ОБ ИНЪЕКТОРАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ДЛЯ МНОЖЕСТВ ФИТТИНГА

С.Н. Воробьев
Витебск, УО «ВГУ им. П.М. Машерова»

Все рассматриваемые группы являются конечными. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. В работе Андерсона [2] было получено обобщение известной теоремы Гашюца-Фишера-Хартли [3] о существовании и сопряжённости F-инъекторов в любой разрешимой группе G для любого класса Фиттинга F. Андерсон [2] использовал для этой цели понятие множества Фитттинга.

Напомним, что если $\boldsymbol{F}$ – непустое множество подгрупп группы G, то все подгруппы из $\boldsymbol{F}$ называются $\boldsymbol{F}$-подгруппами группы G. Непустое множество подгрупп $\boldsymbol{F}$ группы G называют множеством Фиттинга группы G [2], если выполняются следующие условия:

1. Из $H \in \boldsymbol{F}$ и $g \in G$ следует, что $H^g \in \boldsymbol{F}$,
2. если $H \in \boldsymbol{F}$ и S является нормальной подгруппой группы H, то $S \in \boldsymbol{F}$,
3. если N_1 и N_2 являются нормальными $\boldsymbol{F}$ –подгруппами произведения N_1N_2, то $N_1N_2 \in \boldsymbol{F}$.

Заметим, что если F – класс Фиттинга и G является группой, то множество $Tr_{\mathsf{F}}(G) = \{H \le G : H \in \mathsf{F}\}$ называется следом F в группе G и является также множеством Фиттинга G. Поэтому из теоремы Андерсона [2] о существовании и сопряжённости $\boldsymbol{F}$ -инъекторов в разрешимой группе для для множества Фиттинга $\boldsymbol{F}$ следует указанная выше теорема Гашюца-Фишера-Хартли. Основная цель настоящей работы расширение теоремы Гашюца-Фишера-Хартли на случай произвольных Фиттинговых множеств и частично разрешимых групп.

Если $\boldsymbol{F}$ – множество Фиттинга, то подгруппа $G_{\boldsymbol{F}} = \langle S$: S является субнормальной $\boldsymbol{F}$ -подгруппой группы $G \rangle$ называется $\boldsymbol{F}$ -радикалом группы G.

Напомним также, что $\boldsymbol{F}$ -подгруппу S группы G называют $\boldsymbol{F}$ -максимальной в G, если для любой $\boldsymbol{F}$ -подгруппы T такой, что $S \le T$, следует, что $S = T$.

Подгруппу S называют $\boldsymbol{F}$ -инъектором группы G, если $S \cap N$ является $\boldsymbol{F}$ -максимальной в N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Обозначим через $\sigma(\boldsymbol{F})$ множество всех различных простых делителей всех групп из $\boldsymbol{F}$.

Нами доказана

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{F}$ – множество Фиттинга группы G и факторгруппа $G/G_{\boldsymbol{F}}$ является $\sigma(\boldsymbol{F})$-разрешимой. Тогда в G существуют $\boldsymbol{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены в G.

Следствие 1 (Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M., теорема 2.4.27 [4]). Пусть $\boldsymbol{F}$ – Фиттингово множество группы G и $G/G_{\boldsymbol{F}}$ является разрешимой группой. Тогда группа G имеет единственный сопряженный класс $\boldsymbol{F}$ -инъекторов.

Следствие 2 (Шеметков Л.А., теорема 2.2 [5]). Пусть $\boldsymbol{F}$ – множество Фиттинга группы G и G является $\sigma(\boldsymbol{F})$-разрешимой группой. Тогда G обладает по крайней мере одним $\boldsymbol{F}$ -инъектором и любые два $\boldsymbol{F}$ -инъектора сопряжены в G.

Следствие 3 (Andersen W. [2]). Пусть $\boldsymbol{F}$ – множество Фиттинга группы G и G разрешимая группа. Тогда в G существуют $\boldsymbol{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены в G.

Следствие 4 (Guo W. [6]). Пусть F – класс Фиттинга и G такая группа, что группа G/G_{F} является $\sigma(\mathsf{F})$-разрешимой. Тогда в G существуют F-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.

Следствие 5 (Сементовский В.Г. [7]). Пусть F – класс Фиттинга и G такая группа, что G/G_{F} разрешима. Тогда в G существуют F-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.

Следствие 6 (Fischer B., Gaschutz W., Hartley B. [3]). Пусть F – класс Фиттинга и группа G разрешима. Тогда в G существуют F-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.

Список литературы

1. Doerk K., Hawkes T.O. Finite Soluble Groups // De Gruyter Exp. in Math. –Vol.4. – Berlin-New York, 1992. – 891 p.
2. Andersen W. Injectors in finite solvable groups // J. Algebra. – 1975. –Vol.36, N 2. – P.333–338.
3. Fischer B., Gaschutz W., Hartley B., Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen // Math.Z. –1967. – Bd.102, № 5. – S. 337–339.
4. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M., Classes of Finite Groups, Springer, Dordrecht, 2006.
5. Шеметков Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп // В кн.Конечные группы. –Мн.: Наука и техника. – 1975. – С.207–212.
6. Guo W., The Theory of Classes of Groups, Science Press-Kluwer Academic Publishers, Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London, 2000.
7. Сементовский В.Г. Инъекторы конечных групп. В кн.Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Мн.: Наука и техника. – 1984. –С. 159–166.

О НОВЫХ КЛАССАХ ФИТТИНГА, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ГИПОТЕЗЕ ЛОКЕТТА

Е.Н. Залесская, Ж.П. Макарова
Витебск, УО «ВГУ им. П.М. Машерова»

В последние годы сформировалось целое направление в теории классов групп – исследование классов групп с помощью решеток и свойств решеток. Локеттом была сформулирована следующая проблема, устанавливающая взаимосвязь решеток нормальных и произвольных классов Фиттинга, которая в настоящее время известна как

Гипотеза Локетта. Каждый класс Фиттинга F совпадает с пересечением $F^{*} \cap N(F)$. (L)

В работе [1] Бергером и Косси доказано существование классов Локетта, которые не являются классами Фишера (в частности, нелокальны) и для которых гипотеза (L) неверна. Нами найдены новые разрешимые классы Фиттинга, для которых гипотеза (L) неверна.

Для этого воспользуемся конструкцией класса Фиттинга, предложенной Бергером и Косси [1].

Пусть R – экстраспециальная группа порядка 27 и экспоненты 3 и W – точный неприводимый R-модуль над полем $GF(7)$ размерности 3. И пусть $Y=WR$. Обозначим через A группу автоморфизмов группы R. Пусть $B=C_A(Z(R))$, Q – подгруппа кватернионов группы B и $X=Z(Q)Y$.

Следуя [1], определим класс □ F следующим образом: