

О характеристике формаций Фишера

С.Н. Воробьев, А.Л. Атрашкевич

Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В работе рассматриваются только конечные группы, если не оговорено противное. Классом Фишера называют класс Фиттинга \mathfrak{F} конечных групп G , удовлетворяющих условию: если $G \in \mathfrak{F}$ и H – подгруппа группы G , содержащая нормальную подгруппу N группы G такую, что H/N является p -группой (p – некоторое простое число), то $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть \mathfrak{X} – нильпотентная формация Фиттинга. Классом Фиттинга \mathfrak{F} назовем \mathfrak{X} -класс Фишера, если из условия $G \in \mathfrak{F}$, $K \leq H \leq G$ и $H/K \in \mathfrak{X}$, всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$. При этом формация Фиттинга \mathfrak{X} нильпотентна, если \mathfrak{X} состоит из нильпотентных групп. В случае, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ – классу всех нильпотентных групп, то \mathfrak{X} -класс Фишера является классом Фишера.

Основной результат настоящей работы – следующая

Теорема. Пусть \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, \mathfrak{F} – ω -локальная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если f – ω -локальный спутник \mathfrak{F} такой, что $f(a)$ является \mathfrak{X} -классом Фишера для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то \mathfrak{F} – \mathfrak{X} -класс Фишера;

2) \mathfrak{F} является \mathfrak{X} -классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического ω -локального спутника – \mathfrak{X} -классы Фишера.

Ключевые слова: класс Фиттинга, класс Фишера, \mathfrak{X} -класс Фишера, нильпотентная формация, ω -локальный спутник.

On Characterization of Fischer Formations

S.N. Vorobyev, A.L. Atrashkevich

Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

In this paper all groups are finite if the opposite isn't stated. A Fischer class is a Fitting class of finite G groups which satisfy the condition if a group $G \in \mathfrak{F}$, and H is a subgroup of G , N is a normal subgroup of group G and H/N is a p -group (p is a some prime number), then $H \in \mathfrak{F}$.

Let \mathfrak{X} – be a nilpotent Fitting formation. A Fitting class \mathfrak{F} is named a Fischer \mathfrak{X} -class if from the condition of $G \in \mathfrak{F}$, $K \leq H \leq G$, $K \leq H \leq G$ and $H/K \in \mathfrak{X}$, always follows, that $H \in \mathfrak{F}$. A Fitting formation \mathfrak{X} is nilpotent if \mathfrak{X} consists of nilpotent groups. If case $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ – class of all nilpotent groups, then a Fischer \mathfrak{X} -class is a Fischer class.

The basic findings are the following.

Theorem. Let \mathbb{P} – be all primes, $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, and \mathfrak{F} is a ω -local formation. Then the following statements are true:

1) if f is the ω -local satellite of \mathfrak{F} such that $f(a)$ is a Fischer \mathfrak{X} -class for all $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, then \mathfrak{F} is a Fischer \mathfrak{X} -class;

2) \mathfrak{F} is Fischer \mathfrak{X} -class if and only if all values of its canonical satellite ω -local are Fischer \mathfrak{X} -classes.

Key words: Fitting class, Fischer class, Fischer \mathfrak{X} -class, nilpotent formation, ω -local satellite.

В работе рассматриваются только конечные группы. В терминологии и обозначениях мы следуем [1; 2]. В исследованиях структуры классов и канонических подгрупп конечных групп во многих случаях определяющую роль играют формации Фиттинга – классы групп, которые одновременно являются формациями и классами Фиттинга (см., например, [1, теорема 3.1] и [2, XI.1]). Напомним, что *формацией* называют класс групп \mathfrak{F} , если \mathfrak{F} замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений, а *классом Фиттинга* – класс групп \mathfrak{F} , замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Напомним, что *классом Фишера* называют класс Фиттинга \mathfrak{F} конечных групп G , удовлетворяющих условию: если $G \in \mathfrak{F}$ и H – подгруппа группы G , содержащая нормальную подгруппу N группы G такую, что H/N является p -группой (p – некоторое простое число), то $H \in \mathfrak{F}$. Уже в 60-е годы прошлого столетия Фишер [3], а позднее Хартли [4] и Хоукс [5], исследуя задачу дуализации теории формаций теории классов Фиттинга, использовали для этих целей классы разрешимых групп G , замкнутые относительно подгрупп вида PN , где P и N – силовская p -подгруппа и нормальная подгруппа G соответственно. В последующем такие классы групп стали называть классами Фишера [4].

В настоящей работе мы находим характеризацию частично локальных формаций, которые являются \mathfrak{X} -классами Фишера для случая, когда \mathfrak{X} – нильпотентная формация. В частности, мы обобщаем основной результат работы [6] о том, что ω -локальная формация – класс Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического ω -локального спутника – классы Фишера.

Напомним, что пусть \mathfrak{X} – нильпотентная формация. Тогда класс Фиттинга \mathfrak{F} называется \mathfrak{X} -классом Фишера, если из условия $G \in \mathfrak{F}, K \trianglelefteq G, K \subseteq H \subseteq G$ и $H/K \in \mathfrak{X}$, всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

Мы используем концепцию частичной локализации формаций, предложенную в [7], которая состоит в следующем. Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел и ω' – дополнение множества ω во множестве всех простых чисел \mathbb{P} . Тогда функцию вида $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называют ω -локальным спутником [7]. При этом $\text{Supp}(f) = \{a \in \omega \cup \{\omega'\} : f(a) \neq \emptyset\}$ – это носитель ω -локального спутника.

Для произвольного ω -локального спутника f через $LF_\omega(f)$ обозначают класс групп $(G: G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$), где $O_\omega(G)$ и $F_p(G)$ – ω -радикал группы G и p -нильпотентный радикал группы G соответственно.

Формацию \mathfrak{F} называют ω -локальной [7], если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторого ω -локального спутника f . Заметим, что если $\omega = \mathbb{P}$, то ω -локальную формацию называют *локальной*, а ее ω -локальный спутник f – *локальным*.

В работе доказано, что каждая ω -локальная формация \mathfrak{F} определяется ω -локальным спутником F таким, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ для каждого $p \in \omega$. Такой ω -локальный спутник F называется *каноническим*.

1. Предварительные сведения. Если \mathfrak{F} – непустая формация, то через $G^\mathfrak{F}$ обозначают наименьшую нормальную подгруппу группы G , факторгруппа по которой принадлежит \mathfrak{F} , и $G^\mathfrak{F}$ называют \mathfrak{F} -корадикалом G . Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – формации. Тогда их произведение называется *классом групп* $\mathfrak{H} = (G: G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{H})$. Известно, что произведение двух любых формаций снова является формацией и операция умножения формаций ассоциативна (см. например, [2, IV, теорема 1.8]).

Ввиду [7] и [8, теорема 2] ω -локальная формация также определяется формулой

$$LF_\omega(f) = (\bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{E}_{p'}) \cap (\bigcap_{p \in \pi_1} \mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p f(p)) \cap \mathfrak{E}_\omega f(\omega').$$

При этом $\pi_1 = \text{Supp}(f) \cap \omega$ и $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$.

Если \mathfrak{X} – некоторое множество групп, то символом *form* \mathfrak{X} обозначают наименьшую формацию, содержащую \mathfrak{X} .

Пусть \mathfrak{X} – произвольная совокупность групп и p – простое число. Тогда формация

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \text{form}(G/F_p(G): G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \sigma(\mathfrak{X}), \\ \emptyset, & \text{если } p \notin \sigma(\mathfrak{X}), \end{cases}$$

где $\sigma(\mathfrak{X})$ – множество всех простых делителей всех групп из \mathfrak{X} .

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – классы Фиттинга. Тогда класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G: G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H})$ называют произведением \mathfrak{F} и \mathfrak{H} . Известно, что произведение двух любых классов Фиттинга снова является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [2].

Для доказательства теоремы мы будем использовать следующий результат, полученный в [9, теорема 3.1], который приведем в качестве леммы.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{X} – нильпотентная формация. Если \mathfrak{F} и \mathfrak{H} являются \mathfrak{X} -классами Фишера, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ – \mathfrak{X} -классом Фишера.

2. \mathfrak{X} -классы Фишера и формации

Определение 2.1. Класс групп \mathfrak{F} назовем *формацией Фишера*, если он является одновременно *формацией* и *классом Фишера*.

Определение 2.2. Формацию Фишера назовем ω -локальной (в частности *локальной*), если \mathfrak{F} является ω -локальной (соответственно *локальной*) *формацией*.

Заметим, что семейство ω -локальных формаций Фишера обширно. Действительно, каждый разрешимый наследственный класс Фиттинга \mathfrak{F} по теореме Брайса, Косси [10] является локальной формацией. Кроме того, очевидно, что в этом случае \mathfrak{F} – класс Фишера и, значит, \mathfrak{F} – формация Фишера. Однако не всякая наследственная локальная формация представляет формацию Фишера. Такой формацией является, например, формация всех сверхразрешимых групп, что показано в [11] (см. пример 1, с. 159–160).

Предварительно приведем в качестве леммы свойства \mathfrak{X} -классов Фишера, которые в дальнейшем мы будем использовать.

Лемма 2.3. Пусть \mathfrak{X} – нильпотентная формация. Тогда справедливо следующее утверждение: если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – множество \mathfrak{X} -классов Фишера, то их пересечение $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ является классом Фишера.

Доказательство утверждения следует непосредственно по определению класса Фишера.

Основной результат работы – следующая

Теорема 2.4. Пусть $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, \mathfrak{F} – ω -локальная формация и \mathfrak{X} – нильпотентная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если f – ω -локальный спутник \mathfrak{F} такой, что $f(a)$ является \mathfrak{X} -классом Фишера для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то \mathfrak{F} – \mathfrak{X} -класс Фишера;

2) является \mathfrak{X} -классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического ω -локального спутника являются \mathfrak{X} -классами Фишера.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть все значения ω -локального спутника f формации \mathfrak{F} являются \mathfrak{X} -классами Фишера. Покажем, что \mathfrak{F} в этом случае также \mathfrak{X} -класс Фишера. Так как формация \mathfrak{F} ω -локальна, то по теореме 2 из [8], используя формулу ω -локальной формации [7], получаем, что

$$\mathfrak{F} = (\bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{E}_{p'}) \cap (\bigcap_{p \in \pi_1} \mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p f(p)) \cap \mathfrak{E}_\omega f(\omega'),$$

где $\pi_1 = \text{Supp}(f) \cap \omega$, $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$.

Заметим, что фиттингова формация \mathfrak{E}_p является наследственной и поэтому $\mathfrak{E}_{p'}$ – \mathfrak{X} -класс Фишера. Следовательно, по лемме 2.3 $\bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{E}_{p'}$ – \mathfrak{X} -класс Фишера. Пусть $p \in \pi_1$.

Рассмотрим теперь произведение классов $\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p f(p)$. Так как каждый из множителей \mathfrak{E}_p , \mathfrak{N}_p и $f(p)$ – \mathfrak{X} -класс Фишера, то по лемме 1.1 следует, что произведение $\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p f(p)$ является \mathfrak{X} -классом Фишера. Аналогично заключаем, что произведение $\mathfrak{E}_\omega f(\omega')$ – \mathfrak{X} -класс Фишера. Теперь из того, что по лемме 2.3 пересечение любого множества \mathfrak{X} -классов Фишера снова является \mathfrak{X} -классом Фишера, заключаем, что \mathfrak{F} является \mathfrak{X} -классом Фишера. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Если все значения канонического ω -локального спутника F формации \mathfrak{F} являются \mathfrak{X} -классами Фишера, то \mathfrak{F} – \mathfrak{X} -класс Фишера по утверждению 1).

Покажем справедливость обратного утверждения. Пусть \mathfrak{F} – ω -локальная формация Фишера с каноническим ω -локальным спутником F , т.е. $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$. По лемме 1.1 $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$. Покажем, что все значения ω -локального спутника F являются \mathfrak{X} -классами Фишера.

Если $\omega = \mathbb{P}$, то \mathfrak{F} – локальная формация и утверждение верно согласно [2, IX, теорема 3.6 (b)]. Пусть $\omega \subset \mathbb{P}$. Проверим, что в этом случае $F(a)$ является \mathfrak{X} -классом Фишера для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Если $a = \omega'$, то $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(\omega')$ является \mathfrak{X} -классом Фишера по условию. Поэтому остается показать, что $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p)$ – \mathfrak{X} -класс Фишера для всех $p \in \omega$. Если $p \in \omega \setminus \sigma(\mathfrak{F})$, то $F(p) = \emptyset$ и утверждение очевидно. Пусть $p \in \omega \cap \sigma(\mathfrak{F})$. В этом случае $\mathfrak{F}(F_p) \neq \emptyset$ и поэтому $F(p) \neq \emptyset$.

Пусть $G \in F(p)$ и $K \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$. Предположим, что $H/K \in \mathfrak{X}$. Докажем, что $H \in F(p)$. Рассмотрим регулярное сплетение $W = Z_p wr G$. Тогда $W = [Z_p^*]G$, где Z_p^* – базисная группа W . Отсюда следует, что $W/Z_p^* \cong G$. Но $G \in F(p)$. Следовательно, $W \in \mathfrak{N}_p F(p)$. Так как F – канонический ω -локальный спутник \mathfrak{F} , то $\mathfrak{N}_p F(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $W \in \mathfrak{F}$. Ввиду того, что $K \trianglelefteq G$ и $Z_p^* \trianglelefteq W$, следует, что $Z_p^* K \trianglelefteq W$. Действительно, пусть $x = zg \in W$, где $z \in Z_p^*$ и $g \in G$. Тогда $x^{-1} Z_p^* K x = g^{-1} z^{-1} Z_p^* K z g$.

Отсюда следует, что $g^{-1} Z_p^* K z g = g^{-1} K Z_p^* g$ и поэтому $x^{-1} Z_p^* K x = g^{-1} K g Z_p^* = K Z_p^*$.

Так как $Z_p^* K \leq Z_p^* H$, то $Z_p^* K \trianglelefteq H Z_p^*$. Тогда, используя изоморфизмы

$(H Z_p^*) / (K Z_p^*) = (H K Z_p^*) / (K Z_p^*) \cong H / (H \cap K Z_p^*)$ и $(H/K) / (H \cap K Z_p^* / K) \cong H / (H \cap K Z_p^*)$, заключаем, что $H / (H \cap K Z_p^*) \in \mathfrak{X}$. Итак, $W \in \mathfrak{F}$, $K Z_p^* \triangleleft W$, $K Z_p^* \leq H Z_p^* \leq W$ и $(H Z_p^*) / (K Z_p^*) \in \mathfrak{X}$.

Поскольку по условию \mathfrak{F} является \mathfrak{X} -классом Фишера, то $H Z_p^* \in \mathfrak{F}$. Теперь ввиду того, что формация \mathfrak{F} ω -локальна и ее ω -локальный спутник F канонический, получаем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_{p'} F(p)$.

Следовательно, $H Z_p^* \in \mathfrak{E}_{p'} F(p)$. Но по [2, А, лемма 18.8(a)] $Z_p^* H \cong Z_p^{[G:H]} wr H = W_1$.

Значит, $W_1 = [Z_p^{**}] H$, где Z_p^{**} – базисная группа W_1 . Пусть $O_{p'}(W_1)$ – наибольшая нормальная p' -подгруппа группы W_1 . Так как базисная группа Z_p^{**} группы W_1 является p -группой, то $O_{p'}(W_1) \cap Z_p^{**} = 1$.

Следовательно, по [2, лемма А, 18.8(b)] (см. также [12, I, раздел 5.4]) $O_{p'}(W_1) = 1$ и поэтому $O_{p'}(H Z_p^*) = 1$. Но тогда из $H Z_p^* \in \mathfrak{E}_{p'} F(p)$ следует, что $H Z_p^* = H Z_p^* / O_{p'}(H Z_p^*) \in F(p)$.

Итак, $H Z_p^* \in F(p)$. Следовательно, $H Z_p^* / Z_p^* \cong H / H \cap Z_p^* = H \in F(p)$ и поэтому $F(p)$ – \mathfrak{X} -класс Фишера. Теорема доказана.

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, получаем

Следствие 2.5. Пусть \mathfrak{X} – нильпотентная формация. Локальная формация является \mathfrak{X} -классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического локального спутника – \mathfrak{X} -классы Фишера.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, то получаем

Следствие 2.6 [6, теорема 1]. ω -Локальная формация является классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического локального спутника – классы Фишера.

Формацию называют разрешимой, если она состоит из разрешимых групп.

Следствие 2.7 [2, теорема IX. 1.6 (b)]. *Разрешимая локальная формация является классом Фишера тогда и только тогда, когда все ее значения канонического локального спутника формации класса Фишера.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. – Habilitationsschrift. Universität Frankfurt (M), 1966.
4. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
5. Hawkes, T.O. A Fitting Class Construction / T.O. Hawkes // Proc. Math. Cambridge Philos. – 1976. – Soc. 80. – P. 437–446.
6. Воробьев, С.Н. О формациях Фишера конечных групп / С.Н. Воробьев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2011. – № 2. – С. 43–49.
7. Скиба, А.Н. Кратко-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
8. Ведерников, В.А. ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71, вып. 1. – С. 43–60.
9. Атрашкевич, А.Л. О произведении \mathfrak{X} -классов Фишера / А.Л. Атрашкевич, Н.Т. Воробьев // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2016. – № 3. – С. 5–9.
10. Bryce, R.A. Metanilpotent Fitting Classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1972. – Bd. 127, № 3. – S. 217–223.
11. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

REFERENCES

1. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnikh grupp* [Finite Group Formations], M., Nauka, 1978, 272 p.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. – Habilitationsschrift. Universität Frankfurt (M), 1966.
4. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
5. Hawkes T.O. // Proc. Math. Cambridge Philos, 1976. Soc. 80. P. 437–446.
6. Vorobyev S.N. *Vestsi NAN Belarusi Ser. fiz.-matem. navuk* [Newsletter of NASC of Belarus. Physical and Mathematical Sciences], 2011, 2, pp. 43–49.
7. Skiba A.N., Shemetkov L.A. *Matem. Trudi* [Mathematical Works], 1999, 2, pp. 114–147.
8. Vedrnikov V.A., Sorokina M.M. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 2002, 71(1), pp. 43–60.
9. Atrashkevich A.L., Vorobyev N.T. *Vestnik UO «VGU im. P.M. Masherova»* [Newsletter of Vitebsk State P.M. Masherov University], 2016, 3, pp. 5–9.
10. Bryce R.A., Cossey J. // Math. Z. 1972. Bd. 127, N 3. – S. 217–223.
11. Monakhov V.S. *Vvedeniye v teoriyu konechnikh grupp i ikh klassov* [Introduction into the Theory of Finite Groups and their Classes], Mn., Vysheishaya shkola, 2006, 207 p.

Поступила в редакцию 08.06.2017

Адрес для корреспонденции: e-mail: alesy19942016@gmail.com – Атрашкевич А.Л.