Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Ю.В. Трубников
М.Н. Подоксёнов

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2017

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.311я73
Т77

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 28.02.2017 г.

Авторы: профессор кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор **Ю.В. Трубников;** заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов**

Р е ц е н з е н т ы:
заведующий кафедрой инженерной физики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат технических наук, доцент *Е.А. Краснобаев;*
доцент кафедры математики и информационных технологий УО «ВГТУ», кандидат физико-математических наук, доцент *Т.В. Никонова*

Трубников, Ю.В.
Т77 Уравнения математической физики : методические рекомендации / Ю.В. Трубников, М.Н. Подоксёнов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 52 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с типовой учебной программой по курсу «Уравнения математической физики» для студентов 3 курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Прикладная математика». Излагаются теоретический материал и примеры решения задач.

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.311я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Предисловие …………………………………………………………………… 4

Введение …………………………………………………………………….. 5

1. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными ……………………….. 8

Глава 1. Вывод основных уравнений математической физики … 11

1.1. Уравнение колебаний струны …………………………………... 11

1.2. Понятие о корректно поставленной задаче математической физики. Пример Адамара ……………………………………... 14

Глава 2. Уравнения гиперболического типа ………………………… 17

2.1. Неограниченная струна ……………………………..……… 17

2.2. Задача Коши ……………………………………………………… 18

2.3. Ограниченная струна ……………………………...………… 21

Глава 3. Метод Фурье ………………………………………………… 23

3.1. Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны .. 23

3.2. Вынужденные колебания струны, закреплённой на концах .. 33

3.3. Общая схема метода Фурье ……………………………………... 35

Глава 4. Уравнения параболического типа …………………………... 43

4.1. Линейная задача о распространении тепла ………….………… 43

4.1.1. Первая краевая задача. Постановка задачи ……………… 46

4.1.2. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности ……………………………………………..……… 46

4.1.3. Решение неоднородного уравнения ……………………… 47

Список рекомендуемой литературы ………………………………….. 52

П Р Е Д И С Л О В И Е

Данное издание предназначено для студентов 3 курса дневного отделения факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Прикладная математика».

Методические рекомендации включают в себя теоретический материал, вопросы и упражнения для самоконтроля и задания для самостоятельного решения. Задания делятся на три уровня сложности согласно цифре непосредственно перед текстом задания. В контрольную работу будут включены задания, подобные приведённым в данном издании. Для получения минимальной удовлетворительной оценки студент должен уметь решать задания первого и второго уровня сложности.

Требования по оформлению контрольной работы можно найти в системе дистанционного обучения Витебский государственный университет sdo.vsu.by.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и частные производные от неизвестной функции, называется *дифференциальным уравнением с частными производными*.

Оно имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \qquad (1)$$

где F– заданная функция своих аргументов. Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение (1), называется *порядком уравнения с частными производными.*

Наиболее общее уравнение с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными x и y может быть записано в виде

$$F\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0 \quad \left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (2)$$

Аналогично наиболее общее уравнение с частными производными второго порядка имеет вид

$$F\left(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\right) = 0 \quad \left(u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \qquad (3)$$

Уравнение с частными производными называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно всех старших производных от неизвестной функции. Так, например, уравнение

$$a\left(x, y, u, u_x, u_y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\left(x, y, u, u_x, u_y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\left(x, y, u, u_x, u_y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0$$

есть квазилинейное уравнение второго порядка.

Уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее частных производных. Например, уравнение

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ d(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u = F(x, y) \qquad (4)$$

есть линейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u(x, y)$.

Решением уравнения с частными производными (1) называется всякая функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Так, например:

1) при изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений мы приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{5}$$

где c – скорость распространения волны в данной среде;

2) процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, так же как и явления диффузии, описываются *уравнением теплопроводности*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right); \tag{6}$$

3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле возникает *уравнение Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z). \tag{7}$$

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (7) переходит в *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{8}$$

Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа, в котором отсутствуют массы и соответственно электрические заряды.

Уравнения (5) – (8) называют *основными уравнениями математической физики*. Их подробное изучение дает возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач. Каждое из уравнений (5) – (8) имеет бесконечное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Итак, *задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных*, *удовлетворяющих некоторым дополнительным* *условиям.* Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные условия*, т.е. условия, заданные на границе рассматриваемой области, и *начальные условия,* относящиеся к какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

Математическая модель, имеющая своей целью описать действительность, должна удовлетворять следующим трем требованиям: 1) *решение должно существовать,* 2) *решение должно быть единственным* и 3) *решение должно быть устойчивым.* Это значит, что малые изменения любого из данных задачи должны вызывать соответственно малые изменения решения.

Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется *корректно поставленной задачей*.

АЗ 1. Выяснить, являются ли приведенные ниже равенства дифференциальными уравнениями с частными производными:

1. $\cos\left(u_x + u_y\right) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = 0.$

2. $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 - \left(u_{xx} - u_{yy}\right)^2 = 0.$

3. $\sin^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + \cos^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) - u = 1.$

4. $\sin\left(u_{xy} + u_x\right) - \sin u_{xy} \cos u_x - \cos u_{xy} \sin u_x + 2u = 0.$

5. $\dfrac{\partial}{\partial x} tgu - u_x \sec^2 u - 3u + 2 = 0.$

6. $\log|u_x u_y| - \log|u_x| - \log|u_y| + 5u - 6 = 0.$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right).$

8. $2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f\left(x, y, z\right).$

9. $2\cos\left(u_x + u_y\right) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = 0.$

10. $u_{xy}^2 - u_{yx}^2 + \sin^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0.$

Определить порядок уравнений:

1. $\log|u_{xx} u_{yy}| - \log|u_{xx}| - \log|u_{yy}| + u_x + u_y = 0.$

2. $u_x u_{xy}^2 + \left(u_{xx}^2 - 2u_{xy}^2 + u_y\right)^2 - 2xy = 0.$

3. $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0.$

4. $2(u_x - 2u)u_{xy} - \dfrac{\partial}{\partial y}(u_x - 2u)^2 - xy = 0.$

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_{yy}^2 - u_y\right) - 2u_{yy}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u_{xy} - u_x\right) - 2u_x + 2 = 0.$

6. $2u_{xx}u_{xxy} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx} - u_y\right)^2 - 2u_y u_{xxy} + u_x = 0.$

7. $2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin^2 u_{xxy} + \cos^2 u_{xyx}.$

8. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 12u = 0;$

9. $\cos\left(u_{xx} + u_{yy}\right) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = 0.$

10. $u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + \sin^2\left(u_x + u_y\right) = 0.$

1. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{9}$$

Будем предполагать, что a, b и c не обращаются одновременно в ноль. Уравнению (9) соответствует квадратичная форма

$$at_1^2 + 2bt_1t_2 + ct_2^2. \tag{10}$$

Дифференциальное уравнение (9) принадлежит:

1) *гиперболическому типу*, если $b^2 - ac > 0$ (квадратичная форма (10) знакопеременная);

2) *параболическому типу,* если $b^2 - ac = 0$ (квадратичная форма (10) знакопостоянная);

3) *эллиптическому типу*, если $b^2 - ac < 0$ (квадратичная форма (10) знакоопределённая).

С помощью преобразования переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному. Естественно поставить вопрос: как выбрать функции $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ чтобы уравнение в переменных ξ, η имело наиболее простой вид? Приведём результат для уравнений вида

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0. \qquad (11)$$

Преобразуя частные производные к новым переменным, получим

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx};$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy};$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}.$$

Подставим найденные выражения для u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} в уравнение (11), тогда в переменных ξ, η уравнение (11) будет иметь вид

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0,$$

где

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что справедливо равенство

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x\right)^2,$$

из которого следует инвариантность уравнения при преобразовании переменных, так как функциональный определитель (якобиан) преобразования $D = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x$ отличен от нуля.

Каноническим видом уравнения гиперболического типа называется уравнение

$$u_{\xi\eta} = F_1\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right)$$

или уравнение

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

Каноническим видом уравнения параболического типа называется уравнение

$$u_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

Каноническим видом уравнения эллиптического типа называется вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F_4(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

АЗ 2. Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется:

1. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$;

2. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$;

3. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$;

***Пример* 1.** Уравнение $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ при $x < 0$ принадлежит к гиперболическому типу и заменой $\xi = \frac{3}{2}y + (-x)^{3/2}$, $\eta = \frac{3}{2}y + (-x)^{3/2}$ приводится к виду

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}\,(u_\xi - u_\eta) = 0, \quad \xi > \eta.$$

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}\left(u_\xi - u_\eta\right) = 0, \quad \xi > \eta.$$

При $x > 0$ уравнение $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ принадлежит эллиптическому типу и заменой $\xi = \frac{3}{2}y$, $\eta = -x^{3/2}$ приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0, \quad \eta < 0.$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0, \quad \eta < 0.$$

Г Л А В А 1

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1.1. Уравнение колебаний струны

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. *Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться*, т.е. не оказывает сопротивления изменению ее формы, не связанному с изменением ее длины. Сила натяжения T_0 действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси Ox. Будем рассматривать только поперечные колебания струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox. Обозначим через $u(x,t)$ смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u(x,t)$ дает форму струны в момент времени t. Рассматривая далее только малые колебания струны, будем считать, что смещение $u(x,t)$ а также частная производная u_x столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с этими величинами.

Выделим произвольный участок (x_1, x_2) струны, который при колебании струны деформируется в участок M_1M_2. Длина дуги этого участка в момент времени t равна

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(u'_x)^2}\,dx \approx x_2 - x_1 = S.$$

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(u'_x)^2}\,dx \approx x_2 - x_1 = S,$$

вследствие чего можно считать, что в процессе малых колебаний удлинения участков струны не происходит. Отсюда в силу закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке струны не меняется со временем. Таким образом, при наших предположениях изменением величины натяжения струны, возникающим при ее движении, можно пренебречь по сравнению с натяжением, которому она уже была подвергнута в положении равновесия. Покажем, что величину натяжения T можно считать не зависящей от x, т.е. $T \approx T_0$. Действительно, на участок M_1M_2 струны действуют силы натяжения, направленные в точках M_1 и M_2 по касательным к струне, а также внешние силы и силы инерции. Сумма проекций на ось Ox всех этих сил должна равняться нулю. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то силы инерции и внешние силы направлены параллельно оси Ou, тогда

$$T(x_1)\cos\alpha(x_1) - T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

где $\alpha(x)$ – угол между касательной к струне в точке с абсциссой x в момент времени t и положительным направлением оси Ox. В силу малости колебаний

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1,$$

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1,$$

и, следовательно,

$$T(x_1) \approx T(x_2).$$

Отсюда ввиду произвольности точек x_1 и x_2 следует, что величина натяжения T не зависит от x. Таким образом, можно считать, что $T \approx T_0$ для всех значений x и t.

Перейдем к выводу уравнения колебаний струны. Для этого воспользуемся принципом Даламбера, на основании которого все силы, действующие на некоторый выделенный участок в струне, включая силы инерции, должны уравновешиваться.

Рассмотрим произвольный участок M_1M_2 струны и составим условие равенства нулю суммы проекций на ось Ou всех сил, действующих на него: сил натяжения, равных по величине и направленных по касательным к струне в точках M_1 и M_2 внешней силы, направленной параллельно оси Ou и силы инерции. Сумма проекций на ось Ou сил натяжения, действующих в точках M_1 и M_2, равняется

$$Y = T_0[\sin\alpha(x_1) - \sin\alpha(x_2)],$$

$$Y = T_0\left[\sin\alpha(x_1) - \sin\alpha(x_2)\right],$$

но в силу сделанных предположений

$$\sin\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

и следовательно,

$$Y = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right].$$

Замечая теперь, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx,$$

получим

$$Y = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \tag{1.1}$$

Обозначим через $p(x, t)$ внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси Ou и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующей на участок M_1M_2 струны, будет равна

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx. \tag{1.2}$$

Пусть $\rho(x)$ – линейная плотность струны, тогда сила инерции участка M_1M_2 струны будет равна

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \tag{1.3}$$

Сумма проекций (1.1) – (1.3) на ось Ou всех сил, действующих на участок M_1M_2 струны, должна быть равна нулю, т.е.

$$-\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) \right] dx = 0.$$

Отсюда в силу произвольности x_1 и x_2 следует, что подынтегральная функция должна равняться нулю для каждой точки струны в любой момент времени t, т.е.

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t). \tag{1.4}$$

Это есть искомое *уравнение колебаний струны*.

Если $\rho = \text{const}$ т.е. в случае однородной струны, уравнение (1.4) обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{1.5}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}. \tag{1.6}$$

Если внешняя сила отсутствует, то $p(x, t) = 0$ и получаем уравнение *свободных колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.4) имеет бесчисленное множество частных решений. Поэтому одного уравнения (1.4) недостаточно для полного определения движения струны; нужны еще некоторые дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи. Так, в начальный момент времени $t = 0$ нужно задать положение и скорость всех точек струны

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{1.8}$$

Условия (1.8) называются *начальными условиями*.

Далее, так как струна ограничена, то нужно указать, что происходит на ее концах. Для закрепленной струны на концах должно быть

$$u(x,0) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{1.9}$$

при всяком $t \geq 0$. Условия (1.9) называются *краевыми* или *граничными условиями*. Возможны и другие граничные условия.

Итак, физическая задача о колебании струны свелась к математической задаче: *найти решение уравнения* (1.4), *которое удовлетворяло бы начальным условиям* (1.8) *и граничным условиям* (1.9).

Можно рассматривать колебания *полубесконечной* или *бесконечной* струны, когда один или оба конца находятся бесконечно далеко. Оба эти случая являются идеализацией случая очень длинной струны, причем первый из них соответствует рассмотрению точек, сравнительно близких от одного из концов струны, а второй – рассмотрению точек, расположенных далеко от обоих концов. В первом из этих случаев в качестве граничного условия остается требование $u(x,0) = 0$, а во втором случае граничные условия вообще отсутствуют. Начальные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ должны быть в этих случаях заданы соответственно для всех $0 \leq x \leq \infty$ или для всех $-\infty \leq x \leq \infty$.

1.2. Понятие о корректно поставленной задаче математической физики. Пример Адамара.

Мы видели, что задачи математической физики состоят в нахождении решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Такими дополнительными условиями чаще всего являются граничные условия, т.е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и начальные условия, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

Полученные при помощи уравнений математической физики решения тех или иных задач естествознания дают нам математическое описание ожидаемого хода или вида физических явлений, описываемых этими уравнениями. Поскольку при построении модели физических явлений с помощью уравнений математической физики мы всегда вынуждены абстрагироваться от многих сторон этого явления, отбрасывать многое как несущественное, выделять то, что кажется главным, – результаты, полученные при этом, не являются абсолютно истинными.

Поэтому всякая правильно (корректно) поставленная задача математической физики, имеющая своей целью описать действительные явления, должна удовлетворять следующим трем требованиям: 1) задача должна допускать решение; 2) решение должно быть единственным; 3) решение должно непрерывно зависеть от данных задачи.

Приведем пример некорректно поставленной задачи, принадлежащий Адамару: требуется найти решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{y=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=e^{-\sqrt{n}}\cos nx,$$

где n – положительная постоянная. Проверим, что решением этой задачи будет функция

$$u(x,\,y)=\frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}\cos nx\,\frac{e^{ny}-e^{-ny}}{2}.$$

Действительно,

```
> u:= (1/n)*exp(-sqrt(n))*cos(n*x)*(1/2)*(exp(n*y)-exp(-(n*y)));
```

$$u:=\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\sqrt{n}}\cos(n\,x)\left(e^{n\,y}-e^{-n\,y}\right)}{n}$$

```
> diff(u,x$2)+diff(u,y$2);
```

$$-\frac{1}{2}\,e^{-\sqrt{n}}\cos(n\,x)\,n\left(e^{n\,y}-e^{-n\,y}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\sqrt{n}}\cos(n\,x)\left(n^2\,e^{n\,y}-n^2\,e^{-n\,y}\right)}{n}$$

```
> diff(u,x$2); factor(diff(u,y$2));
```

$$-\frac{1}{2}\,e^{-\sqrt{n}}\cos(n\,x)\,n\left(e^{n\,y}-e^{-n\,y}\right)$$

$$\frac{1}{2}\,e^{-\sqrt{n}}\cos(n\,x)\,n\left(e^{n\,y}-e^{-n\,y}\right)$$

```
> evalf[6](subs(n=100, x=10,y=0.1,u));
```

0.00281190

```
> evalf[6](subs(n=200, x=10,y=0.1,u));
```

$$-0.321518$$

```
> evalf[6](subs(n=400, x=10,y=0.1,u));
```

$$-4.42680\ 10^5$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи Коши будет принимать как угодно большие значения при произвольно малом $y > 0$, если n достаточно велико. Допустим, что мы нашли решение задачи Коши для уравнения Лапласа при некоторых начальных условиях

$$u\big|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi_1(x).$$

Пусть это будет функция $u_0(x, y)$. Тогда для начальных условий

$$u\big|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi_1(x) + e^{-\sqrt{n}} \cos nx$$

решением задачи Коши будет функция

$$u_0(x, y) + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \cos nx \cdot shny.$$

Таким образом, очень малые изменения в начальных условиях влекут за собой как угодно большие изменения в решении задачи Коши и притом в какой угодно близости от значений $y = 0$. Это значит, что задача Коши для уравнения Лапласа поставлена некорректно.

ГЛАВА 2
УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи, связанные с процессами колебаний, например, задача о колебаниях струны, мембраны, газа, электромагнитных колебаниях и т.д. Характерной особенностью процессов, описываемых такими уравнениями, является конечная скорость их распространения.

2.1. Неограниченная струна. Уравнение свободных колебаний однородной струны имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{2.1}$$

Положим

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Так как

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi\xi_{xx} + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta\eta_{xx} = \\ &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{\xi\xi}\xi_t^2 + u_{\xi\eta}\xi_t\eta_t + u_\xi\xi_{tt} + u_{\xi\eta}\xi_t\eta_t + u_{\eta\eta}\eta_t^2 + u_\eta\eta_{tt} = \\ &= u_{\xi\xi}(-a)^2 - 2u_{\xi\eta}a^2 + u_{\eta\eta}a^2, \end{aligned}$$

то уравнение (2.1) в новых переменных запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \tag{2.2}$$

или, переписав его в виде

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0,$$

будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = \omega(\xi),$$

где $\omega(\xi)$ – произвольная функция от ξ. Интегрируя полученное уравнение по ξ и рассматривая η как параметр, находим, что

$$u = \int \omega(\xi)\,d\xi + \theta_2(\eta),$$

где $\theta_2(\eta)$ – произвольная функция от η. Полагая теперь

$$\int \omega(\xi)\,d\xi = \theta_1(\xi),$$

получаем

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным (x, t) будем иметь

$$u(x,t) = \theta_1(x-at) + \theta_2(x+at). \qquad (2.3)$$

Нетрудно проверить, что функция $u(x, t)$ определяемая равенством (2.3), является решением уравнения (2.1), если θ_1 и θ_2 – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Решение (2.3) уравнения (2.1) называется *решением Даламбера*.

Выясним физический смысл решения (2.3). Рассмотрим сначала частный случай колебания струны, когда $\theta_2(\eta) \equiv 0$, т.е. когда смещение струны определяется формулой

$$u = \theta_1(x-at). \qquad (2.4)$$

Пусть наблюдатель, выйдя в начальный момент времени $t = 0$ из точки $x = c$ струны, передвигается в положительном направлении оси Ox со скоростью a, т.е. его абсцисса меняется по закону $x = c + at$ или $x = c - at$. Для такого наблюдателя смещение струны, определяемой формулой (2.4), будет оставаться все время постоянным, равным $\theta_1(c)$. Самое явление, описываемое функцией $u_1 = \theta_1(x-at)$ называется *распространением прямой волны.*

Таким образом, решение (2.4) представляет прямую волну, которая распространяется в положительном направлении оси Ox со скоростью a. Точно так же решение $u_2 = \theta_2(x+at)$ представляет обратную волну, которая распространяется в отрицательном направлении оси Ox со скоростью a. Общее решение (2.3) является суммой прямой и обратной волн.

2.2. Задача Коши. Найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x). \qquad (2.5)$$

Ввиду неограниченности струны функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ заданы в интервале $(-\infty, \infty)$.

В решении (2.3) уравнения (2.1) нужно выбрать функции θ_1 и θ_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям:

$$\varphi_0(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x), \qquad \varphi_1(x) = -a\left[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)\right], \qquad (2.6)$$

откуда, интегрируя второе равенство, получаем

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi_0(x),\ \ \theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz+c, \tag{2.7}$$

где c – произвольная постоянная.

Из равенств (2.7) находим

$$\begin{aligned}\theta_1(x)&=\frac{1}{2}\varphi_0(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz+\frac{c}{2},\\ \theta_2(x)&=\frac{1}{2}\varphi_0(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz-\frac{c}{2}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.3), получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi_0(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi_1(z)\,dz+\frac{c}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\varphi_0(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi_1(z)\,dz-\frac{c}{2}$$

или окончательно

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)\,dz. \tag{2.9}$$

Равенство (2.9) даёт решение задачи Коши, если $\varphi_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\varphi_1(x)$ – до первого.

Рассмотрим два частных случая. *Начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное смещение имеет место лишь в конечном промежутке $(-\alpha,\alpha)$.* Решение (2.9) выражается при этом формулой

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2}[\,\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)\,]. \tag{2.10}$$

Решение (2.10) является суммой двух волн, распространяющихся вправо и влево со скоростью a, причем начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{1}{2}\varphi_0(x)$, равной половине начального смещения. Пусть точка x струны лежит правее промежутка $(-\alpha,\ \alpha)$, т.е. $x>\alpha$. При $x+at>\ x-at>\alpha$, т.е. при выполнении неравенства $t<\dfrac{x-\alpha}{a}$ из вида функции $\varphi_0(x)$ следует, что $u_0(x,t)\equiv 0$, т.е. до точки x волна ещё не дошла. С момента времени $t=\dfrac{x-\alpha}{a}$ точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта прямой волны). При выполнении неравенств

$x+at>\alpha$, $x-at<-\alpha$, т.е. $t>\dfrac{\alpha+x}{a}>\dfrac{\alpha-x}{a}$ получим $u_0(t,x)\equiv 0$. Момент времени $t=\dfrac{\alpha+x}{a}$ соответствует прохождению заднего фронта прямой волны через точку x, после чего в этой точке $u_0(t,x)\equiv 0$. Аналогичные рассуждения можно провести для точек струны, лежащих внутри промежутка $(-\alpha,\alpha)$, или левее его.

Таким образом, в каждой точке струны после прохождения обеих волн (а для точек, лежащих вне области начального смещения, после прохождения только одной) наступает покой.

Далее рассмотрим случай, когда *начальное смещение равно нулю, а функция* $\varphi_1(x)$ *отлична от нуля лишь в конечном промежутке* $(-\alpha,\alpha)$. В таком случае говорят, что струна имеет только начальный импульс. Решение (9) принимает следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz$$

или, полагая $\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x\varphi_1(z)dz=\psi(x)$, получаем

$$u_0(x,t)=\psi(x+at)-\psi(x-at), \tag{2.11}$$

т.е. по струне распространяются две волны: прямая и обратная. Исследуем решение (2.11) более подробно. Пусть точка x струны лежит правее промежутка $(-\alpha,\alpha)$. При $t=0$ промежуток интегрирования $(x-at,x+at)$ вырождается в точку x, а затем, при увеличении t расширяется в обе стороны со скоростью a. При $t<\dfrac{x-\alpha}{a}$ (т.е. $x-at>\alpha$) он не будет иметь общих точек с интервалом $(-\alpha,\alpha)$, функция $\varphi_1(z)$ в нём равна нулю, и равенство (2.11) даст $u_0(t,x)=0$ т.е. покой в точке x. Начиная с момента времени $t=\dfrac{x-\alpha}{a}$ (т.е. $x-at=\alpha$) промежуток $(x-at,x+at)$ будет налегать на промежуток $(-\alpha,\alpha)$, в котором $\varphi_1(z)$ отлична от нуля, и точка x начнёт колебаться (момент прохождения переднего фронта волны через точку x). Наконец, при $t>\dfrac{\alpha+x}{a}>\dfrac{\alpha-x}{a}$ промежуток $(x-at,x+at)$ будет содержать целиком промежуток $(-\alpha,\alpha)$ т.е. интегрирование по $(x-at,x+at)$ будет сводиться к интегрированию по $(-\alpha,\alpha)$, а так как вне его $\varphi_1(z)=0$, то при $t>\dfrac{\alpha+x}{a}$ мы имеем постоянное значение

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)\,dz=\frac{1}{2a}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi_1(z)\,dz. \tag{2.12}$$

Момент времени $t=\dfrac{\alpha+x}{a}$ есть момент прохождения заднего фронта волны через точку x.

Таким образом, действие начального импульса приводит к тому, что с течением времени точки струны сдвигаются на отрезок, длина которого выражается интегралом (2.12), и остаются без движения в этом новом положении. Волна оставляет после себя как бы след своего прохождения.

2.3. Ограниченная струна. Рассмотрим струну длины l, закрепленную на концах. Задача о колебании такой струны сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.13}$$

при граничных условиях

$$u\big|_{x=0}=0,\ \ u\big|_{x=l}=0 \tag{2.14}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_1(x)\ \ \left(0\le x\le l\right). \tag{2.15}$$

Решение Даламбера

$$u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at) \tag{2.16}$$

годится и в этом случае, но определение функций $\theta_j\left(j=1,2\right)$ по формулам

$$\begin{aligned}\theta_1(x)&=\frac{1}{2}\varphi_0(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz+\frac{c}{2},\\ \theta_2(x)&=\frac{1}{2}\varphi_0(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz-\frac{c}{2}\end{aligned} \tag{2.17}$$

встречает здесь то затруднение, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, а следовательно, и функции θ_j $(j=1,2)$ определены лишь в промежутке $(0,l)$ согласно физическому смыслу задачи, а аргументы $x\pm at$ могут находиться и вне этого промежутка. Таким образом, для того чтобы стало возможным применить решение (2.16), нужно продолжить функции θ_j $(j=1,2)$ или, что эквивалентно, функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ вне промежутка $(0,l)$ С точки зрения физической это продолжение сводится к определению такого начального возмущения бесконечной струны, при котором движение её участка $(0, l)$ было бы то же самое, как если бы он был закреплён на концах, а оставшаяся часть струны была бы отброшена.

Для продолжения функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ воспользуемся граничными условиями (2.14). Подставляя в правую часть равенств (2.16) $x=0$ и $x=l$ и принимая во внимание граничные условия (2.14), получим

$$\theta_1(-at)+\theta_2(at)=0, \qquad \theta_1(l-at)+\theta_2(l+at)=0$$

или, обозначая at через x,

$$\theta_1(-x)=-\theta_2(x), \qquad \theta_2(l+x)=-\theta_1(l-x). \tag{2.18}$$

Когда x изменяется в промежутке $(0, l)$, то первая из формул (2.18) определяет функцию $\theta_1(x)$ в промежутке $(-l, 0)$, вторая — функцию $\theta_2(x)$ в промежутке $(l, 2l)$. Таким образом, обе функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ вполне определяются на промежутке длины $2l$. Далее из равенств (2.18) следует, что

$$\theta_2(2l+x)=-\theta_1(-x)=\theta_2(x), \quad \theta_1(2l+x)=\theta_1(x),$$

т.е. функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ являются функциями периодическими с периодом $2l$.

ГЛАВА 3
МЕТОД ФУРЬЕ

3.1. Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны. Метод Фурье, или метод разделения переменных является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Мы изложим этот метод на ряде примеров, начав с простейшей задачи о колебаниях однородной струны, закреплённой на концах. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

при граничных условиях

$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0, \tag{3.2}$$

и начальных условиях

$$u(x,\,0) = \varphi_0(x), \;\; \frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{3.3}$$

Будем сначала искать частные решения уравнения (1), не равные тождественно нулю, в виде произведения

$$u(x,t) = X(t)T(t), \tag{3.4}$$

удовлетворяющие граничным условиям (3.2). Подставляя (3.4) в уравнение (3.1), получаем

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{3.5}$$

Левая часть последнего равенства зависит только от t, а правая — только от x, и равенство возможно лишь в том случае, если и левая и правая части не зависят ни от x, ни от t т.е. представляют собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через λ.Тогда из равенства (3.5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \tag{3.6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{3.7}$$

Чтобы получить нетривиальные, т.е. не равные тождественно нулю, решения вида (3.4), удовлетворяющие граничным условиям (3.2), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (3.7), удовлетворяющие граничным условиям

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \tag{3.8}$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: найти такие значения параметра λ, при которых уравнение (3.7) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничным условиям (3.8). Формулированную таким образом задачу часто называют *задачей Штурма-Лиувилля*.

Эти значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями краевой задачи (3.7–3.8).

Найдём теперь собственные значения и собственные функции задачи (3.7–3.8). Здесь нужно рассмотреть три случая: $\lambda<0$, $\lambda=0$ или $\lambda>0$.

1) При $\lambda<0$ общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Удовлетворяя граничным условиям (3.8), получаем

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \tag{9}$$

Определитель однородной системы (9) отличен от нуля, следовательно система (3.9) имеет только решение $c_1=0$, $c_2=0$. Это означает, что $X(x)\equiv 0$.

2) При $\lambda=0$ общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$X(x)=c_1+c_2x.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим

$$c_1+c_2\cdot 0=0, \quad c_1+c_2\cdot l=0.$$

Отсюда $c_1=0$, $c_2=0$ и, следовательно, $X(x)\equiv 0$.

3) При $\lambda>0$ общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$c_1\cdot 1 + c_2\cdot 0 = 0, \quad c_1\sqrt{\lambda}l + c_2\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Из первого уравнения следует $c_1=0$, а из второго $c_2\sqrt{\lambda}t=0$. Мы должны считать, что $c_1\neq 0$ так как в противном случае $X(x)\equiv 0$. Поэтому

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0, \text{ т.е. } \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l},$$

где k – любое целое число. Следовательно, решения задачи (3.7)-(3.8) возможны лишь при значениях

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Этим собственными значениями соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},$$

определяемые с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что положительные и отрицательные значения k, равные по абсолютной величине, дают собственные значения $\lambda_{-k} = \lambda_k$, а собственные функции отличаются лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно для k брать только целые положительные значения.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (3.6) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l},$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные. Таким образом, функции

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (3.1) и граничным условиям (3.2) при любых a_k и b_k.

В силу линейности и однородности уравнения (1) любая конечная сумма решений будет также решением. То же справедливо и для ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{3.10}$$

если он равномерно сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Поскольку каждое слагаемое ряда (3.10) удовлетворяет граничным условиям (2) при любых a_k и b_k то этим условиям будет удовлетворять и сумма ряда, т.е. функция $u(x,t)$. Остаётся определить постоянные a_k и b_k так, чтобы выполнялись и начальные условия. Продифференцируем ряд (3.10) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k \sin\frac{k\pi at}{l} + b_k \cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{3.11}$$

Полагая в (3.10) и (3.11) $t = 0$, получаем в силу начальных условий (3.3):

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{3.12}$$

Формулы (3.12) представляют собой разложения заданных функций

$$u(x,\,0) = \varphi_0(x), \ \left.\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,\,l)$. Коэффициенты разложений (3.12) вычисляются по известным формулам

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{3.13}$$

Таким образом, решение задачи (3.1) – (3.3) даётся рядом (3.10), где a_k и b_k определяются формулами (3.13).

Обратимся теперь к интерпретации полученного решения. Функцию $u_n(x,t)$ можно представить в виде

$$u_n(x,\,t) = \left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}at + b_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x = A_n\cos\frac{\pi n}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \frac{\pi n}{l}a\delta_n = -arctg\frac{b_n}{a_n}.$$

Каждая точка струны x_0 совершает колебания

$$u_n(x_0,\,t) = A_n\cos\frac{\pi n}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{\pi n}{l}x_0$$

с амплитудой $A_n\sin\frac{\pi n}{l}x_0$. Движение струны такого типа называется стоячей волной. Точки $x = \frac{ml}{n}$ $(m = 1,2,\ldots,n-1)$, в которых $\sin\frac{\pi n}{l}x = 0$, в течение всего процесса остаются неподвижными и называются узлами стоячей волны $u_n(x,t)$. Точки $x = \frac{2m+1}{n}l$ $(m = 1,2,\ldots,n-1)$, в которых $\sin\frac{\pi n}{l}x = \pm 1$, совершают колебания с максимальной амплитудой A_n и называются пучностями стоячей волны.

Профиль стоячей волны в любой момент времени представляет синусоиду

$$u_n(x,\,t) = C_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где

$$C_n(t) = A_n \cos\omega_n(t + \delta_n) \qquad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right).$$

В момент времени t, при котором $\cos\omega_n(t+\delta_n) = \pm 1$, отклонения достигают максимальных значений, а скорость движения равна нулю. В моменты времени t, при которых $\cos\omega_n(t+\delta_n) = 0$, отклонение равно нулю, а скорость движения максимальна. Частоты колебаний всех точек струны одинаковы и равны

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a.$$

Частоты ω_n называются собственными частотами колебаний струны. Для поперечных колебаний струны $a = \sqrt{T/\rho}$ и, следовательно,

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Для кинетической энергии колебаний струны имеет место выражение

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t^2 dx,$$

а для потенциальной

$$U = -\frac{1}{2}\int_0^l T u_x^2 dx.$$

Полная энергия n-ой стоячей волны (n-ой гармоники) для случая поперечных колебаний струны равна

$$E_n = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right]dx = \frac{A_n^2}{2}\int_0^l \left[\rho\omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t+\delta_n)\sin^2\frac{\pi n}{l}x\right]dx +$$

$$+\frac{A_n^2}{2}\int_0^l T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2\omega_n(t+\delta_n)\cos^2\frac{\pi n}{l}x\,dx =$$

$$= \frac{A_n^2 l}{4}\left[\rho\omega_n^2 \sin^2\omega_n(t+\delta_n) + T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2\omega_n(t+\delta_n)\right],$$

так как

$$\int_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}x dx = \int_0^l \cos^2\frac{\pi n}{l}x\,dx = \frac{l}{2}.$$

Пользуясь выражениями для A_n, ω_n а также равенством $T=a^2\rho$, получаем:

$$E_n = \frac{\rho A_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \frac{a_n^2 + b_n^2}{4},$$

где $M = l\rho$ –масса струны.

Колебания струны воспринимаются нами обычно по звуку, издаваемому струной. Не останавливаясь на процессе распространения колебаний в воздухе и восприятия колебаний нашим ухом, можно сказать, что звук струны является наложением «простых тонов», соответствующих стоячим волнам, на которые разлагается колебание. Это разложение звука на простые тона можно произвести экспериментально.

Высота тона зависит от частоты колебаний, соответствующих этому тону. Сила тона определяется его энергией и, следовательно, его амплитудой. Самый низкий тон, который может создавать струна, определяется самой низкой собственной частотой

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

и называется *основным тоном струны*. Остальные тона, соответствующие частотам, кратным ω_1 называются *обертонами*. Тембр звука зависит от присутствия наряду с основным тоном обертонов и распределения энергии по гармоникам.

Низший тон струны и её тембр зависят от способа возбуждения колебаний. Действительно, способ возбуждения колебаний определяют начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

через которые выражаются коэффициенты a_n и b_n. Если $a_1 = b_1 = 0$, то низшим тоном будет тон, соответствующий частоте ω_n, где n – наименьшее число, для которого a_n и b_n отличны от нуля.

Обычно струна издаёт один и тот же тон. В самом деле, приведем струну в колебание, оттягивая её в одну сторону и отпуская без начальной скорости. В этом случае

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) > 0, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \equiv 0,$$

и

$$a_1 = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{\pi x}{l}dx > 0,$$

так как $\sin\frac{\pi x}{l} > 0$. Следующие коэффициенты значительно меньше a_1, так как функция $\sin\frac{\pi n x}{l}$ знакопеременна при $n \geq 2$. В частности, если $\varphi_0(x)$ симметрична относительно середины отрезка, то $a_2 = 0$. Таким образом, если привести струну в колебание, оттягивая её в одну сторону (т.е. $\varphi_0(x) > 0$), то низшим тоном будет основной тон струны, энергия которого, вообще говоря, больше энергии других гармоник.

Привести струну в колебание можно и другими способами. Например, если начальная функция нечетна относительно середины струны, то $a_1 = 0$ и низший тон соответствует частоте

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если к звучащей струне прикоснуться точно в середине, то звук её резко меняется и она звучит в октаву к своему тону. Этот прием изменения тона часто применяется при игре на скрипке, гитаре и других и других струнных инструментах и носит название флажолета. С точки зрения теории колебания струн это явление объясняется следующим образом: в момент прикосновения к середине струны мы гасим стоячие волны, имеющие в этой точке пучности, и сохраняем лишь гармоники, имеющие в этой точке узлы. Таким образом, остаются только четные гармоники, и самой низкой частотой будет

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если прикоснуться к струне на расстоянии 1/3 её длины от края, то высота основного тона повышается втрое, т.к. при этом сохраняются лишь гармоники, имеющие узлы в точке $x = \frac{l}{3}$.

Формулы

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \qquad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{T}},$$

определяющие частоту и, соответственно, период основного колебания, объясняют следующие законы колебания струн, открытые впервые экспериментально (*законы Мерсена*).

1. Для струн одинаковой плотности и одинакового натяжения период колебания струны пропорционален её длине.
2. При заданной длине струны период меняется обратно пропорционально корню квадратному из натяжения.

3. При заданной длине и натяжении период меняется пропорционально корню квадратному из линейной плотности струны.

Теперь немного истории. Метод, который носит название метода Фурье, возник ещё в 18 веке при изучении уравнения, описывающего колебания струны. Изучая уравнение колебаний струны, Даламбер в 1747 году показал, что общее решение имеет вид

$$u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at).$$

В 1748 году Эйлер выразил правую часть последнего равенства через начальное отклонение струны и через её начальную скорость, получив формулу

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)\,dz,$$

которую мы теперь называем формулой Даламбера. Эйлер отметил, что по смыслу задачи начальные данные $\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$ могут быть заданы в виде двух произвольных кривых.

Даламбер в 1750 году поспешил выступить против этого расширенного толкования его идеи, так как он подразумевал, что $u_0(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at)$ непременно должно быть выражено через x и t аналитически.

В 1753 году Даниил Бернулли из совсем других соображений пришел к выводу, что самыми общими решениями уравнения колебаний струны должны быть решения вида

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

т.е. линейные комбинации стоячих волн. Эйлер с этим не согласился. Он сомневался в возможности представления произвольной функции тригонометрическим рядом.

В 1759 году Лагранж, изучая колебания уже не струны, а аппроксимирующей её нити с нанизанными бусинками, и затем совершая предельный переход, подтвердил результаты Эйлера, с одной стороны, и результаты, близкие к результатам Бернулли, с другой. Однако большое количество предельных переходов, которые в то время не могли быть проведены хоть с какой-нибудь строгостью, дало основание Даламберу не согласиться с трактовкой вопроса Лагранжем.

Только в 1807 году Фурье сформулировал теорему о том, что совершенно произвольная функция может быть представлена тригонометрическим рядом. Как это ни странно, с самыми решительными возражениями выступил против этого Лагранж, хотя его формулы почти совпадают с формулами для коэффициентов тригонометрического ряда Фурье.

Доказательство теоремы Фурье было дано в 1829 году Дирихле, который наложил на представляемую функцию довольно жесткие условия, носящие его имя.

В 1853 году Риман, изучая условия, при которых функция представляется тригонометрическим рядом, пришел к своему определению интеграла.

АЗ 3-4 и задания для самостоятельной работы

1. 1. Струна $0 \le x \le l$ с жестко закреплёнными концами до момента $t=0$ находилась в состоянии равновесия под действием поперечной силы $F_o = \mathrm{const}$, приложенной к точке x_o струны перпендикулярно к невозмущённому положению струны. В начальный момент времени $t=0$ действие силы F мгновенно прекращается. Найти колебания струны при $t>0$.

Решение. Находим начальное положение струны. Для этого достаточно определить величину h. Из условия равновесия (в проекциях на вертикальную ось) имеем $T\sin\alpha + T\cos\alpha = F_o$. В силу малости отклонений $\sin\alpha \approx tg\alpha = \frac{h}{x_0}$, $\sin\beta \approx tg\beta = \frac{h}{l-x_0}$. Таким образом,

$$h = \frac{F_0 x_0 \left(l - x_0\right)}{lT} \text{ и}$$

$$u(x,t) = -\frac{2hl^2}{\pi^2 x_0 \left(l-x_0\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi x_0}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi a t}{l}.$$

2. 1. Концы струны закреплены жестко, а начальное отклонение имеет форму квадратичной параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти колебания струны, если начальные скорости равны нулю.

Решение. Применяем метод Фурье.

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^3} \sin\frac{\left(2n+1\right)\pi x}{l} \cos\frac{\left(2n+1\right)\pi a t}{l}.$$

3. 2.Струна с жестко закрепленными концами возбуждается ударом жесткого плоского молоточка, сообщающего ей следующее начальное распределение скоростей

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, \ 0 \le x \le x_0 - \delta, \\ v_0, \ x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta, \\ 0, \ x_0 + \delta \le x \le l. \end{cases}$$

Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю. Вычислить энергию отдельных гармоник.

Решение. Применяем метод Фурье.

$$u(x,t)=\frac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi at}{l}\right).$$

Энергия n-ой гармоники равна

$$E_n=\frac{4Mv_0^2}{\pi^2 n^2}\sin^2\frac{n\pi x_0}{l}\sin^2\frac{n\pi\delta}{l},\quad M=\rho l.$$

4. 2. Струна с жестко закрепленными концами возбуждается ударом острого молоточка, сообщающего ей импульс I в точке x_0. Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю. Вычислить энергию отдельных гармоник.

5. 2. Струна с жестко закрепленными концами возбуждается ударом жесткого выпуклого молоточка, сообщающего ей следующее распределение скоростей

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le x_0-\delta,\\ v_0\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{x-x_0}{\delta}\right), & x_0-\delta\le x\le x_0+\delta,\\ 0, & x_0+\delta\le x\le l.\end{cases}$$

Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю. Вычислить энергию отдельных гармоник.

Решение. Применяем метод Фурье.

$$u(x,t)=\frac{8v_0\delta}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{n\pi x_0}{l}}{\left[1-\frac{(2\delta n)^2}{l^2}\right]}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}.$$

Энергия $n-$ ой гармоники равна

$$E_n=\frac{16v_0^2\delta^2\rho}{l\pi^2}\cdot\frac{1}{\left[1-\frac{(2\delta n)^2}{l^2}\right]}\cos^2\frac{n\pi\delta}{l}\sin^2\frac{n\pi\delta}{l}.$$

3.2. Вынужденные колебания струны, закреплённой на концах. Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны, закреплённой на концах, под действием внешней силы $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. Эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\ t) \left(f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho} \right) \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

и начальных условиях

$$u(x,\ 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t} = \varphi_1(x).$$

Будем искать решение этой задачи в виде суммы

$$u = v + w,$$

где v есть решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\ t), \tag{2}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v(0,t) = v(l,t) = 0.$$

и начальным условиям $v(x,0) = 0$, $\dfrac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0$, а w есть решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3}$$

удовлетворяющее граничным условиям $w(0, t) = 0$, $w(l, t) = 0$ и начальным условиям $w(x,\ 0) = \varphi_0(x)$, $\dfrac{\partial w(x,\ 0)}{\partial t} = \varphi_1(x)$. Решение $v(x, t)$ представляет вынужденные колебания струны, т.е. такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы, причем начальные отклонения отсутствуют. Решение $w(x, t)$ представляет собой свободные колебания струны, т.е. такие колебания, которые происходят без действия внешней силы, а лишь вследствие начального возмущения. Задача о свободных колебаниях струны была решена, например, методом Фурье. В данный момент рассмотрим задачу нахождения вынужденных колебаний. Будем искать решение $v(x, t)$ в виде ряда

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (4)$$

так что граничные условия удовлетворяются сами собою. Подставляя данный ряд в неоднородное уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k^{''}(t)+\omega_k^2T(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{l} = f(x,t). \qquad (5)$$

где $\omega_k=\frac{k\pi a}{l}$.

Разложим функцию $f(x,t)$ в промежутке $(0,l)$ по синусам

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (6)$$

где $f_k(t)\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$ Сравнивая разложения для одной и той же функции $f(x,t)$, мы получим дифференциальные уравнения

$$T_k^{''}(t)+\omega_k^2T_k(t)=f_k(t)\quad (k=1,2,...), \qquad (7)$$

из которых находятся функции $T_k(t)$.

Чтобы решение v, определяемое рядом (4), удовлетворяло и нулевым начальным условиям, достаточно положить

$$T_k(0)=0,\quad T_k^{'}(0)=0\quad (k=1,2,...). \qquad (8)$$

Решение уравнения (7) при начальных условиях (8) имеет вид

$$T_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\int_0^t f_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)d\tau$$

или, подставляя вместо $f_k(\tau)$ его выражение через интеграл, получаем

$$T_k(t)=\frac{2}{l\omega_k}\int_0^t sun\omega_k(t-\tau)d\tau\int_0^l f(x,\tau)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Из вышеизложенного следует, что решение данной задачи выражается в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

3.3. Общая схема метода Фурье. Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)u, \tag{1}$$

где $\rho(x)$, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ – непрерывные функции при $0\le x\le l$, причем

$$p(x)\ge p_0>0,\ \rho(x)\ge \rho_0>0,\ q(x)\ge 0.$$

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} &\alpha u(0,t)+\beta\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\\ &\gamma u(l,t)+\delta\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, \end{aligned} \tag{2}$$

где постоянные $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ таковы, что $\alpha^2+\beta^2\ne 0$, $\gamma^2+\delta^2\ne 0$. Начальные условия имеют вид $u(x,0)=\varphi_0(x)$, $u_t(x,0)=\varphi_1(x)$.

Будем искать нетривиальные решения уравнения (1) в виде произведения

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{3}$$

удовлетворяющие условиям (2). Подставляя выражение (3) в уравнение (1), получим

$$T(t)\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right]-q(x)X(x)T(t)=\rho(x)X(x)T''(t) \tag{4}$$

или

$$\frac{\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right]-q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{5}$$

Левая часть последнего равенства зависит только от x а правая часть – только от t, и равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений будет постоянной. Обозначим эту постоянную через λ. Тогда из равенства (5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t)+\lambda T(t)=0,\quad \frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]X(x)=0. \tag{6}$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2), необходимо, чтобы функция $X(x)$ удовлетворяла граничным условиям

$$\alpha X(0)+\beta X'(0)=0, \quad \gamma X(l)+\delta X'(l)=0. \tag{7}$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче о собственных значениях; найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (6), удовлетворяющие условиям (7). Эта задача не при всяком значении λ имеет отличное от тождественного нуля решение. Те значения параметра λ, при которых задача (6)-(7) имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями, а сами эти решения называются собственными функциями, соответствующими данному собственному значению.

В силу однородности уравнений (6) и граничных условий собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Заметим, что всякому собственному значению может соответствовать только одна линейно независимая собственная функция. Действительно, предположим, что при некотором значении λ существуют два линейно независимых решения второго из уравнений (6), удовлетворяющих граничным условиям (7). Тогда оказалось бы, что и общее решение второго из уравнений (6) удовлетворяет этим условиям. Но этого быть не может, т.к. всегда можно найти решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]X(x)=0,$$

при таких начальных значениях $X(0)$, $X'(0)$, для которых граничные условия (7) не выполнены.

Можно доказать, что для данной задачи существует бесчисленное множество действительных значений $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$. Каждому собственному значению λ_k соответствует собственная функция $X_k(x)$, определяемая с точностью до постоянного множителя. Выберем этот множитель так, чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx=1. \tag{8}$$

Собственные функции, удовлетворяющие условию (8), будем называть нормированными. Докажем, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны с весом $\rho(x)$ на отрезке $[0,l]$, т.е. удовлетворяют равенству

$$\int_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)dx = 0 \quad (n\neq m). \tag{9}$$

Действительно, пусть при $\lambda_m \neq \lambda_m$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_m^{'}(x)\right] - q(x)X_m(x) + \lambda_m \rho(x)X_m(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_n^{'}(x)\right] - q(x)X_n(x) + \lambda_n \rho(x)X_n(x) = 0.$$

Умножая первое из этих равенств на $X_n(x)$ второе — на $X_m(x)$ вычитая и интегрируя по промежутку $[0, l]$, получаем

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l \rho(x)X_m(x)X_n(x)dx =$$

$$= \int_0^l \left\{X_n(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X_m{}'(x)\right] - X_m(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X_n^{'}(x)\right]\right\}dx.$$

Проинтегрируем первое слагаемое по частям:

$$\int_0^l \left\{X_n(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X_m{}'(x)\right]\right\}dx = p(x)X_n(x)X_m^{'}(x)\Big|_0^l -$$

$$= p(l)X_n(l)X_m^{'}(l) - p(0)X_n(0)X_m^{'}(0) - \int_0^l p(x)X_n{}'(x)X_m{}'(x)dx. \qquad (10)$$

Точно так же

$$\int_0^l \left\{X_m(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X_n{}'(x)\right]\right\}dx = p(x)X_m(x)X_n^{'}(x)\Big|_0^l -$$

$$- \int_0^l p(x)X_m^{'}(x)X_n^{'}(x)dx. \qquad (11)$$

Вычитая из правой части равенства (3) правую часть равенства (4), получаем

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l \rho(x)X_m(x)X_n(x)dx = p(l)\left[X_n(l)X_m^{'}(l) - X_m(l)X_n^{'}(l)\right] -$$

$$- p(0)\left[y_n(0)y_m^{'}(0) - y_m(0)y_n^{'}(0)\right] =$$

$$= p(b)\left[y_n(b)\left(-\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)y_m(b) - y_m(b)\left(-\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)y_n(b)\right] -$$

$$- p(a)\left[y_n(a)\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)y_m(a) - y_m(a)\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)y_n(a)\right] = 0,$$

т.е.

$$\left(\lambda_n-\lambda_m\right)\int_a^b r(x)\,y_n(x)\,y_m(x)\,dx = 0$$

и, таким образом,

$$\int_a^b r(x)\,y_n(x)\,y_m(x)\,dx = 0. \qquad (5)$$

АЗ 5-7 и задания для самостоятельной работы

5. 1. Найти продольные колебания стержня, один конец которого при $x=0$ закреплен жестко, а другой $(x=l)$ свободен, при начальных условиях

$$u(x,0)=kx,\ u(x,0)=0\ \ (0\le x\le l)x.$$

Решение. Упругий прямолинейный стержень выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент времени $t=0$ сообщены малые продольные смещения и скорости. Предполагая, что поперечные сечения всё время остаются плоскими рассматриваются краевые задачи для определения смещений поперечных сечений при $t>0$ в следующих случаях: 1) концы стержня закреплены жестко; 2) концы стержня двигаются в продольном направлении по заданному закону; 3) концы стержня свободны; для определения функции $u(x,t)$ получаем краевые задачи:

1) $u_{tt}=a^2u_{xx};\ u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=F(x)$, где $a^2=\dfrac{E}{\rho_0}$, E – модуль упругости, а ρ_0 – плотность массы стержня в невозмущённом состоянии. Модулями упругости называются величины, характеризующие упругие свойства материалов при малых деформациях. При растяжении силой F цилиндрического образца длиной l с площадью поперечного сечения S имеет место линейная зависимость между нормальным напряжением в поперечном сечении $\sigma=\dfrac{F}{S}$ и относительном удлинении $\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l}$, т.е. $\sigma=E\varepsilon$. Константа материала E называется модулем Юнга или модулем продольной упругости. При растяжении относительное уменьшение поперечных размеров образца $-\varepsilon'$ пропорционально ε. Величина $\gamma=-\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ называется коэффициентом Пуассона. 2) Если концы стержня двигаются по заданному закону, то $u(0,t)=\psi(t)$, $u(l,t)=\varphi(t)$. 3) Если концы стержня свободны, то $u_x(0,t)=0$, $u_x(l,t)=0$.

Уравнение для $T(t)$: $T''_k(t)+\lambda_k a^2T_k(t)=0$. Его общее решение

$$T_k(t) = a_k\cos a\sqrt{\lambda_k}\,t + b_k\sin a\sqrt{\lambda_k}\,t.$$

Решение $u(x,t)$ будет иметь вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, at + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, at\right)\sin\sqrt{\lambda_k}\, x. \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2 \frac{1}{l^2}.$$

При $t = 0$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, x\right) = 2\gamma x.$$

Далее a_k находятся из уравнения

$$a_k \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_k}\, x\, dx = 2\gamma \int_0^l x \sin\sqrt{\lambda_k}\, x\, dx.$$

***Ответ*:**

$$u(x,t) = \frac{16\gamma l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

6. 2. Стержень с жестко закреплённым концом $x = 0$ находится в состоянии равновесия под действием продольной силы F_0 приложенной к концу $x = l$. В момент $t = 0$ действие силы прекращается. Найти колебания стержня, если начальные скорости равны нулю.

Решение. Ответ получается из ответа предыдущей задачи при $2\gamma = \dfrac{F_0}{ES}$, где E – модуль упругости, S –площадь поперечного сечения стержня.

7. 2. Найти продольные колебания упругого стержня со свободными концами, если начальные скорости и начальные смещения в продольном направлении произвольны.

Решение. Краевая задача формулируется следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \; u(x,0) = \varphi_0(x), \; u_t(x,0) = \varphi_1(x), \; u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0.$$

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l \left[\varphi_0(s) + t\varphi_1(s)\right] ds + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l};$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad b_k = \frac{2}{a\pi k}\int_0^l \varphi_1(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\, dx.$$

8. 2. Найти продольные колебания упругого стержня со свободными концами, получившего в начальный момент времени продольный импульс I в один из его концов. Решение задачи может быть получено из решения предыдущей задачи, если положить

$$\varphi_0(x)\equiv 0,\quad \varphi_1(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le l-\delta,\\ -\dfrac{l}{\delta\rho},\ l-\delta\le x\le l.\end{cases}$$

$$u(x,t)=-\frac{I}{\rho l}t-\frac{2l}{\pi a\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi at}{l}.$$

9. 1.Решить предыдущую задачу, когда конец, которому не сообщается импульс, закреплён жестко.

Ответ: $u(x,t)=-\dfrac{4l}{\pi a\rho}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\dfrac{(2n+1)\pi at}{2l}.$

10. 3.Один конец стержня закреплён упруго, а другой свободен. Найти продольные колебания стержня при произвольных начальных условиях.

Решение. Краевая задача имеет вид:

$$u_{tt}=a^2u_{xx};\ u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)+hu(l,t),\ u(x,0)=\varphi_0(x),\ u_t(x,0)=\varphi_1(x).$$

Применяя метод Фурье, получим уравнение для $X_k(x)$: $X_k''(x)+\lambda^2X_k(x)=0$, из которого $X_k(x)=c_1\cos\lambda_kx+c_2\sin\lambda_kx$, далее из первого краевого условия

$$X_k'(0)=0,\ X_k'(x)=-c_1\lambda_k\sin\lambda_kx+c_2\lambda_k\cos\lambda_kx,\quad \text{т.е.}\quad c_2=0.$$

Далее $X_k'(l)+hX_k(l)=-c_1\lambda_k\sin\lambda_kl+c_1h\cos\lambda_kl=0,$ т.е. числа λ_k являются корнями уравнения $\lambda tg\lambda l=h.$ Пусть $l=1, h=0.01,$ тогда, применяя Maple, получаем

```
> x[1]:=0.2; for n from 1 to 7 do x[n+1]:= evalf[4](x[n]-
(x[n]*tan(x[n])-0.01)/((tan(x[n]))+x[n]/(cos(x[n]))^2)); end do;

>
```

$x_1 := 0.2$

$x_2 := 0.1257$

$x_3 := 0.1025$

$x_4 := 0.09984$

$x_5 := 0.09984$

$x_6 := 0.09984$

$x_7 := 0.09984$

$x_8 := 0.09984$

Таким образом, λ_k являются положительными корнями уравнения $\lambda \mathrm{tg} \lambda l = h$. Функции $X_k(x) = \cos\lambda_k x$ являются собственными функциями данной задачи. Найдём квадрат нормы n-ой собственной функции

$$\| X_n \|^2 = \int_0^l X_n^2(x)dx = \int_0^l \cos^2\lambda_n x dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1+\cos 2\lambda_n x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2\lambda_n}\sin 2\lambda_n x \right)\Bigg|_0^l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{2\lambda_n}\sin 2\lambda_n l \right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{2\lambda_n}\cdot\frac{2tg\lambda_n l}{1+tg^2\lambda_n l} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{\lambda_n}\cdot\frac{\frac{h}{\lambda_n}}{1+\frac{h^2}{\lambda_n^2}} \right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{h}{\lambda_n^2+h^2} \right).$$

И тогда

$$a_n = \frac{1}{\| X_n \|^2}\int_0^l \varphi_0(s)\cos\lambda_n s\,ds, \quad b_n = \frac{1}{\| X_n \|^2 a\lambda_n}\int_0^l \varphi_1(s)\cos\lambda_n s\,ds,$$

11. 1. Один конец стержня при $x = l$ закреплён упруго, а к другому концу при $x=0$ приложена продольная сила F_o под действием которой стержень находится в равновесии. Найти колебания стержня после того, как в начальный момент времени сила F_o мгновенно исчезает, если начальные скорости равны нулю.

Решение. Постановка краевой задачи осуществляется следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,(0<x<l,\, 0<t<\infty),\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t)+hu(l,\ t)=0, u(x,0) = \frac{F_0}{ES}x,$$
$$u_t(x,0) = 0\,(0<x<l).$$

Решение получается из решения предыдущей задачи при $\varphi_0(x) = \frac{F_o}{ES}x$, $\varphi_1(x) = 0$. Далее находим

$$\int_0^l x\cos\lambda_n x\,dx = l\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n l-\frac{1}{\lambda_n}\left(-\frac{1}{\lambda_n}\cos\lambda_n l+\frac{1}{\lambda_n}\right)=$$

$$=\frac{l}{\lambda_n}\sqrt{\frac{tg^2\lambda_n l}{1+tg^2\lambda_n l}}+\frac{1}{\lambda_n{}^2}\left(\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\lambda_n l}}-1\right)=\frac{lh}{\lambda_n{}^2\sqrt{1+\frac{h^2}{\lambda_n{}^2}}}+\frac{1}{\lambda_n{}^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{\lambda_n{}^2}}}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n{}^2}\cdot\frac{hl-\sqrt{1+\frac{h^2}{\lambda_n{}^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{\lambda_n^2}}}.$$

Далее

$$\int_0^l\cos^2\lambda_n x\,dx=\int_0^l\frac{1+\cos 2\lambda_n x}{2}dx=\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\lambda_n}\sin 2\lambda_n l=\frac{l}{2}+\frac{2tg\lambda_n l}{4\lambda_n\left(1+tg^2\lambda_n l\right)}=$$

$$=\frac{l}{2}+\frac{1}{2\lambda_n}\cdot\frac{\frac{h}{\lambda_n}}{1+\frac{h^2}{\lambda_n^2}}=\frac{l}{2}\left(1+\frac{h}{l\left(\lambda_n^2+h^2\right)}\right).$$

Таким образом,

$$u(x,t)=\frac{2F_0}{ElS}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+hl-\sqrt{1+\frac{h^2}{\lambda_n^2}}}{\lambda_n^2\sqrt{1+\frac{h^2}{\lambda_n^2}}\left(1+\frac{h}{l\left(\lambda_n^2+h^2\right)}\right)}\cos\lambda_n x\cos\lambda_n at.$$

12. 2. Один конец стержня $(x=l)$ закреплён упруго, а другой $(x=0)$ получает в начальный момент времени продольный импульс I. Найти продольные колебания стержня, если начальное отклонение стержня равно нулю.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{2I}{al\rho}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\lambda_n x\sin a\lambda_n t}{\lambda_n\left[1+hl\left(\frac{\cos\lambda_n l}{\lambda_n l}\right)^2\right]}.$

ГЛАВА 4
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии.

4.1. Линейная задача о распространении тепла. Рассмотрим однородный стержень длины l, теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Если концы стержня поддерживать при постоянных температурах u_1 и u_2, то вдоль стержня устанавливается линейное распределение температуры $u(x) = u_1 + (u_1 - u_2)\frac{l}{x}$.

При этом тепло будет перетекать от более нагретого конца стержня к менее нагретому. Количество тепла, протекающее через сечение стержня площади S за единицу времени, выражается **экспериментальной** формулой

$$Q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} S,$$

где λ – коэффициент теплопроводности, зависящий от материала стержня. Величина теплового потока считается положительной, если тепло течет в сторону возрастания x.

Рассмотрим процесс распределения температуры в стержне. Этот процесс может быть описан функцией $u(x,t)$, представляющей температуру в сечении x в момент времени t. Найдём уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x,t)$. Для этого сформулируем физические закономерности, определяющие процессы, связанные с распространением тепла.

Количество тепла, протекающее через сечение x за промежуток времени $(t, t+dt)$, равно $dQ = -\lambda\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x} Sdt$, где $-\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ – плотность теплового потока, равная количеству тепла, протекающего в единицу времени через единицу площади. Этому закону можно придать интегральную форму

$$Q = -S\int_{t_1}^{t_2} \lambda \frac{\partial u}{\partial x}\left(x, t\right) dt,$$

где Q – количество тепла, протекающее за промежуток времени (t_1, t_2) через сечение x. Если стержень неоднороден, то λ является функцией x.

Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu, равно

$$Q = cm\Delta u = c\rho V \Delta u,$$

где c – удельная теплоёмкость, m – масса тела, ρ – его плотность, V – объем. Если изменение температуры имеет различную величину на разных участках стержня или если стержень неоднороден, то

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} c\rho S \Delta u(x)\,dx.$$

Внутри стержня может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т. д.). Выделение тепла может быть характеризовано плотностью тепловых источников $f(x,t)$ в точке x в момент t. В результате действия этих источников на участке стержня $(x, x+dx)$ за промежуток времени $(t, t+dt)$ выделится количество тепла

$$Q = S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)\,dxdt,$$

где Q – количество тепла, выделяющегося на участке стержня (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2). Уравнение теплопроводности получается при подсчете баланса тепла на некотором интервале (x_1, x_2) за некоторый промежуток времени (t_1, t_2). Применяя закон сохранения энергии и приведенные формулы, получаем равенство

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\lambda\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau) - \lambda\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,\tau)\right]d\tau + \int_{x_1}^{x_1}\int_{t_1}^{t_2} f(s,\tau)\,dsd\tau =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} c\rho\left[u(s,t_2) - u(s,t_1)\right]ds,$$

Пользуясь теоремой о среднем значении интеграла, получаем равенство

$$\left[\lambda\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,t_3) - \lambda\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t_3)\right]\Delta t + f(x_4,t_4)\Delta x\Delta t = c\rho\left[u(x_3,t_2) - u(x_3,t_1)\right]\Delta x,$$

которое при помощи формулы Лагранжа можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\frac{\partial u}{\partial x}(x_5,t_3)\right]\Delta t\Delta x + f(x_4,t_4)\Delta t\Delta x = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x_3,t_5)\Delta t\Delta x,$$

где t_j $(j = 3, 4, 5)$, x_j $(j = 3, 4, 5)$. – промежуточные точки интервалов (x_1, x_2), (t_1, t_2). Отсюда после сокращения на произведение $\Delta x\Delta t$, получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\frac{\partial u}{\partial x}(x_5,t_3)\right] + f(x_4,t_4) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x_3,t_5),$$

Все эти рассуждения относятся к произвольным промежуткам (x_1, x_2), (t_1, t_2). Переходя к пределу при $x_1, x_2 \to x$, $t_1, t_2 \to t$, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]+f(x,t)=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t),$$

называемое уравнением теплопроводности. Если стержень однороден, то λ, c, ρ можно считать постоянными, и уравнение теплопроводности обычно записывают в виде

$$u_t = a^2u_{xx} + \frac{f(x,t)}{c\rho},$$

где a^2 – постоянная, называемая коэффициентом теплопроводности. Если источники тепла отсутствуют, т.е. $f(x,t)=0$, то уравнение теплопроводности принимает простой вид $u_t = a^2u_{xx}$.

Плотность тепловых источников может зависеть от температуры. В случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося закону Ньютона, количество тепла, теряемого стержнем, рассчитанное на единицу длины и времени, равно $F_o=h(u-u_o)$, где u_o – температура окружающей среды, h – коэффициент теплообмена. Таким образом, плотность тепловых источников в точке x в момент t равна $F=F_1(x,t)-h(u-u_o)$, где $F_1(x,t)$ – плотность других источников тепла.

Если стержень однороден, то уравнение теплопроводности с боковым теплообменом имеет следующий вид

$$u_t = a^2u_{xx} - \alpha u + f(x,t),$$

где $\alpha = h/c\rho$, $f(x,t)=\alpha u_o + F_1(x,t)/c\rho$.

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия. Граничные условия могут быть различны в зависимости от от температурного режима на границах. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На конце стержня $x=0$ задана температура $u(0,t)=\mu(t)$.
2. На конце l задано значение производной $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=\gamma(t)$. Это условие получается, если задана величина теплового потока, $Q(l,t)$, протекающего через торцевое сечение стержня
$$Q(l,t)=-\lambda\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{Q(l,t)}{\lambda}=\omega(t).$$
3. На конце $x=l$ задано линейное соотношение между производной и функцией $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=-\lambda[u(l,t)-\theta(t)]$. Это граничное условие соответствует теплообмену с окружающей средой по закону Ньютона.

4.1.1. Первая краевая задача. Постановка задачи. Пусть Ω – конечная область пространства (x, y, z). Обозначим через Q в пространстве (x, y, z, t) цилиндр, основание которого есть область Ω и образующие которого параллельны оси Ot. Пусть Q_T – часть этого цилиндра, ограниченная снизу плоскостью $t = 0$ и сверху плоскостью $t = T$ $(T > 0)$. Часть границы цилиндра Q_T, состоящую из его нижнего основания $(t = 0)$ и боковой поверхности, обозначим через Γ.

Рассмотрим следующую задачу: найти в цилиндре Q_T решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям: $u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)$ $((x, y, z) \in \overline{\Omega})$, $u|_S = \psi(P, t)$, $(t \in [0, T])$, где S – граница области Ω, P – точка поверхности S. Функции φ и ψ непрерывны, причем значения ψ при $t = 0$ совпадают со значениями φ на границе S. Задача нахождения решения уравнения (1) при заданных условиях называется первой краевой задачей для уравнения теплопроводности.

4.1.2. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Для прямоугольника Q $(0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T)$ первую краевую задачу можно сформулировать так: найти непрерывную в прямоугольнике Q функцию $u(x, t)$ удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{2}$$

начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$ $(0 \le x \le l)$ и краевым условиям $u(0, t) = \mu_1(t)$, $u(l, t) = \mu_2(t)$ $(0 \le t \le T)$. При этом предполагается, что функции $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\mu_j(t)\,(j = 1, 2)$, непрерывны и $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(0)$,

Будем искать частные решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

методом Фурье, т.е. в виде $u(x, t) = T(t)X(x)$. Подставляя функцию $T(t)X(x)$ в уравнение (3), получаем два уравнения

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{4}$$

Чтобы получить нетривиальные решения вида $u(x, t) = T(t)X(x)$, удовлетворяющие граничным условиям, необходимо найти нетривиальные решения второго из уравнений (4), удовлетворяющие условиям $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Таким образом, для определения функций $X(x)$ мы приходим к задаче о собственных значениях:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0,$$

исследованной в задаче о колебаниях ограниченной однородной струны. Там было показано, что только для значений параметра λ, равных $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, существуют нетривиальные решения второго из уравнений (4), имеющие вид $X_n = \sin\frac{n\pi x}{l}$. Значениям параметра $\lambda = \lambda_n$ соответствуют решения первого из уравнений (4) $T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$, где a_n – произвольные постоянные.

Итак, все функции

$$u_n(x,t) = T_n(t) X_n(x) = a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (1) и нулевым граничным условиям. Составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Требуя выполнения начального условия, получим

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Написанный ряд представляет собой разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$. Коэффициенты a_n определяются равенством $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx.$

4.1.3. Решение неоднородного уравнения. Далее рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

с нулевыми граничными условиями и функцией $\varphi(x) \equiv 0$. Будем искать решение данной задачи в виде ряда Фурье $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$. Разлагая функцию $f(x, t)$, получим равенство

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (5)$$

где $f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$ Подставляя ряд (5) в неоднородное уравнение, получим равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=0.$$

Отсюда для нахождения функций $T_n(t)$ получаем уравнения

$$T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t)\ (n=1,2,...). \tag{6}$$

Пользуясь нулевым начальным условием для функции $u(x,t)$ получим равенство

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{\pi nx}{l}=0,$$

из которого получаем начальное значение для функций $T_n(t)$: $T_n(0)=0$ $(n=1,2\ldots)$. Решение уравнения (6) с нулевым начальным условием имеет вид

$$T_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в ряд для функции $u(x,t)$ получим решение данной задачи в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{8}$$

Уравнения и граничные условия рассматриваемых краевых задач теории теплопроводности являются следствием: а) закона сохранения энергии; б) закона внутренней теплопроводности в твёрдых телах (закона Фурье); в) закона конвективного теплообмена между поверхностью твёрдого тела и окружающей жидкой или газообразной средой (закона Ньютона).

Закон Фурье в одномерном случае выражается формулой

$$q=-\sigma\lambda\frac{\partial u}{\partial x},$$

где q – количество тепла, протекающее в единицу времени в направлении оси Ox через площадку σ перпендикулярную оси Ox, $u(x,t)$ –температура в рассматриваемом месте тела, λ – коэффициент теплопроводности.

Закон Ньютона выражается формулой

$$q=\sigma\alpha(u-u_0),$$

где q – количество тепла, протекающее в единицу времени через площадку σ поверхности тела в окружающую среду, u – температура поверхности тела, u_0 – температура окружающей среды, α – коэффициент теплообмена.

1. 1. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией аргумента x рассмотреть случаи, когда

а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре;

б) на концы стержня подаётся извне заданный тепловой поток;

в) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

Решение. а) $u_t = a^2 u_{xx}$; $u(x,0) = f(x)$; $u(0,t) = \varphi_1(t)$, $u(l,t) = \varphi_2(t)$;

б) $-\lambda \sigma u_x(0,t) = q_1(t)$, $\lambda \sigma u_x(l,t) = q_2(t)$;

в) $u_x(0,t) = h\left[u(0,t) - \varphi_1(t)\right]$; $u_x(l,t) = -h\left[u(0,t) - \varphi_2(t)\right]$;

где a^2 – коэффициент температуропроводности, $a^2 = \lambda / c\rho$; λ – коэффициент теплопроводности материала стержня; c –удельная теплоёмкость материала стержня; ρ –плотность массы стержня; $f(x)$ – начальное значение температуры; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – в первом случае температуры концов стержня, а в случае в) температуры окружающей среды; $q_j(t)$ $(j = 1, 2)$ – тепловые потоки, поступающие в стержень через его концы (т.е. количества тепла, поступающие в единицу времени).

Если боковая поверхность однородного изотропного цилиндрического стержня теплоизолирована, а изотермические поверхности в начальный момент времени совпадают с его поперечными сечениями, причем торцы остаются всё время изотермическими поверхностями, то изотермические поверхности в стержне совпадают с поперечными сечениями, т.е. температура в стержне будет зависеть лишь от одной координаты x.

2. 2. На боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой является заданной функцией времени. Сформулировать краевую задачу об определении температуры в стержне при начальных и граничных условиях предыдущей задачи.

Решение. Уравнение теплопроводности в данном случае имеет вид

$$u_t = \frac{\lambda}{c\rho} u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho\sigma}(u - u_0),$$

где p – периметр поперечного сечения стержня, α – коэффициент теплообмена между поверхностью стержня и окружающей средой, температура которой равна u_0; остальные величины имеют те же значения, что и в предыдущей задаче.

3. 2. Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна произвольной функции $\varphi(x)$. Рассмотреть, в частности, случай, когда $\varphi(x) = \text{const} = u_0$. Дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы ряда в точке $x = \frac{l}{2}$, его частичной суммой, и установить, с какого момента времени отношение суммы всех его членов, начиная со второго, к первому члену, будет заведомо меньше наперёд заданного $\varepsilon > 0$.

Решение. Если $\varphi(x) = u_0$, то

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\left(\frac{(2k+1)a\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

В точке $x = \frac{l}{2}$ имеем

$$u\left(\frac{l}{2},t\right) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}e^{-\left(\frac{(2k+1)a\pi}{l}\right)^2 t}. \tag{9}$$

Так как полученный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница о знакопеременных рядах, то остаток ряда не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов, т.е.

$$\left|R\left(\frac{l}{2},t\right)\right| = \left|\frac{4u_0}{\pi(2n+3)}e^{-\frac{(2n+3)^2\pi^2a^2}{l^2}}\right| = \frac{4u_0}{\pi(2n+3)}e^{-\frac{(2n+3)^2\pi^2a^2}{l^2}}.$$

Далее оценим отношение всех членов ряда (9), начиная со второго, к первому члену этого ряда.

$$\frac{\left|R_0\left(\frac{l}{2},t\right)\right|}{\frac{4u_0}{\pi}e^{-\frac{\pi^2a^2t}{l^2}}} \le \varepsilon \quad \text{при} \quad t \ge -\frac{l^2}{8\pi^2a^2}\ln 3\varepsilon.$$

4. 3. Начальная температура стержня $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью равна $u_0 = \text{const}$; а на концах его поддерживается постоянная температура $u(0,t) = U_1$; $u(l,t) = U_2$; $(0 < t < \infty)$. Найти также стационарную температуру , т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

Решением однородного уравнения при данных граничных условиях и данном начальном условии является функция

$$u(x,t) = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(U_0 - U_1)\left[1-(-1)^n\right] + (-1)^{n+1}(U_1 - U_2)\right\}\times$$

$$\times e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

Решение однородного уравнения теплопроводности можно искать в виде $u(x,t) = v(x,t) + u(x)$, где функция $u(x)$ определяется как стационарное решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее граничным условиям, т.е.

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0,\ u(0) = U_1,\ u(l) = U_2,\ \text{ò .å.}\, u(x) = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l}.$$

Таким образом, $u(x)$ является пределом, к которому стремится температура стержня при $t \to \infty$.

5. 3. Начальная температура стержня $0 \le x \le l$ является произвольной функцией $\varphi(x)$. Температуры концов постоянны: $u(0,t) = U_1$, $u(l,t) = U_2$. На боковой поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой равна $u_0 = \text{const}$. Найти температуру стержня. Рассмотреть, в частности, случай, когда $U_1 = U_2 = 0$, $\varphi(x) \equiv 0$.

Решение. $u_t = a^2u_{xx} - h(u - u_0),\ a^2 = \dfrac{\lambda}{c\rho},\ h = \dfrac{\alpha p}{\rho\sigma}; u(0,t) = U_1, u(l,t) = U_2;$

$u(x,0) = \varphi(x)$. Функция $u(x,t)$ имеет вид

$$u(x,t) = u_0 + w(x) + v(x,t),$$

где

$$w(x) = \frac{(U_1 - u_0)\,sh\dfrac{\sqrt{h}}{a}(l - x) + (U_2 - u_0)\,sh\dfrac{\sqrt{h}}{a}x}{sh\dfrac{\sqrt{h}}{a}},$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^3a^2}{l^2} + h\right)t}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\left[\varphi(x) - w(x) - u_0\right]\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., Наука, 1977.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М., Наука, 1984.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1962.
4. Русак В.Н. Математическая физика. – Минск: Изд-во «Дизайн-ПРО», 1998.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1981.
6. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980.

Дополнительная литература

1. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
3. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы специальных функций. – М.: Наука, 1974.
4. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1965.
5. Свешников А.Т., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1967.
6. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1968.