$$\mathsf{F} = (G \mid O_2(G|O_{\{2,3\}}(G)) \in S_n D_0(X)) \cap \mathsf{S}_7\mathsf{S}_3\mathsf{S}_2,$$

где $D_0(X)$ – класс всех конечных прямых произведений изоморфных копий группы X. В работе [1] доказано, что класс F является классом Локетта и не удовлетворяет гипотезе Локетта (см. стр. 773 [2]).

Следующая теорема доказана в классе всех конечных разрешимых групп.

Теорема. Пусть $\mathsf{H}=\mathsf{F}_*\mathsf{Y}_i$, где $i\in I$ и F – конструкция класса Фиттинга, предложенная Бергером и Косси в [1], $\{\mathsf{Y}_i \mid i\in I\}$ – семейство насыщенных радикальных гомоморфов таких, что $\mathsf{Y}_i \cap \mathsf{Y}_j=(1)$ при $i\neq j$, а $\bigcup_{i\in I}\mathsf{Y}_i=\mathsf{E}$. Тогда найдется такое $i\in I$, что класс Фиттинга H не удовлетворяет гипотезе Локетта.

Список литературы

1. Berger T.R., Cossey J. An example in the theory of normal Fitting classes // Math.Z. – 1977. – Bd.154. – S. 287–293.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite solvable groups // Waltor de Gryeter. – 1992. – New York, Berlin. – 891p.

ОПОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С КВАДРАТИЧНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Л.В. Командина, Т.В. Русак
Витебск, УО «ВГУ им. П.М. Машерова»

Рассматривается задача перевозки грузов по заданной сети с целью минимизации затрат на транспортировку, что всегда является актуальным. Затраты выражается квадратичной функцией на множестве дуговых потоков.

Материал и методы. Математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{(i,j)\in U}\left(\dfrac{1}{2}\sum\limits_{(k,l)\in U} d_{ij}^{kl}x_{ij}x_{kl}+c_{ij}x_{ij}\right)\to\min, \\ \sum\limits_{j\in I_i^+}x_{ij}-\sum\limits_{j\in I_i^-}x_{ij}=a_i,\ i\in I, \qquad x_{ij}\geq 0, (i,j)\in U, \end{cases} \tag{1}$$

где $S=\{I,U\}$ – сеть с множеством узлов I и дуг U, $x=(x_{ij},(i,j)\in U)$ поток на сети, $a_i, i\in I$ – интенсивность узла, $d_{ij}^{kl}, c_{ij}, (i,j)\in U, (k,l)\in U$ – коэффициенты целевой функции, $I_i^+=\{j:(i,j)\in U\}$, $I_i^-=\{j:(j,i)\in U\}$. Полагаем, что $\sum\limits_{(k,l)\in U} d_{ij}^{kl}x_{ij}x_{kl}\geq 0$ для любого x. Данная задача является обобщением задачи, рассмотренной в [1]. Метод исследования – прямой опорный.

Результаты и их обсуждение. Понятия полного множества дуг, опорного дугового потока, опорного множества дуг стандартны [2, с.63-65]. Обозначим $U_{оп}$, $U_н$ – опорное и неопорное множества дуг соответственно. Для любой дуги $(\xi,\eta)\in U_н$ по множеству $U_{оп}$ можно единственным образом построить цикл $L_{\xi\eta}$. Направление в цикле определим по дуге $(\xi,\eta)\in U_н$. Введем функцию $sign(i,j)^{L_{\xi\eta}}$, которая определяет знак дуги (i,j) в построенном цикле $L_{\xi\eta}$ аналогично [3, с. 217].

Для двух потоков x и $\bar{x} = x + \Delta x$ задачи (1) получена формула приращения целевой функции при переходе от потока x к потоку $\bar{x}$:

$$\Delta f\left(\bar{x}, x\right) = \frac{1}{2} \sum_{(\xi,\eta)\in U_н} \Delta x_{\xi\eta} \sum_{(p,m)\in U_н} \Delta x_{pm} \sum_{(i,j)\in L_{\xi\eta}} \sum_{(k,l)\in L_{pm}} d_{ij}^{kl}\, sign(i,j)^{L_{\xi\eta}}\, sign(k,l)^{L_{pm}} + \sum_{(\xi,\eta)\in U_н} \Delta x_{\xi\eta} \Delta_{\xi\eta},$$

где

$$\Delta_{\xi\eta} = \varphi_{\xi\eta}(x) + \varphi_{\xi\eta} = \sum_{(p,m)\in U_н} x_{pm} \sum_{(i,j)\in L_{\xi\eta}} \sum_{(k,l)\in L_{pm}} d_{ij,kl}\, sign(i,j)^{L_{\xi\eta}}\, sign(k,l)^{L_{pm}} +$$

$$+ \sum_{(i,j)\in L_{\xi\eta}} \left(\sum_{(k,l)\in U_{оп}} d_{ij}^{kl} \sum_{s\in I\setminus\{n\}} a_s\, sign(i,j)^{L_s} + c_{ij} \right) sign(i,j)^{L_{\xi\eta}},\ (\xi,\eta)\in U_н$$

– оценки неопорных дуг, здесь L_s – цепь из узла s к произвольно выбранному узлу s^0, которая строится единственным образом [2, с.63]. Имеет место

Теорема (критерий оптимальности). Для оптимальности опорного потока x достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо выполнение соотношений:

$$\Delta_{\xi\eta} \ge 0,\ если\ x_{\xi\eta} = 0 \text{ и } \Delta_{\xi\eta} = 0,\ если\ x_{\xi\eta} > 0. \qquad (2)$$

В случае, когда оценки, соответствующие потоку поток x, не удовлетворяют соотношениям (2) построены итерации по изменению потока с целью минимизации целевой функции.

Рассмотрим 1-ую итерацию улучшения опорного потока x. Если соотношения (2) нарушаются на дуге $(\xi_0, \eta_0) \in U_н$, то новый поток $\bar{x}$ будем строить в виде $\bar{x} = x + \Theta^0 l$, где $l = \{l_{ij}, (i,j)\in U\}$ – подходящее допустимое направление [1, с.105], Θ^0 – максимально допустимый шаг вдоль l. Вектор l строим по следующему правилу:

$$l_{ij} = \begin{cases} -sign(i,j)^{L_{\xi_0\eta_0}}\, sign\, \Delta_{\xi_0\eta_0},\ если\ (i,j)\in U_{оп}; \\ 0,\ если\ (i,j)\in U_н \setminus (\xi_0\eta_0); \\ -sign\, \Delta_{\xi_0\eta_0},\ если\ (i,j) = (\xi_0, \eta_0). \end{cases}$$

Максимально допустимый шаг Θ^0 вдоль l равен $\Theta^0 = \min\{\Theta_{i_0 j_0}, \Theta_f\}$, где

$$\Theta_{i_0 j_0} = \begin{cases} \infty,\ если\ l_{ij} \ge 0; \\ \min\limits_{(i,j)\in U} \left(-\dfrac{x_{ij}}{l_{ij}} \right),\ если\ l_{ij} < 0; \end{cases}$$

$$\Theta_f = \begin{cases} \infty,\ \textit{если} \sum\limits_{(i,j)\in L_{\xi_0\eta_0}} \sum\limits_{(k,l)\in L_{\xi_0\eta_0}} d_{ij}^{kl} sign(i,j)^{L_{\xi_0\eta_0}} sign(k,l)^{L_{\xi_0\eta_0}} \le 0; \\ \dfrac{\left|\Delta_{\xi_0\eta_0}\right|}{\sum\limits_{(i,j)\in L_{\xi_0\eta_0}} \sum\limits_{(k,l)\in L_{\xi_0\eta_0}} d_{ij}^{kl} sign(i,j)^{L_{\xi_0\eta_0}} sign(k,l)^{L_{\xi_0\eta_0}}}\ \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $\Theta^0 = \infty$, то целевая функция не ограничена снизу и решение задачи прекращается. В случае $\Theta^0 < \infty$ переходим к потоку $\overline{x}$, для которого формируем новое опорное множество дуг по следующим правилам: а) если $\Theta^0 = \Theta_{i_0 j_0}$, $(i_0, j_0) \in U_{оп}$, то $\overline{U}_{оп} = (U_{оп} \setminus (i_0, j_0)) \cup (\xi_0, \eta_0)$; б) если $\Theta^0 = \Theta_{i_0 j_0}$, $(i_0, j_0) = (\xi_0, \eta_0)$, то опорное множество дуг не изменится; в) если $\Theta^0 = \Theta_f$, то опорное множество останется без изменений, но с новым опорным потоком свяжем множество $\overline{U_0} = \{(\xi_0, \eta_0)\}$.

Аналогичным образом построен алгоритм для *k*-ой итерации. Пусть найден поток $x^{(k)}$, для которого соотношения (2) нарушаются на дуге $(\xi, \eta)^{(k)} \in U_н$. Новый поток $x^{(k+1)}$ будем строить в виде $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Theta^{(k)} l^{(k)}$. Вектор $l^{(k)}$ строим по следующему правилу:

$$l_{ij}^{(k)} = -sign(i,j)^{L_{(\xi\eta)^k}} sign\,\Delta_{(\xi\eta)^k}^{(k)} + \sum_{(\xi,\eta)\in U_0^k} \gamma_{\xi\eta}^{(k)} sign(i,j)^{L_{\xi\eta}},\ (i,j)\in U.$$

Коэффициенты $\gamma_{\xi\eta}^{(k)}, (\xi, \eta) \in U_0^{(k)}$, находим из системы уравнений:

$$\sum_{(p,m)\in U_0^k} \gamma_{pm}^{(k)} \sum_{(i,j)\in L_{\xi\eta}} \sum_{(k,l)\in L_{pm}} d_{ij}^{kl} sign(i,j)^{L_{\xi\eta}} sign(k,l)^{L_{pm}} =$$

$$\sum_{(i,j)\in L_{\xi\eta}} \sum_{(k,l)\in L_{(\xi\eta)^k}} d_{ij}^{kl} sign(i,j)^{L_{\xi\eta}} sign(k,l)^{L_{(\xi\eta)^k}} sign\Delta_{(\xi\eta)^k}^{k},\ (\xi,\eta)\in U_0^{(k)}.$$

Аналогично, как и для 1-ой итерации, получена формула для определения максимально допустимого шага $\Theta^{(k)}$ вдоль $l^{(k)}$: $\Theta^{(k)} = \min\left\{\Theta_{(ij)^k}, \Theta_f^{(k)}\right\}$, здесь

$$\Theta_{(ij)^k} = \begin{cases} \infty,\ \textit{если}\ l_{ij}^{(k)} \ge 0; \\ \min\limits_{(i,j)\in U}\left(-\dfrac{x_{ij}^{(k)}}{l_{ij}^{(k)}}\right),\ \textit{если}\ l_{ij}^{(k)} < 0; \end{cases} \quad \Theta_f^k = \begin{cases} \infty,\ \textit{если}\ \alpha^{(k)} = 0; \\ \dfrac{\left|\Delta_{(\xi\eta)^k}\right|}{\alpha^k},\ \textit{если}\ \alpha^{(k)} > 0; \end{cases}$$ где

$$\alpha^{(k)} = \sum_{(i,j)\in L_{(\xi\eta)^k}} \sum_{(k,l)\in L_{(\xi\eta)^k}} d_{ij}^{kl} sign(i,j)^{L_{(\xi\eta)^k}} sign(k,l)^{L_{(\xi\eta)^k}} -$$

$$- \sum_{(\xi,\eta)\in U_0^{(k)}} \sum_{(i,j)\in L_{\xi\eta}} \sum_{(k,l)\in L_{(\xi\eta)^k}} d_{ij}^{kl} sign(i,j)^{L_{\xi\eta}} sign(k,l)^{L_{(\xi\eta)^k}} \gamma_{\xi\eta}^{k} sign\Delta_{(\xi\eta)^k}^{k}.$$

Если $\Theta^{(k)} = \infty$, то получено направление $l^{(k)}$ бесконечного убывания целевой функции и решение задачи прекращается. В случае $\Theta^{(k)} < \infty$ переходим к потоку $x^{(k+1)}$, для которого формируем новое опорное множество дуг в зависимости от $\Theta^{(k)}$.

Заключение. В дальнейшем будет разработан код алгоритма, который можно использовать в приложениях. Теоретический материал может быть предметом спецкурсов.

Список литературы

1. Русак, Т.В. Опорный метод решения транспортной квадратичной задачи/ Т.В.Русак // Образование XXI века : материалы XI (56) Региональной науч.-практ. конф. студентов и магистрантов, Витебск, 24-25 марта 2011 г. – Витебск, 2011. – С. 31–33.
2. Габасов, Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – 2-е изд. Мн.: изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981. – 350 с.
3. Командина, Л.В. Нагруженная транспортная задача./ Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. Методы линейного программирования. Ч.2. Транспортные задачи. Мн.: изд-во БГУ им. В.И.Ленина, 1978. – 240 с.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОИСТОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДАВЛЕНИИ

Е.А. Корчевская
Витебск, УО «ВГУ им. П.М. Машерова»

Исследования свободных колебаний предварительно напряженных тонких изотропных цилиндрических оболочек проводились в ряде работ [1–5]. В частности, в [1] изучено влияние однородных начальных окружных мембранных усилий, обусловленных внешним или внутренним давлением, на собственные частоты колебаний бесконечной цилиндрической оболочки. Экспериментальные исследования собственных колебаний шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении равномерно распределенными осевыми силами, выполнены в статье [2]. Аналогичный теоретический анализ влияния осевых сил на собственные частоты колебаний изотропных цилиндрических оболочек проведен в [3, 4], при этом в [4] были использованы трехмерные уравнения оболочек с учетом поперечных сдвигов и нормальных напряжений. В приведенных публикациях начальные напряжения, вызванные действием внешних статических сил, предполагались однородными, независящими от криволинейных координат оболочки. Как следствие, в таких задачах свободные колебания сопровождаются образованием волн, покрывающих всю поверхность оболочки.

Случай нагружения цилиндрической оболочки переменными в окружном направлении осевыми силами был рассмотрен в работах [5, 6]. В частности в [5], с использованием асимптотического метода, развитого в [7], собственные формы вязкоупругих колебаний построены в виде функций, убывающих во времени и локализованных вблизи образующей, испытывающей наибольшую осевую нагрузку. Впоследствии, данный метод был применен для исследования локализованных форм потери устойчивости слоистых композитных цилиндрических оболочек под действием неоднородных осевых сил [8–10]. Установлено [8], что учет поперечных сдвигов слоев, изготовленных из изотропных материалов, может сильно влиять на критическую осевую силу и степень локализации форм потери устойчивости в случае неоднородности нагружения. Теоретические и численные