УДК 517.983

Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области

О.В. Скоромник*, С.А. Шлапаков**
**Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»*
***Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

Рассматривается многомерное интегральное уравнение первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией (функцией Куммера) в ядре по ограниченной пирамидальной области многомерного евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1\ a,b$ *суммируемых функций на конечном отрезке* $[a,b]$ *действительной оси. Следуя методике Я. Тамаркина, устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве суммируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для многомерного уравнения типа Абеля и для соответствующих одномерных гипергеометрических уравнений.*

Ключевые слова: *интегральные преобразования, интегральные уравнения, вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера), пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

Solution of a Multidimensional Integral Equation of the First Kind with Kummer Function in the Kernel over a Pyramidal Domain

O.V. Skoromnik*, S.A. Shlapakov**
**Educational establishment «Polotsk State University»*
***Educational establushment «Vitebsk State P.M. Masherov University»*

Multidimensional integral equation of the first kind with the confluent hypergeometric Kummer function in the kernel over special bounded pyramidal domain in Euclidean space is considered. Interest in such equations is caused by their applications to problems on reflection of waves on a rectilinear boundary and on a supersonic flow around spatial corners. Ya. Tamarkin obtained a well-known classical result on the solvability of Abel integral equation in the space $L_1\ a,b$ *integrable functions on a finite interval* $[a,b]$ *of the real line. By Tamarkin's method solution of the investigating equation in closed form is established, and necessary and sufficient conditions for it solvability in the space of summable functions are given. The results generalize those for multidimensional Abel type integral equation and for the corresponding one-dimensional hypergeometric equations.*

Key words: *integral transforms, integral equations, confluent hypergeometric Kummer function, space of summable functions, fractional integrals and derivatives.*

1. Введение. Одномерные интегральные уравнения первого рода, обобщающие классическое интегральное уравнение Абеля и содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса, функцию Лежандра, вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера), другие специальные функции, изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, §§ 39.1, 39.2]). Такие уравнения возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [2]. В большинстве работ метод исследования уравнений типа Абеля с гипергеометрическими функциями, функцией Лежандра в ядрах основывался на представлении интегральных операторов этих уравнений в виде композиции операторов дробного интегрирования Римана–Лиувилля со степенными или экспоненциальными весами и использовании известных свойств дробных интегралов. На этом пути были даны достаточные условия разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в некоторых классах функций и получены их решения в квадратурах [1, §§ 35.1, 35.2, 37.1].

Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости выше указанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. В [3] аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченным пирамидальным областям евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы [4, с. 48], [5] и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов [6] (см. также [1, §§ 25.1, 28.4]).

Следуя методике Я. Тамаркина, в работах [7–8] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a,b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальной области. В [9] получены решения в замкнутой форме более общих интегральных уравнений по пирамидальным областям и исследована картина их разрешимости в пространстве суммируемых функций. В [10] аналогичные результаты получены для многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области.

Целью настоящей работы является продолжение этих исследований. Мы даем решение в замкнутой форме многомерного интегрального уравнения с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области и устанавливаем необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. В п. 2 приводятся вспомогательные сведения; п. 3 посвящен решению рассматриваемого уравнения в квадратурах, а в п. 4 устанавливаются необходимые и достаточные условия его разрешимости.

2. Предварительные сведения. Введем некоторые обозначения [1, § 28.4]. Пусть $\mathrm{N}=\{1,2,\ldots\}$ – множество натуральных чисел, $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\bigcup\{0\}$, R^n – n-мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathrm{R}^n$ и $\mathbf{t}=(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in\mathrm{R}^n$ обозначим через $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum_{k=1}^{n}x_k t_k$ их скалярное произведение, в частности, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{1}=\sum_{k=1}^{n}x_k$ для $\mathbf{1}=(1,\ldots,1)$. Пусть $\mathbf{x}>\mathbf{t}$ означает $x_1>t_1,\ldots,x_n>t_n$ и аналогично для знака нестрогого неравенства $\geq$, $\mathrm{R}^n_+=\{\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n:\mathbf{x}>0\}$, $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathrm{N}_0^n=\mathrm{N}_0\times\ldots\times\mathrm{N}_0$, где $k_i\in\mathrm{N}_0$, $i=1,2,\ldots,n$ – мультииндекс с $\mathbf{k}!=k_1!\cdots k_n!$ и $|\mathbf{k}|=k_1+\ldots+k_n$. Для $\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{k}\in\mathrm{N}_0^n$ и $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathrm{R}^n_+$ положим $\mathbf{x}^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $\mathbf{D}^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x_n)^{\alpha_n}}$ и $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)$. Пусть $A=\|a_{jk}\|$ $(a_{jk}\in\mathrm{R}^1)$ – матрица порядка $n\times n$ с определителем $|A|=\det A$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a}_j=(a_{j1},\ldots,a_{jn})$, элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим через a^{jk}. Без ограничения общности положим $|A|=1$. Пусть $A\cdot\mathbf{x}=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x},\ldots,\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x})$,

$$(A\cdot\mathbf{x})^\alpha=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x})^{\alpha_1}\cdots(\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x})^{\alpha_n}.$$

Для $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)\in\mathrm{R}^n$ и $r\in\mathrm{R}^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n:A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq 0,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r\geq 0\}\qquad(1)$$

n - мерную ограниченную в R^n пирамиду с вершиной в точке $\mathbf{b}$, с основанием на гиперплоскости $\mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r=0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})=0$ $(j=1,\ldots,n)$. В частности, когда $A=E=\|\delta_{jk}\|$ – единичная матрица, $\mathbf{c}=(1,\ldots,1)$ и $r=0$, $E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой:

$$E_1(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n:\mathbf{t}\leq\mathbf{b},\mathbf{1}\cdot\mathbf{t}\geq 0\}.\qquad(2)$$

Известно [1, лемма 28.2], что для ограниченности пирамиды A необходимо и достаточно выполнение условия $A^{-1}\cdot\mathbf{c}>0$.

Для $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\ \beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathrm{R}^n$ и $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathrm{R}^n$ введем функцию

$$F[\beta;\alpha;\mathbf{x}]=\prod_{j=1}^{n}{}_1F_1[\beta_j;\alpha_j;x_j], \tag{3}$$

представляющую собой произведение вырожденных гипергеометрических функций (функций Куммера) ${}_1F_1(a;c;z)$, определяемых по формуле [1, § 1], [11, § 1.6]

$$\begin{aligned}{}_1F_1(a;c;z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}=\\ &=\lim_{b\to\infty}{}_2F_1\left(a,b;c;\frac{z}{b}\right),\ |z|<\infty.\end{aligned} \tag{4}$$

здесь $(z)_n$ – символ Похгаммера: $(z)_0\equiv 1$, $(z)_n=z(z+1)\dots(z+n-1)$ $(z\in C;n\in\mathrm{N})$, ${}_2F_1(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, определяемая при комплексных $a,b,c\in C$ и $|z|<1$ гипергеометрическим рядом

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$$\begin{gathered}{}_2F_1(a,b;c;z)=\\ =\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt,\end{gathered}$$

для $z\in C,\ 0<\mathrm{Re}\,b<\mathrm{Re}\,c,\ (|\arg(1-z)|<\pi,\ z\neq 1)$ (см. [12, 2.1(2) и 2.1.(10)]).

Рассматриваемое нами интегральное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}&\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{\alpha-1}F\left[\beta;\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\times\\ &\times f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}),\end{aligned} \tag{5}$$

где $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\ (\mathbf{c},\mathbf{b}\in\mathrm{R}^n,\ r\in\mathrm{R}^1)$ – пирамида (1); $\mathbf{x},\mathbf{t},\alpha,\beta,\lambda\in\mathrm{R}^n$, $0<\alpha<1$, $\sigma\in\mathrm{R}^n_+$ и $F\left[\beta;\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]$ – функция вида (3).

Нам понадобятся интегральная теорема сложения для функции Куммера (4) [12, 6.10(15)]:

$$\begin{aligned}&\int_0^t\frac{u^{c-1}}{\Gamma(c)}{}_1F_1(a;c;u)\frac{(t-u)^{c'-1}}{\Gamma(c')}{}_1F_1(a';c';t-u)du=\\ &=\frac{t^{c+c'-1}}{\Gamma(c+c')}{}_1F_1(a+a';c+c';t),\quad \mathrm{Re}(c)>0,\ \mathrm{Re}(c')>0\end{aligned}, \tag{6}$$

а также вспомогательное утверждение.

Лемма 1 [1; § 28]. *Если функция $f(\mathbf{x},t)$, определенная на $A_c(b)\times A_c(b)$, измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:*

$$\int_{A_c(b)}dt\int_{A_c(t)}f(t,\tau)d\tau=\int_{A_c(b)}d\tau\int_{\sigma(b,\tau)}f(t,\tau)dt, \tag{7}$$

$$\sigma(\mathbf{b},\tau)=\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n:A\cdot\tau\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{b}\}, \tag{8}$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (7) *сходится абсолютно.*

3. Решение в замкнутой форме. Сначала дадим формальное решение уравнения (5). Заменяя в (5) $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножая обе части полученного равенства на $\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}F\left[-\beta;1-\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}$,

где $\sigma^1=\sigma_1\cdots\sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1}=t_1^{\sigma_1-1}\cdots t_n^{\sigma_n-1}$, интегрируя по пирамиде $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})$, получаем:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}F\left[-\beta;1-\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}\cdot\\ &\cdot\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{t})}\left(A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})\right)^{\alpha-1}F\left[\beta;\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})\right]f(\mathbf{u})d\mathbf{u}=\\ &=\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}F\left[-\beta;1-\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\\ &\mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}).\end{aligned} \tag{9}$$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (9) согласно формуле (7), имеем:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}f(\mathbf{u})d\mathbf{u}\times\\ &\times\int_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}\left(A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})\right)^{\alpha-1}\times\\ &\times F\left[\beta;\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})\right]\times\\ &\times F\left[-\beta;1-\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\times\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}=\\ &=\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}F\left[-\beta;1-\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\end{aligned} \tag{10}$$

где $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})=\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n:A\cdot\mathbf{u}\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{x}\}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (10) введем новые переменные

$s_j = \mathrm{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)$, $\mathrm{a}_j = \ a_{j1},...,a_{jn} \ \ (j=1,...,n)$.

Используя формулу (6), для внутреннего интеграла в (10) получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})} \ A\cdot(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\ ^{-\alpha} \ A\cdot(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\ ^{\alpha-1} \times$$
$$\times F\left[\beta;\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right] F\left[-\beta;1-\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right]\times$$
$$\times\sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} =$$

$$=\Gamma(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_j)}\frac{1}{\Gamma(\alpha_j)}\int\limits_{0}^{\mathrm{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)} s_j^{(1-\alpha_j)-1} F\left[-\beta_j;\ 1-\alpha_j; s_j\right]\times\right.$$

$$\left.\times\ \mathrm{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j\ ^{\alpha_j-1} F\left[\beta_j;\ \alpha_j; \mathrm{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j\right] ds_j\right] =$$
$$=\Gamma(1-\alpha)F\ \ 0;1;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\ \ =\Gamma(1-\alpha).$$

На основании этого равенство (10) принимает вид:

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} f(\mathbf{u})d\mathbf{u} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}), \qquad (11)$$

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\times$$
$$\times \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} A\cdot(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\ ^{-\alpha} F\left[-\beta;1-\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}. \qquad (12)$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1}\cdot\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}},\ \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1}\cdot\left(\frac{\tau}{\mathbf{d}}\right), \qquad (13)$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1},...,\frac{y_n}{d_n}\right) \in \mathrm{E}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1}\cdot\mathbf{c}$, переписываем (11) в виде

$$\int\limits_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\tau)d\tau = \varphi(\mathbf{y}), \qquad (14)$$

где $E_1(\mathbf{x})$ – модельная пирамида (2),

$$\psi(\tau) = f\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\tau}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}}\right),\ \varphi(\mathbf{y}) = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha,\beta}\times$$
$$\times\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}}\right)\prod_{j=1}^{n} d_j.$$

Для обращения уравнения (14) перепишем его в виде

$$\int\limits_{-(y_1+...+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int\limits_{-(y_1+...+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \cdots$$
$$\cdots\int\limits_{-(\tau_2+...+\tau_n)}^{y_1} \psi(\tau)d\tau_1 = \varphi(\mathbf{y}). \qquad (15)$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1},..., y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1}...\frac{\partial}{\partial y_n}\varphi(\mathbf{y}).$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1}\cdot\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{n\mathbf{c}}$

и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{a_{jk}}{d_k}\frac{\partial}{\partial y_j}\ \ (k=1,...,n), \qquad (16)$$

где a_{jk} $(j,k=1,...,n)$ – элементы обратной матрицы A^{-1}, приходим к следующей форме решения уравнения (5):

$$f(\mathbf{x}) = \sigma^1\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} A\cdot(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\ ^{-\alpha}\times\right.$$
$$\times F\left[-\beta;1-\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right]\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\ . \qquad (17)$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (5) разрешимо, то его решение имеет вид (17).

4. Необходимые и достаточные условия разрешимости. Докажем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (5) в пространстве $L_1\ \ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$:

$$L_1\ \ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\ \ = \left\{ f(\mathbf{x}) :\ \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left|f(\mathbf{t})\right| d\mathbf{t} < \infty \right\}. \qquad (18)$$

Введем пространство

$$I_{A_{\mathbf{c},r}}\ \ L_1\ \ =$$
$$Я\left\{\varphi\ \ :\varphi(\mathbf{x}) = \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x}),A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\ge A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})} h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ h(\mathbf{t})\in L_1\ \ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right\} \qquad (19)$$

Пространство $I_{A_{\mathbf{c},r}}\ \ L_1$ играет ту же роль для уравнения (5), что и пространство $AC\ [a,b]$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, § 2.2]. Отметим, что если $\varphi \in I_{A_{\mathbf{c},r}}\ \ L_1$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}).$$

В частности, если $A = E$ – единичная матрица, $\mathbf{c} = \mathbf{1} = (1,...,1)$ и $r = 0$, (18)–(19) принимают вид соответственно

$$L_1\ E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b}) \ = \ f(\mathbf{x}): \int\limits_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty \ ,$$

$$I_{E_{\mathbf{1}}}\ L_1 \ =$$

$$\text{Я}\left\{ \varphi: \ \varphi(\mathbf{x}) = \int\limits_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}),(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq(\mathbf{x}-\mathbf{t})} h(\mathbf{t})d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1\ E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b}) \right\}$$

,

где

$$h(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \varphi(\mathbf{x}).$$

Имеет место следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a,b)$.

Теорема 1. *Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля* (5) *с* $\alpha, \beta, \lambda \in \mathrm{R}^n$ $(0<\alpha<1)$ *и* $\sigma \in \mathrm{R}_+^n$ *в пространстве* $L_1\ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\alpha} F\left[-\beta;1-\alpha; A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right]\sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t})d\mathbf{t} \in$$

$$\in I_{A_{\mathbf{c},r}}\ L_1 \tag{20}$$

и

$$\left[f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0} = \dots =$$

$$= \left[\prod_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0} = 0. \tag{21}$$

При выполнении этих условий уравнение (5) *разрешимо в* $L_1\ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ *и его единственное решение дается формулой* (17).

Доказательство. В модельном случае $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (14), (15). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ оно получается из (14), (15) после замены переменных (13) с учетом (16).

Следствие 1. *Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\alpha-1} F\left[\beta;\alpha;\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right] \times$$

$$\times f(\mathbf{t})d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E_1(\mathbf{b}), \tag{22}$$

с $\alpha, \beta, ,\lambda \in \mathrm{R}^n$ $(0<\alpha<1)$ *и* $\sigma \in \mathrm{R}_+^n$ *разрешимо в пространстве* $L_1\ E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})$ *тогда и только тогда, если*

$$f_{E_1}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\alpha} F\left[-\beta;1-\alpha;\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right]\sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t})d\mathbf{t} \in$$

$$\in I_{E_{\mathbf{1}}}\ L_1$$

и

$$\left[f_{E_1}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) \right]_{1\cdot\mathbf{x}=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) \right]_{1\cdot\mathbf{x}=0} = \dots =$$

$$\text{Я}\left[\frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) \right]_{1\cdot\mathbf{x}=0} = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (22) *разрешимо в* $L_1\ E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})$ *и его единственное решение дается формулой*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_{E_1}^{\lambda,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) = \sigma^1 \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\alpha} F\left[-\beta;1-\alpha;\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right] \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t})d\mathbf{t} \right\}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Репин, О.А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О.А. Репин. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1992. – 183 с.
3. Kilbas, A.A. On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation / A.A. Kilbas, M. Saigo, H. Takushima // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – Vol. 25, № 1. – P. 1–9.
4. Михлин, С.Г. Лекции по интегральным уравнениям / С.Г. Михлин. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.
5. Преображенский, Н.Г. Абелева инверсия в физических задачах: Инверсия Абеля и ее обобщения / Н.Г. Преображенский. – Новосибирск: Ин-т. теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.
6. Федосов, В.П. О некоторых обобщенных уравнениях Абеля / В.П. Федосов. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 106.
7. Килбас, А.А. Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А.А. Килбас, Р.К. Райна, М. Сайго, Х. Сривастава // Докл. НАН Беларуси. – 1995. – Т. 43, № 2. – С. 23–26.
8. Raina, R.K. Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / R.K. Raina, H.M. Srivastava, A.A. Kilbas, M. Saigo // ANZIAM J. 2001. – Vol. 43, № 2. – P. 291–320.
9. Килбас, А.А. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. – Минск, 2009. – Т. 17, № 1. – С. 71–78.
10. Килбас, А.А. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Докл. РАН. – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 442–446.
11. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies 204 / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier. xv, 2006. – 523 p.
12. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.

R E F E R E N C E S

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrali i proizvodniye drobnogo poriadka I nekotoriye ikh prilozheniya [Integrals and Their Derivatives of Fraction Order and Some of Their Supplements], Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p.
2. Repin O.A. Krayeviye zadachi so sdvigom dlia uravnenii giperbolicheskogo i smeshannogo tipov [Edge problems with the Shift for Equations of Hyperbolic and Mixed Types], Saratov: Saratov University Publishing House, 1992, 183 p.
3. Kilbas A.A., Saigo M., Takushima, H. Fukuoka Univ. Sci. Rep., 1995, 25(1), pp. 1–9.
4. Mikhlin S.G. Lektsii po integralnim uravneniyam [Lectures on Integral Equations], M.:Fizmatgiz, 1959, 232 p.
5. Preobrazhensky N.G. Abeleva inversiya v fizicheskikh zadachakh: Inversiya Abelia i eyo obobshcheniya [Abel Inversion in Physical Problems: Abel Inversion and its Generalization], Novosibirsk: Institute of Theoretical and Applied Mechanics of Siberian Branch of the USSR Acad.Sc., 1978, pp. 6–24.
6. Fedosov V.P. O nekotorikh obobshchennikh uravneniyakh Abelia, [On Some Generalized Abel Equations], Novosibirsk: Institute of Theoretical and Applied Mechanics of Siberian Branch of the USSR Acad.Sc., 1978, pp. 106.
7. Kilbas A.A., Raina R.K., Saigo M., Srivastava, G.M. Dokladi NAN Belarusi, [Reports of National Academy of Sciences of Belarus], 1995, 43(2), pp. 23–26.
8. Raina K.L., Srivastava T.M., Kilbas A.A., Saigo M. ANZIAM J., 2001, 43(2), pp. 291–320.
9. Kilbas A.A., Skoromnik O.V. Trudi instituta matematiki NAN Belarusi [Works of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus], Minsk, 2009, 17(1), pp. 71–78.
10. Kilbas A.A., Skoromnik O.V. Dokladi Akademii nauk (Rossiyskaya akadmiya nauk) [Reports of the Academy of Sciences (Russian Academy of Sciences), 2009, 429(4), pp. 442–446.
11. Beitmen G., Erdein A. Visshiye transtsendentniye functsii: v 3 t. [Upper Transcendental Functions in 3 volumes], M.: Nauka, 1973, V.1, 294 p.
12. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations, North – Holland Mathematics Studies 204, Amsterdam: Elsevier.xv, 2006, 523 p.

Поступила в редакцию 06.11.2013. Принята в печать 19.02.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: skoromnik@gmail.com – Скоромник О.В.