tau\in G$, то справедливы равенства

$$S'(\tau) = -\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = -\frac{1}{\tau-\lambda_0} - \frac{1}{\tau-\lambda_1} - \cdots - \frac{1}{\tau-\lambda_k} ,$$

$$S''(\tau) = -\frac{\varphi''(\tau)\varphi(\tau) - [\varphi'(\tau)]^2}{[\varphi(\tau)]^2} = \frac{1}{(\tau-\lambda_0)^2} + \frac{1}{(\tau-\lambda_1)^2} + \cdots + \frac{1}{(\tau-\lambda_k)^2} ,$$

из которых следует, что $S'(x_j)=0$,

$$S''(x_j) = -\varphi''(x_j)/\varphi(x_j) > 0, \quad j = 1,2,\dots,k.$$

Выбирая положительное значение корня, полагаем

$$B_n(x_j) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\, nS''(x_j)}}e^{nS(x_j)}, \quad j = 1,2,\dots,k.$$

Теорема 1. *Пусть* $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ *– многочлены Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент* $\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\}_{p=0}^k$. *Тогда для каждого фиксированного* $z \in \mathbb{C}$ *и* $n \to \infty$

$$A_n^0(z) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_1) e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_0)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$A_n^p(z) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_{p+1}) e^{e^{i\alpha}(x_{p+1}-\lambda_p)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_p) e^{e^{i\alpha}(x_p-\lambda_p)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad p = \overline{1,k-1},$$

$$A_n^k(z) = -\frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_k) e^{e^{i\alpha}(x_k-\lambda_k)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы из [11].

Следствие 1. *При* $n \to \infty$

$$A_n^0(0) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_1)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{6}$$

$$A_n^p(0) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_{p+1})\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad p = \overline{1,k-1}, \tag{7}$$

$$A_n^k(0) = -\frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_k)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{8}$$

Из следствия 1 можно заметить, что при достаточно больших n $A_n^0(0) \neq 0$ и $A_n^k(0) \neq 0$. Тогда при таких *n* определим следующие последовательности нормированных многочленов:

$$\tilde{A}_n^0(z) = \frac{A_n^0(z)}{A_n^0(0)}, \quad \tilde{A}_n^k(z) = \frac{A_n^k(z)}{A_n^k(0)}.$$

Для определения аналогичных последовательностей при $p = \overline{1,k-1}$ рассмотрим три возможных случая, каждый из которых реализуется для конкретных систем экспонент.

A) $|\varphi(x_p)| \neq |\varphi(x_{p+1})|$. Обозначим через $\tilde{x}_p$ ту из точек x_p, x_{p+1}, для которой

$$\min\{|\varphi(x_p)|, |\varphi(x_{p+1})|\} = |\varphi(\tilde{x}_p)|.$$

В этом случае при достаточно больших *n* имеем $A_n^p(0) \neq 0$ и поэтому определена последовательность $\tilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z)/A_n^p(0)$.

B) $\varphi(x_{p+1}) = -\varphi(x_p)$, $S''(x_{p+1}) \neq S''(x_p)$. При больших *n* имеем $A_n^p(0) \neq 0$ и поэтому определена последовательность $\tilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z)/A_n^p(0)$.

C) $\varphi(x_{p+1}) = -\varphi(x_p)$, $S''(x_{p+1}) = S''(x_p)$. Поскольку $(-1)^{k+p+1}/\varphi(x_p) > 0$, то

$$e^{nS(x_p)} = (-1)^{n(k+p+1)} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|},$$

$$e^{nS(x_{p+1})} = (-1)^{n(k+p+1)+n} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}.$$

Поэтому

$$A_n^p(0) = \frac{(-1)^{n(k+p+1)}}{e^{i(kn+n-1)\alpha}}\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}}e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}((-1)^n - 1)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

При достаточно больших n имеем $A^p_{2n+1}(0) \neq 0$ и, следовательно, определена последовательность $\widetilde{A}^p_{2n+1}(z) = A^p_{2n+1}(z) / A^p_{2n+1}(0)$.

Производную многочлена $A^p_n(z)$ можно представить в виде

$$\frac{dA^p_n}{dz}(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha}\lambda_p z}}{2\pi i e^{i(kn+n-2)\alpha}} \int_{C_p} (\tau - \lambda_p) \frac{e^{e^{i\alpha}\tau z} d\tau}{[\varphi(\tau)]^n}. \tag{9}$$

Аналогично, как и при нахождении асимптотики A^p_n (теорема 1), применив к интегралу в правой части (9) метод перевала (лемма 2) при $z = 0$, получим

$$\frac{dA^p_n}{dz}(0) = \frac{1}{e^{i(kn+n-2)\alpha}} B_n(x_{p+1})(x_{p+1} - \lambda_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) -$$
$$- \frac{1}{e^{i(kn+n-2)\alpha}} B_n(x_p)(x_p - \lambda_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Тогда при тех же предположениях, что и выше, имеем

$$\frac{dA^p_{2n}}{dz}(0) = \frac{(-1)^{n(k+p+1)}}{e^{i(kn+n-2)\alpha}} \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}(x_{p+1} - x_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом, определена последовательность многочленов $\widetilde{A}^p_{2n}(z) = A^p_{2n}(z) / (A^p_{2n})'(0)$.

Теорема 2. *При $n \to \infty$ локально равномерно по z*

$$\widetilde{A}^0_n(z) \rightrightarrows e^{e^{i\alpha}(x_1 - \lambda_0)z}, \; \widetilde{A}^k_n(z) \rightrightarrows e^{e^{i\alpha}(x_k - \lambda_k)z}. \tag{10}$$

Если $1 \le p \le k-1$, то локально равномерно по z при $n \to \infty$:

в случае A) имеем

$$\widetilde{A}^p_n(z) \rightrightarrows e^{e^{i\alpha}(\widetilde{x}_p - \lambda_p)z}; \tag{11}$$

в случае B) имеем

$$\widetilde{A}^p_{2n}(z) \rightrightarrows \left(\frac{e^{e^{i\alpha}(x_{p+1} - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{e^{e^{i\alpha}(x_p - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{1}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)^{-1}, \tag{12}$$

$$\widetilde{A}^p_{2n+1}(z) \rightrightarrows \left(\frac{e^{e^{i\alpha}(x_{p+1} - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} + \frac{e^{e^{i\alpha}(x_p - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} + \frac{1}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)^{-1}; \tag{13}$$

в случае C) имеем

$$\widetilde{A}^p_{2n}(z) \rightrightarrows \frac{1}{e^{i\alpha}(x_{p+1} - x_p)}\left(e^{e^{i\alpha}(x_{p+1} - \lambda_p)z} - e^{e^{i\alpha}(x_p - \lambda_p)z}\right), \tag{14}$$

$$\widetilde{A}^p_{2n+1}(z) \rightrightarrows \frac{1}{2}\left(e^{e^{i\alpha}(x_{p+1} - \lambda_p)z} + e^{e^{i\alpha}(x_p - \lambda_p)z}\right). \tag{15}$$

Доказательство. Поточечная сходимость в (10)–(15) следует из доказательства теоремы 1. Необходимо доказать, что многочлены $\widetilde{A}^p_n$ при $0 \le p \le k$ в каждом из случаев A), B) и C) равномерно сходятся на компактах в $\mathbb{C}$ к соответствующим функциям. Докажем, это, например, для $\widetilde{A}^0_n$.

Деформируем в интеграле

$$A^0_n(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha}\lambda_0 z}}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{C_0} \frac{e^{e^{i\alpha}\tau z} d\tau}{[\varphi(\tau)]^n} \tag{16}$$

контур интегрирования C_0 в прямоугольник R, принадлежащий полуплоскости $\{z: -\infty < \operatorname{Re} z < \lambda_1\}$, с вершинами в точках $A(-a', -r)$, $B(-a', r)$, $C(a, r)$, $D(a, -r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a \in (0, \lambda_1)$, $a' > 0$.

Если предположить, что $|z| \le \rho$ и $\tau \in R$, то модуль $e^{e^{i\alpha}\tau z}$ ограничен $M = e^{8\rho \max\{a', \lambda_k\}}$. Опираясь на равенство (16), в этом случае получаем

$$\left|A_n^0(z)\right| \le \frac{e^{2\lambda_0\rho}M}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-n\ln|\varphi(\varsigma(t))|}\left|\varsigma'(t)\right|dt, \tag{17}$$

при условии, что контур интегрирования R параметризуется вещественным параметром $t\in[\alpha,\beta]$. При больших n неравенство (17) сохраняется, если вместо R взять отрезок $[D,C]$ (выбор отрезка обоснован в доказательстве теоремы 1). Пусть его параметризации соответствует значение параметра $t\in[\alpha_1,\beta_1]$. Для нахождения асимптотики интеграла в (17) применим метод Лапласа (лемма 1). В результате получим, что при $n\to\infty$

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-n\operatorname{Re}S(\varsigma(t))}\left|\varsigma'(t)\right|dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{n[\operatorname{Re}S(\varsigma(t))]''_{t=t_0}}}\,e^{n\operatorname{Re}S(x_1)}\,|\varsigma'(t_0)|\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{18}$$

где t_0 выбрано так, что $\varsigma(t_0)=x_1$. Нетрудно показать, что

$$[\operatorname{Re}S(\varsigma(t))]''_{t=t_0} = -S'(x_1)\left|\varsigma'(t_0)\right|^2.$$

Отсюда, учитывая (6), (18), при достаточно больших n получаем неравенство $\left|\widetilde{A}_n^0(z)\right| \le 2Me^{2\lambda_0\rho}$, из которого следует, что последовательность $\left\{\widetilde{A}_n^0(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена по модулю в круге $\{z:|z|\le\rho\}$. Тогда по теореме Витали эта последовательность равномерно сходится к функции $e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_0)z}$ на любом компакте из круга $\{z:|z|\le\rho\}$. Аналогичные рассуждения применимы и к другим последовательностям из теоремы 1. Теорема 2 доказана.

П р и м е р. Рассмотрим систему экспонент $\left\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\right\}_{p=0}^{2}$ с различными произвольными комплексными множителями в показателях степеней, где $\widetilde{\lambda}_p = e^{i\alpha}\lambda_p + b$, $p=0,1,2$, $b\in\mathbb{R}$, а $\{\lambda_p\}_{p=0}^{2}$ – набор произвольных различных действительных чисел таких, что $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2$. Введем обозначения

$$p=\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_0\lambda_1-\lambda_0\lambda_2-\lambda_1\lambda_2},$$
$$h=(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^3-3(\lambda_0^3+\lambda_1^3+\lambda_2^3+6\lambda_0\lambda_1\lambda_2).$$

Тогда, проводя несложные вычисления, приходим к равенствам

$$x_1=\frac{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-p}{3},\quad x_2=\frac{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+p}{3},$$
$$\varphi(x_1)=\frac{h+2p^3}{27},\quad \varphi(x_2)=\frac{h-2p^3}{27},$$
$$S''(x_1)=\frac{54p}{h+2p^3},\quad S''(x_2)=\frac{-54p}{h-2p^3}.$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *При* $n\to\infty$

$$A_n^0(z)=\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}B_n(x_1)e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_0)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$A_n^1(z)=\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}B_n(x_2)e^{e^{i\alpha}(x_2-\lambda_1)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}B_n(x_1)e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_1)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$A_n^2(z)=-\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}B_n(x_2)e^{e^{i\alpha}(x_2-\lambda_2)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

В данном примере реализуются только случаи А) и С). Причем случай С) реализуется при $h=0$, т.е. при выполнении одного из следующих равенств: $\lambda_0+\lambda_1=2\lambda_2$, $\lambda_0+\lambda_2=2\lambda_1$, $\lambda_1+\lambda_2=2\lambda_0$.

Если предположить, что $h=0$, то

$$S(x_1)=\ln\left(\frac{27}{2p^3}\right),\quad S(x_2)=\ln\left(\frac{27}{2p^3}\right)+i\pi,\quad S''(x_1)=S''(x_2)=\frac{27}{p^2}.$$

$$A_n^1(0)=\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}\sqrt{\frac{p^2}{54\pi n}}\left(\frac{27}{2p^3}\right)^n((-1)^n-1)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Поэтому при достаточно больших n имеем $A_{2n+1}^1(0)\neq 0$. Далее с помощью аналогичных рассуждений, представленных выше, легко показать, что

$$\frac{dA_{2n}^1}{dz}(0)=\frac{1}{e^{i(6n-2)\alpha}}\sqrt{\frac{p^2}{108\pi n}}\left(\frac{27}{2p^3}\right)^{2n}(x_2-x_1)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Тогда из теоремы 2 в данном случае получаем

Следствие 3.

$$\widetilde{A}_n^0\rightrightarrows e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_0)z},\ \widetilde{A}_n^2\rightrightarrows e^{e^{i\alpha}(x_2-\lambda_2)z}.$$

В случае, когда $\lambda_0+\lambda_1\neq 2\lambda_2$, $\lambda_0+\lambda_2\neq 2\lambda_1$, $\lambda_1+\lambda_2\neq 2\lambda_0$

$$\widetilde{A}_n^1(z)\rightrightarrows e^{e^{i\alpha}(x_2-\lambda_1)z},$$

а если выполняется одно из равенств: $\lambda_0+\lambda_1=2\lambda_2$, $\lambda_0+\lambda_2=2\lambda_1$, $\lambda_1+\lambda_2=2\lambda_0$,

$$\widetilde{A}_{2n}^1(z)\rightrightarrows\frac{1}{e^{i\alpha}(x_2-x_1)}\left(e^{e^{i\alpha}(x_2-\lambda_1)z}-e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_1)z}\right),$$

$$\widetilde{A}_{2n+1}^1(z)\rightrightarrows\frac{1}{2}\left(e^{e^{i\alpha}(x_2-\lambda_1)z}+e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_1)z}\right).$$

Положим

$$\lambda_0=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=1+\varepsilon,\ 0<\varepsilon\leq 1,$$

тогда

$$\widetilde{\lambda}_0=b,\ \widetilde{\lambda}_1=e^{i\alpha}+b,\ \widetilde{\lambda}_2=e^{i\alpha}(1+\varepsilon)+b,\ 0<\varepsilon\leq 1,\ b\in\mathbb{R}.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$A_n^0(z)\sim\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}\sqrt{\frac{2p^3+h}{108\pi pn}}\left(\frac{27}{2p^3+h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(2+\varepsilon-p)z/3},$$

$$A_n^1(z)\sim\frac{(-1)^n}{e^{i(3n-1)\alpha}}\sqrt{\frac{2p^3-h}{108\pi pn}}\left(\frac{27}{2p^3-h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(-1+\varepsilon+p)z/3}-\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}\sqrt{\frac{2p^3+h}{108\pi pn}}\left(\frac{27}{2p^3+h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(-1+\varepsilon-p)z/3},$$

$$A_n^2(z)\sim\frac{(-1)^{n-1}}{e^{i(3n-1)\alpha}}\sqrt{\frac{2p^3-h}{108\pi pn}}\left(\frac{27}{2p^3-h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(-1-2\varepsilon+p)z/3}.$$

При $\varepsilon=1$ и $\alpha=0$ из теоремы 1 получим асимптотические равенства, которые согласуются с соответствующими утверждениями из работ [9–11]:

$$A_n^0(z)\sim\frac{1}{3\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{(1-1/\sqrt{3})z},$$

$$A_n^1(z)\sim(-1)^n\frac{1}{3\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n\left(e^{z/\sqrt{3}}+(-1)^{n-1}e^{-z/\sqrt{3}}\right),$$

$$A_n^2(z)\sim(-1)^{n-1}\frac{1}{3\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{(-1+1/\sqrt{3})z}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
2. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.
3. Padé, H. Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques / H. Padé // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – Vol. 16, № 3. – P. 394–426.
4. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1932. – Vol. 166. – P. 118–150.
5. Mahler, K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – Vol. 168. – P. 200–227.
6. Aptekarev, A.I. Asymptotics of Hermite–Padé polynomials, in «Progress in Approximation Theory» (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York–Berlin: Springer-Verlag, 1992. – P. 127–167.

7. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.
8. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6(402). – С. 37–122.
9. Borwein, P.B. Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – Vol. 62. – P. 291–302.
10. Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite–Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.
11. Астафьева, А.В. Аппроксимации Эрмита–Паде экспоненциальных функций / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Матем. сб. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.
12. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.

R E F E R E N C E S

1. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
2. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.
3. Padé, H. Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques / H. Padé // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – Vol. 16, № 3. – P. 394–426.
4. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1932. – Vol. 166. – P. 118–150.
5. Mahler, K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – Vol. 168. – P. 200–227.
6. Aptekarev, A.I. Asymptotics of Hermite–Padé polynomials, in «Progress in Approximation Theory» (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York/Berlin: Springer-Verlag, 1992. – P. 127–167.
7. Suyetin S.P. *Uspekhi matem. nauk* [Successes of Mathematical Sciences], 2002, 57(1), pp. 45–142.
8. Aptekarev A.I., Buslayev V.I., Martinez-Finkelstein A., Suyetin S.P. *Uspekhi matem. nauk* [Successes of Mathematical Sciences], 2011, 66, 6(402), pp. 37–122.
9. Borwein, P.B. Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – Vol. 62. – P. 291–302.
10. Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite–Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.
11. Astafyeva A.V., Starovoitov A.P. *Matem. sb.* [Mathematical Collection], 2016, 207(6), pp. 3–26.
12. Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I. *Lektsii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Lectures on the Theory of Complex Variable Functions], M., Nauka, 1989.

Поступила в редакцию 12.05.2017

Адрес для корреспонденции: e-mail: ekechko@gmail.com – Кечко Е.П.