Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

**М.Н. Подоксёнов, Ж.В. Иванова,
Т.Л. Сурин**

МАТЕМАТИКА

Сборник индивидуальных заданий по разделам «Аналитическая геометрия» и «Высшая алгебра»

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2017*

УДК 512(076.5)+514.7(076.5)
ББК 22.151.54я73+22.14я73
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 5 от 19.06.2017 г.

Авторы: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов;** доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин**

Подоксёнов, М.Н.

П44 Математика: Сборник индивидуальных заданий по разделам «Аналитическая геометрия» и «Высшая алгебра» / М.Н. Подоксёнов, Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 50 с.

Данное учебное издание подготовлено в соответствии с типовой учебной программой по курсу «Математика» для студентов факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Программное обеспечение информационных технологий». Кратко излагается теоретический материал, приводятся примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

Издание рекомендуется также для студентов других специальностей очного и заочного отделений факультета математики и информационных технологий.

УДК 512(076.5)+514.7(076.5)
ББК 22.151.54я73+22.14я73

Содержание

Введение

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов первого курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Программное обеспечение информационных технологий».

Основное назначение сборника – помочь студентам в освоении курса математики, в частности разделов «Аналитическая геометрия» и «Высшая алгебра». По этой дисциплине существует ряд хороших задачников, список которых приведен в конце издания. Однако из-за слишком большого объема в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал для подготовки к экзамену. Кроме того, имеющиеся сборники задач не дают возможности индивидуализировать процесс обучения, поскольку не содержат достаточного количества однотипных задач.

Учебное издание содержит индивидуальные задания по основным вопросам разделов «Аналитическая геометрия» и «Высшая алгебра». В каждом параграфе приведен теоретический материал, а также разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории.

Излагаемый материал соответствует учебной программе по математике для специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий».

Издание может быть полезно студентам специальностей «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика», изучающим аналитическую геометрию и алгебру.

§ 1. *Матрицы и определители*

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Матрицу принято обозначать большой буквой латинского алфавита, а её элементы – такой же маленькой буквой с двумя индексами, первый из которых обозначает номер строки, а второй – номер столбца, в которых находится данный элемент.

Например,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Это матрица, состоящая из 2 строк и 4 столбцов. Говорим, что она имеет размер 2×4. В ней $a_{11}=1$, $a_{12}=2$, а $a_{21}=5$.

Матрица размера $n\times n$ называется *квадратной* матрицей порядка n. Элементы квадратной матрицы, у которых номера строки и столбца совпадают, образуют *главную диагональ*. Если все элементы, стоящие вне диагонали, равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, называется *единичной* и обозначается буквой $\boldsymbol{E}$. Например, единичная матрица порядка 3 имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если все элементы матрицы, стоящие ниже (выше) главной диагонали равны нулю, то матрица называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*).

Транспонированием матрицы $\boldsymbol{A}$ называется такая перестановка её элементов, при которой каждый элемент a_{ij} меняется местами с элементом a_{ji}. Матрицу, которая получается в результате транспонирования, обозначаем $\boldsymbol{A}^T$. Например, для матрицы (1.1)

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Понятие определителя матрицы вводится только для квадратных матриц.

Определителем квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Обозначение: $|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Рассмотрим матрицу A порядка n. Пусть M_{ij} – определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. Он называется <u>*минором, дополнительным к элементу*</u> a_{ij}.

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется <u>*алгебраическим дополнением к элементу*</u> a_{ij}.

<u>*Определителем матрицы А*</u> называется число равное сумме произведений элементов какой-либо его строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов этой строки (столбца).

Например

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

В этом случае говорят, что определитель разложен по элементам i-той строки.

Результат вычисления не зависит от того, какую из строк (столбцов) матрицы мы выберем.

Пример. Вычислить определитель $\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, разложив определитель по третьему столбцу.

Решение.

Разложение определителя по третьему столбцу определяется формулой:

$$\det \boldsymbol{A} = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33},$$

т.е.

$$|A| = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -8 - 8 + 0 = -16.$$

<u>*Основные свойства определителя*</u> .

1. Если одна строка или столбец определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

2. Если определитель содержит две одинаковые или пропорциональные строки (два одинаковых или пропорциональных столбца), то он равен нулю.

3. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак.

4. Общий множитель элементов одной строки (столбца) выносится за знак определителя.

5. Если к элементам одной строки (столбца) матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), домноженные на некоторое число, то определитель матрицы не изменится.

6. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 9 = -27.$$

Диагональная матрица является частным случаем треугольной. Поэтому её определитель тоже равен произведению диагональных элементов.

§ 2. *Системы линейных уравнений. Правило Крамера*

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные; a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, индекс i показывает номер уравнения, а индекс j – номер неизвестной к которому относится коэффициент, b_j – свободные члены.

Система называется *неоднородной*, если среди свободных членов имеются отличные от нуля. Если все свободные члены равны нулю, то система называется *однородной*. Однородная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Совокупность n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется *решением системы* (2.1), если каждое уравнение системы обращается в тождество после подстановки в него чисел α_i вместо соответствующих неизвестных x_i

Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*. Заметим, что однородные системы всегда имеют нулевое решение, т.е. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Такое решение называется *тривиальным*.

Совместная система, имеющая одно решение называется *определенной*, более одного решения – *неопределенной*.

Две системы называются *равносильными* или *эквивалентными*, если любое решение одной системы является так же решением второй и обратно.

Преобразования системы, при которых получают равносильную ей систему, называют *равносильными*.

Равносильными преобразованиями системы являются следующие преобразования:

1) умножение уравнения системы на число не равное нулю;

2) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на некоторое число;

3) перестановка местами двух уравнений системы.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы* (2.1).

Столбцы $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_3 \end{pmatrix}$ называются *столбцом неизвестных* и *столбцом свободных членов* системы (2.1) соответственно.

Пусть дана система линейных уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных. Для простоты рассуждений, мы ограничимся случаем, когда число уравнений равно 3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.3}$$

Тогда матрица A системы и столбец B свободных членов имеют вид:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta = \det\boldsymbol{A}$, а Δ_i – определитель матрицы, которая получается из $\boldsymbol{A}$ заменой i-го столбца на столбец $\boldsymbol{B}$. Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

***Теорема.* (*Правило Крамера*).** *Если* $\Delta \neq 0$, *то система линейных уравнений* (2.3) *имеет единственное решение. Его можно найти по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Замечание. Теорема справедлива и для систем, имеющих n уравнений и n неизвестных. Обратите внимание, что теорема состоит из двух утверждений. Первое предложение о существовании и единственности решения имеет важное самостоятельное значение.

***Пример.* 1.** Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x + 9y = 3, \\ 3x + 5y = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{-2} = -3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Проверка: $\begin{cases} 5\cdot(-3) + 9\cdot 2 = 3 \text{ – верно}, \\ 3\cdot(-3) + 5\cdot 2 = 1 \text{ – верно}. \end{cases}$

Ответ: (–3, 2).

***Пример.* 2.** Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Ответ: (1, 2, 1).

Задания для самостоятельного решения

Решить систему уравнений с помощью правила Крамера. Выполнить проверку.

1. $\begin{cases} 6x+11y=14, \\ 8x-5y=-1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 11x-6y=14, \\ 5x+8y=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 9x+7y=1, \\ 5x-3y=4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x+7y=9, \\ 9x-5y=-2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x-6y=9, \\ 5x+9y=2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x-3y=-4, \\ 9x+7y=-1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 9x+12y=3, \\ 6x+10y=3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 12x-9y=3, \\ 10x-6y=3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 11x+2y=3, \\ 8x-9y=-2. \end{cases}$ ё

10. $\begin{cases} 6x-11y=-7, \\ 9x-5y=1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 11x+6y=7, \\ 5x+9y=-1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 9x+8y=2, \\ 2x-11y=3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 6x-7y=2, \\ 8x-5y=7. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 7x+6y=-2, \\ 5x+8y=-7. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 11x-2y=5, \\ 8x+7y=-2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x+12y=1, \\ 7x+4y=-5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 12x-5y=1, \\ 4x-7y=-5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x-11y=-5, \\ 7x+8y=-2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 8x+9y=11, \\ 5x-12y=1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 9x-8y=11, \\ 12x+5y=-1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5x-7y=2, \\ 2x+6y=3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 8x+9y=7, \\ 4x-12y=-2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 9x-8y=7, \\ 12x+4y=2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 7x+5y=-2, \\ 6x-2y=3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x+10y=14, \\ 9x-7y=-1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 10x-6y=14, \\ 7x+9y=1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 11x+6y=5, \\ 3x+2y=3. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x+11y=5, \\ 6x+5y=-4. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 11x-4y=5, \\ 5x-6y=-4. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x+3y=2, \\ 5x+9y=8. \end{cases}$

§ 3. *Умножение матриц*

Пусть

$$a=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{k1} \end{pmatrix}.$$

строка и столбец, состоящие из одинакового количества элементов. Определим произведение

$$a \cdot b = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1k}b_{k1}.$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}$ – $m \times n$ и $n \times k$ матрицы соответственно.

<u>*Произведением матрицы A на матрицу B*</u> называется $m \times k$ матрица $C = A \cdot B$, элементы которой находятся по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, k}.$$

Таким образом, элементы c_{ij} матрицы C равны сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B.

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем элементы матрицы $C = AB$:

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = -15;$

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1;$

$c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-1) = -9;$

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 0 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 = -16;$

$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 0;$

$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} = 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-1) = -14;$

$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} = (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 13;$

$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} = (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11;$

$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} = (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 5 \cdot (-1) = -12.$

Следовательно матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ -16 & 0 & -14 \\ 13 & 11 & -12 \end{pmatrix}.$$

Основные свойства операции умножения матриц.

1. Умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$**.**

Например,

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Получается, что $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$, а $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$.

2. Если $\boldsymbol{A}$ – квадратная матрица порядка n, а $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица того же порядка, то $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$.

3. Если $\boldsymbol{O}$ – нулевая матрица (т.е. матрица, все элементы которой нули), то $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$ (если определены соответствующие произведения).

4. Умножение матриц ассоциативно.

Если определены произведения $\boldsymbol{AB}$ и $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$, то определены произведения $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$; при этом, $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

5. Если имеет смысл $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$, то $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$. Если имеет смысл $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$, то $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

6. $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$, где λ – любое действительное число.

7. Если определено произведение $\boldsymbol{AB}$, то определено произведение $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ и выполнено $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

8. Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – квадратные матрицы одного порядка, то $\det\boldsymbol{AB}=\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}$.

Задания для самостоятельного решения

***Задача* 1.** *Даны матрицы* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. *Вычислите произведения* $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, *если эти произведения определены.*

1. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 7 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$; **2.** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6 & -3 & -1\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\\ 0 & 9\end{pmatrix}$;

3. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 1\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 6\\ 0 & 4\end{pmatrix}$; **4.** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 4 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$;

5. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}12 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; **6.** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 3 & -2 & -7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

7. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 8 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; **8.** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ -2 & 3 & -5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -2 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

9. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -2 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

10. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 12\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$;

11. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -6\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 4 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$;

12. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

13. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}11 & 2 & 5\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$;

14. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 9 & 5\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

15. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -1\\ 2 & 6 & -4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

16. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$;

17. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9 & 1 & -4\\ 7 & -5 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -5 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$;

18. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 9\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$;

19. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 8 & 5\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 0\\ -2 & 9\end{pmatrix}$;

20. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & 5\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 6\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$;

21. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

22. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 1 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

23. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -6\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

24. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 7\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

25. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

26. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$;

27. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\\ 8 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-7 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

28. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & -5\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

29. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$;

30. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 9\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$.

§ 4. *Обратная матрица. Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы*

Матрица $\boldsymbol{Y}$ называется <u>*обратной к матрице*</u> $\boldsymbol{A}$, если

$$\boldsymbol{AY} = \boldsymbol{YA} = \boldsymbol{E}$$

($\boldsymbol{E}$ – единичная матрица). Обозначаем $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Матрица, которая имеет обратную к ней матрицу, называется <u>*обратимой*</u>.

Из определения следует, что матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}^{-1}$ обязательно являются квадратными одного и того же порядка.

Теорема. *Матрица* $\boldsymbol{A}$ *является обратимой тогда и только тогда, когда она невырождена* (*т.е.* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$).

Обратная матрица невырожденной квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка 3 находится по формуле

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} *– алгебраическое дополнение элемента* a_{ij} *матрицы* A.

Таким образом, для того, чтобы составить $\boldsymbol{A}^{-1}$, мы на место каждого элемента матрицы $\boldsymbol{A}$ ставим его алгебраическое дополнение, получившуюся матрицу транспонируем (т.е. превращаем строки в столбцы), и затем умножаем на $(\det \boldsymbol{A})^{-1}$.

Далее мы будем рассматривать только квадратные матрицы третьего порядка и системы из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Но всё сказанное будет верно и для квадратных матриц произвольного порядка, а также для систем линейных уравнений, содержащих n уравнений и n неизвестных ($n>0$).

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{4.1}$$

Обозначим

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (4.1) можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}. \tag{4.2}$$

Предположим, что матрица $\boldsymbol{A}$ не вырождена. Умножим обе части равенства (4.2) слева на обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{EX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}. \qquad (4.3)$$

Тем самым, если мы знаем обратную матрицу, мы можем вычислить столбец решений.

Пример. Найти решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$$

Решение. Составляем матрицу данной системы:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем алгебраические дополнения элементов этой матрицф.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -19, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{23} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7, \qquad (4.4)$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Найдем определитель матрицы $\boldsymbol{A}$ с помощью разложения по первой строке:

$$\det\boldsymbol{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1\cdot(-19) + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 14 = -35.$$

Записываем матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & -7 \\ 14 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы находим по формуле (4.3) :

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & -7 \\ 14 & -7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19\cdot 5 - 3\cdot 1 + 7\cdot 9 \\ -1\cdot 5 - 2\cdot 1 - 7\cdot 9 \\ 14\cdot 5 - 7\cdot 1 - 7\cdot 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -35 \\ -70 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Т.е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0.$$

Делаем проверку:

$$\begin{cases} 1 + 2\cdot 2 - 0 = 5 \ \text{– верно} \\ 3\cdot 1 - 2 + 4\cdot 0 = 1 \ \text{– верно,} \\ -1 + 5\cdot 2 - 0 = 9 \ \text{– верно.} \end{cases}$$

Ответ: $(1, 2, 0)$.

Если проверка не получается.

1. Проверьте, не забыли ли вы поставить знак минус при вычислении алгебраических дополнений там, где i+j нечётно.
2. Проверьте, не забыли ли вы при составлении обратной матрицы выписать алгебраические дополнения по принципу: строка – в столбец.
3. Проверьте, не пропустили ли вы при составлении самой матрицы $\boldsymbol{A}$ где-нибудь знак минус.
4. Проверьте, правильно ли вы переписали условие.
5. Пересчитайте ещё раз алгебраические дополнения.
6. Пересчитайте $\det \boldsymbol{A}$.
7. Если по-прежнему проверка не получается, проверьте правильность составления $\boldsymbol{A}^{-1}$ путём умножения матриц: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$. Если, например, при умножении первой строки матрицы $\boldsymbol{A}$ на второй столбец матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ получается не 0, а другое число, то ошибку следует искать во втором столбце матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$. Аналогично, сделав проверку $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, мы можем определить номер строки в $\boldsymbol{A}^{-1}$, в которой содержится ошибка. Если вместо единичной матрицы получается диагональная матрица, у которой на диагонали стоит не 1, а другое число, то неверно найден $\det \boldsymbol{A}$.

Задания для самостоятельного решения

Решить систему линейных уравнений

а) с помощью правила Крамера;

б) с помощью обратной матрицы.

1. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -3x_1 + 12x_2 - 2x_3 = -7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 12x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-3, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=-11, \\ 4x_1-4x_2+7x_3=-7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-2, \\ 4x_1-4x_2+7x_3=-1, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=-4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3=-3, \\ -2x_1-7x_2-7x_3=-3, \\ 3x_1+12x_2+5x_3=-4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3=1, \\ 3x_1+12x_2-5x_3=3, \\ 2x_1+7x_2-7x_3=-10. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=5, \\ -3x_1-5x_2+2x_3=-3, \\ 2x_1+2x_2-5x_3=-4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+5x_3=16, \\ 3x_1+5x_2+2x_3=15. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3=-8, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=-8, \\ -2x_1+4x_2-7x_3=2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3=-3, \\ 2x_1-4x_2+7x_3=3, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=4, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=3, \\ -3x_1-12x_2+2x_3=-7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=2\,, \\ 3x_1-4x_2+12x_3=13, \\ 4x_1-4x_2+11x_3=15. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=3, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=11, \\ 4x_1+4x_2-7x_3=7. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=2, \\ 3x_1-12x_2+4x_3=13, \\ 4x_1-11x_2+4x_3=15. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1-5x_2-2x_3=3, \\ -2x_1+7x_2+7x_3=3, \\ 3x_1-12x_2-5x_3=4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3=4, \\ 3x_1+7x_2-13x_3=-1, \\ -x_1-x_2+3x_3=3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=5, \\ -3x_1+5x_2-2x_3=-3, \\ 2x_1-2x_2+5x_3=-4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3=4, \\ 3x_1+13x_2-7x_3=-1, \\ x_1+3x_2-x_3=-3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3=8, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=8, \\ -2x_1-4x_2+7x_3=-2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-9, \\ 2x_1-6x_2+3x_3=-12, \\ -3x_1+4x_2-x_3=-1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=4, \\ 3x_1+12x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=9. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=-9, \\ 2x_1-3x_2+6x_3=-12, \\ -3x_1+2x_2-3x_3=2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=2, \\ 4x_1+4x_2-7x_3=1, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=4. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3=4, \\ 2x_1-8x_2+6x_3=14, \\ 4x_1-10x_2+3x_3=16. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 12x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -10. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 14, \\ 4x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 16. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 16, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 15. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -6, \\ 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$

§ 5. *Ранг матрицы*

Рассмотрим матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (5.1)$$

Выберем s различных строк и s различных столбцов матрицы $(1 \le s \le \min(m, n))$. Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют матрицу прядка s. Определитель этой матрицы называется <u>*минором матрицы*</u>.

<u>*Рангом*</u> матрицы называется наибольший из порядков ее миноров отличных от нуля. Этот минор называется <u>*базисным*</u>. Если все миноры матрицы равны нулю, то ранг матрицы равен нулю.

Назовём <u>*элементарными преобразованиями матрицы*</u> следующие преобразования.

1. Вычёркивание строк и столбцов, которые состоят только из нулей.
2. Перестановка строк или столбцов.
3. Умножение строки или столбца на число не равное нулю.
4. Прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца), домноженной на некоторое число.

Теорема. *Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.*

С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к квазитреугольной форме. Тогда ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в квазитреугольной матрице.

<u>*Шаг*</u> <u>1</u>. Вычеркнем все строки и столбцы, состоящие только из нулей.

<u>*Шаг*</u> <u>2</u>. В первом столбце матрицы выберем ненулевой элемент и строку, в которой он находится, поставим на первое место.

Шаг 3. Разделим первую строку на a_{11}. К каждой i-ой строке матрицы прибавим первую строку, домноженную на число $-a_{i1}$. В результате мы получим матрицу вида

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix}1 & * & \dots & * \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & b_{k2} & \dots & b_{kn}\end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Совершаем те же действия над матрицей

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & \dots \\ b_{k2} & \dots & b_{kn}\end{pmatrix},$$

совершая их на самом деле над всей матрицей. Т.е., если в матрице $\boldsymbol{B}$ какой-либо столбец равен нулю, то мы вычёркиваем его во всей матрице $\boldsymbol{A}'$. В результате мы получим матрицу вида

$$\boldsymbol{A}''=\begin{pmatrix}1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3l} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & c_{m3} & \dots & c_{ml}\end{pmatrix}.$$

Шаг 5. Совершаем те же самые действия, которые были описаны выше с матрицей

$$\begin{pmatrix}c_{33} & \dots & c_{3l} \\ \dots & & \dots \\ c_{m3} & \dots & c_{ml}\end{pmatrix},$$

совершая на самом деле их над всей матрицей $\boldsymbol{A}''$. В конечном итоге мы получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix}1 & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & *\end{pmatrix}, \qquad (5.2)$$

где звёздочкой обозначены элементы, значения которых для нас не важно. Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк матрицы (5.2).

§ 6. *Теорема Кронекера-Капелли*

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
\qquad (6.1)
$$

Матрицей системы является матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Матрица, которая получается из матрицы A добавлением справа столбца свободных членов называется <u>*расширенной матрицей*</u> $\boldsymbol{A}^*$:

$$
\boldsymbol{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).
$$

***Теорема* 1 (*Кронекера-Капелли*).** *Система линейных уравнений* (6.1) *совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы* $\boldsymbol{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $\boldsymbol{A}^*$.

***Теорема* 2.** *Элементарные преобразования строк расширенной матрицы* $\boldsymbol{A}^*$ *не меняют множество решений системы* (6.1).

Пусть теперь мы имеем совместную систему (6.1). Выпишем её матрицу $\boldsymbol{A}^*$. Применяя элементарные преобразования строк, приведём матрицу $\boldsymbol{A}^*$ виду

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 \ldots 0 & c_{1r+1} & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 & c_{2r+1} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & c_{3r+1} & \ldots & c_{3n} & d_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & c_{rr+1} & \ldots & c_{rn} & d_r \end{array}\right). \qquad (6.2)
$$

Напомним, что количество строк, которые остаются не вычеркнутыми равно рангу матрицы r.

Выпишем теперь систему уравнений соответствующую матрице (6.2):

$$
\begin{cases}
x_1 = d_1 - c_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\
x_2 = d_2 - c_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_r = d_r - c_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - c_{rn}x_n.
\end{cases}
\qquad (6.3)
$$

Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются <u>*базисными*</u> (коэффициенты при них входят в базисный минор), а неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ называются <u>*свободными*</u>.

Придаем свободным неизвестным значения произвольных параметров: $x_{r+1} = \alpha_{r+1}$, $x_{r+2} = \alpha_{r+2}$, …, $x_n = \alpha_n$, а затем находим значения базисных неизвестных по формулам (6.3). Полученное решение называется общим решением системы. Если параметрам α_{r+1}, α_{r+2}, … α_n, придать конкретные значения, то получим частное решение системы.

***Пример* 1.** Найти общее решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 6x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 14x_4 - 10x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 + 7x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Будем искать решение <u>*методом Гаусса*</u>. Можно совершать преобразования над самой системой уравнений, но для удобства мы составим матрицу этой системы.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & -3 & -1 & -10 & -5 \\ 1 & \mathbf{-1} & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -6 & \mathbf{-1} & -14 & -10 \\ -2 & 1 & 6 & \mathbf{7} & -7 \end{pmatrix}.$$

Элементы, выделенные жирным шрифтом, образуют диагональ. Наша цель – с помощью элементарных преобразований строк матрицы занулить элементы, стоящие ниже диагонали; т.е. мы пытаемся привести матрицу к виду

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Если при этом у нас получается строка, состоящая полностью из нулей, мы её вычеркиваем (на практике, если получим две одинаковые или пропорциональные строки, то можно вычёркивать одну из них; если таких строк будет три – можем вычеркнуть две из них). При этом, может возникнуть и любая из двух следующих ситуаций.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Главное – добиться, чтобы мы могли выделить в оставшейся матрице треугольный минор, на диагонали которого все числа не равны нулю. Такой минор составляют обведенные столбцы. Этот минор называется _базисным_. В каждом из случаев, мы можем вместо второго столбца взять первый. Во втором случае мы можем вместо третьего столбца взять четвёртый.

Первым действием мы пытаемся получить нули в первом столбце ниже диагонали. Для этого сначала мы выбираем строку, которую мы поставим на первое место. Желательно, чтобы первый элемент строки был равен ±1. Возможно, для этого потребуется разделить какую-либо строку на целое число. Мы поставим на первое место вторую строку. Затем мы к новой второй строке прибавляем первую, умноженную на (–2), к третьей – первую, умноженную на (–3), а к четвёртой – первую, умноженную на 2. При этом сама первая строка остаётся без изменений. Эти действия обозначаются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -10 & -5 \\ 3 & -6 & -1 & -14 & -10 \\ -2 & 1 & 6 & 7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

Вторым действием мы пытаемся получить нули во втором столбце ниже диагонали. Наши действия уже показаны выше. Возможно, в вашей индивидуальной задаче предварительно надо будет переставить строки, или какая-либо строка делится на целое число.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & -14 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ :2 \\ :7 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & & \cancel{-1} & \cancel{-2} \end{pmatrix}$$

Получили матрицу с двумя одинаковыми строками. Одну из них можем вычеркнуть. Вторую строку умножим на -1. Базисный минор обведён.

Мы вновь возвращаемся к системе линейных уравнений и составляем её по последней матрице. Базисные неизвестные при этом остаются в левой части, а свободные неизвестные переносим в левую часть. После этого свободным неизвестным придаём значения произвольных параметров (можно сразу писать вторую из следующих систем):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 6x_4 + 3x_5, \\ x_2 + x_3 = 2x_4 + x_5, \\ x_3 = x_4 + 2x_5. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 6\alpha_1 + 3\alpha_2, \\ x_2 + x_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ x_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ x_4 = \alpha_1, \\ x_5 = \alpha_2;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Подставляем значение x_3 во второе уравнение и находим x_2, подставляем значение x_2 в первое уравнение и находим x_1:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = 7\alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_2 = -x_3 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \\ x_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_4 = \alpha_1, \\ x_5 = \alpha_2 \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Ответ:

$X = (7\alpha_1 + 2\alpha_2,\ \ \alpha_1 - \alpha_2,\ \ \alpha_1 + 2\alpha_2,\ \ \alpha_1,\ \ \alpha_2)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ – общее решение системы.

***Пример* 2.** Найти общее решение неоднородной системы уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 5, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение. Мы зануляем элементы первого столбца, но у нас при этом зануляются и элементы второго столбца. Поэтому базисный минор у нас находится во 2 и 3 столбцах. Поскольку три строки получились пропорциональными, то две из них вычёркиваем.

$$\begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -2 \quad -2 \\ \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & \boxed{2} & \boxed{2} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & -1 & -3 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-3} & \cancel{-1} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 2 - 3x_1 - 2x_4 - 2x_5, \\ x_3 = -1 + x_4 + 3x_5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 2 - 3a - 2b - 2c, \\ x_3 = -1 + b + 3c, \\ x_1 = a,\ x_4 = b, \\ x_5 = c;\ a, b, c \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Отдельно вычислим

$$x_2 = \frac{1}{2}(-3a - 2b - 2c - 2x_3) = \frac{1}{2}(2 - 3a - 2b - 2c + 2 - 2b - 6c) =$$
$$= \frac{1}{2}(4 - 3a - 4b - 8c).$$

Ответ: $X = (a;\ \ 2 - 1{,}5a - 2b - 4c;\ \ -1 + b + 3c;\ \ b;\ \ c),\ \ a, b, c \in \boldsymbol{R}$.

Советы по поводу особых ситуаций

Если после зануления первого столбца получается $a_{22} = 0$, то на второе место переставляем другую строку, в которой второй элемент не равен нулю:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & a & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & a & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Если во втором столбце нет единиц, то можно сделать дополнительное действие с тем, чтобы получить среди них единицу. Например:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 6 & * & * & * \\ 0 & 4 & * & * & * \\ 0 & 5 & * & * & * \end{pmatrix} -1 \sim \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 4 & * & * & * \\ 0 & 5 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Тем самым вы избежите использования дробных чисел.

Задания для самостоятельного решения

Найти общее решение однородной системы линейных уравнений. Сделать проверку.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0, \\ -5x_1 - 12x_2 + 8x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 11. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -2x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 13x_4 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 9x_4 = 14, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=6, \\ 5x_1+8x_2-3x_3+8x_4=42, \\ -2x_1-3x_2+x_3-5x_4=-18. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_4=0, \\ 2x_1+x_2-4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3+x_4=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+5x_4=6, \\ x_1+4x_2-3x_3+8x_4=10, \\ 3x_1+4x_2-x_3=-2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+5x_4=3, \\ -x_1+3x_2+x_3-7x_4=-2, \\ 3x_1-9x_2-x_3+14x_4=5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+4x_4=0, \\ 4x_1-3x_2-x_3+8x_4=0, \\ -4x_1+x_2+3x_3=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=0, \\ 3x_1-x_2+9x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+3x_4=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-10x_4=-16, \\ 5x_1+3x_2-3x_3-4x_4=-9. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-2, \\ 3x_1+7x_2-4x_3+x_4=-1, \\ -2x_1-x_2+11x_3+3x_4=21. \end{cases}$

21. $\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3+x_4=0, \\ -2x_1+x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+5x_3+7x_4=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+2x_2-8x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+9x_2-17x_3+11x_4=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+2x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+6x_4=3, \\ x_1+2x_3+2x_4=-3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_4=1, \\ 3x_1+7x_2-4x_3-5x_4=33, \\ 5x_1+12x_2-8x_3-x_4=26. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=0, \\ 5x_1+2x_2-4x_3=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+7x_2-8x_3-6x_4=0, \\ x_1+6x_2-7x_4=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=-2, \\ 4x_1+9x_2-17x_3+5x_4=-13, \\ -x_1-3x_2+2x_3-3x_4=5. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-5x_4=5, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-10x_4=10, \\ -3x_1-4x_2-4x_3+15x_4=15. \end{cases}$

29. $\begin{cases} -3x_1-7x_2+4x_3+5x_4=0, \\ x_1+3x_2+x_4=0, \\ -5x_1-12x_2+8x_3+x_4=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3-x_4=0, \\ 4x_1+3x_2-4x_3-6x_4=0, \\ 6x_1-7x_3+x_4=0. \end{cases}$

§ 7. *Понятие вектора*

__Вектором__ называется направленный отрезок.

Если начало вектора находится в точке A, а конец – в точке B, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{AB}$. Вектор также обозначается маленькими буквами латинского алфавита со стрелочкой сверху: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Длину вектора $\overrightarrow{AB}$ называют *модулем вектора* и обозначают $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают. Модуль нулевого вектора равен нулю, а направление этого вектора не определено. *Единичным вектором* называется вектор, у которого модуль равен единице.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Пишем: $\vec{a} || \vec{b}$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Коллиниарные векторы называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если их направления совпадают (противоположны). Обозначение: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $(\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b})$.

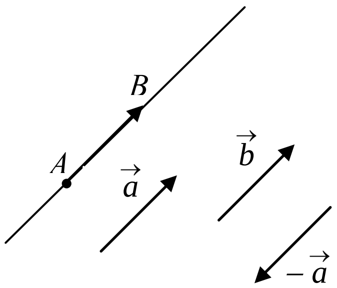


Рис. 1

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они имеют одинаковые длины и направления. Обозначаем: $\vec{a} = \vec{b}$. Векторы, имеющие равные длины и противоположные направления, называются *противоположными*.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$ обозначается $-\vec{a}$.

Свободным вектором, соответствующим вектору $\overrightarrow{AB}$, называется множество всех векторов, равных $\overrightarrow{AB}$. Свободный вектор характеризуется только длиной и направлением. В аналитической геометрии, как правило, используются свободные векторы. Слово «свободный» обычно опускается. Следовательно, вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая начало вектора в любую точку пространства.

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости.

На рисунке 1 видим, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны: $\vec{a} = \vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $-\vec{a}$ противоположен вектору $\vec{a}$, а так же векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}$.

Углом φ между векторами называется угол $(0 \le \varphi \le \pi)$ между направленными отрезками, задающими эти векторы, отложенными из одной точки.

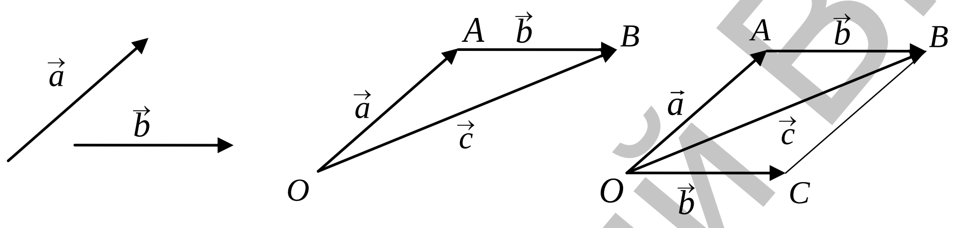
§ 8. *Линейные операции над векторами*

Пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2, *a*). Выберем в пространстве произвольную точку O и отложим из неё вектор $\vec{a}$, получим направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$. Из точки A отложим вектор $\vec{b}$, получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$.

Вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OB}$ называется *<u>суммой векторов</u>* $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пишем: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Этот способ построения суммы двух векторов называется *<u>правилом треугольника</u>*. Для того чтобы построить сумму векторов по этому правилу, мы должны второй вектор отложить из конца направленного отрезка, задающего первый вектор. Тогда суммой векторов является вектор, соединяющий начало первого вектора и конец второго (рис. 2, *б*).



а) *б*) *с*)

Рис. 2

Сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно получить способом, который называется ***правилом параллелограмма***. Из точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$. Построим на этих векторах параллелограмм $OABC$, тогда вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Очевидно, что $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ (рис. 2, *с*). Таким образом, сумма двух векторов, отложенных из одной точки, равна диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах.

Свойства операции сложения векторов

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ выполняются следующие свойства:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность);
2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность);
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (существование нулевого вектора);
4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (существование противоположного вектора).

<u>Разностью двух векторов</u> $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, сумма которого с вычитаемым вектором $\vec{b}$ дает нам вектор $\vec{a}$.

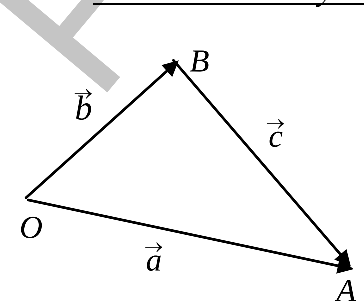


Рис. 3

Обозначаем: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Таким образом, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Для того, чтобы построить разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, надо отложить векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ из одной точки O, тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ есть вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Действительно, так как по правилу треугольника $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$, то $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ (рис. 3).

<u>Произведением вектора</u> $\vec{a}$ *<u>на число</u>* λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$;

2) $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$, $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Заметим, что в случае, когда $\lambda = 0$, $|\lambda\vec{a}| = 0$, значит $\forall \vec{a} : 0\vec{a} = \vec{0}$.

***Теорема* (*первый признак коллинеарности векторов*).** *Ненулевые векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число* λ, *что выполняется равенство* $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Свойства операции умножения вектора на число

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и произвольного действительного числа λ, выполняются следующие условия:

1) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$; 2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

3) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$; 4) $1\vec{a} = \vec{a}$.

§9. *Координаты вектора*

Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат. Пусть точка $M(x, y, z)$ – произвольная точка.

Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, точка приложения которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой M, называется *<u>радиус-вектором</u>* точки M.

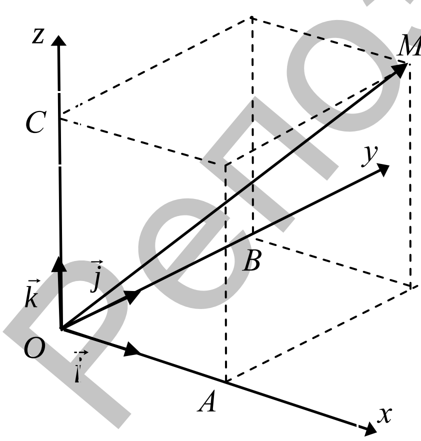


Рис. 4

<u>Декартовыми прямоугольными координатами X, Y, Z, вектора</u> $\vec{r}$ называются проекции вектора $\vec{r}$ на координатные оси:

$$X = \text{пр}_x \vec{r}, \quad Y = \text{пр}_y \vec{r}, \quad Z = \text{пр}_z \vec{r}. \quad (9.1)$$

То, что вектор $\vec{r}$ имеет координаты X, Y, Z, записывается следующим образом:

$$\vec{r} = (X, Y, Z) \text{ или } \vec{r}(X, Y, Z).$$

Если точка M имеет координаты x, y, z, то проекции вектора $\vec{r}$ на координатные оси соответственно равны: $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, т.е. координаты вектора $\vec{r}$ совпадают с координатами точки M.

Единичными векторами координатных осей (ортами) называются единичные вектора, направления которых совпадают с положительными направлениями координатных осей.

Обозначаем: $\vec{i}$ – орт оси Ox; $\vec{j}$ – орт оси Oy; $\vec{k}$ – орт оси Oz.

Орты имеют координаты $\vec{i}(1, 0, 0)$, $\vec{j}(0, 1, 0)$, $\vec{k}(0, 0, 1)$.

Так как векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ некомпланарны, то они образуют базис, который называется декартовым прямоугольным (ортогонормированым) базисом.

Пусть $A(x, 0, 0)$, $B(0, y, 0)$, $C(0, 0, z)$ – вершины параллелепипеда, диагональю которого является вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 4). Тогда $\overrightarrow{OA} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = z\vec{k}$. Легко видеть, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, следовательно

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{9.2}$$

Формула (9.2) называется *разложением вектора* $\vec{r}$ *по единичным (базисным) векторам координатных осей*.

Замечание. В случае, если вектор $\overrightarrow{OM}$ лежит на плоскости xOy, то $\overrightarrow{OM}(x, y)$ или $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Рассмотрим теперь произвольный вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ находятся по формуле

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Для произвольных векторов $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$ выполняются следующие свойства:

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c}\,(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$;

2) $\lambda\vec{a} = \vec{d}\,(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

При сложении (вычитании) векторов их координаты складываются (вычитаются), а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Теорема (второй признак коллинеарности векторов).

Для того, чтобы два ненулевых вектора на плоскости или в пространстве были коллинеарны необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны.

Т.е. если векторы $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$ коллиниарны, то выполняется равенство

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

§ 10. *Скалярное произведение векторов*

<u>*Скалярным произведением*</u> двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется <u>*число*</u>

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\mathbf{a},\vec{b}). \qquad (10.1)$$

Число $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется <u>*скалярным квадратом*</u> вектора $\vec{a}$.

Теорема. 1. *Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

Теорема 2. *Для того чтобы ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю:* $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Из формулы (10.1) следует, что:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \qquad (10.2)$$

Пусть в пространстве задана декартова система координат, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – базисные орты. Пусть $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда формулы для вычисления скалярного произведения, скалярного квадрата и длины вектора имеют вид:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3, \qquad (10.3)$$

$$\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2, \qquad (10.4)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \qquad (10.5)$$

Из них вытекает формула для вычисления косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (10.6)$$

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Поэтому длина вектора вычисляется по формуле

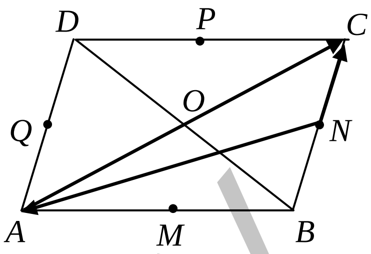
$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (10.7)$$

Эта же величина называется <u>*расстоянием между точками*</u> M_1 и M_2.

Если векторы расположены на плоскости, то во всех формулах (10.3) – (10.7) будет на одну координату меньше.

***Пример* 1.** Пусть $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей, M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Построить на чертеже вектор $\overrightarrow{CQ}-2\overrightarrow{NM}$ (результат должен быть изображен в пределах параллелограмма).

Решение. $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA},\ -2\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}$. Таким образом, $\overrightarrow{CQ}-2\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{AC}$. Для того, чтобы воспользоваться правилом треугольника сложения векторов, нам надо отложить равные $\overrightarrow{CQ}$ и $\overrightarrow{AC}$ векторы так, чтобы конец одного вектора совпадал с началом другого.

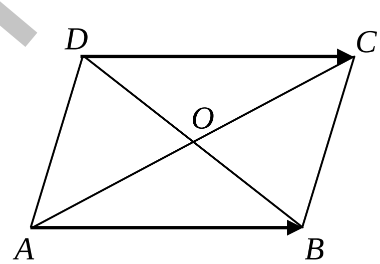


Для этого, мы отложим равный $\overrightarrow{CQ}$ вектор из точки N:

$$\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{NC}.$$

Пример **2.** Известны координаты трёх вершин параллелограмма: $A(-5,1)$, $B(1,3)$, $D(-4,5)$. Найти координаты четвёртой вершины C и длину диагонали AC.

Решение. Имеем $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Пусть $C(x,y)$. Найдём координаты векторов: $\overrightarrow{AB}(1-(-5),3-1)$, $\overrightarrow{AB}(6,2)$; $\overrightarrow{DC}(x-(-4),y-5)$, $\overrightarrow{DC}(x+4,y-5)$ (мы из координат конца каждого вектора вычитаем координаты начала вектора). Поскольку векторы равны, то их координаты равны:



$$x+4=6,\ y-5=2.$$

Из этих равенств находим $C(2,7)$. Длину диагонали AC мы можем найти непосредственно по формуле (10.7), либо можем сначала найти координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, а затем, вычислить его длину.

$$|AC|=\sqrt{(2-(-5))^2+(7-1)^2}=\sqrt{49+36}=\sqrt{85}.$$

Ответ: $C(2,7)$, $|AC|=\sqrt{85}$.

Пример **3.** Известны координаты трёх вершин параллелограмма: $A(-3,0)$, $B(3,2)$, $D(-2,4)$. Найти координаты точки O пересечения диагоналей и вычислить его площадь.

Решение. Точка O серединой отрезка DB. Поэтому её координаты можно найти как среднее арифметическое от координат точек B и D:

$$O\left(\frac{x_B+x_D}{2},\frac{y_B+y_D}{2}\right),\ O\left(\frac{3+(-2)}{2},\frac{2+4}{2}\right),$$

$$O(0{,}5;\ 3).$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}(b_1,b_2)$, отложенных из одной точки вычисляется по формуле

$$S = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

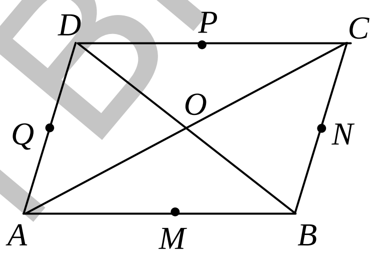
Находим координаты векторов: $\overrightarrow{AB}(6, 2)$, $\overrightarrow{AD}(1, 4)$. Тогда

$$S_{ABCD} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22.$$

Ответ: $O(0{,}5; 3)$, $S_{ABCD} = 22$.

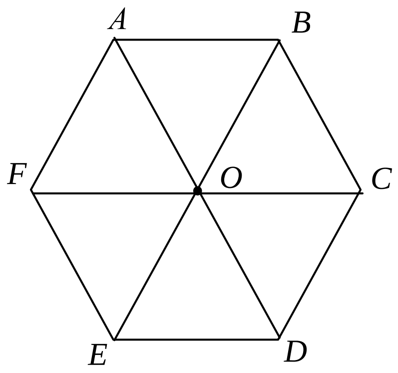
Задания для самостоятельного решения

1. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей, M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Построить на чертеже следующие векторы (результат должен быть изображен в пределах параллелограмма).



1. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DP}$, $2\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{CN}$.
2. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{ON}$, $2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{NC}$.
3. $\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{CO}$, $3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ND}$.
4. $\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{OB}$, $2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PC}$.
5. $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{AN}$, $2\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{MB}$.
6. $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{QP}$, $3\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AP}$.
7. $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OP}$, $2\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{DO}$.
8. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BN}$, $3\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA}$.
9. $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{OM}$, $3\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OA}$.
10. $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$, $2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{NM}$.
11. $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{NP}$, $3\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}$.
12. $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{AO}$, $3\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QB}$.
13. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MQ} - 2\overrightarrow{NO}$.
14. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DN}$, $3\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{PN}$.
15. $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{DP}$.

2. $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, O – его центр. Построить на чертеже следующие векторы (результат должен быть изображен в пределах шестиугольника).



1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EC}$, $3\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}$.
2. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DB}$, $3\overrightarrow{FO} - \overrightarrow{FD}$.
3. $\overrightarrow{FD} - \overrightarrow{BD}$, $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
4. $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CO}$, $3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CE}$.
5. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{AF}$.
6. $\overrightarrow{FD} - \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{FD} + 3\overrightarrow{DO}$.

7. $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{FO}$. 8. $\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{EC}+3\overrightarrow{OF}$.

9. $\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{BF}+3\overrightarrow{ED}$. 10. $\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{BA},\ 2\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{FO}$.

11. $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{BO},\ \overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{OD}$. 12. $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{FD}-2\overrightarrow{BC}$.

13. $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{CO},\ 3\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DB}$. 14. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{AF}-2\overrightarrow{CO}$.

15. $\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{OC}$.

§ 11. *Полярная система координат на плоскости*

Выберем на плоскости произвольные точку O, которую назовём *полюсом*, и луч OP, который назовём *полярной осью*.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим $r = OM$, а φ – ориентированный угол между лучами OP и OM (рис. 5). Тогда пара (r, φ) называется *полярными координатами точки* M. Совокупность точки O и оси OP называется *полярной системой координат на плоскости*.

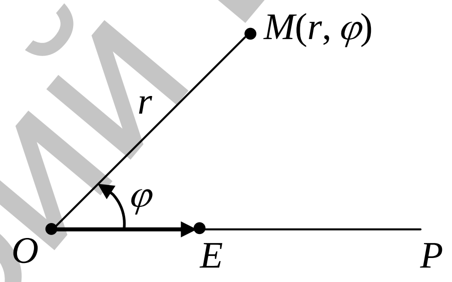


Рис. 5

Очевидно, что $0 \le r < +\infty$, а для угла φ обычно договариваются, что $0 \le \varphi < 2\pi$, либо, что $-\pi < \varphi \le \pi$. Если $r = 0$, то угол φ считается неопределенным.

Выберем декартову систему координат так, чтобы точка O была ее началом, а положительное направление оси Ox совпадало с направлением оси OP. Тогда формулы перехода от полярных координат к декартовым имеет вид

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad (11.1)$$

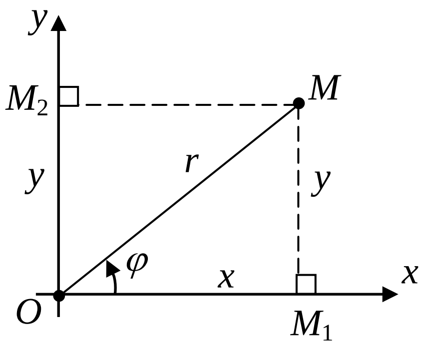


Рис. 6

С другой стороны получаем формулы перехода от декартовых координат к полярным:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \qquad (11.2)$$

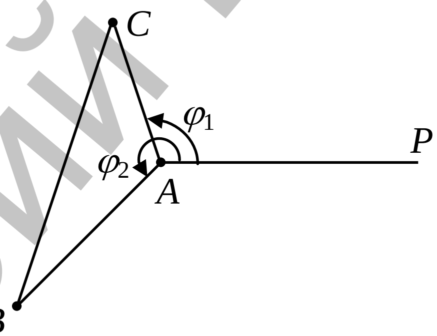
Подчеркнем, что знание синуса или косинуса в отдельности не позволяет однозначно определить угол φ: два различных угла могут иметь одинаковое значение синуса или косинуса. Поэтому угол φ следует находить сразу из двух равенств:

$$\cos\varphi = x/r,\ \sin\varphi = y/r,$$

либо так: $\varphi = \arccos\dfrac{x}{r}$, если $y \ge 0$; $\varphi = -\arccos\dfrac{x}{r}$, если $y < 0$ (в предположении, что $-\pi < \varphi \le \pi$).

Пример* 1.** Дан треугольник *ABC.** Вершина A помещается в полюсе, а две другие имеют заданные полярные координаты: $B(6, \dfrac{5\pi}{4})$, $C(4, \dfrac{7\pi}{12})$. Вычислить площадь треугольника, найти длину BC. Сделать точный чертёж.

Решение. Нарисуем чертеж к задаче, построив точки B и C по их полярным координатам. Из геометрического смысла полярных координат находим, что



$$AB = 6,\quad AC = 4,$$

$$\angle BAC = |\varphi_2 - \varphi_1| = \frac{5\pi}{4} - \frac{7\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot \sin\frac{2\pi}{3} = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC = 36 + 16 - 2\cdot 6\cdot 4\cdot(-\frac{1}{2}) = 76,$$

$$BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

Задания для самостоятельного решения

***Пример* 1.** Вершина A треугольника ABC помещается в полюсе, а две другие имеют заданные полярные координаты. Вычислить площадь треугольника. Найти длину BC. Сделать точный чертёж

1. $C(3, -\dfrac{\pi}{3})$, $B(2, -\pi)$.

2. $B(1, -\dfrac{7\pi}{12})$, $C(2, -\dfrac{11\pi}{12})$.

3. $C(2, -\dfrac{\pi}{12})$, $B(3, \dfrac{\pi}{4})$.

4. $B(5, -\dfrac{\pi}{4})$, $C(3, -\dfrac{5\pi}{12})$.

5. $C(1, \dfrac{\pi}{4})$, $B(2, \dfrac{5\pi}{12})$.

6. $B(2, \dfrac{3\pi}{4})$, $C(5, \dfrac{11\pi}{12})$.

7. $C(3, \dfrac{\pi}{4})$, $B(2, \dfrac{7\pi}{12})$.

8. $B(1, \dfrac{5\pi}{12})$, $C(3, \dfrac{7\pi}{12})$.

9. $C(2, \frac{\pi}{3})$, $B(5, \frac{\pi}{12})$.

10. $B(2, \frac{11\pi}{12})$, $C(3, \frac{3\pi}{4})$.

11. $B(4, -\frac{\pi}{9})$, $C(1, -\frac{5\pi}{18})$.

12. $B(3, \frac{3\pi}{4})$, $C(4, \frac{7\pi}{12})$.

13. $B(2, \frac{7\pi}{12})$, $C(3, \frac{11\pi}{12})$.

14. $B(5, \frac{5\pi}{12})$, $C(3, \frac{3\pi}{4})$.

15. $B(4, -\frac{\pi}{6})$, $C(7, \frac{\pi}{6})$.

16. $B(2, \frac{3\pi}{4})$, $C(3, \frac{\pi}{12})$.

17. $B(3, \pi)$, $C(4, \frac{2\pi}{3})$.

18. $B(3, \frac{\pi}{12})$, $C(1, -\frac{\pi}{4})$.

19. $C(5, \frac{7\pi}{12})$, $B(2, \frac{5\pi}{6})$.

20. $B(3, -\frac{3\pi}{4})$, $C(2, \frac{\pi}{12})$.

21. $B(2, \frac{\pi}{3})$, $C(1, \frac{7\pi}{12})$.

22. $B(1, \frac{\pi}{4})$, $C(2, \frac{11\pi}{12})$.

23. $B(3, -\frac{\pi}{2})$, $C(1, \frac{\pi}{4})$.

24. $B(3, \frac{11\pi}{12})$, $C(2, \frac{\pi}{4})$.

25. $B(1, \frac{3\pi}{4})$, $C(3, \frac{11\pi}{12})$.

26. $C(5, \frac{7\pi}{12})$, $B(2, \frac{5\pi}{6})$.

27. $B(5, \frac{3\pi}{4})$, $C(3, \frac{13\pi}{12})$.

28. $B(1, \frac{5\pi}{12})$, $C(3, \frac{7\pi}{12})$.

29. $B(2, -\frac{\pi}{3})$, $C(3, -\frac{\pi}{6})$.

30. $C(5, \frac{7\pi}{12})$, $B(2, \frac{5\pi}{6})$.

§ 12. *Уравнение прямой на плоскости*

Прямая l, проходящая через точку $M_o(x_o, y_o)$, и имеющая направляющий вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$, задается уравнением

$$\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2}, \qquad (12.1)$$

которое называется <u>*каноническим уравнением прямой*</u>, или <u>*параметрическими уравнениями*</u>:

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t, \ t \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \qquad (12.2)$$

Прямая, проходящая через точку $M_o(x_o, y_o)$, и имеющая вектор нормали $\vec{n}(A, B)$, задается уравнением

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0. \qquad (12.3)$$

Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида

$$Ax + By + C = 0, \qquad (12.4)$$

которое называется <u>*общим уравнением прямой*</u>. В этом уравнении коэффициенты A и B– *это координаты вектора нормали к прямой*.

Если в уравнении (12.4) $B \neq 0$, то можно это уравнение переписать так: $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$. Обозначим $k = -A/B$, $q = -C/B$ и получим уравнение

$$y = kx + q, \tag{12.5}$$

которое называется уравнением с угловым коэффициентом. Здесь k называется *угловым коэффициентом*; $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол, образовнный прямой с положительным направлением оси Ox.

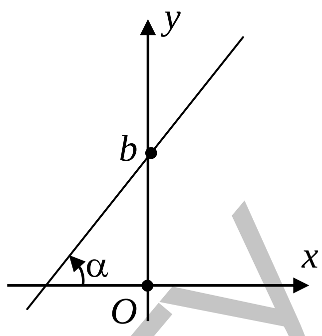


Рис. 7

Если нам даны две точки на прямой $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$, то мы можем найти угловой коэффициент прямой по формуле $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. В этом случае уравнение прямой имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{12.8}$$

§ 13. *Взаимное расположение двух прямых на плоскости*

Пусть две прямые на плоскости заданы общими уравнениями:

$$l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда векторы $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ – это векторы нормалей к l_1 и l_2.

1. Если $l_1 || l_2$, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;

2. Если $l_1 = l_2$, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

3. Если $l_1 \perp l_2$, то $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

4. Угол между l_1 и l_2 вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{13.1}$$

§ 14. *Уравнение прямой в нормальной форме. Расстояние от точки до прямой*

Говорим, что *общее уравнение прямой*

$$Ax + By + C = 0, \tag{14.1}$$

имеет нормальную форму, если $A^2+B^2=1$. Это равносильно тому, что вектор $\vec{n}(A, B)$ – единичный.

Если уравнение (14.1) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на $\sqrt{A^2+B^2}$:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Действительно, тогда получится что $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=1.$

Например, для уравнения $3x–4y+15=0$ найдем $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, тогда

$$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+3=0$$

является уравнением прямой в нормальной форме.

Теорема *Пусть прямая* l *определяется уравнением* (14.1) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки* $M(x_1, y_1)$ *до прямой вычисляется по формуле*

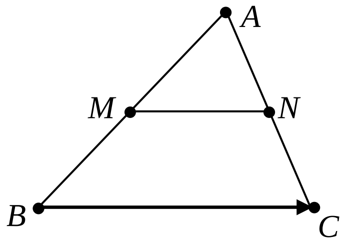
$$h=|Ax_1+By_1+C|. \qquad (14.2)$$

Следствие. *Если прямая определяется произвольным уравнением вида* (14.1), *то*

$$h=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (14.3)$$

***Пример* 1.** Известны координаты вершин треугольника: $A(2, 5)$, $B(4, 1)$, $C(8, 3)$. Составьте каноническое уравнение его средней линии, параллельной стороне BC.

***Решение*:** Пусть MN – средняя линия, параллельная стороне BC. Для того чтобы составить каноническое уравнение средней линии нам надо иметь одну точку на прямой MN и один вектор, параллельный ей.



Координаты точки M можем найти как среднее арифметическое от координат A и B: $M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$, $M(3, 3)$.

В качестве направляющего вектора можем выбрать $\overrightarrow{BC}$. Находим его координаты: $\overrightarrow{BC}(4, 2)$. Получаем уравнение $\frac{x-3}{4}=\frac{y-3}{2}$, которое можем упростить: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{1}$.

Ответ: MN: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{1}$.

***Пример* 2.** Известны координаты вершин треугольника ΔABC: $A(-1,3)$, $B(11,0)$, $C(9,9)$.

1. Составить уравнения стороны AB и высоты CD с угловым коэффициентом. Найти координаты точки D.

2. Вычислить высоту в треугольнике по формуле расстояния от точки до прямой.

Решение. 1. Находим угловой коэффициент прямой AB:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{11-(-1)}=-\frac{1}{4}.$$

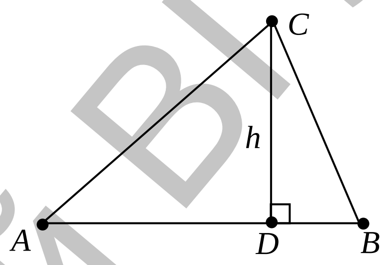


*рис.*8

Составляем уравнение прямой AB:

$$y-y_A=k_{AB}(x-x_A)$$

$$y-3=-\frac{1}{4}(x-(-1)) \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}.$$

Прямые AB и CD перпендикулярны. Поэтому $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=4$. Составляем уравнение прямой CD:

$$y-y_C=k_{CD}(x-x_C) \Leftrightarrow \quad y-9=4(x-9) \quad \Leftrightarrow \quad y=4x-27.$$

Точка D является общей точкой для прямых AB и CD. Значит, её координаты должны удовлетворять одновременно уравнениям этих двух прямых. Поэтому для нахождения координат точки D мы объединяем уравнения прямых AB и CD в одну систему и решаем ее.

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}, \\ y=4x-27. \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x-27=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}, \\ y=4x-27. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=7, \\ y=1. \end{cases} \Rightarrow D(7,1).$$

2. Перепишем уравнение прямой AB в общем виде:

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4y=-x+11 \quad \Leftrightarrow \quad x+4y-11=0.$$

Применим формулу (14.3) к этому уравнению и к точке C:

$$h=\frac{|9+4\cdot 9-11|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{|34|}{\sqrt{17}}=2\sqrt{17}.$$

***Пример* 3.** Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1,-6)$, $B(-3, 0)$, $C(6, 9)$. Составить уравнение окружности, описанной вокруг треугольника.

Решение. Для того, чтобы составить уравнение окружности, нам необходимо знать ее радиус R и координаты центра $O(a, b)$. Тогда уравнение выглядит так:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 .$$

Центр окружности, описанной вокруг треугольника, находится на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника.

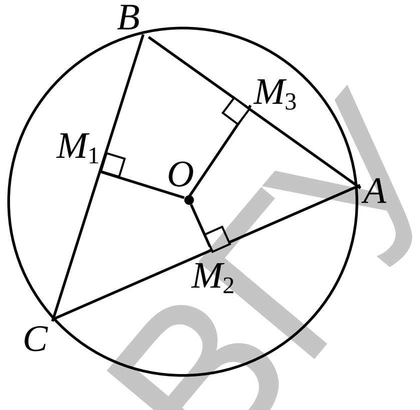


Рис. 8

Находим координаты середин $M_1(x_1, y_1)$, и $M_3(x_3, y_3)$ сторон BC и AB:

$$x_1=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{-3+6}{2}=\frac{3}{2},\quad y_1=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{0+9}{2}=\frac{9}{2},$$

$$M_1(\frac{3}{2},\frac{9}{2}).$$

Аналогично находим $M_3(-1,-3)$.

Пусть l_3 – прямая, являющаяся серединным перпендикуляром к AB, а l_1 – к BC. Тогда $\vec{n}_3=\overrightarrow{AB}(-4,6)\perp l_3$ и l_3 проходит через M_3. Поэтому её уравнение:

$$-4(x+1)+6(y+3)=0.$$

Аналогично $\vec{n}_1=\overrightarrow{BC}(9,9)\perp l_3$. Поэтому уравнение l_1:

$$9(x-\frac{3}{2})+9(y-\frac{9}{2})=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+y-6=0.$$

Имеем $O=l_1\cap l_3$. Чтобы найти координаты точки O необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-6=0, \\ -4x+6y+14=0. \end{cases}$$

Отсюда $y=1$, $x=5$, $O(5, 1)$.

Радиус равен расстоянию от точки O до любой из вершин треугольника ABC. Находим:

$$R=|\overrightarrow{AO}|=\sqrt{(1-5)^2+(-6-1)^2}=\sqrt{65}.$$

Значит, уравнение окружности:

$$(x-5)^2+(y-1)^2=65.$$

Пример 4. Докажите, что следующие прямые пересекаются и найдите угол между ними: l_1: $2x+y+5=0$, l_2: $x-7y+11=0$.

Решение. Составляем пропорцию из коэффициентов: $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-7} \neq \frac{5}{11}$. Признак параллельности не выполнен. Значит, прямые пересекаются. Угол между прямыми вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|},$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – векторы нормали к этим прямым. В нашем случае

$$\vec{n}_1(2,1),\ \vec{n}_2(1,-7),\ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2\cdot 1 + 1\cdot(-7) = -5;$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5},\ |\vec{n}_2| = \sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2}.$$

Значит, $\cos\alpha = \frac{|-5|}{\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Пример 5. Докажите, что прямые

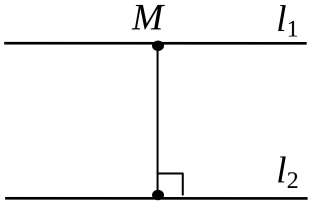
$$l_1: \sqrt{2}x - 2y + 8 = 0, \text{ и } l_2: 2x - 2\sqrt{2}y - 15 = 0$$

– параллельны и найдите расстояние между ними.

Решение. Проверяем прямые на параллельность или совпадение:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-2}{-2\sqrt{2}} \neq \frac{8}{-15}$$

Значит, $l_1 || l_2$.



Расстояние между прямыми есть длина их общего перпендикуляра. Расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой, заданной общим уравнением находится по формуле (14.3).

Выберем произвольную точку $M \in l_1$. Для этого надо подобрать любые две координаты, удовлетворяющие уравнению l_1. В нашем случае, самый простой выбор: $M(0, 4)$. Расстояние от M до l_2 и будет расстоянием между прямыми l_1 и l_2:

$$h = \frac{|2\cdot 0 - 2\sqrt{2}\cdot 4 - 15|}{\sqrt{2^2 + (-2\sqrt{2})^2}} = \frac{8\sqrt{2}+15}{2\sqrt{3}}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Известны координаты вершин треугольника ΔABC.

***а*)** Составить уравнения стороны AB и высоты CD с угловым коэффициентом. Найти координаты точки D.

***б*)** Вычислить высоту в треугольнике по формуле расстояния от точки до прямой.

1. $A(-3,1)$, $B(9,5)$, $C(-2,8)$.
2. $A(1,-2)$, $B(7,2)$, $C(8,-6)$.
3. $A(-2,-5)$, $B(1,7)$, $C(8,1)$.
4. $A(2,5)$, $B(5,-1)$, $C(-2,-2)$.
5. $A(-5,-4)$, $B(10,-1)$, $C(-1,2)$.
6. $A(4,0)$, $B(0,-8)$, $C(6,-6)$.
7. $A(0,1)$, $B(12,-3)$, $C(5,6)$.
8. $A(0,3)$, $B(9,0)$, $C(5,8)$.
9. $A(0,2)$, $B(9,-4)$, $C(7,6)$.
10. $A(-2,0)$, $B(1,-12)$, $C(8,-6)$.
11. $A(-1,2)$, $B(5,-2)$, $C(6,6)$.
12. $A(-3,2)$, $B(9,-2)$, $C(-2,-5)$.
13. $A(0,4)$, $B(3,-2)$, $C(-4,-3)$.
14. $A(1,-7)$, $B(-2,5)$, $C(-8,-5)$.
15. $A(0,-4)$, $B(8,0)$, $C(4,-7)$.
16. $A(5,0)$, $B(-10,3)$, $C(1,6)$.
17. $A(0,-3)$, $B(9,0)$, $C(5,-8)$.
18. $A(0,2)$, $B(9,-1)$, $C(8,6)$.
19. $A(0,-3)$, $B(-12,0)$, $C(-2,6)$.
20. $A(0,-2)$, $B(9,4)$, $C(7,-6)$.
21. $A(-6,0)$, $B(6,4)$, $C(-5,7)$.
22. $A(4,0)$, $B(0,8)$, $C(-4,1)$.
23. $A(-1,-5)$, $B(2,7)$, $C(8,-3)$.
24. $A(-3,4)$, $B(0,-2)$, $C(-7,-3)$.
25. $A(-5,1)$, $B(10,-5)$, $C(2,4)$.
26. $A(-6,0)$, $B(4,2)$, $C(7,-2)$.
27. $A(-6,1)$, $B(6,-3)$, $C(-1,6)$.
28. $A(8,0)$, $B(0,12)$, $C(-2,-2)$.
29. $A(-6,2)$, $B(3,-4)$, $C(1,6)$.
30. $A(0,-4)$, $B(-6,2)$, $C(0,4)$.

2. Даны координаты вершин треугольника ABC. Составить уравнение окружности, описанной вокруг треугольника. При решении использовать уравнение прямой с вектором нормали.

1. $A(-3,-2)$, $B(4,-3)$, $C(1,6)$.
2. $A(2,2)$, $B(-6,6)$, $C(-7,-1)$.
3. $A(-6,-6)$, $B(1,-7)$, $C(-2,2)$.
4. $A(8,0)$, $B(-4,4)$, $C(2,-8)$.
5. $A(-10,-3)$, $B(7,-10)$, $C(2,15)$.
6. $A(1,-6)$, $B(4,-5)$, $C(-7,-2)$.
7. $A(3,2)$, $B(2,-5)$, $C(-1,4)$.
8. $A(15,-2)$, $B(-3,10)$, $C(-10,-7)$.
9. $A(3,0)$, $B(1,-4)$, $C(-2,5)$.
10. $A(4,1)$, $B(2,-3)$, $C(-5,-2)$.
11. $A(9,5)$, $B(2,12)$, $C(-3,13)$.
12. $A(4,1)$, $B(2,-3)$, $C(-5,-2)$.
13. $A(-4,-4)$, $B(8,2)$, $C(0,8)$.
14. $A(5,2)$, $B(0,-3)$, $C(-4,-1)$.
15. $A(-5,-3)$, $B(7,1)$, $C(-1,9)$.
16. $A(13,3)$, $B(5,-9)$, $C(-12,-2)$.
17. $A(-2,-5)$, $B(10,1)$, $C(4,-7)$.
18. $A(8,0)$, $B(-4,4)$, $C(2,-8)$.
19. $A(-5,-1)$, $B(7,5)$, $C(-1,-3)$.
20. $A(9,1)$, $B(-3,5)$, $C(1,-7)$.

21. $A(-5,0)$, $B(7,4)$, $C(1,-2)$. 22. $A(-7,-4)$, $B(-5,2)$, $C(1,-10)$.
23. $A(-6,-3)$, $B(9,2)$, $C(0,9)$. 24. $A(-3,1)$, $B(-1,5)$, $C(5,-7)$.
25. $A(-5,-2)$, $B(10,3)$, $C(3,-6)$. 26. $A(-2,-1)$, $B(0,5)$, $C(4,-7)$.
27. $A(6,5)$, $B(4,-9)$, $C(-2,9)$. 28. $A(-6,-3)$, $B(-2,5)$, $C(3,-10)$.
29. $A(6,1)$, $B(2,-7)$, $C(5,4)$. 30. $A(9,2)$, $B(5,-6)$, $C(-9,-4)$.

3. Докажите, что следующие прямые пересекаются и найдите угол между ними.

1. $x+1=0$, $x+y-5=0$. 2. $x-3y+4=0$, $2x-y=0$;
3. $3x-y-3=0$, $x+2y+8=0$. 4. а) $5x-3y-9=0$, $x-4y-11=0$.
5. $-x+5y+2=0$, $2x+3y-8=0$. 6. $3x-4y+12=0$, $6x-y=0$;
7. $3x+y+5=0$, $x+2y-8=0$. 8. $-2x+10y-11=0$, $2x+3y-7=0$.
9. $3x+5y-7=0$, $4x+y+1=0$. 10. $2x+4y-5=0$, $3x+y+9=0$;
11. $-2x+3y-11=0$, $x+5y+8=0$. 12. $8x+2y-7=0$, $3x+5y+8=0$.
13. $-3x+y-12=0$, $-x+2y-7=0$. 14. $2x+12y-5=0$, $4x+3y+7=0$.
15. $-3x+5y-1=0$, $-4x+y+1=0$. 16. $4x+6y-7=0$, $-x+5y-6=0$.
17. $4x+3y-12=0$, $x+6y+12=0$. 18. $6x+2y-9=0$, $-x-2y+5=0$.
19. $-4x+3y+18=0$, $-x+7y+7=0$. 20. $6x+10y-5=0$, $4x+y-1=0$.
21. $3x+2y+5=0$, $5x-y+5=0$. 22. $8x+6y+3=0$, $x+6y+2=0$.
23. $x+3y+11=0$, $2x+y+5=0$. 24. $2x-6y-11=0$, $2x-y-1=0$.
25. $5x+3y+11=0$, $x+4y-5=0$. 26. $3x+2y+5=0$, $5x-y+5=0$.
27. $3x+4y+7=0$, $6x+y+7=0$. 28. $2x+4y+5=0$, $3x+y+9=0$.
20. $\sqrt{3}x+3y=0$, $-x+\sqrt{3}y+3=0$. 30. $-2x+10y-11=0$, $2x+3y-7=0$.

4. Докажите, что следующие прямые параллельны и найдите расстояние между ними.

1. $2x-2y-5=0$, $-x+y+1=0$.
2. $3x-5y+15=0$, $9x-15y+11=0$.
3. $2x+y=0$, $-4x-2y-5=0$.
4. $-4x+5y-8=0$, $2x-2{,}5y+16=0$.
5. $4x-6y+5=0$, $-6x+9y+10{,}5=0$.
6. $20x+30y-15=0$, $4x+6y+3=0$.
7. $-3x+y+1=0$, $6x-2y+5=0$.
8. $6x-y-7=0$, $-12x+2y-14=0$.

9. $5x - 10y + 11 = 0, \qquad x - 2y + 5 = 0.$

10. $-2x + 3y + 6 = 0, \qquad \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 3 = 0.$

11. $3x + 12y - 8 = 0, \qquad 2x + 8y + 10 = 0.$

12. $0{,}6x - 0{,}8y - 1 = 0, \qquad -3x + 4y - 8 = 0.$

13. $3x + y - 5 = 0, \qquad 9x + 3y - 10 = 0.$

14. $-3x + 8y - 10 = 0, \qquad 0{,}6x - 1{,}6y + 5 = 0.$

15. $-5x + y - 5 = 0, \qquad 10x - 2y - 10 = 0.$

16. $2x - 4y - 9 = 0, \qquad -3x + 6y - 6 = 0.$

17. $x - 7y + 10 = 0, \qquad -3x + 21y + 10 = 0.$

18. $\sqrt{2}x + 2y - 8 = 0, \qquad x + \sqrt{2}y = 0.$

19. $x + 3y + 5 = 0, \qquad 2x + 6y - 7 = 0.$

20. $6x - 8y + 12 = 0, \qquad -9x + 12y - 10 = 0.$

21. $5x + 2y - 7 = 0, \qquad 10x + 4y + 8 = 0.$

22. $10x - 5y - 3 = 0, \qquad 2x - y - 8 = 0.$

23. $4x + 7y - 28 = 0, \qquad 16x + 28y - 8 = 0.$

24. $\sqrt{2}x - 4y = 0, \qquad -x + 2\sqrt{2}y + 7 = 0.$

25. $3x + 5y + 15 = 0, \qquad 9x + 15y + 3 = 0.$

26. $4x + 7y - 28 = 0, \qquad 8x + 14y - 7 = 0.$

27. $\sqrt{2}x + y + 2 = 0, \qquad 2x + \sqrt{2}y - 2 = 0.$

28. $-2x + 3y + 6 = 0, \qquad \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2 = 0.$

29. $7x - 2y + 7 = 0, \qquad -28x + 8y + 21 = 0.$

30. $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y - 1 = 0, \qquad 4x + 9y - 6 = 0.$

§ 15. *Векторное произведение*

Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой *вектор* $\vec{c}$ (рис. 10), что

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2. тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правая;

3. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

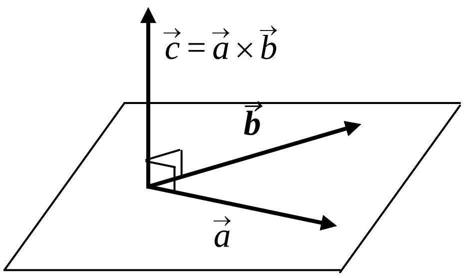


Рис. 10

Если же среди векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть хотя бы один нулевой, то их векторным произведением является $\vec{o}$.

***Теорема* 1.** *Модуль векторного произведения двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *численно равен площади параллелограмма, построенного на направленных отрезках* $\overrightarrow{OA}$ *и* $\overrightarrow{OB}$, *представляющих эти векторы, отложенные из одной точки* (*рис.*11).

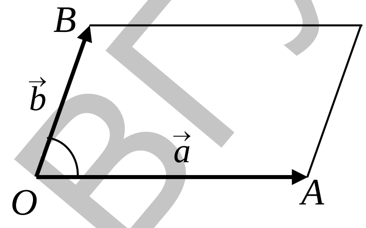


Рис. 11

Следствие. (*Третий признак коллинеарности векторов*) *Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору*:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}.$$

В частности, для любого вектора $\vec{a}$ *выполнено* $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$.

***Теорема* 2.** *Векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами* $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, *вычисляется по формуле*:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\vec{j} + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{k}\,. \qquad (15.1)$$

§ 16. *Смешанное произведение векторов*

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Для смешанного произведения справедливо $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. Это позволяет нам использовать обозначение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ без расстановки скобок и знаков. В литературе встречается также такое обозначение: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

***Теорема* 1.** *Модуль смешанного произведения трех векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *численно равен объему параллелепипеда построенного на направленных отрезках* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, *представляющих эти векторы, отложенные из одной точки.*

Следствие.

1. *Для того, чтобы векторы* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *были компланарны необходимо и достаточно, чтобы* $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$.

2. *Если тройка* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *правая, то* $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$.

3. *Если тройка* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *левая, то* $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$.

***Свойства смешанного произведения*.**

1. Смешанное произведение не зависит от группировки сомножителей: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

2. Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке сомножителей: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$.

3. При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}=-\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}=-\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$.

4. $(\lambda\vec{a})\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\,\vec{b}\,(\lambda\vec{c})=\lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$.

5. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\,\vec{d}=\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}+\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}$.

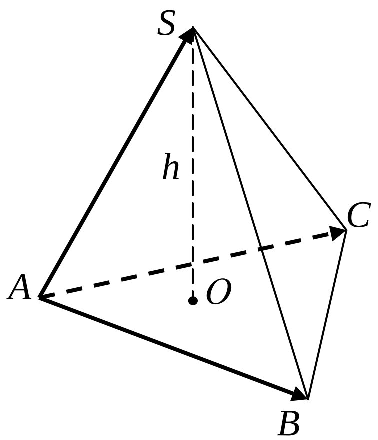
***Теорема* 2.** *Смешанное произведения трех векторов* $\vec{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ *в декартовой системе координат вычисляется по формуле*

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (16.1)$$

***Пример* 1.** Даны координаты вершин треугольной пирамиды $SABC$: $A(4, 0, 1)$, $B(5,–1, 1)$, $C(4, 7,–5)$, $S(7, 5, 2)$. Найдите объем пирамиды, площадь основания ABC и длину высоты SO с помощью векторного и смешанного произведений. Найти координаты вектора SO.

Решение. Находим координаты трех векторов, лежащих на ребрах пирамиды и исходящих из одной вершины:

$$\overrightarrow{AB}(1,–1, 0),\ \overrightarrow{AC}(0, 7,–6),\ \overrightarrow{AS}(3, 5, 1).$$



Модуль смешанного произведения этих векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Объем же пирамиды составляет 1/6 от объема параллелепипеда:

$$V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS}|.$$

Находим смешанное произведение по формуле (16.1):

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления площади основания нам понадобится векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Поэтому проще воспользоваться определением смешанного произведения: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS}=(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AS}$. При этом, вероятность арифметической ошибки будет намного меньше. Рекомендуем для проверки правильности вычислений использовать оба способа.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\vec{k} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{36+36+49} = \frac{11}{2}.$$

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AS} = 6\cdot 3 + 6\cdot 5 + 7\cdot 1 = 55. \qquad V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AS}| = \frac{55}{6}.$$

С другой стороны, $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}\cdot h$. Отсюда

$$h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{55/2}{11/2} = 5.$$

Согласно определению векторного произведения вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому вектор $\vec{h} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ будет перпендикулярен основанию пирамиды; $\vec{h}\,(6, 6, 7)$.

***Пример* 2.** Даны координаты вершин треугольной пирамиды *SABC*: *A*(4, 0, 1), *B*(5,–1, 1), *C*(4, 7,–5), *S*(7, 5, 2). Составьте уравнение плоскости основания и вычислите высоту по формуле расстояния от точки до плоскости.

Решение. Так же, как и в предыдущей задаче находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}(1,-1,\ 0)$, $\overrightarrow{AC}(0,\ 7,-\ 6)$. Плоскость, проходящая через точку $M(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум данным векторам $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$ задаётся уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляем в это уравнение координаты точки A и векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+0 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель по первой строке:

$$6(x-4) + 6y + 7(z-1) = 0 \iff 6x + 6y + 7z - 31 = 0.$$

(желательно сделать проверку, подставив в это уравнение координаты точек A, B, C). Тогда высота

$$h = \frac{|6 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 2 - 31|}{\sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2}} = 5.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Даны координаты вершин треугольной пирамиды *SABC*. Найдите объем пирамиды, площадь основания ABC и высоту с помощью векторного и смешанного произведений.

2. Даны координаты вершин треугольной пирамиды *SABC*. Составьте уравнение плоскости основания и вычислите высоту по формуле расстояния от точки до плоскости.

1. $A(-1, 1, 2)$, $B(-5, 4, -2)$, $C(-1, 2, 3)$, $S(-8, -5, 4)$.
2. $A(0, 2, 2)$, $B(0, 4, 3)$, $C(1, 4, 2)$, $D(7, -1, 7)$.
3. $A(1, 1, 2)$, $B(1, 2, 4)$, $C(4, 1, 4)$, $S(2, -7, 3)$.
4. $A(-1, 1, -2)$, $B(-1, -2, -1)$, $C(1, -2, 0)$, $S(5, -2, -12)$.
5. $A(-5, 1, 2)$, $B(-5, -2, 6)$, $C(-4, 4, -2)$, $S(2, 12, 4)$.
6. $A(-5, 1, 2)$, $B(-5, -2, 6)$, $C(-4, 4, -2)$, $S(2, 12, 4)$.
7. $A(-6, 0, 1)$, $B(-6, -3, 5)$, $C(-5, 3, -3)$, $S(1, 9, -1)$.
8. $A(1, 0, -1)$, $B(2, 0, 4)$, $C(4, 2, 3)$, $S(10, -11, -8)$.
9. $A(-1, 3, 0)$, $B(-1, -1, 2)$, $C(0, 5, -2)$, $S(7, 2, 6)$.
10. $A(1, 4, 2)$, $B(7, 6, 3)$, $C(3, 4, 3)$, $S(6, -7, -7)$.
11. $A(2, 1, 4)$, $B(3, -1, 2)$, $C(3, 7, 6)$, $S(-7, 6, -7)$.
12. $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, 2)$, $C(1, 1, 1)$, $S(3, -2, 7)$.
13. $A(-1, 1, 1)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(0, 3, 1)$, $S(6, -2, 6)$.
14. $A(-1, -1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(2, -1, 2)$, $S(0, -9, 1)$.
15. $A(2, -1, 1)$, $B(3, -1, 2)$, $C(-2, -5, 4)$, $S(4, -8, -5)$.
16. $A(-2, 0, -3)$, $B(-2, -3, -2)$, $C(0, -3, -1)$, $S(4, -3, -13)$.
17. $A(6, 1, 1)$, $B(9, 2, 1)$, $C(6, 2, 3)$, $S(4, -11, 11)$.
18. $A(1, 0, -2)$, $B(2, -3, -2)$, $C(0, 2, 4)$, $S(2, 4, -6)$.
19. $A(2, 3, 1)$, $B(6, 3, 0)$, $C(2, 0, 2)$, $S(-1, 3, 5)$.
20. $A(2, -2, 4)$, $B(8, 7, 12)$, $C(2, -1, 3)$, $S(5, 1, 0)$.
21. $A(-1, -2, 2)$, $B(-2, -2, -1)$, $C(0, 4, 4)$, $S(-2, -6, 6)$.
22. $A(3, -2, 2)$, $B(3, -6, 1)$, $C(0, -2, 3)$, $S(3, 1, 6)$.
23. $A(-2, -4, 0)$, $B(-1, -4, -3)$, $C(-3, 0, 0)$, $S(-1, -2, 2)$.

24. $A(-2,0,3)$, $B(-2,3,4)$, $C(4,-2,2)$, $S(-6,-4,4)$.

25. $A(1,-1,3)$, $B(0,-5,3)$, $C(2,-1,0)$, $S(5,2,3)$.

26. $A(0,-2,2)$, $B(-1,-1,2)$, $C(8,7,8)$, $S(-4,1,5)$.

27. $A(-8,0,4)$, $B(-7,-2,4)$, $C(-7,-1,0)$, $S(-9,-1,-2)$.

28. $A(0,-6,1)$, $B(-3,-4,3)$, $C(0,-5,3)$, $S(4,-6,-1)$.

29. $A(4,-8,2)$, $B(4,-7,0)$, $C(0,-7,1)$, $S(-2,-9,1)$.

30. $A(1,3,-6)$, $B(3,0,-4)$, $C(3,3,-5)$, $S(-1,7,-6)$.

Литература

1. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1975.
2. Дадаян, А.А. Алгебра и геометрия / А.А. Дадаян, В.А. Дударенко.– Минск: Вышэйшая школа, 1989.
3. Тышкевич, Р.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – Мн.: «Вышэйшая школа», 1976.
4. Погорелов, А.В. Геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1984.
5. Феденко, А.С. Алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие в 2 ч. / М.В. Милованов, М.М. Толкачов Р.И., Тышкевич, А.С. Феденко. – Минск: Вышэйшая школа, 1987.
6. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. – М.: Изд-во МГУ, 1969.
7. Кононов, С.Г. Аналитическая геометрия: учебное пособие / С.Г. Кононов. – Минск, БГУ, 2014
8. Берёзкина, Л.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учебное пособие / Л.Л. Берёзкина. – Минск: РИВШ, 2012.
9. Подоксёнов, М.Н. Аналитическая геометрия. Курс лекций с примерами решения задач / М.Н. Подоксёнов. – Витебск: Изд-во ВГУ, 2007.
10. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.С. Феденко [и др.]; под общ. ред. А.С. Феденко. – Минск: Изд-во Университетское, 1989, [1999 – 2-е изд.].

Учебное издание

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич
ИВАНОВА Жанна Викторовна
СУРИН Татьяна Леонидовна

МАТЕМАТИКА
Сборник индивидуальных заданий по разделам «Аналитическая геометрия» и «Высшая алгебра»

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать .2017. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,90. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». 210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.