

потоку $x^{(k+1)}$, для которого формируем новое опорное множество дуг в зависимости от $\Theta^{(k)}$.

Заключение. В дальнейшем будет разработан код алгоритма, который можно использовать в приложениях. Теоретический материал может быть предметом спецкурсов.

Список литературы

1. Русак, Т.В. Опорный метод решения транспортной квадратичной задачи/ Т.В.Русак // Образование XXI века : материалы XI (56) Региональной науч.-практ. конф. студентов и магистрантов, Витебск, 24-25 марта 2011 г. – Витебск, 2011. – С. 31–33.
2. Габасов, Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – 2-е изд. Мн.: изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981. – 350 с.
3. Командина, Л.В. Нагруженная транспортная задача./ Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. Методы линейного программирования. Ч.2. Транспортные задачи. Мн.: изд-во БГУ им. В.И.Ленина, 1978. – 240 с.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОИСТОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДАВЛЕНИИ

*Е.А. Корчевская
Витебск, УО «ВГУ им. П.М. Машерова»*

Исследования свободных колебаний предварительно напряженных тонких изотропных цилиндрических оболочек проводились в ряде работ [1–5]. В частности, в [1] изучено влияние однородных начальных окружных мембранных усилий, обусловленных внешним или внутренним давлением, на собственные частоты колебаний бесконечной цилиндрической оболочки. Экспериментальные исследования собственных колебаний шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении равномерно распределенными осевыми силами, выполнены в статье [2]. Аналогичный теоретический анализ влияния осевых сил на собственные частоты колебаний изотропных цилиндрических оболочек проведен в [3, 4], при этом в [4] были использованы трехмерные уравнения оболочек с учетом поперечных сдвигов и нормальных напряжений. В приведенных публикациях начальные напряжения, вызванные действием внешних статических сил, предполагались однородными, независимыми от криволинейных координат оболочки. Как следствие, в таких задачах свободные колебания сопровождаются образованием волн, покрывающих всю поверхность оболочки.

Случай нагружения цилиндрической оболочки переменными в окружном направлении осевыми силами был рассмотрен в работах [5, 6]. В частности в [5], с использованием асимптотического метода, развитого в [7], собственные формы вязкоупругих колебаний построены в виде функций, убывающих во времени и локализованных вблизи образующей, испытывающей наибольшую осевую нагрузку. Впоследствии, данный метод был применен для исследования локализованных форм потери устойчивости слоистых композитных цилиндрических оболочек под действием неоднородных осевых сил [8–10]. Установлено [8], что учет поперечных сдвигов слоев, изготовленных из изотропных материалов, может сильно влиять на критическую осевую силу и степень локализации форм потери устойчивости в случае неоднородности нагружения. Теоретические и численные

расчеты с использованием метода конечных элементов, выполненные в [10], также показали, что влияние поперечных сдвигов на собственные частоты колебаний слоистой цилиндрической оболочки является более заметным в случае нагружения последней осевыми силами (постоянными в окружном направлении). Свободные колебания слоистой круговой конической оболочки при воздействии постоянной по окружности растягивающей или сжимающей осевой силы были рассмотрены в [11]. Так же как и в [3] установлено, что осевое растяжение повышает собственные частоты, а сжатие понижает.

Целью данной работы является исследование влияния поперечных сдвигов на собственные частоты и формы локализованных колебаний слоистой некруговой композитной цилиндрической оболочки при давлении.

Материал и методы. В качестве исходных используются уравнения, выведенные в [12] с использованием обобщенной кинематической гипотезы Тимошенко, которая позволяет описать нелинейную зависимость тангенциальных перемещений от поперечной координаты:

$$\begin{cases} \varepsilon^4(1 - \varepsilon^3 \tau \Delta) \Delta^2 \chi + \rho(\varphi) \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \varepsilon^2 f \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (1 - \varepsilon^2 \kappa \Delta) \chi - \Lambda (1 - \kappa \varepsilon^2 \Delta) \chi = 0, \\ \varepsilon^4 \Delta^2 F - \rho(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial s^2} (1 - \varepsilon^2 \kappa \Delta) \chi = 0, \end{cases} \quad (1)$$

записанные в безразмерном виде. Здесь:

$T_2^0 = -Eh\varepsilon^6 f$ – внешнее давление, $\Lambda = \rho R^2 \omega^2 / E\varepsilon^4$ – частотный параметр, $\chi^* = R\chi$, $F^* = \varepsilon^4 EhR^2 F$ – функции напряжений и перемещений, κ, τ – параметры, учитывающие поперечные сдвиги слоев и вводятся согласно [8], $\varepsilon^8 = h^2 \eta_3 / [12R^2(1 - \nu^2)]$ – малый параметр, параметры E, h, R, ρ, ν – являются физическими и геометрическими свойствами оболочки.

Решение задачи (1) будем искать в виде [7]:

$$\begin{aligned} \chi(s, \varphi, \mu) &= \chi^{**} \exp \left\{ i \left(\mu^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\}, \\ F(s, \varphi, \mu) &= F^{**} \exp \left\{ i \left(\mu^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\chi^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} \chi_j(\xi, s), \quad F^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} f_j(\xi, s),$$

где $\chi_j(\xi, s)$, $f_j(\xi, s)$ – полиномы по ξ , имеющие достаточное число раз дифференцируемые по s коэффициенты. Исходя из требования убывания решения (3.13) вдали от образующей $\xi = 0$, принимаем: $q > 0$, $\text{Im} a > 0$.

Результаты и их обсуждение. В задаче о свободных колебаниях некруговой слоистой цилиндрической оболочки при давлении, с использованием комплексного ВКБ-метода, исходная начально-краевая задача сведена к последовательности одномерных краевых задач. Из последовательного рассмотрения которых находится частота колебаний.

Заключение. Разработана методика, которая позволяет в явном виде получить формулу для частот колебаний, а также соответствующую форму колебаний некруговой цилиндрической оболочки, с учетом наличия поперечных сдвигов.

Список литературы

1. Armenakas, A.E. Vibrations of infinitely long cylindrical shells under initial stress / A.E. Armenakas, G. Herrmann // *AIAA Journal*. – 1963. – Vol. 1, № 1. – P. 100–106.
2. Herrmann, G. Vibration of thin shells under initial stress / G. Herrmann, J. Shaw // *J. of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*. – 1965. – Vol. 91, № EM5. – P. 37–59.
3. Thompson, J.R. The vibrations of a thin walled elastic cylinder under axial stress / J.R. Thompson, A.J. Willson // *Int. J. Eng. Sci.* – 1979. – Vol. 17, № 6. – P. 725–733.
4. Neu, W.L. Dynamics of the prestressed solid with application to thin shells / W.L. Neu, H. Reismann // *Solid Mechanics Archives*. – 1982. – Vol. 7. – P. 97–129.
5. Ботогова, М.Г. Свободные колебания вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки под действием неоднородного осевого нагружения / М.Г. Ботогова, Г.И. Михасев, Е.Д. Рафеенко // *Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике*. – Мн.: УП “Технопринт”. 2001. – С. 57–61.
6. Mikhasev, G.I. Free and parametric vibrations of cylindrical shells under static and periodic axial loads / G.I. Mikhasev // *Technische Mechanik*. – 1997. – Band 17, Heft 3. – P. 209–216.
7. Товстик, П. Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.
8. Михасев, Г. И. Локальная потеря устойчивости тонкой слоистой цилиндрической оболочки при неоднородном осевом сжатии / Г. И. Михасев, О. М. Згирская // *Вестн. Витебск. дзярж. ун-та*. – 2001. – № 4. – С. 90–93.
9. Korchevskaya, E. Buckling and vibrations of composite laminated cylindrical shells under axial load / E. Korchevskaya, G. Mikhasev, D. Marinkovich, U. Gabbert // *Die 6. Magdeburger Maschinenbau-Tage: proceedings of the conference, Magdeburg, 24–26 September 2003.* / *Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg*; edited by: R. Kasper [et al.]. – Magdeburg, 2003. – P. 183–189.
10. Mikhasev, G. Local buckling, stationary and non-stationary vibrations of thin composite laminated shells having the weakest spots / G. Mikhasev, E. Korchevskaya, U. Gabbert, D. Marinkovich // *The Fourth International Conference on Thin-Walled Structures: proceedings of the conference, UK, Loughborough, 22–24 June 2004.* / *Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia*; edited by: J.Loughlan. – Loughborough, 2004. – P.769– 776.
11. Tong, L. Free vibration of axially loaded laminated conical shells / L. Tong // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* –1999. – Vol. 66, № 3. – P. 758–763.
12. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г. М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.