

Формула для точного вычисления $E_n(f)$ при равномерном приближении

Ю.В. Трубников, И.А. Орехова, Сунь Байюй

Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Работа посвящена нахождению коэффициентов экстремальных полиномов типа Чебышева. Изложены основные теоремы о полиномах наилучшего приближения. Нахождение величины наилучшего приближения $E_n(f)$ обычно представляет чрезвычайно трудную задачу. В связи с этим представляют интерес задачи о приближенном построении таких полиномов и об отрезке величины $E_n(f)$ сверху и снизу. В статье получена эффективная формула нахождения разности непрерывной функции и ее алгебраического полинома наилучшего приближения в равномерной (чебышевской) метрике. Такая формула позволяет находить точки чебышевского альтернанса, а следовательно, и коэффициенты полинома наилучшего приближения. Для случая наилучшей квадратичной аппроксимации приведены явные формулы коэффициентов полинома. Эффективность соответствующего алгоритма подтверждается сравнением приближенного и точного нахождения некоторых матричных функций.

Ключевые слова: полином наилучшего приближения, равномерная метрика, коэффициенты полинома.

The Formula to Calculate Exactly $E_n(f)$ with a Uniform Approach

Y.V. Trubnikov, I.A. Orehova, Syn Baiyi

Educational establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

The paper is devoted to finding the coefficients of extreme polynomials of Chebyshev type. Basic theorems for polynomials of best approximation are presented. Finding the best approximation $E_n(f)$ is usually an extremely difficult task. In connection with this problem of approximate construction of such polynomials and of the interval value $E_n(f)$ above and below are of interest. We obtain an efficient formula for finding the difference between the continuous function and its algebraic polynomial of best approximation in the uniform (Chebyshev) metric. This formula allows one to find points of Chebyshev alternance, and, consequently, the coefficients of the polynomial of best approximation. For the case of the best quadratic approximation explicit formulas polynomial coefficients are given. The effectiveness of the corresponding algorithm is confirmed by comparing the approximate and exact location of certain matrix functions.

Key words: polynomial of best approximation, uniform metric, coefficients of the polynomial.

Работа посвящена нахождению коэффициентов экстремальных полиномов типа Чебышева. Целью данной статьи является получение эффективной формулы нахождения разности непрерывной функции и ее алгебраического полинома наилучшего приближения в равномерной (чебышевской) метрике. Такая формула позволяет находить точки чебышевского альтернанса, а следовательно, и коэффициенты полинома наилучшего приближения. Для случая наилучшей квадратичной аппроксимации приведены явные формулы коэффициентов полинома. Эффективность соответствующего алгоритма подтверждается сравнением приближенного и точного нахождения некоторых матричных функций. Важность и направления применения чебышевских приближений подробно рассмотрены в [1]. Обширная библиография по данному направлению теории приближений имеется в монографии [2].

Напомним, что система заданных на отрезке $[a, b]$ непрерывных функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (1)$$

называется чебышевской системой на этом множестве, если любой обобщенный полином

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x), \quad (2)$$

где c_k — числа, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, имеет на $[a, b]$ не больше, чем n различных корней.

Пусть

$$E_n(f) = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_{C[a,b]}. \quad (3)$$

Напомним также теорему Чебышева об альтернансе.

Теорема 1. Пусть на сегменте $[a, b]$ заданы чебышевская система функций

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j \quad (4)$$

и непрерывная функция $f(x)$. Тогда для того чтобы некоторый полином $P_n^*(x)$ был по сравнению со всеми другими полиномами по системе

$\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$ полиномом, наименее уклоняющимся от $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы на $[a, b]$ нашлась, по крайней мере, одна система из $n+2$ точек x_j (альтернанс) $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$, в которых разность

$$f(x) - P_n^*(x) = r_n(x) \quad (5)$$

- 1) поочередно принимает значения разных знаков,
- 2) достигает по модулю наибольшего на $[a, b]$ значения, так что

$$r_n(x_1) = -r_n(x_2) = \dots = -1^{n+1} r_n(x_{n+2}) = \pm \|r_n\|_C.$$

Далее приведем цитату из [2]. «Теоремы Чебышева, как правило, дают возможность только проверить, является ли для заданной непрерывной функции f некоторый полином полиномом ее наилучшего приближения. Эффективное же нахождение таких полиномов, а также величины наилучшего приближения $E_n(f)$ обычно представляет чрезвычайно трудную задачу. В связи с этим представляют интерес задачи о приближенном построении таких полиномов и об оценке величины $E_n(f)$ сверху и снизу».

Далее запишем следующую теорему.

Теорема 2. (Валле-Пуссен (1919)). Если для непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ некоторый полином $P_n(x)$ по какой-нибудь чебышевской системе функций (4) обладает тем свойством, что разность $f(x) - P_n(x)$ на некоторой системе из $n+2$ упорядоченных точек x_j ($a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$) принимает значения с чередующимися знаками:

$$\begin{aligned} \text{sign } f(x_j) - P_n(x_j) &= \\ &= -\text{sign } f(x_{j+1}) - P_n(x_{j+1}), \end{aligned}$$

то

$$E_n(f) \geq \min_{1 \leq j \leq n+2} |f(x_j) - P_n(x_j)|.$$

В настоящей статье получено точное равенство для нахождения величины $E_n(f)$. Эффективность полученной формулы проиллюстрирована на ряде примеров.

Рассмотрим равномерное приближение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ алгебраическими полиномами

$$P_{n-2}(x) = \sum_{j=0}^{n-2} c_j x^j. \quad (6)$$

Тогда в соответствии с теоремой Чебышева об альтернансе можно записать систему уравнений

$$f(x_1) - P_{n-2}(x_1) = d, \quad (7.1)$$

$$f(x_2) - P_{n-2}(x_2) = -d, \quad (7.2)$$

$$f(x_n) - P_{n-2}(x_n) = -1^{n-1} d \quad (7.n)$$

или систему уравнений

$$f(x_1) - P_{n-2}(x_1) = -d, \quad (8.1)$$

$$f(x_2) - P_{n-2}(x_2) = d, \quad (8.2)$$

$$f(x_n) - P_{n-2}(x_n) = -1^n d, \quad (8.n)$$

где $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$, так как заранее мы не знаем, с какого знака начинается чередование знаков разности $f(x) - P_{n-2}(x)$ в точках альтернанса.

Из системы (7.1)–(7.n) или системы (8.1)–(8.n) можно извлечь всю информацию о точках альтернанса, найти $E_{n-2}(f)$ и коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_{n-2}$ полинома наилучшего равномерного приближения (экстремального полинома). Каждая из систем (7.1)–(7.n) или ((8.1)–(8.n)) является линейной по отношению к неизвестным $d, c_0, c_1, \dots, c_{n-2}$, но для нахождения точек альтернанса функции

$$d = d(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (9)$$

необходимо придать удобный вид, что и будет сделано в следующей теореме.

Теорема 3. Решением системы (7.1)–(7.n) является выражение

$$d = \frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{\frac{1}{w'(x_1)} - \frac{1}{w'(x_2)} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{w'(x_n)}}, \quad 10$$

а решением системы (8.1)–(8.n) выражение

$$d = -\frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{\frac{1}{w' x_1} - \frac{1}{w' x_2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{w' x_n}}, \quad (11)$$

где $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ – разделенная разность функции $f(x)$, построенная по точкам $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, $w(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$, $w' x_j$ – значение производной функции $w(x)$ в точке x_j ($1 \leq j \leq n$).

Доказательство. Умножим обе части уравнения (7.1) на $\frac{1}{w' x_1}$, обе части уравнения

(7.2) на $\frac{1}{w' x_2}$ и т.д., и сложим полученные

уравнения, тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w' x_1} \cdot f x_1 + \frac{1}{w' x_2} \cdot f x_2 + \dots + \\ & + \frac{1}{w' x_n} \cdot f x_n - \frac{1}{w' x_1} \cdot P_{n-2} x_1 - \\ & - \frac{1}{w' x_2} \cdot P_{n-2} x_2 - \dots - \frac{1}{w' x_n} \cdot P_{n-2} x_n = \\ & = \left[\frac{1}{w' x_1} - \frac{1}{w' x_2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{w' x_n} \right] d. \quad (12) \end{aligned}$$

Выражение

$$\sum_{j=1}^n \frac{P_{n-2} x_j}{w' x_j}$$

является разделенной разностью алгебраического многочлена степени, не превосходящей $n-2$, построенной по n точкам $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, и, следовательно, равно нулю. Из равенства (12) немедленно следует равенство (10).

Равенство (11) доказывается аналогично.

Следствие. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} & E_{n-2} f = \\ & = \max_{a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b} \left\{ \frac{[x_1, x_2, \dots, x_n]}{\frac{1}{w' x_1} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{w' x_n}} \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

$$E_{n-2} f =$$

$$= \max_{a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b} \left\{ -\frac{[x_1, x_2, \dots, x_n]}{\frac{1}{w' x_1} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{w' x_n}} \right\}. \quad (14)$$

Равенства (13) и (14) надо понимать таким образом, что если мы вычислим величину (13) и она окажется отрицательной, то реальное равенство нам дает формула (14).

Заметим, что задача максимизации функции (9) решается приближенно, а в некоторых простых случаях можно получить точные формулы для нахождения коэффициентов полинома $P_{n-2}(x)$.

После проведения шага максимизации функции $d(x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы уравнений (7.1)–(7.n) или (8.1)–(8.n) принимают следующий вид:

$$f x_1 - P_{n-2} x_1 = E_{n-2} f, \quad (15.1)$$

$$f x_2 - P_{n-2} x_2 = -E_{n-2} f, \quad (15.2)$$

$$f x_n - P_{n-2} x_n = (-1)^{n-1} E_{n-2} f \quad (15.n)$$

или

$$f x_1 - P_{n-2} x_1 = -E_{n-2} f, \quad (16.1)$$

$$f x_2 - P_{n-2} x_2 = E_{n-2} f, \quad (16.2)$$

$$f x_n - P_{n-2} x_n = (-1)^n E_{n-2} f. \quad (16.n)$$

В этих системах точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются точками альтернанса. Системы (15.1)–(15.n) ((16.1)–(16.n)) позволяют найти коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_{n-2}$ экстремального полинома. Приведем соответствующие формулы для случая квадратичного полинома:

$$E_2 f = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\frac{1}{w' x_1} \cdot f x_1 + \frac{1}{w' x_2} \cdot f x_2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{w' x_3} \cdot f x_3 + \frac{1}{w' x_4} \cdot f x_4 \right]; \quad (17) \end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4} \times$$

$$\times \left[\frac{x_2}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x_3 + x_4 - x_3}{x_1 - x_3} \cdot f(x_1) + \right.$$

$$+ \frac{x_1}{x_4 - x_2} \cdot \frac{x_3 + x_4 + x_4}{x_4 - x_2} \cdot f(x_2) +$$

$$+ \frac{x_2}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x_1 + x_4 + x_1}{x_3 - x_1} \cdot f(x_3) +$$

$$\left. + \frac{x_1}{x_2 - x_4} \cdot \frac{x_2 + x_3 + x_2}{x_2 - x_4} \cdot f(x_4) \right]; \quad (18)$$

$$c_1 = \frac{1}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4} \times$$

$$\times \left\{ \frac{x_2 + x_4}{x_1 - x_3} [f(x_3) - f(x_1)] - \right.$$

$$\left. - \frac{x_1 + x_3}{x_2 - x_4} [f(x_4) - f(x_2)] \right\}; \quad (19)$$

$$c_2 = \frac{1}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{x_2 - x_4} [f(x_4) - f(x_2)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_3 - x_1} [f(x_3) - f(x_1)] \right\}. \quad (20)$$

Формула для $E_2(f)$ записана для случая системы (16.1)–(16.n). Для системы (15.1)–(15.n) знак выражения (17) будет противоположным.

Рассмотрим следующий пример: пусть

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad 1 \leq x \leq 3,$$

тогда система (8.1)–(8.n) для случая квадратичной аппроксимации запишется в виде:

$$\frac{e^{x_1}}{x_1} - c_0 - c_1 x_1 - c_2 x_1^2 = -d,$$

$$\frac{e^{x_2}}{x_2} - c_0 - c_1 x_2 - c_2 x_2^2 = d,$$

$$\frac{e^{x_3}}{x_3} - c_0 - c_1 x_3 - c_2 x_3^2 = -d,$$

$$\frac{e^{x_4}}{x_4} - c_0 - c_1 x_4 - c_2 x_4^2 = d.$$

Величина d , найденная по формуле (11), будет иметь вид

$$d = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4} \cdot \frac{x_1 - x_4}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4} \cdot \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4} \cdot \frac{x_3 - x_4}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{w' x_1} \cdot \frac{e^{x_1}}{x_1} + \frac{1}{w' x_2} \cdot \frac{e^{x_2}}{x_2} + \frac{1}{w' x_3} \cdot \frac{e^{x_3}}{x_3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{w' x_4} \cdot \frac{e^{x_4}}{x_4} \right]. \quad 21$$

Максимизируя функцию $d(x_1, x_2, x_3, x_4)$ на множестве $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 3$ при помощи системы компьютерной алгебры Maple, получим следующий результат:

$$d_{\max} = E_2 f \approx 0,0379$$

при

$$x_1 = 1, x_2 = 1,6872, x_3 = 2,6041, x_4 = 3.$$

Коэффициенты c_0, c_1, c_2 найдем по формулам (18)–(20):

$$c_0 \approx 3,9030, c_1 \approx -2,1792, c_2 \approx 1,0324.$$

Таким образом,

$$\frac{e^x}{x} \approx 3,9030 - 2,1792x + 1,0324x^2$$

$$(1 \leq x \leq 3),$$

при этом

$$E_2 f \approx 0,0379.$$

Приведем еще один пример. Функция $f(x) = \sin(x)$ аппроксимируется на отрезке $[0, \pi/2]$ экстремальным полиномом

$$P_3 = -0,001367 + 1,025256x -$$

$$-0,070690x^2 - 0,112506x^3,$$

при этом

$$E_3 f = 0,001367.$$

Найдем матричную функцию $\sin(M)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{10} & \frac{1}{27} & \frac{1}{81} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{9}{10} & \frac{1}{16} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{81} & \frac{1}{16} & \frac{1}{3} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{64} & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы M $\lambda_1=0,322630$, $\lambda_2=0,594388$, $\lambda_3=0,829980$, $\lambda_4=0,997195$, $\lambda_5=1,389140$ расположены на отрезке $[0, \pi/2]$ и, применяя полином $P_3(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \sin M &\approx -0,001367 \cdot I + 1,025256M - \\ &- 0,070690M^2 - 0,112506M^3 = \\ &= \begin{pmatrix} 0,807 & 0,137 & 0,063 & 0,043 & -0,141 \\ 0,138 & 0,740 & -0,006 & 0,002 & 0,107 \\ 0,060 & 0,01 & 0,757 & 0,046 & 0,107 \\ 0,043 & 0,002 & 0,046 & 0,326 & 0,006 \\ -0,014 & 0,105 & 0,109 & 0,006 & 0,807 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где I – единичная матрица.

Стандартный способ построения функции от матрицы [3] состоит в нахождении интерполяционного полинома, построенного для функции $\sin(x)$ по узлам λ_j ($1 \leq j \leq 5$), т.е. в решении системы уравнений

$$\begin{aligned} c_0 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_1^2 + c_3\lambda_1^3 + c_4\lambda_1^4 &= \sin \lambda_1, \\ c_0 + c_1\lambda_2 + c_2\lambda_2^2 + c_3\lambda_2^3 + c_4\lambda_2^4 &= \sin \lambda_2, \\ c_0 + c_1\lambda_3 + c_2\lambda_3^2 + c_3\lambda_3^3 + c_4\lambda_3^4 &= \sin \lambda_3, \\ c_0 + c_1\lambda_4 + c_2\lambda_4^2 + c_3\lambda_4^3 + c_4\lambda_4^4 &= \sin \lambda_4, \end{aligned}$$

$$c_0 + c_1\lambda_5 + c_2\lambda_5^2 + c_3\lambda_5^3 + c_4\lambda_5^4 = \sin \lambda_5.$$

Решая данную систему уравнений, получаем, что $c_0 = 0,001398$, $c_1 = 0,989056$, $c_2 = 0,032025$, $c_3 = -0,211327$, $c_4 = 0,030315$.

Таким образом,

$$\sin M = c_0I + c_1M + c_2M^2 + c_3M^3 + c_4M^4.$$

Взяв в качестве нормы $\|A\|$ матрицы A

$$\|A\| = \sqrt{\rho},$$

где ρ – максимальное собственное значение матрицы AA^* , получаем, что

$$\|\sin M - P_3 M\| = 0,001384.$$

Заключение. Результатом данной работы является полученная эффективная формула для нахождения разности непрерывной функции и ее алгебраического полинома наилучшего приближения в равномерной (чебышевской) метрике. Приведены некоторые примеры применения данной формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллатц, Л. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения / Л. Коллатц, В. Крабс. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
3. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 548 с.

REFERENCES

1. Collats L., Crabs V., Moscow.: Nauka, 1978, 272 p.
2. Dzyadyk V.K., Collats L. Teoriya priblizhenii. Chebyshevskiy priblizheniya i ikh prilizheniya [Theory of Approaches. Chebyshev Approaches and Their Appendices], Moscow: Nauka, 1977, 512 p.
3. Gantmacher F.R. Teoriya matrits [Theory of Matrices], Moscow: Nauka, 1988, 548 p.

Поступила в редакцию 10.01.2014. Принята в печать 19.02.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: Yuriy_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.