МАТЭМАТЫКА

УДК 517.956.32

О разрывах частных производных высших порядков решений общего одномерного факторизованного волнового уравнения в четверти плоскости

Ф.Е. Ломовцев
Белорусский государственный университет

В настоящей статье изучается гладкость частных производных высших порядков $k \geq 3$ *классических решений* $u \in C^{k-1}(G_\infty)$ *одномерного волнового уравнения* $(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)\,u(x,t) = f(x,t)$ *и его правой части* f *в первой четверти плоскости.*

Цель исследования – нахождение линий разрывов частных производных высших порядков классических решений этого волнового уравнения в случае существования производных высших порядков и выявление необходимых требований гладкости на правую часть f *для существования классических решений* $u \in C^k(G_\infty),\ k \geq 3$.

Материал и методы. *Применяется метод распространяющихся волн из курса уравнений математической физики, при этом используются общие свойства линейных гиперболических дифференциальных уравнений.*

Результаты и их обсуждение. *Доказано, что частные производные высших порядков* $k \geq 3$ *классических решений* $u \in C^{k-1}(G_\infty)$ *одномерного факторизованного неоднородного волнового уравнения могут иметь разрыв в первой четверти плоскости лишь на кусках характеристик* $x - a_1t = C_1,\ x + a_2t = C_2,$ *на кусках прямых* $x - \sqrt[k]{(-a_2)^{k-j}a_1^{\,j}}\ t = C_{j+2},\ j = \overline{1, k-1},$ *при* k *нечетных и кусках прямых* $x - \sqrt[k]{a_2^{\,k-j}a_1^{\,j}}\ t = C_{j+2},$ $x + \sqrt[k]{a_2^{\,k-j}a_1^{\,j}}\ t = C_{j+3},\ \ j = 1, 3, 5, \ldots, k-1,$ *при* k *четных. Это позволило вывести необходимость требования гладкости* $f \in C^{k-2}(G_\infty)$ *и соответствующих интегральных требований гладкости на правую часть* f *для существования более гладких классических решений* $u \in C^k(G_\infty),\ k \geq 3,$ *исследуемого уравнения.*

Заключение. *Результаты можно применить для поиска необходимых требований гладкости на правую часть* f *в теоремах повышения гладкости классических решений смешанных задач для искомого уравнения в полуполосе плоскости методом «вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны».*

Ключевые слова: *факторизованное уравнение колебаний струны, классическое решение неоднородного уравнения, носитель разрыва частной производной высшего порядка, необходимое требование гладкости.*

About Rupture of Higher-Order Partial Derivatives of Solutions of the General Factorized One-Dimensional Wave Equation in a Quarter of the Plane

F.E. Lomovtsev
Belarusian State University

In this paper we study the smoothness of the partial derivatives of higher orders $k \geq 3$ *of classical solutions* $u \in C^{k-1}(G_\infty)$ *of one-dimensional wave equation* $(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t)$ *and its right-hand side* f *in the first quarter of the plane.*

The purpose of the article – finding break lines of partial derivatives of higher orders of classical solutions of the wave equation in the case of the existence of these derivatives and the identification of necessary smoothness requirements on the right-hand side f *for the existence of classical solutions* $u \in C^k(G_\infty),\ k \geq 3,$ *of this equation.*

Material and methods. *The purpose of the article is achieved by propagating waves from a course of mathematical physics equations, using the general properties of linear hyperbolic differential equations.*

Findings and their discussion. *It is proved that the partial derivatives of higher orders* $k \geq 3$ *of classical solutions* $u \in C^{k-1}(G_\infty)$ *of one-dimensional factored inhomogeneous wave equation can have a break only on the pieces on the characteristics:* $x - a_1 t = C_1,\ x + a_2 t = C_2,$ *to pieces of the direct:* $x - \sqrt[k]{(-a_2)^{k-j} a_1^{\,j}}\ t = C_{j+2},\ j = \overline{1, k-1},$ *for the odd index* k *and to pieces of the direct:* $x - \sqrt[k]{a_2^{\,k-j} a_1^{\,j}}\ t = C_{j+2},\ \ x + \sqrt[k]{a_2^{\,k-j} a_1^{\,j}}\ t = C_{j+3},\ \ j = 1, 3, 5, \ldots, k-1,$ *for the even index* k. *This allowed us to take the necessary requirements of smoothness* $f \in C^{k-2}(G_\infty)$ *and the corresponding integral smoothness requirements on the right-hand side* f *for the existence of more smooth classical solutions* $u \in C^k(G_\infty),\ k \geq 3,$ *of this equation.*

Conclusion. *The results can be used to search for the required smoothness requirements on the right-hand side* f *to increase the smoothness theorems of classical solutions of mixed problems for the desired equation in using the method of «auxiliary mixed problems for a semi-infinite string».*

Key words*: the factorized equation of string vibrations, a classical solution of the inhomogeneous equation, the gap support of higher order partial derivative, a necessary smoothness requirement.*

В настоящей работе доказано, что в первой четверти плоскости частные производные высших порядков (порядков выше двух) от классических решений общего линейного факторизованного уравнения колебаний струны могут иметь разрыв только на частях характеристик этого уравнения и/или на кусках двух выведенных соответствующих семейств прямых в зависимости от нечетности или четности порядка производной. Этим уравнением моделируются вынужденные колебания однородной упругой струны в движущейся упруго сопротивляющейся среде.

Цель исследования – нахождение линий разрывов частных производных высших порядков классических решений этого волнового уравнения в случае существования производных высших порядков и выявление необходимых требований гладкости на правую часть f для существования классических решений $u \in C^k(G_\infty),\ k \geq 3.$

Ранее носители разрывов кусочно-непрерывных первых частных производных решений простейшего уравнения колебаний струны были установлены в [1, с. 83–85] и общего одномерного факторизованного уравнения колебаний струны в [2], где также найдены носители разрывов кусочно-непрерывных вторых частных производных от обобщенных решений общего одномерного факторизованного уравнения. В настоящем исследовании также для любого $k \geq 3$ раз непрерывно дифференцируемого классического решения общего факторизованного линейного неоднородного уравнения колебаний струны в первой четверти плоскости указано в виде его слагаемого единственное (с точностью до аддитивных нетривиальных классических решений соответствующего однородного факторизованного линейного уравнения колебаний струны [3]) $k \geq 3$ раз непрерывно дифференцируемое классическое решение данного неоднородного уравнения в первой четверти плоскости.

В качестве приложений полученных результатов затем нами выводятся необходимые требования гладкости на правую часть исследуемого уравнения для того, чтобы последнее классическое решение было $k \geq 3$ раз непрерывно дифференцируемой функцией в первой четверти плоскости. Для выявления необходимых требований гладкости на правую часть эти результаты можно применить к смешанным (начально-краевым) задачам для общего линейного факторизованного уравнения колебаний ограниченной струны в полуполосе плоскости методом «вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [4]. Методом распространяющихся волн (методом характеристик) некоторые смешанные задачи для различных уравнений колебаний струны решаются в работах [5–8].

Материал и методы. В первой четверти плоскости $G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[$ требуется найти линии разрывов частных производных высших порядков $k \geq 3$ классических решений волнового уравнения

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)\,u(x,t) = = f(x,t),\ \{x,t\} \in G_\infty, \tag{1}$$

где $\partial_t = \partial/\partial t, \partial_x = \partial/\partial x$ – первые частные производные и $a_1 > 0, a_2 \geq 0, b_1, b_2$ – постоянные вещественные коэффициенты.

Обозначим символом $C^m(\Omega)$ множество m раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω. *Классическими решениями* уравнения (1) в G_∞ называются его решения гладкости $u \in C^2(G_\infty)$. Если первые частные производные $\partial_t u$ и $\partial_x u$ от непрерывных решений $u \in C(G_\infty)$ волнового уравнения (1) существуют в обычном смысле на G_∞ и хотя бы одна из них терпит разрыв, то из [2] известно, что линиями этого разрыва служат части характеристик уравнения (1):

$$x - a_1 t = C_1,\ x + a_2 t = C_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathrm{R} =]-\infty, +\infty[\ , \tag{2}$$

находящиеся в первой четверти G_∞ плоскости R^2. Гладкие линии разрывов кусочно-непрерывных вторых частных производных обобщенных решений уравнения (1) были ранее выявлены в [2]. Сначала мы находим указанные в теореме 1 гладкие линии разрывов частных производных высших порядков $k \geq 3$ от классических решений $u \in C^{k-1}(G_\infty)$ уравнения (1) методом распространяющихся волн из курса уравнений математической физики [1]. Затем с помощью этих результатов доказываем, что каждое более гладкое классическое решение $u \in C^k(G_\infty)$ неоднородного уравнения (1) содержит в виде его слагаемого единственное (с точностью до аддитивных нетривиальных классических решений соответствующего однородного факторизованного уравнения) более гладкое классическое решение $F \in C^k(G_\infty)$ неоднородного уравнения (1). Отсюда выводим необходимые требования гладкости на правую часть f, указанные в теореме 2.

Результаты и их обсуждение. Сначала находим линии разрывов частных производных высших порядков от решений одномерного факторизованного волнового уравнения.

Теорема 1. *Если частные производные $k \geq 2$ порядка от $k-1$ раз непрерывно дифференцируемых решений $u \in C^{k-1}(G_\infty)$ волнового уравнения (1) существуют в обычном смысле на G_∞ и хотя бы одна из них терпит разрыв, то линиями этого разрыва служат части характеристик (2) и при k нечетных и k четных соответственно части прямых*

$$x - \sqrt[k]{(-a_2)^{k-j}a_1^{\,j}}\ t = C_{j+2}, \qquad C_{j+2} \in \mathrm{R}\ ,\ j = \overline{1, k-1}, \tag{3}$$

$$x - \sqrt[k]{a_2^{\,k-j}a_1^{\,j}}\ t = C_{j+2}, \quad x + \sqrt[k]{a_2^{\,k-j}a_1^{\,j}}\ t = C_{j+3}, \quad C_{j+2}, C_{j+3} \in \mathrm{R},\ j = 1, 3, 5, \ldots, k-1, \tag{4}$$

которые находятся в первой четверти G_∞ плоскости R^2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $k = 2$ линии разрывов (4) кусочно-непрерывных вторых производных от обобщенных решений уравнения (1) установлены в [2]. Найдем их для $k \geq 3$. В силу бесконечной дифференцируемости функции e^{Bx-At}, где постоянные $A = (a_1 b_2 + a_2 b_1)/(a_1 + a_2)$ и $B = (b_2 - b_1)/(a_1 + a_2)$, исследование гладкости и разрывов частных производных высших порядков от классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ уравнения (1) заменой функции $u(x,t) = e^{Bx-At}\hat{u}(x,t)$ сводится к исследованию гладкости и разрывов частных производных высших порядков от классических решений $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$ уравнения

$$(\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)\,\hat{u}(x,t) = \hat{f}(x,t),\ \{x,t\} \in G_\infty,\ \ a_1 > 0,\ a_2 \geq 0, \tag{5}$$

с правой частью $\hat{f}(x,t) = e^{At-Bx} f(x,t),$ где функция f – правая часть уравнения (1).

Найдем линии разрывов классических решений уравнения (5) для $k = 3.$ По условиям теоремы 1 третьи частные производные решений $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$ уравнения (5) существуют в обычном смысле в G_∞ и хотя бы одна из них терпит разрыв на некоторой трижды непрерывно дифференцируемой кривой l уравнения $x = x(t), t \in [\alpha, \beta],$ из произвольного прямоугольника $ABCD$ в G_∞ (см. рис. 20 в [1]).

Сначала для более гладких решений $\hat{u} \in C^4(G_\infty)$ и, следовательно, правой части $\hat{f} \in C^2(G_\infty)$ дважды дифференцируем по t уравнение (5) и находим уравнение

$$(\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t) = \partial_{tt}\hat{f}(x,t),\ \{x,t\} \in G_\infty, \tag{6}$$

которое интегрируем по прямоугольнику $ABCD$ в G_∞ с вершинами B и D на кривой $l \in C^3[\alpha,\beta]$, в левой части полученного равенства применяем известную формулу Грина и приходим к равенству [1]

$$\int\limits_{BA+DC} (\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)dx + \int\limits_{AD+CB} a_2\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)dt = -\iint\limits_{ABCD} \partial_{tt}\hat{f}(x,t)dxdt. \tag{7}$$

Отметим, что в левой части этого равенства интегрирование ведется в положительном направлении обхода периметра $AD + DC + CB + BA$ прямоугольника $ABCD$. Затем равенство (7) распространяется предельным переходом с решений $\hat{u} \in C^4(ABCD)$ на множество всех решений $\hat{u} \in C^2(ABCD),$ у которых по предположению теоремы 1 существуют в обычном смысле кусочно-непрерывные частные производные третьего порядка в $ABCD$.

Далее интегрируем уравнение (6) по криволинейным треугольникам $\Delta ABD,\ \Delta BCD$ и тем же путем соответственно приходим к равенствам

$$\begin{gathered}\int\limits_{BA} (\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)dx + \int\limits_{AD} a_2\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)dt + \\ + \int\limits_{DB} a_2\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)dt + (\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)dx = -\iint\limits_{\Delta ABD} \partial_{tt}\hat{f}(x,t)dxdt,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{DC} (\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)\,dx + \int\limits_{CB} a_2\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)\,dt + \\ + \int\limits_{BD} a_2(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)dt + (\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)dx = -\iint\limits_{\Delta BCD} \partial_{tt}\hat{f}(x,t)dxdt.\end{gathered} \tag{9}$$

Вычитаем почленно равенство (7) из суммы равенств (8) и (9) и имеем равенство

$$\begin{gathered}\int\limits_{DB} \{a_2\big((\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)\big)_1\,dt + \big((\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)\big)_1 dx - \\ - a_2\big((\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)\big)_2\,dt - \big((\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_{tt}\hat{u}(x,t)\big)_2\,dx\} = 0,\end{gathered} \tag{10}$$

где нижние индексы 1 и 2 обозначают предельные значения частных производных соответственно из треугольников ΔABD и $\Delta BCD.$ Ввиду произвольности l из равенства (10) вытекает первое уравнение для разрывов третьих частных производных

$$a_2\big([\partial_{ttt}\hat{u}(x,t)] + a_1[\partial_{xtt}\hat{u}(x,t)]\big) + x'(t)\big([\partial_{ttt}\hat{u}(x,t)] + a_1[\partial_{xtt}\hat{u}(x,t)]\big) = 0,\ t \in [\alpha,\beta], \tag{11}$$

где символом $[g] = (g)_1 - (g)_2$ обозначена величина разрыва функции g на дуге $DB,$ $[\partial_{ttt}\hat{u}(x,t)]$

и $[\partial_{xtt}\hat{u}(x,t)]$ – разрывы соответственно третьих частных производных $\partial_{ttt}\hat{u} = \partial^3\hat{u} / \partial t^3$ и $\partial_{xtt}\hat{u} = \partial^3\hat{u} / \partial x\partial t^2 = \partial^3\hat{u} / \partial t^2\partial x$ от решений $\hat{u} \in C^2(ABCD)$ и производная $x'(t)$ из дифференциала $dx = x'(t)dt$. В дальнейшем уравнения разрывов производных с коэффициентами, равными коэффициентам уравнения (11), условимся называть *уравнениями разрывов 1-го типа.*

С целью получения второго уравнения разрывов третьих частных производных аналогичным образом сначала для более гладких решений $\hat{u} \in C^4(G_\infty)$ и, следовательно, правой части $\hat{f} \in C^2(G_\infty)$ однократно дифференцируем по t и x уравнение (5) и в силу коммутируемости дифференциальных множителей в (5) на функциях $\hat{u} \in C^4(G_\infty)$ имеем уравнение

$$(\partial_t + a_1\partial_x)(\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t) = \partial_{xt}\hat{f}(x,t), \quad \{x,t\} \in G_\infty. \tag{12}$$

Это уравнение интегрируем по прямоугольнику *ABCD,* в левой части полученного равенства применяем формулу Грина и приходим к равенству [1]

$$\int\limits_{BA+DC} (\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t)dx - \int\limits_{AD+CB} a_1\,(\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t)dt = -\iint\limits_{ABCD} \partial_{xt}\hat{f}(x,t)dxdt, \tag{13}$$

которое, как и выше, потом распространяется предельным переходом с решений $\hat{u} \in C^4(ABCD)$ на множество всех решений $\hat{u} \in C^2(ABCD)$. Ввиду предположения теоремы 1 у этих решений существуют в обычном смысле кусочно-непрерывные частные производные третьего порядка в *ABCD.* Интегрируем уравнение (12) по криволинейным треугольникам ΔABD, ΔBCD с общей стороной DB на кривой $l \in C^3[\alpha,\beta]$ и так же, как выше, соответственно приходим к равенствам

$$\int\limits_{BA} (\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t)dx - \int\limits_{AD} a_1\,(\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t)dt -$$
$$-\int\limits_{DB} a_1\,(\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t)dt - (\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t)dx = -\iint\limits_{\Delta ABD} \partial_{xt}\hat{f}(x,t)dxdt, \tag{14}$$

$$\int\limits_{DC} (\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t)dx - \int\limits_{CB} a_1\,(\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t)dt -$$
$$-\int\limits_{BD} a_1\,(\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t)dt - (\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_{xt}\hat{u}(x,t)dx = -\iint\limits_{\Delta ABD} \partial_{xt}\hat{f}(x,t)dxdt. \tag{15}$$

Вычитаем почленно равенство (13) из суммы равенств (14), (15) и находим равенство

$$\int\limits_{DB} \{a_1\big((\partial_t - a_2\partial_x)\partial_{xt}\hat{u}(x,t)\big)_1 dt - \big((\partial_t - a_2\partial_x)\partial_{xt}\hat{u}(x,t)\big)_1 dx -$$
$$-a_1\big((\partial_t - a_2\partial_x)\partial_{xt}\hat{u}(x,t)\big)_2 dt + \big((\partial_t - a_2\partial_x)\partial_{xt}\hat{u}(x,t)\big)_2 dx\} = 0, \tag{16}$$

из которого ввиду произвольности l имеем второе уравнение разрывов третьих частных производных

$$a_1\big([\partial_{xtt}\hat{u}(x,t)] - a_2[\partial_{xxt}\hat{u}(x,t)]\big) - x'(t)\big([\partial_{xtt}\hat{u}(x,t)] - a_2[\partial_{xxt}\hat{u}(x,t)]\big) = 0,\ t \in [\alpha,\beta], \tag{17}$$

где $[\partial_{xxt}\hat{u}(x,t)]$ – разрыв частной производной $\partial_{xxt}\hat{u} = \partial^3\hat{u} / \partial x^2\partial t = \partial^3\hat{u} / \partial t\partial x^2$ от решений $\hat{u} \in C^2(ABCD)$. В дальнейшем уравнения разрывов производных, коэффициенты которых совпадают с коэффициентами уравнения (17), будем называть *уравнениями разрывов 2-го типа.*

Если продифференцировать дважды по x уравнение (5) и к результату дифференцирования применить предыдущие рассуждения, то в конце концов получим третье уравнение разрывов соответствующих третьих частных производных 2-го типа

$$a_1\big([\partial_{xxt}\hat{u}(x,t)] - a_2[\partial_{xxx}\hat{u}(x,t)]\big) - x'(t)\big([\partial_{xxt}\hat{u}(x,t)] - a_2[\partial_{xxx}\hat{u}(x,t)]\big) = 0,\ t \in [\alpha,\beta], \tag{18}$$

где $[\partial_{xxx}\hat{u}(x,t)]$ – разрыв частной производной $\partial_{xxx}\hat{u} = \partial^3\hat{u} / \partial x^3$ от решений $\hat{u} \in C^2(ABCD)$.

Третья производная по *t* от решений $\hat{u}$ вдоль линии разрыва $l \in C^3[\alpha,\beta]$ по двум взаимно противоположным направлениям 1 и 2 равна значениям

$$d^3\hat{u}(x(t),t)/dt^3 = \left(\partial_{xxx}\hat{u}(x,t)\right)_i x'^3(t) + 3\left(\partial_{xx}\hat{u}(x,t)\right)_i x'(t)x''(t) +$$
$$+\left(\partial_x\hat{u}(x,t)\right)_i x'''(t) + \left(\partial_{ttt}\hat{u}(x,t)\right)_i,\ i=1,2,$$

разность которых для решений $\hat{u}\in C^2(G_\infty)$ дает четвертое уравнение разрывов третьих производных

$$[\partial_{ttt}\hat{u}(x,t)] + x'^3(t)[\partial_{xxx}\hat{u}(x,t)] = 0,\quad t\in[\alpha,\beta]. \tag{19}$$

Однородная система уравнений (11), (17)–(19) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель тождественно равен нулю

$$\begin{vmatrix} x'(t)+a_2 & a_1(x'(t)+a_2) & 0 & 0 \\ 0 & a_1 - x'(t) & -a_2(a_1 - x'(t)) & 0 \\ 0 & 0 & a_1 - x'(t) & -a_2(a_1 - x'(t)) \\ 1 & 0 & 0 & x'^3(t) \end{vmatrix} = (a_1 - x'(t))^2(x'(t)+a_2)(x'^3(t) - a_2^2 a_1) = 0.$$

Это уравнение для всех $a_1>0,\ a_2\ge 0$ имеет действительные корни $x'(t)=a_1,\quad x'(t)=-a_2,$ $x'(t)=\sqrt[3]{a_2^2 a_1},\quad t\in[\alpha,\beta],$ которым соответствуют характеристики (2) и прямая из (3) при $j=1$.

Если бы в предыдущих рассуждениях мы вместо второго уравнения разрывов 2-го типа (17) взяли уравнение разрывов 1-го типа

$$a_2\left([\partial_{xtt}\hat{u}(x,t)] + a_1[\partial_{xxt}\hat{u}(x,t)]\right) + x'(t)\left([\partial_{xtt}\hat{u}(x,t)] + a_1[\partial_{xxt}\hat{u}(x,t)]\right) = 0,\ t\in[\alpha,\beta], \tag{20}$$

то определитель системы (11), (18)–(20) был бы равен

$$\begin{vmatrix} x'(t)+a_2 & a_1(x'(t)+a_2) & 0 & 0 \\ 0 & x'(t)+a_2 & a_1(x'(t)+a_2) & 0 \\ 0 & 0 & a_1 - x'(t) & -a_2(a_1 - x'(t)) \\ 1 & 0 & 0 & x'^3(t) \end{vmatrix} = (a_1 - x'(t))(x'(t)+a_2)^2(x'^3(t) + a_2 a_1^2) = 0.$$

Это уравнение для всех $a_1>0,\ a_2\ge 0$ имеет действительные корни $x'(t)=a_1,\quad x'(t)=-a_2,$ $x'(t)=-\sqrt[3]{a_2 a_1^2},\quad t\in[\alpha,\beta],$ которым соответствуют характеристики (2) и прямая из (3) при $j=2$. В случае нечетного $k=3$ теорема 1 доказана.

Теперь найдем линии разрывов частных производных $\partial_x^i\partial_t^{k-i}\hat{u} = \partial^k\hat{u}/\partial x^i\partial t^{k-i} = \partial^k\hat{u}/\partial x^{k-i}\partial t^i,\ \ i=\overline{0,k},$ от решений $\hat{u}\in C^{k-1}(G_\infty)$ любых нечетных порядков $k>3$. По аналогии с последними рассуждениями для разрывов производных $\partial_x^i\partial_t^{k-i}\hat{u},\ \ i=\overline{0,k},$ последовательно составляем нечетное количество $k>3$ уравнений разрывов, из которых первые j уравнений являются уравнениями разрывов 1-го типа и следующие за ними $k-j$ уравнений – уравнениями разрывов 2-го типа, следующих соответственно друг за другом в порядке возрастания значений индекса $i=\overline{0,k}$ для каждого значения индекса $j=\overline{1,k-1}$. К этой системе нечетного $k>3$ количества уравнений разрывов добавляем еще уравнение разрывов

$$[\partial_t^k\hat{u}(x,t)] + x'^k(t)[\partial_x^k\hat{u}(x,t)] = 0,\quad t\in[\alpha,\beta]. \tag{21}$$

Это уравнение получается как разность значений k-ой производной по t от решений $\hat{u}\in C^{k-1}(G_\infty)$ вдоль гладкой линии разрыва $l\in C^k[\alpha,\beta]$ по двум взаимно противоположным направлениям:

$$\frac{d^k\hat{u}(x(t),t)}{dt^k} = \frac{d^{k-1}\left(\hat{u}_x(x,t)x'(t)+\hat{u}_t(x,t)\right)_i}{dt^{k-1}} = \sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^s\left(\frac{d^s\hat{u}_x(x,t)}{dt^s}\right)_i \frac{d^{k-s}x(t)}{dt^{k-s}} + \left(\frac{\partial^k\hat{u}(x,t)}{\partial t^k}\right)_i, \tag{22}$$
$$i=1,2,$$

где C_{k-1}^{s} – число сочетаний из $k-1$ по s элементов. В результате имеем четное количество $k+1$ уравнений разрывов всех производных $\partial_x^i \partial_t^{k-i} \hat{u}, \ i = \overline{0,k},$ *k*-го порядка. Ее определитель равен

$$\begin{vmatrix} x'(t)+a_2 & a_1(x'(t)+a_2) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x'(t)+a_2 & a_1(x'(t)+a_2) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 - x'(t) & -a_2(a_1 - x'(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 - x'(t) & -a_2(a_1 - x'(t)) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & x'^k(t) \end{vmatrix}, \qquad (23)$$

в котором первые j строк соответствуют уравнениям разрывов 1-го типа и следующие за ними $k-j$ строк соответствуют уравнениям разрывов 2-го типа. Раскладывая его по последней четной $k+1$ строке и приравнивая его нулю, получаем уравнения

$$(a_1 - x'(t))^{k-j} (x'(t)+a_2)^j \left(x'^k(t) - (-a_2)^{k-j} a_1^{\ j} \right) = 0, \quad j = \overline{1, k-1},$$

имеющие действительные корни $x'(t) = a_1, \quad x'(t) = -a_2, \quad x'(t) = \sqrt[k]{(-a_2)^{k-j} a_1^{\ j}}, \ j = \overline{1, k-1}, \ \ t \in [\alpha, \beta].$ Этим корням соответствуют характеристики (2) и прямые (3). Теорема 1 для нечетных $k \geq 3$ доказана.

Найдем линии разрывов частных производных четных высших порядков $k \geq 2$ от решений $\hat{u} \in C^{k-1}(G_\infty).$ Для $k = 2$ они найдены в [2]. Ищем их сразу для всех четных $k \geq 4.$ Составляем четное количество $k \geq 4$ первых уравнений разрывов частных производных $\partial_x^i \partial_t^{k-i} \hat{u}, \ i = \overline{0,k},$ порядка k от решений $\hat{u} \in C^{k-1}(G_\infty)$ также, как выше для нечетных $k \geq 3.$ Дополняем эти уравнения разрывов еще одним уравнением разрывов (21), которое также вытекает из (22) для решений $\hat{u} \in C^{k-1}(G_\infty).$ Определитель полученной системы уравнений разрывов частных производных порядка k имеет вид (23). Согласно его разложению по последней нечетной $k+1$-ой строке через определители двух треугольных матриц имеем уравнения

$$(a_1 - x'(t))^{k-j} (x'(t)+a_2)^j \left(x'^k(t) + (-a_2)^{k-j} a_1^{\ j} \right) = 0, \ j = \overline{1, k-1}.$$

Эти уравнения имеют только вещественные корни $x'(t) = a_1, \quad x'(t) = -a_2, \quad x'(t) = \pm \sqrt[k]{a_2^{\ k-j} a_1^{\ j}},$ $j = 1, 3, 5, \ldots, k-1, \ t \in [\alpha, \beta],$ которым соответствуют характеристики (2) и прямые (4) для всех четных $k \geq 4.$ Теорема 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. В случае $a_2 > 0$ уравнения характеристик (2) соответственно совпадают с уравнениями (3) при $j = k, \ j = 0,$ а также с первым уравнением из (4) при $j = k$ и вторым уравнением из (4) при $j = 0.$ Итак, на основании известных результатов о разрывах первых частных производных из [2] и теоремы 1 о разрывах частных производных порядков $k \geq 2$ можно утверждать, что производные нечетных и четных порядков $k \geq 1$ одномерного волнового уравнения (1) могут допускать разрывы соответственно на $k+1$ и $k+2$ прямых, т.е. при любых $k \geq 1$ на $2[k/2]+2$ прямых, где $[c]$ – целая часть числа c, не превосходящая числа c.

П р и л о ж е н и е р е з у л ь т а т о в р а б о т ы к поиску необходимых требований гладкости на правую часть f для существования решений $u \in C^k(G_\infty), k \geq 2,$ уравнения (1) в первой четверти плоскости.

Теорема 2. *Если* $u \in C^k(G_\infty), k \geq 2,$ *– некоторое классическое решение неоднородного уравнения (1), то правая часть* f *уравнения (1) имеет гладкость функций из множества* $C^{k-2}(G_\infty),$ *функция*

$$F(x,t) = e^{Bx - At} \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} \hat{f}(|s|, \tau) \, ds \, d\tau,$$

$\hat{f}(|x|, t) = e^{At - Bx} f(|x|, t),$ *имеет гладкость функций из множества* $C^k(G_\infty), k \geq 2,$ *функция* F *удовлетворяет неоднородному уравнению (1) и для* f *справедливы требования гладкости*

$$\int_0^t e^{b_i \tau} f\left(\left|x + (-1)^i a_i (t - \tau)\right|, \tau\right) d\tau \in C^{k-1}(G_\infty), i = 1, 2. \qquad (24)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы 2 для $k=2$ доказано в [2]. Докажем его для $k\geq 3$. Выше показано, что исследование гладкости классических решений $u\in C^2(G_\infty)$ уравнения (1) сводится к исследованию гладкости классических решений $\hat u\in C^2(G_\infty)$ уравнения (5). Методом распространяющихся волн выводится общий интеграл классических решений уравнения (5), т.е. множество всех его классических решений $\hat u\in C^2(G_\infty)$ в первой четверти G_∞:

$$\hat u(x,t)=g(x-a_1t)+h(x+a_2t)+\hat F(x,t),\quad \hat F(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\int_0^t\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}\hat f(|s|,\tau)\,ds\,d\tau, \tag{25}$$

где g,h – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции своих переменных и $\hat F$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на G_∞. Непосредственным дифференцированием легко убедиться в том, что функция $\hat F\in C^2(G_\Gamma)$ для функций $f\in C(G_\infty)$, удовлетворяющих требованиям (24) при $k=2$. Для решений $\hat u\in C^k(G_\infty)$ правая часть уравнения (5) очевидно обладает гладкостью $\hat f\in C^{k-2}(G_\infty), k\geq 3,$ для которых функция $\hat F$ не менее, чем дважды, непрерывно дифференцируема в G_∞. Поэтому непосредственной подстановкой $\hat F$ в уравнение (5) легко проверяется, что она удовлетворяет уравнению (5) в G_∞, т.е. является его классическим решением. Согласно общему интегралу (25) множество всех классических решений уравнения (5), т.е. множество всех его решений гладкости $\hat u\in C^2(G_\infty)$, представимо в виде

$$\hat u(x,t)=\hat u_0(x,t)+\hat F(x,t), \tag{26}$$

где дважды непрерывно дифференцируемые функции $\hat u,\hat F$ и $\hat u_0$ удовлетворяют соответственно уравнению (5) при $\hat f\neq 0$ и $\hat f=0$.

Пусть здесь функция $\hat u\in C^k(G_\infty),\ k\geq 3$. В силу теоремы 1 частные производные порядков $k\geq 3$ от функции $\hat F$ могут терпеть разрывы только на прямых (2) и/или (3) при нечетных k и на прямых (2) и/или (4) при четных k. Выясним, могут ли в равенстве (26) негладкие слагаемые из $\hat F$ сократиться с негладкими слагаемыми из $\hat u_0$ для того, чтобы их сумма $\hat u$ стала k раз непрерывно дифференцируемой на G_∞. Во-первых, выражение $\hat F$ не является функцией характеристик (2), т.е. не зависит только от $x-a_1t$ или $x+a_2t$, и не является суммой некоторых функций от $x-a_1t$ и $x+a_2t$ соответственно**,** так как в противном случае функция $\hat F$ была бы решением уравнения (5) при $\hat f=0$, а не при $\hat f\neq 0$. Во-вторых, функция $\hat F$ не содержит слагаемых, зависящих только от $x-a_1t$ или $x+a_2t$, так как в противном случае нарушалась бы ее единственность, как не содержащего нетривиальных слагаемых вида $\hat u_0$ решение неоднородного уравнения (5) [3]. В-третьих, если коэффициенты $a_1>0,\ a_2>0,$ $a_1\neq a_2$, то прямые характеристик (2) не совпадают с прямыми (3) и (4) и, следовательно, решения $\hat u_0$, которые не зависят от нехарактеристических прямых (3) и (4), не могут иметь разрывы на кусках прямых (3) и (4). Если же коэффициенты $a_1>0,\ a_2>0,\ a_1=a_2$, то прямые (3) и (4) становятся характеристиками из (2) и на функцию $\hat F$ распространяются предыдущие два вывода. То же самое имеет место для $\hat F$ при $a_1>0,\ a_2=0$, когда все прямые из (3) и (4) совпадают с характеристиками $x=C_2$ из (2). Таким образом, в равенстве (26) негладкие слагаемые из $\hat F$ не могут сократиться с негладкими слагаемыми из $\hat u_0$ для того, чтобы их сумма $\hat u$ стала k раз непрерывно дифференцируемой на G_∞. Поэтому функция $\hat F$ должна быть тоже из множества $C^k(G_\infty),\ k\geq 3$.

Функция $\hat F\in C^k(G_\Gamma)$ очевидно должна иметь $k-1$ раз непрерывно дифференцируемые производные на G_∞ вдоль характеристик (2) уравнения (1):

$$\frac{d\tilde{F}}{dt} - (-1)^i a_i \frac{d\tilde{F}}{dx} = e^{-B[x-(-1)^i a_{3-i} t]} \int_0^t e^{b_{3-i}\tau} f(|x-(-1)^i a_{3-i}(t-\tau)|, \tau)\, d\tau \in C^{k-1}(G_\Gamma),\ i = 1, 2.$$

Отсюда следует необходимость требований гладкости (24) для $k \geq 3$. Теорема 2 доказана.

Заключение. В работе доказано, что при любых $a_1 > 0,\ a_2 \geq 0$ частные производные высших порядков $k \geq 3$ классических решений одномерного факторизованного неоднородного волнового уравнения (1) могут терпеть разрыв в первой четверти плоскости лишь на кусках характеристик $x - a_1 t = C_1,\ x + a_2 t = C_2$, на кусках прямых $x - \sqrt[k]{(-a_2)^{k-j} a_1^{\,j}}\ t = C_{j+2},\quad j = \overline{1, k-1}$, при k нечетных и кусках прямых $x - \sqrt[k]{a_2^{\,k-j} a_1^{\,j}}\ t = C_{j+2},\quad x + \sqrt[k]{a_2^{\,k-j} a_1^{\,j}}\ t = C_{j+3},\ j = 1, 3, 5, ..., k-1$, при k четных. Эти результаты на основании аддитивной единственности из [3] частного решения F линейного неоднородного уравнения (1) позволили нам вывести не только необходимость гладкости $f \in C^{k-2}(G_\infty)$, но и интегральных требований гладкости (24) на правую часть f для существования более гладких классических решений $u \in C^k(G_\infty),\ k \geq 3,$ одномерного факторизованного неоднородного волнового уравнения (1). В конечном счете, эти необходимые требования гладкости на f вытекают из общего интеграла (25), процитированного выше свойства аддитивной единственности решения F и вида носителей разрывов частных производных высших порядков решений уравнения (1), которые, в свою очередь, следуют из линейности и гиперболичности дифференциального уравнения (1). Полученные необходимые требования гладкости на правую часть f можно использовать для нахождения необходимых требований гладкости на f в теоремах повышения гладкости классических решений различных вспомогательных смешанных задач для уравнения (1) в первой четверти плоскости. Затем, имея эти необходимые условия на f в четверти плоскости, можно выводить все необходимые условия на f в теоремах повышения гладкости классических решений смешанных задач для уравнения колебаний ограниченной струны вида (1) в полуполосе плоскости методом «вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [4].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 2004. – 798 с.
2. Ломовцев, Ф.Е. О разрывах первых и вторых частных производных решений общего одномерного факторизованного волнового уравнения в первой четверти плоскости / Ф.Е. Ломовцев // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. Математика. – 2016. – № 12. – С. 117–124.
3. Ломовцев, Ф.Е. Единственность частных решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений, не содержащих нетривиальные частные решения их однородных уравнений / Ф.Е. Ломовцев // XII Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г.: в 5 ч. – Минск, 2016. – Ч. 2. – С. 71–72.
4. Ломовцев, Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф.Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: материалы междунар. матем. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г.: в 2 ч. – Минск, 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
5. Ломовцев, Ф.Е. Классические решения неоднородного факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2015. – № 4(88). – С. 5–11.
6. Корзюк, В.И. Уравнения математической физики / В.И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2011. – 459 с.
7. Моисеев, Е.И. Классическое решение задачи с интегральным условием для однородного волнового уравнения / Е.И. Моисеев, В.И. Корзюк, И.С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1373–1385.
8. Корзюк, В.И. Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В.И. Корзюк, С.И. Пузырный // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 2. – С. 22–31.

R E F E R E N C E S

1. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 2004, 798 p.
2. Lomovtsev F.E. *Vestnik PDU Ser. C Fundamentalniye nauki* [Newsletter of Polotsk State University. Ser. C. Basic Science. Mathematics], 2016, 12, pp. 117–124.
3. Lomovtsev F.E. *XII Belorusskaya matematicheskaya konferentsiya: tez. dokl. Mezhdunar. nauch. konf., Minsk 5–10 sent. 2016 g.* [XII Belarusian Mathematical Conference: Report Abstracts of Intern. Scientific Conf. Minsk, September 5–10, 2016], Minsk, 2016, Part 2, pp. 71–72.
4. Lomovtsev F.E. *Shestiye Bogdanovskiye chteniya po obyknovennim differentsialnym uravneniyam: mater. Mezhdunar. matem. Konf. Minsk 7–10 dek. 2015* [Sixth Bogdanov Reading on Ordinary Differential Equations: Mater. of Intern. Mathem. Conf. Minsk, December 7–10, 2015], Minsk, 2015, Part 2, pp. 74–75.
5. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. *Vestnik VDU* [Newsletter of Vitsebsk State University], 2015, 4 (88), pp. 5–11.
6. Korzyuk V.I. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Minsk, BGU, 2011, 459 p.
7. Moiseyev E.I., Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. *Differentsialniye uravneniya* [Differential Equations], 2014, 50(10), pp. 1373–1385.
8. Korzyuk V.I., Puzirniy V.I. *Vesti Natsionalnoi Akademii nauk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Nauk.* [Journal of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, 2, pp. 22–31.

Поступила в редакцию 16.01.2017

Адрес для корреспонденции: e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.