ТЕОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ В ОБРАЗОВАНИИ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССАХ

О ПРОНОРМАЛЬНЫХ ФИТТИНГОВЫХ ФУНКТОРАХ

Е.А. Витько
Витебск, УО «ВГУ им. П.М. Машерова»

В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Основная цель настоящей работы – разработка нового метода построения пронормальных фиттинговых функторов в классе S^{π} всех π-разрешимых групп.

Пусть X – некоторый непустой класс Фиттинга. Отображение f, которое каждой группе $G \in \mathsf{X}$ ставит в соответствие некоторое множество ее X-подгрупп $f(G)$, называется [2] фиттинговым X-функтором, когда выполняются следующие условия:

1) если α: $G \to \alpha(G)$ – изоморфизм, то

$$f(\alpha(G)) = \{\alpha(X) \mid X \in f(G)\};$$

2) если N – нормальная подгруппа группы G, то

$$f(N) = \{X \cap N \mid X \in f(G)\}.$$

Фиттингов X-функтор называется:

1) π-разрешимым, если $\mathsf{X} = \mathsf{S}^{\pi}$;

2) сопряженным, если для каждой группы $G \in \mathsf{X}$, множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп группы G.

Холловской системой π-разрешимой группы G называют такое множество Σ холловых подгрупп из G, что выполняются следующие условия:

1) для всякого множества ρ из π множество Σ содержит точно одну холлову ρ-подгруппу и точно одну $(\rho \cup \pi')$-подгруппу;

2) если $H, K \in \Sigma$, то $HK = KH$.

Пусть Σ – холловская система π-разрешимой группы G и R – подгруппа группы G. Через $\Sigma \cap R$ обозначают множество подгрупп $\{S \cap R \mid S \in \Sigma\}$. Если $\Sigma \cap R$ – холловская система группы R, то говорят, что Σ редуцирует холловскую систему Σ_R подгруппы R и обозначают $\Sigma \square\ R$. В этом случае Σ называется продолжением холловской системы Σ_R. Всякая холловская система Σ_R подгруппы R может быть продолжена до некоторой холловской системы Σ группы G. Всякая холловская система группы G редуцируется в некоторую сопряженную с R подгруппу.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Подгруппу A группы G называют π-связанной, если либо порядок подгруппы A, либо ее индекс в G является π-числом.

Напомним, что подгруппа H группы G называется пронормалъной в G, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $< H, H^x >$.

Известно [3], что π-связанная подгруппа H π-разрешимой группы G пронормальна тогда и только тогда, когда всякая холловская система Σ группы G редуцируется точно в одну подгруппу, сопряженную с H.

Определение 1. Пусть f – фиттингов X-функтор. Множество всех простых чисел p, для которых существует такая подгруппа $X \in f(G)$, что число p является делителем ее порядка, назовем характеристикой фиттингова X-функтора f и обозначим Char f.

Определение 2. Фиттинговы X-функторы f и g назовем перестановочными, если для любых подгрупп $X \in f(G)$ и $Y \in g(G)$ выполняется равенство $XY = YX$.

Определение 3. Фиттингов X-функтор f назовем пронормальным, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является пронормальной в группе G.

Определение 4. Пусть $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π-разрешимых функторов таких, что $f_\lambda(G)$ – множество π-связанных подгрупп для всех $\lambda\in\Lambda$ и Char $f_\lambda \cap$ Char $f_\mu = \varnothing$, если $\lambda \neq \mu$. Определим операцию $\vee$ следующим образом:

$$f_\lambda(G) = \Big\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid X_\lambda \in f_\lambda(G),$$ существует холловская система группы G, которая редуцируется в подгруппу X_λ для всех $\lambda\in\Lambda\}$.

Теорема. Пусть $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π-разрешимых фиттинговых функторов таких, что $f_\lambda(G)$ – множество π-связанных подгрупп для всех $\lambda\in\Lambda$ и Char $f_\lambda \cap$ Char $f_\mu = \varnothing$, если $\lambda \neq \mu$. Тогда $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ – пронормальный сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор.

Список литературы

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Витько, Е.А. Фиттинговы функторы и радикалы конечных групп / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журнал. – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 1253–1263.
3. Сементовский, В.Г. О пронормальных подгруппах конечных π-разрешимых групп / В.Г. Сементовский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2000. – № 3. – С. 55–59.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

Н.Н. Воробьев[1], В.О. Побойнев[2]
[1]Гомель, УО «ГГУ им. Ф. Скорины»,
[2]Полоцк, УО «ПГАЭК»

Все рассматриваемые группы конечны. Определения и обозначения, которые мы не приводим, можно найти в [1, 2].

В дальнейшем символ ω означает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \Pi \setminus \omega$.

Символами N_p и N обозначаются соответственно класс всех p-групп и класс всех нильпотентных групп.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация F называется ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G, удовлетворяющая условию $G / L \in \mathsf{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$.

Всякая формация считается 0-кратно ω-насыщенной, а при $n > 0$ формация F называется n-кратно ω-насыщенной, если $\mathsf{F} = LF_\omega(f)$, где все непустые значения спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями [3].