



МАТЭМАТЫКА

УДК 517.518.826

Построение полинома наилучшего приближения для суммы функций независимых аргументов

Ю.В. Трубников, К.Л. Якуто

Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Во многих задачах физики возникает необходимость аппроксимировать потенциал того или иного вида. Аппроксимацию можно производить, используя полиномы наилучшего приближения. В частном случае потенциал может быть представлен в виде суммы функций независимых аргументов. Возникает вопрос: как связаны между собой полином наилучшего приближения для функции и полиномы наилучшего приближения для каждого из ее слагаемых?

Цель статьи – доказать, что полином наилучшего приближения для функции, представимой в виде суммы функций независимых действительных аргументов, равен сумме полиномов наилучшего приближения для каждого из слагаемых функции.

Материал и методы. Материалом для данной работы послужили полиномы наилучшего приближения (экстремальные полиномы) для функции, представляющей собой сумму функций независимых аргументов. Доказательство сделанного предположения осуществлялось в три этапа. Сначала были построены функционалы экстремальных полиномов для каждого из слагаемых функции. Затем было показано, что композиция функционалов для каждого из слагаемых является функционалом экстремального полинома для функции. После этого композиция функционалов была применена к функции и подтверждена правильность сделанного предположения.

Результаты и их обсуждение. Экстремальным полиномом на подпространстве, образованном функциями вида $f(s_1, s_2, \dots, s_m) = s_1^{t_1} s_2^{t_2} \dots s_m^{t_m}$ ($0 \leq t_j \leq n_j$), является сумма экстремальных полиномов $P_{n_1}(s_1) + P_{n_2}(s_2) + \dots + P_{n_m}(s_m)$.

В задаче двух тел Земля–Солнце после аппроксимации получается система дифференциальных уравнений $\ddot{x} = ax, \ddot{y} = ay, \ddot{z} = az$, в которой $a = -\frac{2\gamma M}{r_{\min} r_{\max} (r_{\min} + r_{\max})}$, $\gamma = 6,72 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2 \text{ кг}^{-2}$, $M = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ кг}$,

$r_{\min} = 1,471 \cdot 10^{11} \text{ м}$, $r_{\max} = 1,521 \cdot 10^{11} \text{ м}$.

Тогда период обращения Земли вокруг Солнца можно вычислить следующим образом:

$|a|^{1/2} = 1,9983 \cdot 10^{-7}$, $2\pi/|a|^{1/2} = 3,1442 \cdot 10^7 \text{ с}$, $T = 3,1442 \cdot 10^7 / (24 \cdot 3600) = 363,9 \text{ сут}$.

Заключение. В результате проведенного исследования, материалы которого представлены в данной статье, было доказано, что для функции, представимой в виде суммы функций независимых действительных аргументов, полином наилучшего приближения равен сумме полиномов наилучшего приближения для каждого из слагаемых функции.

Ключевые слова: аппроксимация потенциала, полином наилучшего приближения, равномерная норма, альтернанс, точка уклонения, критерий оптимальности, субградиент нормы.

Construction of the Polynomial of Best Approximation for the Sum of Functions of Independent Arguments

U.V. Trubnikov, K.L. Yakuto

Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

There is a need to approximate the potential of one kind or another in many problems of physics. Approximation can be done using polynomials of best approximation. In a private case, the potential can be represented as a sum of functions of independent arguments. The question arises, what is the relationship between the polynomial of best approximation for the function and the polynomial of best approximation for each of its summands.

The aim of the article is to prove that polynomial of best approximation for the function represented as a sum of functions of independent real arguments is equal to the sum of polynomials of best approximation for each of its summands.

Material and methods. Material for this article is based on polynomials of the best approximation (the extreme polynomials) of the function, which is a sum of functions of independent arguments. The proof of the assumption was carried out in three stages. The first functionals of extreme polynomials for each summand of the function were built. Then it was shown that the composition of the functionals for each of the components is a functional of the extreme polynomial for the function. Then the composition of the functionals was applied to the function, and confirmed the correctness of the assumptions.

Findings and their discussion. Extreme polynomial on the subspace formed by functions of the form $f(s_1, s_2, \dots, s_m) = s_1^{t_1} s_2^{t_2} \dots s_m^{t_m}$ ($0 \leq t_j \leq n_j$) is the sum of the extreme polynomials $P_{n_1}(s_1) + \dots + P_{n_m}(s_m)$.

In the two-body problem the Earth–Sun after approximation we obtained the system of differential equations $\ddot{x} = ax$, $\ddot{y} = ay$, $\ddot{z} = az$, in which $a = -\frac{2\gamma M}{r_{\min} r_{\max} (r_{\min} + r_{\max})}$, $\gamma = 6,72 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$, $M = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$,

$r_{\min} = 1,471 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $r_{\max} = 1,521 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Then the orbital period of the Earth around the Sun can be calculated as follows: $|a|^{1/2} = 1,9983 \cdot 10^{-7}$, $2\pi/|a|^{1/2} = 3,1442 \cdot 10^7 \text{ s}$, $T = 3,1442 \cdot 10^7 / (24 \cdot 3600) = 363,9 \text{ day}$.

Conclusion. In the study, the proceedings of which are presented in this article, it was proved that for a function represented as a sum of functions of independent real arguments, the polynomial of best approximation is equal to the sum of the polynomials of best approximation for each summand of the function.

Key words: approximation of the potential, the polynomial of best approximation, uniform norm, alternance, the point of evasion, the criterion of optimality, subgradient of the standard.

Во многих задачах физики возникает необходимость аппроксимировать потенциал того или иного вида. Аппроксимацию можно производить, используя полиномы наилучшего приближения. В частном случае потенциал может быть представлен в виде суммы функций независимых аргументов. Возникает вопрос: как связаны между собой полином наилучшего приближения для функции и полиномы наилучшего приближения для каждого из ее слагаемых?

Рассмотрим задачу нахождения полинома наилучшего приближения (экстремального полинома) в равномерной (чебышевской) норме для суммы функций

$$g_1(s_1) + g_2(s_2) + \dots + g_m(s_m) \quad (1)$$

независимых действительных аргументов, определенной на параллелепипеде

$$a_j \leq s_j \leq b_j \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Основной теоремой, используемой для наших построений, является теорема Чебышева об альтернансе.

Теорема 1. (П.Л. Чебышев (1854)). Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Тогда для того, чтобы некоторый полином $P_n^*(x)$ степени не выше n был полиномом, наименее уклоняющимся от $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы на $[a, b]$ нашлась, по крайней мере, одна система из $n+2$ точек x_j : $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$, в которых разность $f(x) - P_n^*(x) = r_n(x)$

1) поочередно принимает значения разных знаков,

2) достигает по модулю наибольшего на $[a, b]$ значения, т.е. в точках x_j ($1 \leq j \leq n+2$) должны выполняться условия:

$$r_n(x_1) = -r_n(x_2) = \dots = (-1)^{n+1} r_n(x_{n+2}) = \pm \|r_n\|_C. \quad (3)$$

Систему точек $x_j (1 \leq j \leq n+2)$, в которых имеют место равенства (3), называют альтернансом или же чебышевским альтернансом.

Всякую точку x_0 , для которой выполняется равенство $|r_n(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |r_n(x)| = \|r_n\|_C$, называют точкой максимального уклонения разности $f(x) - P_n^*(x)$ или e -точкой. При этом, если в точке x_0 выполняется условие $r_n(x_0) = \max_{a \leq x \leq b} |r_n(x)|$, то такую точку называют точкой положительного уклонения или (+)-точкой. Если же $r_n(x_0) = -\max_{a \leq x \leq b} |r_n(x)|$, то такую точку называют точкой отрицательного уклонения или (-)-точкой.

Цель статьи – доказать, что полином наилучшего приближения для функции, представимой в виде суммы функций независимых действительных аргументов, равен сумме полиномов наилучшего приближения для каждого из слагаемых функции.

Материал и методы. Материалом для данной работы послужили полиномы наилучшего приближения (экстремальные полиномы) для функции, представляющей собой сумму функций независимых аргументов. Доказательство сделанного предположения осуществлялось в три этапа. Сначала были построены функционалы экстремальных полиномов для каждого из слагаемых функции. Затем было показано, что композиция функционалов для каждого из слагаемых является функционалом экстремального полинома для функции. После этого композиция функционалов была применена к функции и таким образом подтверждена правильность сделанного предположения.

Результаты и их обсуждение. Установим прежде всего связь между общим субдифференциальным критерием оптимальности и теоремой об альтернансе.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – произвольное банахово пространство (действительное или комплексное), $(E^*, \|\cdot\|_*)$ – пространство, сопряженное пространству E . Функционал $x^* \in E^*$ называется субградиентом нормы $\|\cdot\|$ в точке $x \in E$, если

$$\forall h (\in E) \|x+h\| - \|x\| \geq \operatorname{Re} \langle x^*, h \rangle, \quad (4)$$

где $\operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа z ; $\langle x^*, h \rangle$ – значение функционала x^* на векторе h .

Множество всех субградиентов нормы в точке x называется субдифференциалом нормы в точке x и обозначается $\partial\|x\|$, т.е.

$$\partial\|x\| = \{x^* \in E^* : \forall h (\in E) \|x+h\| - \|x\| \geq \operatorname{Re} \langle x^*, h \rangle\}. \quad (5)$$

Из определения вытекает, что $\partial\|0\|$ совпадает с замкнутым единичным шаром сопряженного пространства, а структура $\partial\|x\|$ при $x \neq 0$ (0 – нуль пространства E) дается следующей леммой.

Лемма 1. Если $x \neq 0$, то

$$\partial\|x\| = \{x^* \in E^* : \|x^*\|_* = 1, \operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle = \|x\|\}. \quad (6)$$

Далее рассмотрим критерий элемента наилучшего приближения. Итак, пусть G – подпространство существования такого элемента банахова пространства E . Задачу нахождения множества $P(x)$ (в общем случае единственности может не быть) элементов наилучшего приближения вектора x на подпространстве G можно отнести к выпуклой задаче с ограничениями типа равенств ([1], с. 89), т.е.

$$f(h) = \|x - h\| \rightarrow \inf (h \in G). \quad (7)$$

Известно, что для того, чтобы точка $h_* \in G$ была решением задачи (7), необходимо и достаточно, чтобы

$$\partial f(h_*) \cap G^\perp \neq \emptyset, \quad (8)$$

где $G^\perp$ – аннулятор подпространства G , т.е. $G^\perp = \{x^* \in E^* : \operatorname{Re} \langle x^*, h \rangle = 0, h \in G\}$.

Таким образом, если нам известна пара μ, y , где $\mu \in \partial f(x-y) \cap G^\perp$, $y \in G$, то мы можем установить экстремальность точки y и извлечь дополнительную информацию о структуре множества $P(x)$ элементов наилучшего приближения для точки x на подпространстве G .

Предположим, что нам известны точки чебышевского альтернанса $x_j : a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$, функционал μ мы можем найти, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n+2} = 1, \\ \sum_{j=1}^{n+2} \mu_j \operatorname{sgn}(r(x_j)) x_j^k = 0 \quad (k=0,1,\dots, n). \end{cases} \quad (9)$$

Определим его действие на функцию $g(x)$ следующим образом: $\langle \mu, g \rangle = \sum_{j=1}^{n+2} \mu_j \operatorname{sgn}(g(x_j)) g(x_j)$.

При $n=1$ система уравнений (9) имеет решение $\mu_1 = \frac{x_3 - x_2}{2(x_3 - x_1)}$, $\mu_2 = \frac{1}{2}$, $\mu_3 = \frac{x_2 - x_1}{2(x_3 - x_1)}$.

При $n=2$ решение $\mu_1 = \frac{(x_4 - x_3)(x_3 - x_2)}{2(x_3 - x_1)(x_2 + x_4 - x_1 - x_3)}$, $\mu_2 = \frac{(x_4 - x_3)(x_4 - x_1)}{2(x_4 - x_2)(x_2 + x_4 - x_1 - x_3)}$,
 $\mu_3 = \frac{(x_4 - x_1)(x_2 - x_1)}{2(x_3 - x_1)(x_2 + x_4 - x_1 - x_3)}$, $\mu_4 = \frac{(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)}{2(x_4 - x_2)(x_2 + x_4 - x_1 - x_3)}$.

Лемма 2. Экстремальным полиномом для суммы двух функций $g_1(s_1) + g_2(s_2)$ ($a_j \leq s_j \leq b_j$) является сумма экстремальных полиномов $P_{1*}(s_1) + P_{2*}(s_2)$ функций g_1 и g_2 в отдельности.

Доказательство. Пусть P_{1*} – экстремальный полином степени n для функции g_1 , а P_{2*} – экстремальный полином степени q для функции g_2 . Функционал λ для разности $r_1(s_1) = g_1(s_1) - P_{1*}(s_1)$ с нужными свойствами строится по системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+2} = 1, \\ \sum_{j=1}^{n+2} \lambda_j \operatorname{sgn}(r_1(s_{1j})) s_{1j}^k = 0 \quad (k=0,1,\dots, n), \end{cases} \quad (10)$$

а функционал μ для разности $r_2(s_2)$ по системе уравнений

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{q+2} = 1, \\ \sum_{j=1}^{q+2} \mu_j \operatorname{sgn}(r_2(s_{2j})) s_{2j}^k = 0 \quad (k=0,1,\dots, q). \end{cases} \quad (11)$$

Своего максимального значения сумма $r_1(s_1) + r_2(s_2)$ достигает на декартовом произведении $(+)$ – точек, а минимального – на декартовом произведении $(-)$ – точек разностей $r_j(s)$ ($j=1,2$). Определим действие функционала $\lambda\mu$ на функцию двух переменных $g(s_1, s_2)$ следующим образом:

$$\langle \lambda\mu, g \rangle = \sum^+ \lambda_j \mu_k g(s_{1j}, s_{2k}) - \sum^- \lambda_j \mu_k g(s_{1j}, s_{2k}), \quad (12)$$

где $\sum^+$ распространяется на декартово произведение $(+)$ – точек разностей $r_j(s)$ ($j=1,2$), а сумма $\sum^-$ – на декартово произведение $(-)$ – точек разностей $r_j(s)$ ($j=1,2$).

Поясним сказанное примерами.

Пусть $n=q=1$ и точки $s_{11}, s_{13}, s_{21}, s_{23}$ являются $(+)$ – точками, а точки s_{12}, s_{22} являются $(-)$ – точками, тогда $\langle \lambda\mu, s_1^{t_1} s_2^{t_2} \rangle = \lambda_1 \mu_1 s_{11}^{t_1} s_{21}^{t_2} + \lambda_1 \mu_3 s_{11}^{t_1} s_{23}^{t_2} + \lambda_3 \mu_1 s_{13}^{t_1} s_{21}^{t_2} + \lambda_3 \mu_3 s_{13}^{t_1} s_{23}^{t_2} - \lambda_2 \mu_2 s_{12}^{t_1} s_{22}^{t_2} =$
 $= (\lambda_1 s_{11}^{t_1} + \lambda_3 s_{13}^{t_1}) \mu_1 s_{21}^{t_2} + (\lambda_1 s_{11}^{t_1} + \lambda_3 s_{13}^{t_1}) \mu_3 s_{23}^{t_2} - \lambda_2 \mu_2 s_{12}^{t_1} s_{22}^{t_2} = (\lambda_1 s_{11}^{t_1} + \lambda_3 s_{13}^{t_1}) (\mu_1 s_{21}^{t_2} + \mu_3 s_{23}^{t_2}) - \lambda_2 \mu_2 s_{12}^{t_1} s_{22}^{t_2}.$

Но в силу системы уравнений (10) выполняется равенство $\lambda_1 s_{11}^{t_1} + \lambda_3 s_{13}^{t_1} = \lambda_2 s_{12}^{t_1}$, и тогда $\langle \lambda\mu, s_1^{t_1} s_2^{t_2} \rangle = \lambda_2 s_{12}^{t_1} (\mu_1 s_{21}^{t_2} + \mu_3 s_{23}^{t_2} - \mu_2 s_{22}^{t_2}).$

Далее возникают случаи: 1) $t_1 = t_2 = 0$, 2) $t_1 = 1, t_2 = 0$ или $t_1 = 0, t_2 = 1$, 3) $t_1 = 1, t_2 = 1$.

В первом случае из второго уравнения систем (10) и (11) получаем $\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2$, $\mu_1 + \mu_3 = \mu_2$ и тогда $\langle \lambda\mu, \text{const} = c \rangle = \lambda_2 \mu_2 c - \lambda_2 \mu_2 c = 0$.

Во втором случае при $t_1 = 1, t_2 = 0$ получаем $\langle \lambda\mu, s_1 \rangle = (\lambda_2 s_{12}) (\mu_2 c) - (\lambda_2 s_{12}) (\mu_2 c) = 0$.

Аналогичный результат будет иметь место и в третьем случае.

Таким образом, функционал $\lambda\mu$ принимает значение, равное нулю, на функциях $const$, $s_1, s_2, s_1 s_2$ и, следовательно, на подпространстве G , ими образованном.

$$\text{Далее } \left\langle \frac{\lambda\mu}{\|\lambda\mu\|}, r_1(s_1) + r_2(s_2) \right\rangle = \frac{1}{\|\lambda\mu\|} \left\{ \sum^+ \lambda_j \mu_k [r_1(s_{1j}) + r_2(s_{2k})] - \sum^- \lambda_j \mu_k [r_1(s_{1j}) + r_2(s_{2k})] \right\},$$

но в силу выбора точек s_{1j} и s_{2k} в первой сумме $r_1(s_{1j}) + r_2(s_{2k}) = \|r_1 + r_2\|$, а во второй сумме $r_1(s_{1j}) + r_2(s_{2k}) = -\|r_1 + r_2\|$.

Таким образом, $\left\langle \frac{\lambda\mu}{\|\lambda\mu\|}, r_1(s_1) + r_2(s_2) \right\rangle = \|r_1 + r_2\|$. Последнее равенство означает, что при $n=q=1$ элементом наилучшего приближения на подпространстве G является сумма экстремальных полиномов $P_{1*}(s_1) + P_{2*}(s_2)$ функций g_1 и g_2 в отдельности.

При произвольных n и q значение функционала $\lambda\mu$ на функции $s_1^{t_1} s_2^{t_2}$ ($t_1=0,1,\dots,n; t_2=0,1,\dots,q$) имеет вид:

$$\langle \lambda\mu, s_1^{t_1} s_2^{t_2} \rangle = \sum^+ \lambda_j \mu_k s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} - \sum^- \lambda_j \mu_k s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2}, \quad (13)$$

где сумма $\sum^+$ охватывает все точки декартова произведения (+) – точек разности r_1 и (+) – точек разности r_2 , а сумма $\sum^-$ берется по точкам декартова произведения (–) – точек разности r_1 и (–) – точек разности r_2 .

$$\begin{aligned} &\text{Далее осуществляем следующее преобразование: } \sum^+ \lambda_j \mu_k s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} - \sum^- \lambda_j \mu_k s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} = \\ &= \sum_j^+ \lambda_j s_{1j}^{t_1} \sum_k^+ \mu_k s_{2k}^{t_2} - \sum_j^- \lambda_j s_{1j}^{t_1} \sum_k^- \mu_k s_{2k}^{t_2} = \left(\sum_j^+ \lambda_j s_{1j}^{t_1} \right) \left(\sum_k^+ \mu_k s_{2k}^{t_2} \right) - \left(\sum_j^- \lambda_j s_{1j}^{t_1} \right) \left(\sum_k^- \mu_k s_{2k}^{t_2} \right). \end{aligned}$$

Но в $\sum_j^+ \lambda_j s_{1j}^{t_1} = \sum_j^- \lambda_j s_{1j}^{t_1}$, которое приводит выражение (13) к виду

$$\left(\sum_j^+ \lambda_j s_{1j}^{t_1} \right) \left(\sum_k^+ \mu_k s_{2k}^{t_2} - \sum_k^- \mu_k s_{2k}^{t_2} \right). \quad (14)$$

Из выражения (14) следует, что функционал $\lambda\mu$ принимает значение, равное нулю, на всех функциях вида $f(s_1, s_2) = s_1^{t_1} s_2^{t_2}$ ($t_1=0,1,\dots,n; t_2=0,1,\dots,q$).

Завершается доказательство таким же рассуждением, как и в случае $n=q=1$.

Рассмотрим далее сумму функций

$$g_1(s_1) + g_2(s_2) + \dots + g_m(s_m), \quad (a_j \leq s_j \leq b_j), \quad (15)$$

предполагая, что аргументы этих функций независимы. Пусть $P_{n_j}(s_j)$ ($j=1,2,\dots,m$) – экстремальные полиномы степени n_j для функций $g_j(s_j)$. Обозначим через M_j^+ множество (+) – точек разностей $r_j(s_j) = g(s_j) - P_{n_j}(s_j)$ ($j=1,2,\dots,m$), а через M_j^- множество (–) – точек.

Теорема 2. Экстремальным полиномом на подпространстве, образованном функциями

$$f(s_1, s_2, \dots, s_m) = s_1^{t_1} s_2^{t_2} \dots s_m^{t_m} \quad (0 \leq t_j \leq n_j), \quad (16)$$

является сумма экстремальных полиномов

$$P_{n_1}(s_1) + P_{n_2}(s_2) + \dots + P_{n_m}(s_m). \quad (17)$$

Доказательство. Пусть λ^h ($h=1,2,\dots,m$) – функционалы, построенные для каждой из разностей $r_h(s_h) = g_h(s_h) - P_{n_h}(s_h)$ в отдельности. Определим действие функционала $\Lambda = \prod_{h=1}^m \lambda^h$ следующим образом:

$\langle \Lambda, s_1^{t_1} s_2^{t_2} \dots s_m^{t_m} \rangle = \sum^+ \lambda_j^1 \lambda_k^2 \dots \lambda_u^m s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} \dots s_{mu}^{t_m} - \sum^- \lambda_j^1 \lambda_k^2 \dots \lambda_u^m s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} \dots s_{mu}^{t_m}$, где $\sum^+$ берется по всем точкам декартова произведения $\prod_{1 \leq j \leq m} M_j^+$, а $\sum^-$ по всем точкам декартова произведения $\prod_{1 \leq j \leq m} M_j^-$, тогда

$$\begin{aligned} &\sum^+ \lambda_j^1 \lambda_k^2 \dots \lambda_u^m s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} \dots s_{mu}^{t_m} - \sum^- \lambda_j^1 \lambda_k^2 \dots \lambda_u^m s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} \dots s_{mu}^{t_m} = \sum^+ \lambda_j^1 \lambda_k^2 \dots \lambda_u^{m-1} s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} \dots s_{(m-1)u}^{t_{m-1}} \left(\sum^+ \lambda_v^m s_{mv}^{t_m} \right) - \\ &- \sum^- \lambda_j^1 \lambda_k^2 \dots \lambda_u^{m-1} s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} \dots s_{(m-1)u}^{t_{m-1}} \left(\sum^- \lambda_v^m s_{mv}^{t_m} \right). \end{aligned}$$

В силу системы уравнений (10), построенной для разности $r_m(s_m) = g_m(s_m) - P_{n_m}(s_m)$, выполняется равенство $\sum \lambda_v^m s_{mv}^{t_m} = \sum \lambda_v^m s_{mv}^{t_m}$, таким образом, получаем

$$\langle \Lambda, s_1^{t_1} s_2^{t_2} \dots s_m^{t_m} \rangle = \left(\sum \lambda_j^1 \lambda_k^2 \dots \lambda_u^{m-1} s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} \dots s_{(m-1)u}^{t_{m-1}} - \sum \lambda_j^1 \lambda_k^2 \dots \lambda_u^{m-1} s_{1j}^{t_1} s_{2k}^{t_2} \dots s_{(m-1)u}^{t_{m-1}} \right) \times \sum \lambda_v^m s_{mv}^{t_m}. \quad (18)$$

Завершается доказательство приведением последнего выражения к виду, аналогичному выражению (14), и тем фактом, что

$$\left\langle \frac{\Lambda}{\|\Lambda\|}, \sum_{h=1}^{h=m} g_h(s_h) - P_{n_h}(s_h) \right\rangle = \left\| \sum_{h=1}^{h=m} g_h(s_h) - P_{n_h}(s_h) \right\|. \quad (19)$$

Доказанная теорема находит интересные приложения.

Напомним, что дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек имеют вид:

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad (i=0, 1, \dots, n), \quad (20)$$

где функция U , называемая силовой функцией системы, определяется равенством

$$U = \frac{\gamma}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (i \neq j), \quad (21)$$

в котором γ – гравитационная постоянная, $r_{ij} = r_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$.

Таким образом, аппроксимируя каждое из слагаемых $m_i m_j / r_{ij}$ в отдельности, мы выразим экстремальный полином для всей функции U в виде суммы полиномов. Для нужной аппроксимации слагаемых воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 3 [2]. Пусть для непрерывно дифференцируемых функций $f, \varphi: [a, b] \rightarrow R$ выполнены следующие условия:

- 1) $\varphi'(x) > 0 \quad (x \in (a, b))$;
- 2) на интервале (a, b) функция $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ строго возрастает.

Тогда

$$\inf_{c_0, c_1} \|f - c_0 - c_1 \varphi\| = E_1(f) = \frac{1}{2[\varphi(b) - \varphi(a)]} \{ [\varphi(x_2^*) - \varphi(a)] f(b) + [\varphi(b) - \varphi(x_2^*)] f(a) \} - \frac{1}{2} f(x_2^*),$$

где x_2^* – единственный корень уравнения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$ на интервале (a, b) .

Коэффициенты экстремального полинома $P_1^*(x) = c_0^* + c_1^* \varphi(x)$ находятся по следующим формулам:

$$c_0 = \frac{1}{2[\varphi(b) - \varphi(a)]} \{ [\varphi(x_2^*) + \varphi(b)] f(a) - [\varphi(a) - \varphi(x_2^*)] f(b) \} + \frac{1}{2} f(x_2^*); \quad c_1 = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)},$$

причем размерность коэффициента c_0 и слагаемого $c_1 \varphi(x)$ совпадает с размерностью аппроксимируемой функции $f(x)$.

$$\text{В нашем случае } f(r) = \frac{1}{r}, \quad \varphi(r) = r^2, \quad \text{т.е. } c_1 = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b^2 - a^2} = -\frac{1}{ab(a+b)}.$$

Таким образом, при выполнении условия

$$a_{ij} \leq r_{ij} \leq b_{ij} \quad (22)$$

силовая функция U будет иметь вид

$$U_1 = \frac{\gamma}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j \left(c_{0ij} - \frac{1}{a_{ij} b_{ij} (a_{ij} + b_{ij})} r_{ij}^2 \right), \quad (i \neq j), \quad (23)$$

а ее частные производные обеспечивают линейность системы (20).

Приведем простой пример эффективности аппроксимационного подхода.

В задаче двух тел Земля–Солнце после аппроксимации получается система дифференциальных уравнений $\ddot{x} = ax$, $\ddot{y} = ay$, $\ddot{z} = az$, в которой $a = -\frac{2\gamma M}{r_{\min} r_{\max} (r_{\min} + r_{\max})}$, $\gamma = 6,72 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2 \text{ кг}^{-2}$,

$M = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, $r_{\min} = 1,471 \cdot 10^{11} \text{ м}$, $r_{\max} = 1,521 \cdot 10^{11} \text{ м}$.

Тогда период обращения Земли вокруг Солнца можно вычислить следующим образом:

$$|a|^{1/2} = 1,9983 \cdot 10^{-7}, \quad 2\pi/|a|^{1/2} = 3,1442 \cdot 10^7 \text{ с}, \quad T = 3,1442 \cdot 10^7 / (24 \cdot 3600) = 363,9 \text{ сут.}$$

Заключение. В результате проведенного исследования, материалы которого представлены в данной статье, было доказано, что для функции, представимой в виде суммы функций независимых действительных аргументов, полином наилучшего приближения равен сумме полиномов наилучшего приближения для каждого из слагаемых функции. Доказанная теорема находит интересные приложения. Применив ее для аппроксимации силовой функции U системы двух взаимно притягивающихся материальных точек, получаем систему линейных дифференциальных уравнений, решая которые можно с высокой точностью вычислить параметры движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
2. Сунь Байюй. О точном нахождении экстремальных полиномов на двумерном подпространстве / Байюй Сунь // Вестн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2014. – № 2(80). – С. 34–38.

REFERENCES

1. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremalnikh zadach* [Theory of Extreme Tasks], Moscow, Nauka, 1974, 480 p.
2. Sun Baiun. *Vesnik Vitebskaga dzharzhavnaaga universiteta* [Journal of Vitebsk State University], 2014, 2(80), pp. 34–38.

Поступила в редакцию 12.04.2017

Адрес для корреспонденции: e-mail: k.yakuto@mail.ru – Якуто К.Л.