Покажем, что F отображает Y в себя. Очевидно, $\tilde{u}(r) \geq a$ и $\tilde{v}(r) \geq b$. Пусть $0 \leq r \leq r_0$. Тогда, в силу определения Y и справедливости при $0 \leq s \leq r$ неравенства $s \ln \frac{r}{s} \leq \frac{r}{e}$, имеем

$$\tilde{u}(r) \leq a + \frac{r}{e} \int_0^r H(s) v^{\alpha}(s)\, ds \leq a + (2b)^{\alpha} \int_0^{r_0} H(s) ds \leq a + \frac{a}{2} \leq A(r)$$

Аналогично получаем, что $\tilde{v}(r) \leq B(r)$.

Пусть $r \geq r_0$. Тогда имеем

$$\tilde{u}(r) \leq \frac{3}{2} a + \frac{r}{e} (2b)^{\alpha} L_1 \int_{r_0}^{r} \frac{s^{-1} (\ln s)^{\alpha(2-\mu+\beta)-\lambda} (\ln\ln s)^{\alpha n - \nu}}{r_0^{\alpha} (\ln r_0)^{\alpha(2+\beta-\mu)} (\ln\ln r_0)^{\alpha n}} ds \leq \frac{3}{2} a + \frac{L_1 C_1 (2b)^{\alpha} r (\ln\ln r)^m}{r_0 (\ln\ln r_0)^m} \leq A(r)$$

Аналогично получаем $\tilde{v}(r) \leq B(r)$.

Таким образом, оператор F отображает Y в себя. Доказательство того, что оператор F является непрерывным и компактным оператором на Y проводится аналогично тому, как это сделано в [1, с. 254–255]. Таким образом, по теореме Шаудера–Тихонова о неподвижной точке оператор F имеет неподвижную точку в Y. Так как при различном выборе констант a и b получаются различные решения и существует бесконечное множество возможных вариантов выбора этих постоянных, то существует бесконечно много положительных радиально симметричных целых решений системы (1).

В силу симметрии исходной системы случай в) сводится к случаю б) изменением порядка следования уравнения в системе.

Случай г) рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Получено обобщение результатов работы [1] для существования целых решений систем полулинейных эллиптических уравнений в двумерном случае.

Список литературы

1. Teramoto, T. Existence and nonexistence of positive entire solutions of second order semilinear elliptic systems / T. Teramoto // Funkcialaj Ekvacioj. – 1999. – Vol. 42. – P. 241–260.

ОБОБЩЕННОЕ ПРАВИЛО ЛЕЙБНИЦА

С.А. Шлапаков
Витебск, УО «ВГУ им. П.М. Машерова»

В курсе дифференциального исчисления хорошо известна формула Лейбница нахождения производных n-го порядка от произведения двух дифференцируемых функций того же порядка [1]:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Сначала отметим, что формула Лейбница справедлива для оператора

$$\delta = \left(x \frac{d}{dx} \right), \qquad (1)$$

называемого δ-дифференцированием [2]:

$$\delta^n(fg)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta^{n-k}(f)\delta^k(g), \quad n=1, 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

В справедливости формулы (2) можно убедиться, например, по индукции. А поскольку дробное интегродифференцирование Адамара является по сути дробной степенью оператора (1) [3], то естественно ожидать обобщение формулы (2), т.е. распространение ее на дробные значения n.

Будем, как и ранее [4], рассматривать функции *h(t)*, определенные на отрезке [a, b], которые представимы в окрестности точки $x \in (a, b)$ в виде функционального ряда

$$h(t)=\sum_{r=0}^{\infty} c_k \left(\ln\frac{t}{x}\right)^k . \qquad (3)$$

Выбор функций такого вида обусловлен тем, что их произведение также имеет представление вида (3), а дробная производная по Адамару представляется в виде ряда [4]:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}h\right)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\frac{\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\delta^k h(x), \quad \alpha\in R, \quad x\in(a, b) , \qquad (4)$$

где

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\cdot n!}$$

является обобщенным биномиальным коэффициентом, т.е. при $\alpha=m\in N$ имеем:

$$\binom{m}{k}=C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Распространение формулы (2) на дробные значения *n* сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема. Пусть функции *f(x)* и *g(x)* определены на отрезке [a, b] и на интервале *(a, b)* , $0<a<b<\infty,$ имеют разложения вида (3) . Тогда справедлива формула

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f(t)g(t)\right)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_{a+}^{\alpha-k} f(x)\delta^k g(x), \quad \alpha\in R.$$

Доказательство теоремы получается с использованием представления (4) с последующим применением формулы (2)

Список литературы

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С.А. Шлапаков // Веснік ВДУ. – 2009. Т. 53, №3.– С. 132–135.
3. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI

(63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов (Витебск, 16–17 марта 2011г.). – 2011. Т. 1. С. 71–73.
4. Шлапаков С.А. Дробное дифференцирование Адамара функций, представимых рядами / С.А. Шлапаков // Материалы международной научно-практической Интернет-конференции, посвященной 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Воробьева Н.Т. “Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам” (Витебск, 21–22 июня 2011г.) – 2011. С. 72–73.

О ФОРМАЦИЯХ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ КОРАДИКАЛОВ

В.В. Шпаков
Витебск, УО «ВГУ им. П.М. Машерова»

Отметим, что многие задачи изучения структуры свойств классов Фиттинга, посредством свойств прямых произведений радикалов групп естественным образом приводят к аналогичной задаче в теории формаций – задаче изучения структурных свойств формаций посредством прямых произведений корадикалов групп. Основополагающей в этом направлении исследований является работа Дерка и Хоукса [1], в которой определены формационные операторы «^{0}» и «$_0$», двойственные операторам Локетта. Напомним, что каждой непустой формации F посредством оператора «^{0}» сопоставляется класс F^0, который определяется как наименьшая из всех формаций, содержащих F такая, что для всех конечных групп G и H справедливо равенство $(G\times H)^{\mathsf{F}_0}=G^{\mathsf{F}_0}\times H^{\mathsf{F}_0}$, и посредством оператора «$_0$» – класс F_0 как пересечение всех таких формаций X, для которых $\mathsf{X}^0=\mathsf{F}^0$.

Систематические исследования операторов операторов « ^{0} » и « $_0$ » и их приложения к исследованию структуры формаций до настоящего времени не производились.

Формацию F назовем формацией Дерка-Хоукса или просто DH-формацией, если $\mathsf{F}=\mathsf{F}^0$. Примечателен тот факт, что ввиду результатов Дерка-Хоукса [2] каждая непустая разрешимая формация является DH-формацией.

Следующая теорема описывает свойства DH-формаций

Теорема 1. *Для любых формаций F и H справедливы следующие утверждения:*

1) если H – радикальная формацией, то H – DH-*формация;*

2) если H является радикальной формацией, то $\mathsf{F}^0\mathsf{H}=(\mathsf{F}\mathsf{H})^0$;

Пусть f – локальный спутник. Определим DH-спутники f^0 и f_0 следующим образом: $f_0(p)=(f(p))_0$ и $f^0(p)=(f(p))^0$ для всех $p\in P$.

Следующая теорема показывает, что любая локальная формация определяется DH-спутниками.

Теорема 2. *Если* f *– локальный спутник формации* F, *то* $\mathsf{F}^0=LF(f^0)$ и $\mathsf{F}_0=LF(f_0)$.

Список литературы

1. Doerk, K. On the residual of a direct product / K. Doerk, T. Hawkes // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, N 5. –S. 458-468.
2. Doerk, K. Finite soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.