УДК 517.936:977.1

Стабилизация вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа в случае скалярного управления

О.В. Храмцов

Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В работе материалом исследования являются вполне интегрируемые стационарные системы Пфаффа, которые являются линейными по входу – управлению и по выходу – состоянию системы. Такие системы изучались на обладание ими различными свойствами: полная управляемость, континуум управляемости, максимальная управляемость. В настоящей работе исследуется вопрос об обладании указанными системами свойством стабилизации. Под этим свойством понимается построение с помощью обратной связи такой вполне интегрируемой стационарной системы Пфаффа, тривиальное решение которой является асимптотически устойчивым в первом квадранте плоскости изменения двумерного аргумента.

Цель статьи – получение условий, при выполнении которых линейная стационарная вполне интегрируемая система Пфаффа обладает свойством стабилизации в случае скалярного управления.

***Материал и методы.** Материалом для исследования послужила дифференциальная модель процесса в виде линейной стационарной вполне интегрируемой системы Пфаффа в специальной форме. Методы: матричного анализа, теории систем дифференциальных уравнений Пфаффа, проблемы моментов.*

***Результаты и их обсуждение.** В работе определено понятие свойства стабилизации линейной стационарной вполне интегрируемой системы Пфаффа, представленной в специальной форме. В случае скалярного управления получен критерий обладания такими системами свойством стабилизации. Критерий стабилизации носит ранговый характер от некоторой матрицы, составленной с помощью известных матриц и векторов исходной системы.*

***Заключение.** В вычислительном плане проверка критерия не вызывает затруднений, так как вычисления проводятся в рамках матричного анализа. Исследование носит фундаментальный характер.*

***Ключевые слова:** системы Пфаффа, полная интегрируемость, управляемость, стабилизация.*

Stabilization of Complete Integrated Linear Stationary Pfaff Systems in Case of Scalar Control

O.V. Khramtsov

Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

The research material is complete integrated stationary Pfaff systems, which are linear at the entrance, control, and the exit, the state of the system. Such systems were studied from the point of view of possession by them of different features, like the feature of complete control, continuum control, maximal control. The issue of the possession by the above mentioned systems of the property of stabilization is under consideration in the article. The stabilization is understood as building, with the help of a feedback, of a complete integrated stationary Pfaff system, the trivial solution of which is asymptotically stable in the first square of the plain of change of a two-dimension argument.

The purpose of the work is obtaining conditions, provision of which presents linear complete integrated stationary Pfaff system as having the feature of stabilization under scalar control.

***Material and methods.** The research material is differential model of the process in the form of linear stationary complete integrated Pfaff system in a special form. The research methods are methods of matrix analysis, methods of the theory of differential Pfaff equation systems, the method of the moment problem.*

***Findings and their discussion.** The notion of the stabilization feature of linear stationary complete integrated Pfaff system represented in a special form is identified in the paper. In the case of scalar control criterion is obtained of possession by such systems of the feature of stabilization. The stabilization criterion is of range character from some matrix which is built with the help of known matrices and vectors of the initial system.*

***Conclusion.** From the point of view of calculation the criterion test does not cause any difficulties since calculations are conducted within matrix analysis. The research is of fundamental character.*

***Key words:** complete integrability, Pfaff systems, stabilization, controllability.*

В данной работе продолжается изучение свойств вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа. В [1–3] получены критерии полной управляемости, континуум управляемости, максимальной управляемости. Р. Калман [4, с. 62] доказал критерий наличия свойства стабилизации для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей работе решается вопрос о возможности стабилизации линейной стационарной вполне интегрируемой системы Пфаффа в случае скалярного управления. Рассматриваемая система является более сложным объектом, ибо представляет собой переопределенную систему дифференциальных уравнений с частными производными. Полученный критерий стабилизации носит ранговый характер от некоторой матрицы, составленной с помощью известных матриц и векторов исходной системы.

Цель статьи – получение условий, при выполнении которых линейная стационарная вполне интегрируемая система Пфаффа обладает свойством стабилизации в случае скалярного управления.

Материал и методы. Материалом для исследования является дифференциальная модель процесса в виде линейной стационарной вполне интегрируемой системы Пфаффа в специальной форме [5, с. 323]. Методы: матричного анализа, теории систем дифференциальных уравнений Пфаффа, проблемы моментов.

Результаты и их обсуждение. Рассматривается процесс, описываемый вполне интегрируемой линейной системой Пфаффа

$$\Theta : dx = (A_1 x + b_1 u(t))dt_1 + (A_2 x + b_2 u(t))dt_2, \qquad (1)$$

где аргумент $t = (t_1, t_2) \in R^2$, $x \in R^n$ – выход, состояние системы, $u \in R^1$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая скалярная функция, A_1, A_2 – постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей, b_1, b_2 – постоянные вещественные векторы. Условия полной интегрируемости [6, с. 44] системы (1) имеют вид

$$W \equiv A_2 A_1 - A_1 A_2 = 0,$$

$$b_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} - b_2 \frac{\partial u}{\partial s_1} = pu, \qquad p \equiv A_2 b_1 - A_1 b_2.$$

Поэтому для полной интегрируемости системы Пфаффа необходимо и достаточно в случае скалярного управления выполнение свойств [1]:

1. Условие перестановочности матриц системы

$$A_2 A_1 = A_1 A_2, \qquad (2)$$

2. Условие согласованности рангов

$$rank T = 1, \qquad T = [b_1, b_2, p]. \qquad (3)$$

При выполнении этих свойств для заданной скалярной функции u система (1) имеет единственное решение с начальным условием

$$x(0) = x^0.$$

Рассмотрим свойство стабилизации. Пусть обратная связь имеет вид

$$u = cx, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n), \qquad (4)$$

где вещественный вектор-строка c подлежит определению. Замкнем систему (1) обратной связью (4). В результате получим систему

$$dx = H_1 x dt_1 + H_2 x dt_2, \qquad (5)$$

здесь $H_i = A_i + b_i c, i = 1,2.$

Определение 1. *Система (1) обладает свойством стабилизации тогда и только тогда по определению, когда существует такой вещественный вектор* c*, что система (5) является вполне интегрируемой и ее тривиальное решение асимптотически устойчиво в первом квадранте* $K = [0, \infty) \times [0, \infty)$ *плоскости изменения векторного аргумента* $t = (t_1, t_2)$.

Приведем два простых факта, используемых в дальнейшем. Пусть линейное преобразование L задается с помощью произвольной постоянной вещественной матрицы D, которая является невырожденной ($\det D \neq 0$).

Лемма 1. *При линейном преобразовании* L *свойство (2) перестановочности матриц системы (1) сохраняется.*

Действительно: в силу (2) имеем

$$\overline{W} = \overline{A}_2 \overline{A}_1 - \overline{A}_1 \overline{A}_2 = D^{-1} A_2 D D^{-1} A_2 D - D^{-1} A_1 D D^{-1} A_2 D = D^{-1} W D = 0.$$

Лемма 2. *При линейном преобразовании* L *свойство (3) согласованности рангов сохраняется.*

Действительно

$$rank\ \overline{R} = rank\ [D^{-1}b_1, D^{-1}b_2, D^{-1}A_2DD^{-1}b_2 - D^{-1}A_1DD^{-1}b_1] = rankD^{-1}R = rankR = 1$$

в силу свойства ранга произведения матриц [7, с. 25].

Имеет место

Теорема 1. *Система (1) обладает свойством стабилизации тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий*

$$rankK_i(b_i, A_i) = n, \tag{6}$$

$$K_i(b_i, A_i) \equiv [b_i, A_i, \dots, A_i^{n-1}b_i], \quad i = 1, 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие согласования рангов (3) означает линейную зависимость между векторами b_1, b_2

$$\exists k \in R^1 : b_2 = kb_1. \tag{7}$$

Пусть выполнено условие (6) в случае $i = 1$.

Применим к системе (1) линейное преобразование

$$x = Dy, \det D \quad 0. \tag{8}$$

В результате с учетом (7) получим систему

$$dy = (D^{-1}A_1Dy + D^{-1}b_1u(t))dt_1 + (D^{-1}A_2Dy + D^{-1}kb_1u(t))dt_2. \tag{9}$$

В силу условия (6) согласно результату Калмана [4, с. 53] существует невырожденная матрица *D* такая, что

$$D^{-1}b_1 = r, \quad D^{-1}kb_1 = kr, \quad r = (0, \dots, 0, 1)^T. \tag{10}$$

В свою очередь, матрица $D^{-1}A_1D \equiv F_1$ является [4, с. 55] матрицей Фробениуса или матрицей канонического представления

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \ \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где числа $a_i, i = 1, \dots, n$ – коэффициенты характеристического многочлена

$$\chi_{A_1}(z) \equiv \left|Ez - A_1\right| = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$$

матрицы A_1. Более того [4, с. 56], характеристические многочлены матриц A_1 и F_1 совпадают

$$\chi_{A_1}(z) \equiv \chi_{F_1}(z).$$

Согласно лемме 1 свойство перестановочности (2) матриц сохраняется

$$F_2F_1 = F_1F_2. \tag{12}$$

Считая матрицу F_1 известной из равенства (12), найдем представление матрицы F_2

$$F_2 = \begin{bmatrix} sp & s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & sp & s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & sp & s \\ -sa_n & -sa_{n-1} & -sa_{n-2} & -sa_{n-3} & \dots & -sa_2 & -sa_1 + sp \end{bmatrix}. \tag{13}$$

В матрице F_2 вещественные числа s, p произвольны. Поэтому получен целый класс $\Phi = \Phi(p, s)$ матриц F_2. Теперь можно уточнить систему (9)

$$dy = (F_1y + ru(t))dt_1 + (F_2y + kru(t))dt_2, \tag{14}$$

здесь матрицы F_1, F_2 определены равенствами (11), (13), вектор r указан в (10): $r = (0, \dots, 0, 1)^T$.

По лемме 2 условие согласованности рангов (3) должно сохраняться:

$$rank\ [r, kr, F_2r - F_1kr] = 1. \tag{15}$$

Так как вектор

$$F_2 r - F_1 kr = (0,0,\dots,0,s-k,(s-k)a_0 + sp)^T ,$$

то для выполнения условия (15) необходимо и достаточно равенство

$$s = k. \qquad (16)$$

Таким образом, требование согласованности рангов сужает класс матриц F_2 :

$$\Phi = \Phi(p,k),$$

где число k определено в (7), а вещественное число p – произвольно.

В ы в о д. При выполнении условия перестановочности матриц (2), условия согласованности рангов (3) и условия (4) теоремы (1) с учетом требования (16) в результате преобразования (9) система (1) принимает вид

$$dy = (F_1 y + ru(t))dt_1 + (F_2 y + kru(t))dt_2 , \qquad (17)$$

где матрица F_1 определена равенством (11), а матрица

$$F_2 = k\begin{bmatrix} p & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_2 & -a_1 + p \end{bmatrix},$$

вектор $r = (0,0,\dots,0,1)^T$.

Решаем теперь задачу стабилизации. Пусть обратная связь имеет вид

$$u = cx, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n), \qquad (18)$$

где произвольный вещественный вектор-строка c подлежит определению. Замкнем систему (17) обратной связью (18). В результате получим систему

$$dx = H_1 x ds_1 + H_2 x ds_2 , \qquad (19)$$

здесь $H_1 = F_1 + rc$, $H_2 = F_2 + krc$.

Непосредственными вычислениями можем убедиться, что матрицы H_1, H_2 перестановочны. Строка с номером n в матрице H_1 имеет вид

$$(H_1)_{[n]} = (-a_n + c_1, -a_{n-1} + c_2, \dots, -a_1 + c_n) .$$

Поэтому характеристическое уравнение $|\lambda E - H_1| = 0$ для матрицы H_1 :

$$\chi_{H_1}(\lambda) \equiv \lambda^n + (a_1 - c_n)\lambda^{n-1} + (a_2 - c_{n-1})\lambda^{n-2} + \dots$$

$$\dots + (a_{n-1} - c_2)\lambda + (a_n - c_1) = 0 . \qquad (20)$$

С другой стороны, обозначив $\mu = \lambda + p$, получим характеристическое уравнение $|\mu E - H_1| = 0$ для матрицы H_2 : $\chi_{H_1}(\mu) = 0$. Иными словами, каждое собственное число из спектра матрицы H_2 отличается от собственного числа из спектра матрицы H_1 на число p . В характеристическом уравнении (20) возможно построение каждого из его коэффициентов за счет произвольности выбора каждой компоненты c_i вектора c . Значит, возможно построение любых наперед заданных спектров матриц H_1, H_2 в том числе и с условиями

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \mu_i = \operatorname{Re}(\lambda_i + p) < 0 . \qquad (21)$$

Условия (21) означают асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (19) в первом квадранте $K = [0,\infty) \times [0,\infty)$ плоскости изменения векторного аргумента $t = (t_1, t_2)$. Оба условия определения 1 свойства стабилизации системы выполнены. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим условие (6) теоремы 1. Имеет место

Следствие 1. *Если выполняется условие*

$$rankK_1(b_1, A_1) = n , \qquad (22)$$

то выполняется и условие

$$rankK_2(b_2, A_2) = n. \qquad (23)$$

Действительно: из выполнения равенства (22) следует выполнение равенства $rankK(r, F_1) = n.$ Значит, справедливо равенство $ranK(kr, F_2) = n.$ Из последнего равенства вытекает справедливость утверждения (23).

Заключение. В работе объектом исследования являются вполне интегрируемые стационарные системы Пфаффа в специальной форме, которые линейны по скалярному входу – управлению и по выходу – состоянию системы. Введено понятие свойства стабилизации. В случае скалярного управления получен критерий обладания такими системами свойством стабилизации. Критерий стабилизации носит ранговый характер от некоторой матрицы, составленной с помощью известных матриц и векторов исходной системы. В вычислительном плане проверка критерия не вызывает затруднений, так как вычисления проводятся в рамках матричного анализа. Исследование носит фундаментальный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Храмцов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 11. – С. 1933–1939.
2. Храмцов, О.В. Задача континуум управляемости линейных стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2010. – № 3. – С. 54–59.
3. Храмцов, О.В. Относительная управляемость линейных стационарных вполне интегрируемых систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференц. уравнения. – 2014. – № 6. – С. 817–824.
4. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Наука, 1971. – 426 с.
5. Рашевский, П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными / П.К. Рашевский. – М.: Гостехиздат, 1947. – 354 с.
6. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1983. – 371 с.
7. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 656 с.

REFERENCES

1. Khramtsov O.V. Differentsialniye uravneniya [Differential Equations], 1985, 21(11), pp. 1933–1939.
2. Khramtsov O.V. Vesnik VDU [Newsletter of Vitebsk State University], 2010, 3, pp. 54–59.
3. Khramtsov O.V. Differentsialniye uravneniya [Differential Equations], 2014, 6, pp. 817–824.
4. Kalman R., Falb P., Arbib B. Ocherki po matematicheskoi teorii system [Stories on Mathematical Theory of Systems], Moscow: Nauka, 1971, 426 p.
5. Rashevski P.K. Geometricheskaya teoriya uravnenii s chastnimi proizvodnimi [Geometric Theory of Equations with Partial Derivative], Moscow, Gostekhizdat, 1947, 354 p.
6. Gaishun I.V. Vpolne reshimiye mnogomerniye differentsialniye uravneniya [Quite Soluble Multidimensional Differential Equations], Minsk, Nauka i tekhnika, 1983, 371 p.
7. Khorn R., Johnson Ch. Matrichnii analiz [Matrix Analysis], Moscow, Mir, 1989, 656 p.

Поступила в редакцию 20.03.2017
Адрес для корреспонденции: e-mail: kgima@vsu.by – Храмцов О.В.