



УДК 512.542

О некоторых свойствах $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп в группах с операторами

Р.В. Бородин

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»

В работе изучается поведение $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп в обобщенно фраттининовых расширениях.

В одной из работ Д. Бейдлемана и Ш. Смита был поставлен следующий вопрос: «Если H – субнормальная подгруппа группы G , содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H / \Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H ?».

Через $\Delta(G, A)$ обозначим подгруппу, равную пересечению ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G .

В данной работе дается ответ на более общий вопрос: «Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа. В каком случае из $H / \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$ будет следовать, что $H \in \mathfrak{F}$?».

Ключевые слова: максимальная подгруппа, формация, $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа, группа операторов.

On Some Features of $\mathfrak{F}$ -accessible Sub-Groups in Groups with Operators

R.V. Borodych

Educational establishment «Gomel State F. Skorina University»

Behaviour of $\mathfrak{F}$ -accessible sub-groups in generalized Frattini expansions is studied in the article.

In a study of D. Beidleman and Sh. Smith the following question was posed: «If H is a subnormal subgroup of the group G containing $\Phi(G)$, then will the supersolubility of H subgroup result from the supersolubility $H / \Phi(G)$?».

Through $\Delta(G, A)$ let's designate the subgroup, equal to the intersection of kernels of all abnormal maximal A -allowable subgroups of the group G .

In this paper we answer a more general question: «Let $\mathfrak{F}$ – be a local formation, H – $\mathfrak{F}$ -an accessible subgroup. In which case will $H / \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$ result from $H \in \mathfrak{F}$?».

Key words: maximal subgroup, formation, $\mathfrak{F}$ -accessible subgroups, group of operators.

Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп относится к одному из классических направлений теории конечных групп. Начало этой теории восходит к работе Фраттини [1] 1885 года. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах таких авторов, как Л.А. Шеметков [2], М.В. Селькин [3], А. Баллестер-Болинше [4], Д. Бейдлеман и Ш. Смит [5] и многих других (см. монографии [2–3]).

В работе Д. Бейдлемана и Ш. Смита [5] был поставлен следующий вопрос: «Если H – суб-

нормальная подгруппа группы G , содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H / \Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H ». Эта задача рассматривалась в исследованиях многих авторов (см. монографию [3]). В данной работе дается ответ на более общий вопрос: «Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа. В каком случае из $H / \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$ будет следовать, что $H \in \mathfrak{F}$?».

1. Определения и обозначения. Пусть $\mathfrak{F}$ -непустая формация. Тогда подгруппа H конечной группы G называется $\mathfrak{F}$ -достижимой, если имеется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G,$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i ; 2) $\mathfrak{F}$ -корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} . Если выполняется только условие 2), то такую подгруппу называют $\mathfrak{F}$ -субнормальной.

Понятие $\mathfrak{F}$ -достижимой подгруппы, введенное О. Кегелем в работе [6], позволило систематизировать многие закономерности, связанные с нормальными и субнормальными подгруппами, а также их обобщениями. В данной работе идея $\mathfrak{F}$ -достижимой подгруппы используется для исследования поведения нормальных и обобщенно субнормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп во фраттиновых расширениях конечных групп.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G , сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f: A \rightarrow \text{End}(G)$, где $\text{End}(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G . Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A -допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Через $\Delta(G, A)$ обозначим подгруппу, равную пересечению ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G .

В случае, когда группа операторов A единична, то подгруппы $\Phi(G, A)$ и $\Delta(G, A)$ совпадают соответственно с $\Phi(G)$ (подгруппа Фраттини) и $\Delta(G)$ (подгруппа Гашюца).

В случае отсутствия в группе G указанных подгрупп будем полагать, что соответствующие пересечения совпадают с самой группой G .

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной

A -допустимой относительно некоторой группы операторов A , а также не всякая максимальная A -допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

Пример 1. Пусть Q – группа кватернионов 8-го порядка. Рассмотрим $G = [Q]Z_3$, Z_3 – группа операторов для Q . В группе Q подгруппа K порядка 2 является максимальной допустимой относительно группы операторов Z_3 , но не является максимальной подгруппой группы Q .

Пример 2. Рассмотрим группу

$$G^* = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^3 = 1, bc = cb, b^a = c \rangle.$$

Тогда $G^* = [G]A$, где $G = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$ и $A = \langle a \rangle$ – группа операторов группы G . Простая проверка показывает, что в группе G есть максимальная A -допустимая подгруппа $H = \langle bc \rangle$ порядка 3, но не все подгруппы порядка 3, например b , являются A -допустимыми. Отмеченный класс групп становится достаточно широким, если образовать группу $R = G^* \times Q$, где Q – сверхразрешимая группа и $(|G|, |Q|) = 1$.

Пусть $\Delta(G, A) \neq G$. Определим подгруппу $\tilde{F}_\bullet(G, A)$ группы G следующими двумя условиями:

- 1) $\tilde{F}_\bullet(G, A) \supseteq \Delta(G, A)$;
- 2) $\tilde{F}_\bullet(G, A) / \Delta(G, A) = \text{Soc}(G / \Delta(G, A))$.

На подгруппу $\tilde{F}_\bullet(G, A)$ можно смотреть как на обобщение подгруппы Фиттинга $F(G)$, тем более, что она сохраняет основное свойство подгруппы Фиттинга разрешимой группы – содержать свой централизатор.

2. Вспомогательные результаты. В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты об $\mathfrak{F}$ -достижимых подгруппах.

Лемма 2.1[3]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, H , K и N – подгруппы группы G , причем подгруппа N нормальна в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G , то $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы K , а HN / N – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G / N ;

2) если $H \supseteq N$, то подгруппа H $\mathfrak{F}$ -достижима в G тогда и только тогда, когда подгруппа H / N $\mathfrak{F}$ -достижима в G / N ;

3) если H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G , то H^∞ – субнормальная подгруппа группы G .

Лемма 2.2. Пусть группа G имеет группу операторов A . Тогда $\Delta(G) \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Предположим, что $\Delta(G) \not\subseteq \Delta(G, A)$. Тогда существует абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа M , такая, что $M\Delta(G)$. Так как $\Delta(G)$ является характеристической подгруппой, то $\Delta(G)$ A -допустима. Так как произведение A -допустимых подгрупп является A -допустимым, то $M\Delta(G) = G$. Учитывая, что $\Delta(G) \subseteq M$, получаем, что $M = G$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.3. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $K \subseteq N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$ и $K \subseteq \Delta(G, A)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если N/K π -замкнута, то и N π -замкнута;
- 2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_π -подгруппу H/K . Так как $K \subseteq \Delta(G, A)$, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что $S_{\pi'}$ -подгруппа R из K является $S_{\pi'}$ -подгруппой в H . По теореме Шура–Цассенхауза H содержит S_π -подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H . По лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учетом того, что $H = SR$, получаем, что $G = N_G(S)R$. Так как S есть S_π -подгруппа в N , а подгруппа N A -допустима, то S A -допустима. Тогда подгруппа $N_G(S)$ A -допустима и является абнормальной подгруппой группы G . Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A -допустимой подгруппе M из G . Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Delta(G, A) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G .

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi = p'$. Лемма доказана.

3. Основной результат. Теорема 3.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Delta(G, A))$ и $H/O_\pi(\Delta(G, A)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Согласно теореме 4.3 гл. IV [7] $\mathfrak{F}$ содержится в E_π классе всех π -групп. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Delta(G, A)$ – π -группа. Таким образом, H – π -группа и $H/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi$. Так как H – субнормальная подгруппа группы G и согласно лемме 1 $F_p(G/\Delta(G, A)) = F_p(G)/\Delta(G, A)$, получаем, что $F_p(H/\Delta(G, A)) = F_p(H)/\Delta(G, A)$. Так как $H/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 2.1 и лемму 4.5 из [2], получаем, что

$$\begin{aligned} (H/\Delta(G, A))/F_p(H/\Delta(G, A)) &= \\ = H/\Delta(G, A)/F_p(H)/\Delta(G, A) &= \\ g H/F_p(H) \in f(p). \end{aligned}$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(H)$, то по лемме 4.5 из [2] подгруппа H входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ содержит формацию нильпотентных групп, тогда $\pi = P$ и теорема 3.1 дает ответ на вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G , такая, что $H/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$ ».

Если группа операторов A единична, то подгруппа $\Delta(G, A)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ и из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Delta(G))$ и $H/O_\pi(\Delta(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Из следствия 3.1.1 вытекает результат работы [4].

Замечание. Если локальная формация $\mathfrak{F}$ не содержит формацию нильпотентных групп, то даже в случае единичной группы операторов из того, что $H/\Delta(G) \in \mathfrak{F}$ для субнормальной подгруппы H , не всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Действительно, пусть $\mathfrak{F} = S_p$ – насыщенная формация всех p -групп, p – простое число. Рассмотрим $q \neq p$ и пусть $G = C_{p^2} \times C_{q^2}$ – циклическая группа порядка $p^2 q^2$. Если $H = C_{p^2} \Delta(G)$, тогда $H \triangleleft G$ и $H/\Delta(G) \in \mathfrak{F}$, но $H \notin \mathfrak{F}$.

Теорема 3.2. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$.

Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{S}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{S}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Delta(G, A)$, $\pi = \pi(\mathfrak{S})$. По теореме 3.1 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – холловская π -подгруппа из N . Так как $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$, то $N / DN_1 / D_1 \in \mathfrak{S}$, где $D_1 = N_1 \cap \Delta(G, A)$. Пусть $p \in \pi$. Так как $N_1 / D_1 \in \mathfrak{S}$, то, используя лемму 3 и лемму 4.5 из [2], получаем, что

$$(N_1 / D_1) / F_p(N_1 / D_1) = N_1 / D_1 / F_p(N_1) / D_1 N_1 / F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 4.5 из [2] подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{S}$. Теорема доказана.

Следствие 3.2.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{S}$ – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{S}$, то $N \in \mathfrak{S}$.

Теорема 3.3. $C_G(\tilde{F}_\pi(G, A)) \subseteq F(G)$ для любой группы G .

Доказательство. Положим $H = \tilde{F}_\pi(G, A)$, $C = C_G(H)$, $F = F(G)$. Если $\Delta(G, A) \neq 1$, то рассматриваем $G / \Delta(G, A)$, для которой теорема верна по индукции. Тогда $C\Delta(G, A) / \Delta(G, A) \subseteq F / \Delta(G, A) = F(G / \Delta(G, A))$, откуда $C \subseteq F$. Рассмотрим теперь случай $\Delta(G, A) = 1$. Ввиду того, что подгруппа Фиттинга $F(G)$ совпадает с пересечением централизаторов в G всех главных факторов группы G , получаем, что $F \subseteq C$.

Предположим, что $C \neq F$ и рассмотрим такой главный фактор N / F группы G , что $N \subseteq C$. Так как $\text{Soc}(N)$ содержится в H , следовательно, он централизуется подгруппой N . Если $N \neq G$, то по индукции $N = F(N) = F(G)$, что невозможно. Пусть $N = G$, то есть G / F – главный фактор

группы G . По лемме 7.9 из [2] и лемме 2.2 $G = LF$, $L \cap F = 1$, $F \subseteq H$.

В рассматриваемом случае $G = C$. Поэтому $G = L \times F$. Так как $G / F \in \mathfrak{S}$, то L либо проста, либо есть прямое произведение изоморфных простых групп. Так как $F \neq G$, то L неабелева и, несложно заметить, $L = G'$. Значит, L является минимальной нормальной подгруппой группы G , то есть $L \subseteq H$. Но это невозможно, так как L неабелева и $G = C$. Теорема доказана.

Теорема 3.4. Пусть $\mathfrak{S}$ – наследственная локальная формация и группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если H – $\mathfrak{S}$ -достижимая подгруппа группы G и $H / H \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{S}$, то H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{S}$;
- 2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{S}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Так как подгруппа H $\mathfrak{S}$ -достижима в G , то она, очевидно, G_π -достижима в G , где $\pi = \pi(\mathfrak{S})$. Ввиду леммы 2.1 подгруппа $H\Delta(G, A) / \Delta(G, A)$ G_π -достижима в группе $G / \Delta(G, A)$. Значит, на основании работы [7] имеем, что

$$H\Delta(G, A) / \Delta(G, A) \subseteq O_\pi(G / \Delta(G, A)).$$

Пусть $O_\pi(G / \Delta(G, A)) = K / \Delta(G, A)$. По теореме 3.2 подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times K_2$, где K_1 – π -группа, $\pi(K_2) \cap \pi = \emptyset$, $K_2 \subseteq \Delta(G, A)$. Пусть H_1 – холловская π -подгруппа группы H , H_2 – холловская π' -подгруппа группы H . Очевидно, $H_1 \subseteq K_1$, $H_2 \subseteq K_2$. Поэтому $H = H_1 \times H_2$, причем, H_1 – π -группа, $\pi(H_2) \cap \pi = \emptyset$, $H_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Покажем, что $H_1 \in \mathfrak{S}$. Предположим, что это неверно и группа G является контрпримером минимального порядка. Тогда в G найдется $\mathfrak{S}$ -достижимая подгруппа T , такая, что из $T / T \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{S}$ следует равенство $T = T_1 \times T_2$, где T_1 – π -группа, $\pi(T_2) \cap \pi = \emptyset$,

$T_2 \subseteq \Delta(G, A)$, но подгруппа T_1 не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Среди всех таких подгрупп выберем подгруппу H , имеющую в G наименьший индекс. Очевидно, что $H_1 \neq 1$. Поэтому $O_\pi(G) \neq 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как

$$H\Delta(G, A)N / \Delta(G, A)Ng$$

$$gH\Delta(G, A) / H\Delta(G, A) \cap \Delta(G, A)N,$$

то $H\Delta(G, A)N / \Delta(G, A)N \in \mathfrak{F}$.

С другой стороны, $H\Delta(G, A)N / \Delta(G, A)NgHN / HN \cap \Delta(G, A)N$.

Поэтому $HN / HN \cap \Delta(G, A)N \in \mathfrak{F}$.

Так как $\Delta(G, A)N / N \subseteq \Delta(G / N, A)$, то $(HN / N) / (HN / N) \cap \Delta(G / N, A) \in \mathfrak{F}$.

Кроме того, на основании леммы 2.1 подгруппа HN / N $\mathfrak{F}$ -достижима в группе G / N . Теперь ввиду выбора группы G имеем $H_1N / N \in \mathfrak{F}$. Если L – минимальная нормальная подгруппа группы G , отличная от N , то аналогично доказывается, что $H_1L / L \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что

$$H_1 / L \cap NgH_1 \in \mathfrak{F}.$$

Противоречие.

Итак, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Из $N \subseteq \Delta(G, A) \cap O_\pi(G)$ следует, что N – абелева p -группа для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Кроме того, $H_2 = 1$, $H = H_1$ и $HN / N \in \mathfrak{F}$. Если N не содержится в H , то $|G : HN| < |G : H|$. Кроме того, $HN / HN \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$. Значит, ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HN \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, то $H \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию. Значит, в дальнейшем полагаем, что $N \subseteq H$.

Предположим, что H – собственная подгруппа группы $HO_p(G)$. Ввиду леммы 2.1 подгруппа H $\mathfrak{F}$ -достижима в группе $HO_p(G)$. Поэтому существует такая цепь

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = HO_p(G),$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i ; 2) $\mathfrak{F}$ -корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} .

Пусть $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , то, очевидно, $H_{i-1}^{f(p)}$ – нормальная подгруппа группы H_i . По теореме 4.7 из [2] формация $f(p)$ является наследственной. Поэтому $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$. Значит, подгруппа $H_{i-1}^{f(p)}$ нормальна в группе $H_i^{f(p)}$.

Пусть теперь $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$. Так как $H_i = H_{i-1}(O_p(G) \cap H_i)$, то

$$H_i / (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i)g$$

$$gH_{i-1} / (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_{i-1}).$$

Поэтому

$$(H_i)^{f(p)} \subseteq (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i).$$

Так как $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$, то

$$\begin{aligned} (H_i)^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i)Я \\ Я(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i). \end{aligned} \quad (*)$$

По лемме 4.5 из [2], для любого $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ имеем

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{p'}(H_j / (H_j)^{\mathfrak{F}}).$$

Так как экран f является внутренним максимальным, то на основании теоремы 3.3 из [2] $f(p) = N_p f(p)$. Отсюда следует, что

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq O_p(H_j / (H_j)^{\mathfrak{F}}).$$

Так как $H_j O_j(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$, то $(H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_j \cap O_p(G)$. Таким образом,

$$(H_j)^{f(p)} = (H_j)_{p'}^{f(p)}(H_j)^{\mathfrak{F}},$$

где $(H_j)_{p'}^{f(p)}$ – холловская p' -подгруппа группы $(H_j)^{f(p)}$. Теперь из равенства (*) следует, что холловская p' -подгруппа $(H_{i-1})_{p'}^{f(p)}$ группы $(H_{i-1})^{f(p)}$ является холловской p' -подгруппой группы $(H_i)^{f(p)}$. Значит,

$$(H_i)^{f(p)} = (H_{i-1})_{p'}^{f(p)}(H_i)^{\mathfrak{F}}.$$

Так как $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$, то $(H_i)^{f(p)} \subseteq H_{i-1}$.

Итак,

$$(H_{i-1})^{f(p)} \subseteq (H_i)^{f(p)} \subseteq H_i.$$

Отсюда следует, что подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}$ нормальна в группе $(H_i)^{f(p)}$.

Итак, подгруппа $H^{f(p)}$ субнормальна в группе $HO_p(G)$. Тогда подгруппа $(H/N)^{f(p)} = H^{f(p)}N/N$ является субнормальной подгруппой группы $(H/N)O_p(G/N)$. Так как $H/N \in \mathfrak{Z}$, то

$$(H/N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(H/N).$$

Из субнормальности $(H/N)^{f(p)}$ в $HO_p(G)/N$ следует, что

$$(H/N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(HO_p(G)/N).$$

Значит,

$$(H/N)^{f(p)}O_p(G/N) \subseteq O_{p'}(HO_p(G)/N).$$

Так как

$$\begin{aligned} HO_p(G)/H^{f(p)}O_p(G) & \\ gH/H \cap H^{f(p)}O_p(G) & \in f(p), \end{aligned}$$

то

$$(HO_p(G)/N)/O_{p'}(HO_p(G)/N) \in f(p).$$

Используя теорему 4.1 из [2], получаем, что все главные факторы группы $HO_p(G)/N$, содержащиеся в $O_p(G)/N$, являются $\mathfrak{Z}$ -центральными. Поэтому из $HO_p(G)/O_p(G) \in \mathfrak{Z}$ следует, что $HO_p(G)/N \in \mathfrak{Z}$.

Очевидно, подгруппа $HO_p(G)$ $\mathfrak{Z}$ -достижима в группе G . Так как

$$|G : HO_p(G)| < |G : H|,$$

то ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HO_p(G) \in \mathfrak{Z}$. Из наследственности формации $\mathfrak{Z}$ следует, что $H \in \mathfrak{Z}$. Пришли к противоречию.

Итак, $O_p(G) \subseteq H$. Пусть ϕ – естественный гомоморфизм группы G на группу $G/\Delta(G, A)$. Отметим, что так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $\Delta(G, A) \subseteq O_p(G)$. Пусть $S = \phi^{-1}(O_p(G^\phi))$ – полный прообраз подгруппы $O_p(G^\phi)$. На основании теоремы 3.2 подгруппа S представима в виде $S = S_1\Delta(G, A)$, где S_1 – холловская p' -подгруппа группы S . Теперь из того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа, имеем $O_p(G^\phi) = 1$. Таким образом, все абелевы минимальные нормальные подгруппы группы G^ϕ

являются p -группами.

Пусть K – неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G^ϕ . Предположим, что K не принадлежит формации $\mathfrak{Z}$. Тогда $K = K^\mathfrak{Z}$. Так как подгруппа H^ϕ $\mathfrak{Z}$ -достижима в G^ϕ , то из [8] $K \subseteq N_{G^\phi}(H)$. Значит, $K \cap H^\phi$ – нормальная подгруппа группы K и поэтому $(K \cap H^\phi)^\mathfrak{Z} = K \cap H^\phi$. Так как $\mathfrak{Z}$ – наследственная формация, то $(K \cap H^\phi)^\mathfrak{Z} \subseteq (H^\phi)^\mathfrak{Z}$. Теперь из $H^\phi \in \mathfrak{Z}$ следует, что $K \cap H^\phi = 1$. Значит, $KH^\phi = K \times H^\phi$.

Пусть теперь $K \in \mathfrak{Z}$. Предположим, что K не содержится в H^ϕ . Так как подгруппа H^ϕ $\mathfrak{Z}$ -достижима в $H^\phi K$, то существует такая цепь

$$H^\phi = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_s = H^\phi K,$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, s$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i ; 2) $\mathfrak{Z}$ -корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} . В частности, либо подгруппа H^ϕ нормальна в группе H_1 , либо $(H_1)^\mathfrak{Z} \subseteq H^\phi$.

Пусть $(H_1)^\mathfrak{Z} \subseteq H^\phi$. Так как $H^\phi K / K \in \mathfrak{Z}$ то $(H^\phi K)^\mathfrak{Z} \subseteq K$. Из наследственности формации $\mathfrak{Z}$ имеем, что $(H_1)^\mathfrak{Z} \subseteq K$. Так как подгруппа H_1 $\mathfrak{Z}$ -достижима в $H^\phi K$, то ввиду леммы 1 $(H_1)^\mathfrak{Z}$ – субнормальная подгруппа группы $H^\phi K$. Очевидно, подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times \dots \times K_n$, где K_i – изоморфные простые группы. Так как подгруппа K неабелева, то $(H_1)^\mathfrak{Z}$ – произведение некоторых подгрупп K_i для i из $\{1, 2, \dots, n\}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $(H_1)^\mathfrak{Z} = K_1 \times \dots \times K_m$, где $k < m$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы H^ϕ , содержащаяся в $(H_1)^\mathfrak{Z}$. Так как подгруппа L неабелева, то $K = L \times C_K(L)$. Отсюда, в частности, следует, что L – минимальная нормальная подгруппа группы $H^\phi K$. Так как $L \subseteq H^\phi$, то

$$H^\phi K = H^\phi(LC_K(L)) = H^\phi C_K(L) = H^\phi C_{H^\phi K}(L).$$

Поэтому

$$H^\phi K / C_{H^\phi K}(L) = H^\phi C_{H^\phi K}(L) / C_{H^\phi K}(L)g$$

$$gH^\phi / H^\phi \cap C_{H^\phi K}(L) = H^\phi / C_{H^\phi}(L).$$

Так как $H^\phi \in \mathfrak{Z}$, то $H^\phi / C_{H^\phi}(L) \in f(L)$. Но

тогда $H^\phi K / C_{H^\phi K}(L) \in f(L)$, то есть L – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор группы $H^\phi K$. Так как формация $f(L)$ наследственна, то L – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор группы H_1 . Отсюда из строения подгруппы $(H_1)^\mathfrak{F}$ следует, что все H_1 -главные факторы группы $(H_1)^\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F}$ -центральны в H_1 . Значит, подгруппа H_1 принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Так как подгруппа H_1 $\mathfrak{F}$ -достижима в $H_1 K$, а подгруппа $H_1 K = H^\phi K$ $\mathfrak{F}$ -достижима в G^ϕ , то H_1 – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G^ϕ . Пусть $\phi^{-1}(H_1)$ – полный прообраз подгруппы H_1 . Тогда $\phi^{-1}(H_1)$ – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G , $\phi^{-1}(H_1) / \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$ и $|G : \phi^{-1}(H_1)| < |G : H|$. Ввиду выбора подгруппы H имеем, что $\phi^{-1}(H_1) \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то $H \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

Пусть теперь подгруппа H^ϕ нормальна в H . Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что H_1 / H^ϕ – простая группа. Предположим, что $(H_1)^\mathfrak{F} H^\phi$. Тогда

$$H_1 = H^\phi (H_1)^\mathfrak{F} = H^\phi (K_1 \times \dots \times K_m).$$

Так как

$$H_1 / H^\phi \cong K_1 \times \dots \times K_m / K_1 \times \dots \times K_m \cap H^\phi,$$

то из $K \in \mathfrak{F}$ следует, что $(H_1)^\mathfrak{F} \subseteq H^\phi$. Пришли к противоречию с предположением.

Значит, $(H_1)^\mathfrak{F} \subseteq H^\phi$. Как показано выше, это приводит к противоречию с выбором подгруппы H .

Итак, если K – минимальная нормальная подгруппа группы G^ϕ , то либо $K = K^\phi$ и $[K, H^\phi] = 1$, либо $K \in \mathfrak{F}$ и $K \subseteq H^\phi$. Если $K = K^\mathfrak{F}$, то, очевидно, $O_p(H^\phi) \subseteq C_{G^\phi}(K)$.

Пусть $K \in \mathfrak{F}$. Тогда $K \subseteq H^\phi$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы G являются либо p -группами, либо pd -группами, то из $K \subseteq H^\phi$ снова получаем, что $O_p(H^\phi) \subseteq C_{G^\phi}(K)$.

Таким образом,

$$O_p(H^\phi) \subseteq C_{G^\phi}(\text{Soc}(G^\phi)).$$

Так как $\Delta(G^\phi, A) = 1$, то

$$\text{Soc}(G^\phi) = \tilde{F}_\infty(G^\phi, A). \text{ По теореме 3.3}$$

$$O_p(H^\phi) \subseteq F(G^\phi) = O_p(H^\phi).$$

Значит, $O_p(H^\phi) = 1$.

Так как $H^\phi \in \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 4.5 [2] из условия $f(p) = N_p f(p)$ следует, что $H^\phi / O_p(H^\phi) \in f(p)$. Так как $O_p(H^\phi) = 1$, то $H^\phi = H / \Delta(G, A) \in f(p)$. Теперь из $\Delta(G, A) \subseteq O_p(G)$ и $f(p) = N_p f(p)$ следует, что $H \in f(p)$. Так как экран f является внутренним, то $H^\phi \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 3.4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G и $N / N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Так как $\mathfrak{F}$ -субнормальные и субнормальные подгруппы являются $\mathfrak{F}$ -достижимыми, то в качестве следствия из теоремы 2 можно получить аналогичные утверждения для этих подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
4. Ballester-Bolinchés, A. On $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group / A. Ballester-Bolinchés, M.D. Perez-Ramos // Glasgow Math. J. – 1994. – Vol. 36. – P. 241–247.
5. Beidleman, J.C. On Frattini-like subgroups / J.C. Beidleman, H. Smith // Glasgow Math. J. – 1993. – Vol. 35. – P. 95–98.
6. Kegel, O. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormsteilerverband echt enthalten / O. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – № 2. – P. 225–228.
7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. Авдашкова, Л.П. О нормализаторах $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп / Л.П. Авдашкова, С.Ф. Каморников // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – № 1. – С. 33–35.

REFERENCES

1. Frattini G. Atti Acad. Dei Lincei, 1885, 1, pp. 281–285.
2. Shemetkov L.A. Formatsii kponechnikh grupp [Formations of Finite Groups], M.: Nauka, 1978, 272 p.
3. Selkin M.V. Maksimalniye pogruppi v teorii klassov konechnikh grupp [Maximal Subgroups in the Theory of Classes of Finite Groups], Minsk: Belaruskaya navuka, 1997, 144 p.
4. Ballester-Bolinchés A., Perez-Ramos M.D. Glasgow Math. J., 1994, 36, pp. 241–247.
5. Beidleman J.C., Smith H. Glasgow Math. J., 1993, 35, pp. 95–98.
6. Doerk K., T. Hawkes Finite soluble groups, Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992, 891 p.
7. Kegel O. Arch. Math, 1978, 30(2), pp. 225–228.
8. Avdashkova L.P., Kamornikov S.F. Vestsi of ASC. of Belarus, Physical and Mathematical Sciences Series, 1996, 1, pp. 33–35.

Поступила в редакцию 25.11.2013. Принята в печать 19.02.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: Borodich@gsu.by – Бородин Р.В.