УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ДВУХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

С.В. Сергеенко
Витебск, УО «ВГУ им. П.М. Машерова»

Рассматривается система полулинейных эллиптических уравнений

$$\begin{cases}\Delta u = H(|x|)v^{\alpha}, \\ \Delta v = K(|x|)u^{\beta}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $x\in R^2$, α, β – положительные постоянные, H, K – непрерывные неотрицательные функции, удовлетворяющие при некоторых постоянных $r_0>e$, $L_1>0$, $L_2>0$, λ, μ, ν, ξ и всех значениях $r>r_0$ следующим неравенствам:

$$H(r)\le \frac{L_1}{r^2 \ln^{\lambda} r(\ln\ln r)^{\nu}}, \qquad (2)$$

$$K(r)\le \frac{L_2}{r^2 \ln^{\mu} r(\ln\ln r)^{\xi}}. \qquad (3)$$

Целью данной работы является нахождение достаточных условий существования целых решений системы (1).

Определение 1. Целым решением системы (1) называется такая вектор-функция $(u,v)\in C^2(R^2)\times C^2(R^2)$, которая удовлетворяет системе (1) в каждой точке R^2.

Заметим, что система (1) в классе радиально симметричных функций равносильна системе

$$\begin{cases}(u'r)'r^{-1} = H(r)v^{\alpha}, \\ (v'r)r^{-1} = K(r)u^{\beta}, \end{cases}$$

так как в полярных координатах для радиально симметричных функций $\Delta u(r)\equiv(u'r)'r^{-1}$. Домножив оба уравнения системы на r и проинтегрировав обе части равенств каждого из полученных уравнений по отрезку $[0, r]$, учитывая, что для радиально симметричных решений $u'(0)=0$, $v'(0)=0$, получим

$$u'(r)r = \int_0^r sH(s)v^{\alpha}(s)ds,\ \ v'(r)r = \int_0^r sK(s)u^{\beta}(s)ds,$$

Проинтегрировав обе части равенств по отрезку $[0, r]$, предварительно домножив их на r^{-1}, получим

$$u(r) = a + \int_0^r\int_0^t \frac{s}{t} H(s)v^{\alpha}(s)dsdt,\ \ v(r) = b + \int_0^r\int_0^t \frac{s}{t} K(s)u^{\beta}(s)dsdt,$$

где a, b – некоторые положительные числа. Поменяем порядок интегрирования, тогда радиально симметричные решения системы (1) удовлетворяют равенствам

$$u(r) = a + \int_0^r s\ln\frac{r}{s} H(s)v^{\alpha}(s)ds, \quad v(r) = b + \int_0^r s\ln\frac{r}{s} K(s)u^{\beta}(s)ds.$$

Заметим, что радиально симметричные функции $u(x)=u(|x|)$, $v(x)=v(|x|)$, для которых справедливы соотношения полученные соотношения при всех значениях x, являются целыми решениями системы (1).

Теорема 1. *Пусть дана система* (1)*, у которой* $\alpha\beta>1$ *и коэффициенты при некоторых постоянных* $r_0>e^e$, $L_1>0$, $L_2>0$, λ, μ, ν, ξ *и всех значениях* $r>r_0$ *удовлетворяют неравенствам* (2) *и* (3).

Тогда, если выполняется одно из условий

а) $$\begin{cases} 1-\lambda+\alpha(2+\beta-\mu)<0, \\ 1-\mu+\beta(2+\alpha-\lambda)<0, \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \lambda>\alpha+1, \\ 1-\lambda+\alpha(2+\beta-\mu)=0, \\ 1-\nu-\alpha\xi<0, \\ \beta(1-\nu)-\xi<0, \end{cases}$$ в) $$\begin{cases} \lambda<\alpha+1, \\ 1-\mu+\beta(2+\alpha-\lambda)=0, \\ -\nu+\alpha(1-\xi)<0, \\ -\beta\nu+1-\xi<0, \end{cases}$$ г) $$\begin{cases} \lambda=\alpha+1, \\ \mu=\beta+1, \\ 1-\nu+\alpha(1-\xi)<0, \\ \beta(1-\nu)+1-\xi<0, \end{cases}$$

то существует бесконечно много положительных радиально симметричных целых решений системы (1).

Доказательство. Справедливость теоремы в случае а) следует из теоремы 3.2 в работе [1].

Рассмотрим случай б). Выберем константы C_1 и C_2 так, чтобы при любом $r>r_0$ выполнялись следующие неравенства:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{s^{-1}(\ln s)^{\alpha(2-\mu+\beta)-\lambda}(\ln\ln s)^{\alpha n-\nu}}{r_0^{\alpha}(\ln r_0)^{\alpha(2+\beta-\mu)}(\ln\ln r_0)^{\alpha n}}\,ds \le \frac{C_1(\ln\ln r)^m}{r_0(\ln\ln r_0)^m}$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{s^{-1}\ln^{-\mu} s(\ln\ln s)^{-\xi+\beta m}}{r_0^{\beta}(\ln\ln r_0)^{\beta m}}\,ds \le \frac{C_2\ln^{2-\mu+\beta} r(\ln\ln r)^n}{r_0(\ln r_0)^{2+\beta-\mu}(\ln\ln r_0)^n}$$

где $m=(1-\nu-\alpha\xi)/(1-\alpha\beta)>0$, $n=(\beta(1-\nu)-\xi)/(1-\alpha\beta)>0$.

Пусть постоянные a и b в (4), (5) таковы, что выполняются неравенства

$$(2b)^{\alpha}\int_0^{r_0} sH(s)\,ds \le \frac{a}{2},\ \ L_1C_1(2b)^{\alpha} \le \frac{a}{2},\ \ (2a)^{\beta}\int_0^{r_0} sK(s)\,ds \le \frac{b}{2},\ \ L_2C_2(2a)^{\beta} \le \frac{b}{2}.$$

Положим

$$A(r)=\begin{cases} 2a & \text{при } 0\le r\le r_0, \\ \dfrac{2ar(\ln\ln r)^m}{r_0(\ln\ln r_0)^m} & \text{при } r_0\le r, \end{cases}$$

$$B(r)=\begin{cases} 2b & \text{при } 0\le r\le r_0, \\ \dfrac{2br(\ln r)^{2+\beta-\mu}(\ln\ln r)^n}{r_0(\ln r_0)^{2+\beta-\mu}(\ln\ln r_0)^n} & \text{при } r_0\le r. \end{cases}$$

Рассмотрим пространство Y непрерывных вектор-функций (u, v), определенных на $[0, \infty)$, которые удовлетворяют неравенствам $a\le u(r)\le A(r)$, $b\le v(r)\le B(r)$, при любом $r\ge 0$. Очевидно, Y – замкнутое выпуклое подмножество пространства $C[0, \infty)\times C[0, \infty)$ с топологией равномерной сходимости. Определим оператор $F: C[0, \infty)\times C[0, \infty) \to C[0, \infty)\times C[0, \infty)$ таким образом, чтобы $F(u,v)=(\tilde{u},\tilde{v})$, где

$$\tilde{u}(r)=a+\int_0^r s\ln\frac{r}{s}H(s)v^{\alpha}(s)ds,\ \ \tilde{v}(r)=b+\int_0^r s\ln\frac{r}{s}K(s)u^{\beta}(s)ds.$$

Покажем, что F отображает Y в себя. Очевидно, $\tilde{u}(r) \ge a$ и $\tilde{v}(r) \ge b$. Пусть $0 \le r \le r_0$. Тогда, в силу определения Y и справедливости при $0 \le s \le r$ неравенства $s \ln \frac{r}{s} \le \frac{r}{e}$, имеем

$$\tilde{u}(r) \le a + \frac{r}{e} \int_0^r H(s) v^{\alpha}(s)\, ds \le a + (2b)^{\alpha} \int_0^{r_0} H(s) ds \le a + \frac{a}{2} \le A(r)$$

Аналогично получаем, что $\tilde{v}(r) \le B(r)$.

Пусть $r \ge r_0$. Тогда имеем

$$\tilde{u}(r) \le \frac{3}{2} a + \frac{r}{e} (2b)^{\alpha} L_1 \int_{r_0}^{r} \frac{s^{-1} (\ln s)^{\alpha(2-\mu+\beta)-\lambda} (\ln\ln s)^{\alpha n-\nu}}{r_0^{\alpha} (\ln r_0)^{\alpha(2+\beta-\mu)} (\ln\ln r_0)^{\alpha n}} ds \le \frac{3}{2} a + \frac{L_1 C_1 (2b)^{\alpha} r (\ln\ln r)^m}{r_0 (\ln\ln r_0)^m} \le A(r)$$

Аналогично получаем $\tilde{v}(r) \le B(r)$.

Таким образом, оператор F отображает Y в себя. Доказательство того, что оператор F является непрерывным и компактным оператором на Y проводится аналогично тому, как это сделано в [1, с. 254–255]. Таким образом, по теореме Шаудера–Тихонова о неподвижной точке оператор F имеет неподвижную точку в Y. Так как при различном выборе констант a и b получаются различные решения и существует бесконечное множество возможных вариантов выбора этих постоянных, то существует бесконечно много положительных радиально симметричных целых решений системы (1).

В силу симметрии исходной системы случай в) сводится к случаю б) изменением порядка следования уравнения в системе.

Случай г) рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Получено обобщение результатов работы [1] для существования целых решений систем полулинейных эллиптических уравнений в двумерном случае.

Список литературы

1. Teramoto, T. Existence and nonexistence of positive entire solutions of second order semilinear elliptic systems / T. Teramoto // Funkcialaj Ekvacioj. – 1999. – Vol. 42. – P. 241–260.

ОБОБЩЕННОЕ ПРАВИЛО ЛЕЙБНИЦА

С.А. Шлапаков

Витебск, УО «ВГУ им. П.М. Машерова»

В курсе дифференциального исчисления хорошо известна формула Лейбница нахождения производных n-го порядка от произведения двух дифференцируемых функций того же порядка [1]:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Сначала отметим, что формула Лейбница справедлива для оператора

$$\delta = \left(x \frac{d}{dx} \right), \qquad (1)$$

называемого δ-дифференцированием [2]: