Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Н.Н. Воробьев, С.Н. Воробьев, М.И. Наумик

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ: ДЕЛИМОСТЬ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2017

УДК 511.7(075.8)
ББК 22.13я73
В75

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 28.12.2016 г.

Авторы: профессор кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, доцент **Н.Н. Воробьев;** доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **С.Н. Воробьев;** доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.И. Наумик**

Научный редактор:
заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор *Н.Т. Воробьев*

Рецензент:
профессор кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор *Ю.В. Трубников*

Воробьев, Н.Н.

В75 Теория чисел: делимость в кольце целых чисел : методические рекомендации / Н.Н. Воробьев, С.Н. Воробьев, М.И. Наумик. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 55 с.

Настоящее издание предназначено для первоначального изучения основ теории чисел. В начале каждого параграфа даются основные теоретические сведения (определения, формулировки некоторых теорем). Затем приведены подробно разобранные решения ряда стандартных задач, а также предложены задачи для самостоятельного решения (их свыше 1100).

Адресовано студентам физико-математических специальностей и может успешно использоваться для проведения практических и самостоятельных (контрольных) работ по дисциплинам «Теория чисел», «Алгебра и теория чисел», «Геометрия и алгебра».

УДК 511.7(075.8)
ББК 22.13я73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целое число, наряду с простейшими геометрическими фигурами, является первым и древнейшим математическим понятием. Теория чисел возникла из задач *арифметики,* связанных с умножением и делением целых чисел.

В Древней Греции (VI в. до н.э.) изучалась делимость целых чисел, были выделены отдельные подклассы целых чисел (например, простые и составные числа). Евклид[1] в «Началах» арифметики дал систематическое построение теории делимости на основе так называемого *алгоритма Евклида* для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел, доказал первую теорему теории простых чисел – бесконечность множества простых чисел. Несколько позднее Эратосфеном[2] найден метод получения простых чисел который стал называться *решетом Эратосфена*.

Систематизация проблем теории чисел и методов их решений проведена Диофантом (III век) в его «Арифметике», где, в частности, дано решение в рациональных числах многих алгебраических уравнений первой и второй степени с целыми коэффициентами от нескольких неизвестных.

Расцвет теории чисел начался в Европе с работ П. Ферма (Pierre Fermat). Он исследовал решения многих уравнений в целых числах, в частности, высказал гипотезу, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$, не имеет решений в натуральных числах. Это так называемая Великая теорема Ферма или Последняя теорема Ферма (Observatio Domini Petri de Fermat) – одна из самых популярных теорем математики. Ее условие формулируется достаточно просто, однако доказательство Великой теоремы искали многие выдающиеся математики более трехсот лет (Л. Эйлер, П.Г. Дирихле, А.М. Лежандр, Г. Ламе, Э.Э. Куммер и др.). Доказательство было найдено лишь в 1994 году профессором Оксфордского университета Эндрю Уайлсом (Andrew Whiles). В 2016 году за доказательство Великой теоремы Ферма Эндрю Уайлс получил Абелевскую премию.

Важный вклад в теорию чисел внес Л. Эйлер (L. Euler). Он доказал целый ряд теорем о представлении чисел *бинарными квадратичными формами*. Л. Эйлер был первым, кто для решения задач теории чисел привлек средства математического анализа, что привело к созданию *аналитической теории чисел*. *Производящие функции Эйлера* явились источником кругового метода Харди[3] – Литлвуда[4] – Рамануджана[5]и *метода*

---

[1] Евклид или Эвклид (Εὐκλείδης) [около 325 года до н.э. – до 265 года до н.э., Александрия] – древнегреческий математик – первый математик Александрийской школы, создатель геометрии.

[2] Эратосфен Киренский (‘Ερατοσθένης ὁ Κνρηνατος) [276 год до н.э., Кирена, – 194 год до н.э., Александрия] – древнегреческий математик, астроном, географ, филолог и поэт. С 235 года до н.э. – глава Александрийской библиотеки. Первый известный ученый, вычисливший размеры Земли, основатель научной хронологии.

[3] Гофри Харолд Харди (Godfrey Harold Hardy) [07.02.1877, Кранли, Уэверли, Суррей, Англия – 01.12.1947, Кембридж] – английский математик, известный своими работами в теории чисел и математическом анализе. Является одним из авторов закона Харди-Вайнберга в популяционной генетике.

[4] Джон Идензор Литлвуд (John Edensor Littlewood) [09.06.1885, Рочестер, Кент – 06.09.1977, Кембридж] – английский математик. Основные работы относятся к математическому анализу, теории чисел и теории динамических систем.

[5] Сриниваса Рамануджан Айенгор (Srīnivāsa Rāmānujan Iyengar) [22.12.1887, Эрод, Ченнаи, Мадрасское президентство – 26.04.1920, Четпут, Ченнаи, Мадрасское президентство] – индийский математик. Не имея специального математического образования получил замечательные результаты в области теории чисел. Сфера его математических интересов была очень широка. Это магические квадраты, квадратура круга, бесконечные ряды, гладкие числа, разбиения чисел, гипергеометрические функции, специальные суммы и функции, ныне носящие его имя, определенные интегралы, эллиптические и модулярные функции. Сформулировал около 120 теорем (в основном в виде исключительно сложных тождеств).

тригонометрических сумм И.М. Виноградова[6] – основных методов современной аддитивной теории чисел.

К. Гаусс[7] (C. Gauss создал основные методы и завершил построение *теории сравнений*, доказал *закон взаимности* квадратичных вычетов, сформулированный Л. Эйлером, заложил основы теории представления чисел квадратичными формами $ax^2 + bxy + cy^2$ и формами высших степеней со многими *переменными*, ввел так называемые *суммы Гаусса*, и доказал их полезность в решении задач теории чисел. Можно считать, что в работах К. Гаусса было завершено построение теории чисел. Говоря об этом завершении, мы имеем в виду тот факт, что до К. Гаусса теория чисел представляла собой собрание отдельных результатов и идей, а после выхода его работ она начала развиваться в различных направлениях как стройная теория. Интенсивные научные исследования в этой области математики продолжались и в XIX и в XX веках и успешно ведутся в настоящее время, однако основные результаты, которые принято называть классическими, были полностью доказаны к XIX веку.

Вместе с тем до настоящего времени в теории чисел осталось большое количество нерешенных и полурешенных задач высокого качества (например, проблема бесконечности числа простых чисел близнецов была поставлена еще Евклидом и не решена до сих пор). Эти задачи, как правило, имеют простые математические формулировки, понятные и доступные даже школьнику. Их решения достаточно трудны и зачастую стимулируют создание новых математических теорий и определяют концепции развития науки на долгие годы. Такими являются: теория простых чисел и связанная с ней теория дзета-функций и рядов Дирихле, теория диофантовых уравнений, аддитивная теория чисел, метрическая теория чисел, теория алгебраических и трансцендентных чисел, алгебраическая теория чисел, теория диофантовых приближений, вероятностная теория чисел, геометрия чисел. Например, источником аналитической теории чисел послужили проблема распределения простых чисел в натуральном ряде и проблема представления натуральных чисел суммою слагаемых определенного вида. Решение уравнений в целых числах, которые стали называться диофантовыми, в частности, Великая теорема Ферма, послужили источником алгебраической теории чисел. Проблема построения с помощью циркуля и линейки круга единичной площади (*квадратура круга*) привела к вопросу об арифметической природе числа π, а вместе с ним – к созданию теории алгебраических и трансцендентных чисел.

Долгое время считалось, что теория чисел в математике является «чистым искусством» и вне математической науки практически не имеет применения: «… Гаусс, а также другие математики, по-видимому, справедливо утверждали, что существует, по крайней мере, одна наука (теория чисел), которая, ввиду своей отдаленности от обыденной человеческой деятельности, остается чистой и благородной» (G.H. Hardy, A Mathematician's Apology, 1940).

---

[6] Иван Матвеевич Виноградов [14.09.1891, село Милолюб, Великолукский уезд, Псковская губерния – 20.03.1983, Москва] – советский математик, академик АН СССР (1929) по Отделению физико-математических наук (математика). Дважды Герой Социалистического Труда (1945, 1971), Лауреат Ленинской (1972) и Государственной премии СССР (1983), Лауреат Сталинской премии первой степени (1941). Работы И.М. Виноградова посвящены в основном аналитической теории чисел. Его главным достижением стало создание метода тригонометрических сумм, который является сейчас одним из основных в аналитической теории чисел.

[7] Карл Фридрих Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauß) [30.04.1777, Брауншвейг, Нижняя Саксония – 23.02.1855, Гёттинген, Ганновер] – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времен, «королем математиков». Все многочисленные опубликованные труды Гаусса содержат значительные результаты, «сырых» и «проходных» работ не было ни одной.

Вместе с тем, следует отметить, что труды Евклида и Диофанта, Ферма и Эйлера, Гаусса, П.Л. Чебышёва[8] и Эрмита[9] содержат остроумные и весьма эффективные алгоритмы решения диофантовых уравнений, выяснения разрешимости сравнений, построения больших по тем временам простых чисел, нахождения наилучших приближений и т.д.

Без преувеличения можно сказать, что вся теория чисел пронизана *алгоритмами*. Таким образом, одной из важнейших областей применения теории чисел стала наука на стыке математики и информатики – криптография.

Криптография – наука о шифрах – долгое время была засекречена, так как применялась, в основном, для защиты государственных и военных секретов. С развитием электронных коммуникаций криптография стала предметом интереса более широкого круга потребителей: возникла необходимость защиты технических, коммерческих, персональных и иных данных, передаваемых негосударственными организациями по общедоступным каналам связи. Шифрование и дешифрование текстов можно представить, как процессы переработки целых чисел (при помощи ЭВМ), а способы, которыми выполняются эти операции, как некоторые функции, определенные на множестве целых чисел. Все это делает естественным появление в криптографии методов теории чисел. Кроме того, стойкость ряда современных криптосистем обосновывается только сложностью некоторых теоретико-числовых задач. Справедливо и обратное: криптография является богатым источником трудных математических задач.

Предлагаемые методические рекомендации, являясь по сути практикумом по решению задач, дополняют вышедшую ранее брошюру (Н.Н. Воробьев, С.Н. Воробьев, М.И. Наумик) [30] и содержат свыше тысячи ста задач. Настоящее издание посвящено элементарной теории чисел, а именно, теории делимости в кольце целых чисел, поэтому даже для первоначального ознакомления с ней читателю достаточно знаний курса математики средней школы. Весь изучаемый материал разбит на 15 параграфов. Каждый параграф, как правило, предваряется краткими сведениями теоретического материала: излагаются и иллюстрируются на примерах соответствующие математические понятия, формулируются ключевые свойства и теоремы. Затем приведен с решениями ряд стандартных задач. В параграфе 14 читателю предложены задачи для самостоятельного решения. Параграф 15 посвящен краткой истории Великой теоремы Ферма.

Настоящее издание составлено в соответствии с учебной программой дисциплины «Теория чисел» и предназначено студентам физико-математических специальностей университетов. Отдельные его параграфы доступны также учащимся старших классов средней школы[10].

[8] Пафнутий Львович Чебышёв [04.05.1821, село Окатово, Боровский уезд, Калужская губерния – 26.11.1894, Санкт-Петербург] – русский математик и механик, основоположник петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук (1859) и еще 24 академий мира. Получил фундаментальные результаты в теории чисел (распределение простых чисел) и теории вероятностей (центральная предельная теорема, закон больших чисел), построил общую теорию ортогональных многочленов, теорию равномерных приближений и многие другие. Основал математическую теорию синтеза механизмов и разработал ряд практически важных концепций механизмов.

[9] Шарль Эрмит (Charles Hermite) [24.12.1822, Дьёз – 14.01.1901, Париж] – французский математик, признанный лидер математиков Франции во второй половине XIX века. Член Парижской академии наук (1856), член-корреспондент (1857) и почетный член (1895) Петербургской академии наук, иностранный член Лондонского королевского общества (1873). Награжден орденом Почетного легиона (1892). Характерной особенностью научных работ Эрмита было открытие связей между различными разделами математики, что нередко приводило к созданию новых разделов. Основные работы относятся к теории чисел, теории квадратичных форм, теории инвариантов, ортогональных многочленов, эллиптических функций и алгебре. Эрмит показал, что число *e* (основание натурального логарифма) является транцендентным.

[10] На обложке изображена почтовая марка Чехии 2000 года ко Всемирному году математики, посвященная Великой теореме Ферма.

1 ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

1.1 Определение. Пусть a и b – целые числа ($b \neq 0$). Говорят, что a делится на b, если $a = b \cdot s$, где s – целое число.

Тот факт, что a делится на b записывается так $a \vdots b$.

Таким образом, на множестве целых чисел определено отношение делимости:

$$a \vdots b \Leftrightarrow \exists s \in \subseteq a = bs \wedge b \neq 0$$

1.2 Теорема (*о свойствах отношения делимости*).

1\. *Отношение делимости на множестве целых чисел транзитивно, т.е.* $a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$.

2\. *Для любых целых чисел* u и υ $a \vdots c \wedge b \vdots c \Rightarrow (ua + \upsilon b) \vdots c$.

3\. $a \vdots b \wedge a \neq 0 \Rightarrow |a| \geq |b|$.

4\. $a \vdots b \Rightarrow a \vdots (-b)$.

1.3 Следствие. 1. *При любом* n *из того, что* $a \vdots c \Rightarrow na \vdots c$.

2\. *Пусть* $a = bs + t$. *Тогда* $a \vdots c \wedge b \vdots c \Leftrightarrow b \vdots c \wedge t \vdots c$.

3\. *Если каждое из чисел* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *делится на с, то при любых целых* $u_1, u_2, \ldots u_n$ $\left(\sum_{i=1}^{n} u_i a_i\right) \vdots c$.

5\. $a \vdots b \wedge b \vdots a \Rightarrow a = b \vee a = -b$.

5\. $a \vdots b \Rightarrow a = 0 \vee |a| \geq |b|$.

1.4 Пример. При каких целых n $(n^3 + 7m + 1) \vdots (n-2)$?

Решение.

$$\frac{n^3 + 7n + 1}{n-2} = n^2 + 2n + 11 + \frac{23}{n-2}, \text{ так как}$$

$$\begin{array}{r|l} n^3+7n+1 & n-2 \\ \hline -\; n^3 - 2n^2 & n^2+2n+11 \\ \hline 2n^2+7n & \\ -\; 2n^2 - 4n & \\ \hline 11n + 1 & \\ -\; 11n - 22 & \\ \hline 23 & \end{array}$$

Имеем $23 \vdots (n-2)$, т.е. $n - 2 = \pm 1; \pm 23$

$n - 2 = 1$, $n = 3$, $n - 2 = -1$, $n = 1$, $n - 2 = 23$, $n = 25$, $n - 2 = -23$, $n = -21$.

Ответ: {–21; –1; 3; 25}.

1.5 Пример. Доказать, что для любого натурального числа n целое число $a = -n^3 - 17n + 12$ делится на 6.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ число $a = -6$ делится на b и утверждение верно. Предположим, что утверждение верно для любого натурального числа $n \le k$. Докажем, справедливость утверждения при $n = k + 1$. Число $a = -(k+1)^3 - 17(k+1) + 12 = -(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - 17k - 17 + 12 = (-k^3 - 17k + 12) - 3k^2 - 3k - 1 - 17 = (-k^3 - 17k + + 12) - 3k(k + 1) - 18$. По предположению индукции $(-k^3 - 17k + 12)$ делится на 6. Одно из двух последовательных натуральных чисел k, $k + 1$ четно, и поэтому слагаемое $3k(k + 1)$ делится на 6. Так как каждое слагаемое в выражении $(-k^3 - 17k + 12) - 3\,k(k + 1) - 18$ делится на 6, то и вся сумма, которая является числом a делится на 6. Согласно принципу математической индукции, число $a = -n^3 - 17n + 12$ делится на 6 для любого натурального числа n.

2 ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

2.1 Определение. Пусть a и b – целые числа ($b \neq 0$). Делением с остатком a на b называется представление $a = bs + r$, где s, r – целые числа и $0 \le r < |b|$.

Иногда s называют неполным частным.

2.2. Теорема. *Для любых целых чисел* a *и* b ($b \neq 0$) *деление с остатком* a *на* b *всегда возможно и притом единственным образом.*

2.3 Пример. Разделить: а) 257 на 32; б) 257 на –23; в) –257 на 23; г) –257 на –23.

Решение. а)так как $257 = 23 \cdot 11 < 257 < 23 \cdot 12 = 276$, то $257 = 23 \cdot 11 + 4$.
б) $257 = 23 \cdot 11 + 4$ и запишем в виде $257 = (-23)\,(-11) + 4$;
в) найдем целое число s, такое, что $233 \le -257 < 23(s + 1)$. Так как $23\,(-12) = -276 < -257 < 23\,(-11)$, то $-257 = 23 \cdot (-12) + 19$;
г) берем $-257 = (-23) \cdot 12 + 19$.

Ответ: а) $257 = 23 \cdot 11 + 4$; б) $257 = (-23)\,(-11) + 4$; в) $-257 = 23 \cdot (-12) + 19$; г) $-257 = (-23) \cdot 12 + 19$.

2.4 Пример. Делимое 741, неполное частное –14. Найти делители и соответствующие им остатки.

Решение.

Имеем $\begin{cases} 741 = b \cdot (-14) + r, \\ 0 \le r < |b|. \end{cases}$ Получим $0 \le 741 + 14b < |b|$. Поскольку

$b < 0$, то $0 \le 741 + 14b < -b$. Отсюда следует $\begin{cases} 14b \ge -741, \\ 15b < -741. \end{cases}$ Следовательно $b_1 = -52$, $b_2 = -51$, $b_3 = -50$ и $r_1 = 13$, $r_2 = 27$, $r_3 = 41$.

Ответ: $b_1 = -52$, $r_1 = 13$; $b_2 = -51$, $r_2 = 27$; $b_3 = -50$, $r_3 = 41$.

2.5 Пример. Найти наибольшее целое число, дающее при делении на 13 частное 17.

Решение. $a = 13 \cdot 17 + r$, где $0 \le r < 13$. Очевидно, что a будет наибольшим при $r = 12$, т.е. $a = 233$.

Ответ: 233.

3 НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

3.1 Определение. Общим делителем чисел $a_1, a_2, \dots a_n$ называется такое число d, что $a_1 \vdots d$, $a_2 \vdots d$, …, $a_n \vdots d$.

Наибольшим общим делителем чисел $a_1, a_2, \dots a_n$ (сокращенно НОД($a_1, a_2, \dots a_n$)) называется такой их общий делитель d, который делится на любой общий делитель.

Наибольший общий делитель будем обозначать так НОД($a_1, a_2, \dots a_n$) или $(a_1, a_2, \dots a_n)$.

3.2 Замечание. Пусть d = НОД($a_1, a_2, \dots a_n$). Тогда если $d \vdots x$, то $-d \vdots x$. Поэтому, если существует один НОД($a_1, a_2, \dots a_n$), то наибольших общих делителей чисел $a_1, a_2, \dots a_n$ по крайнее мере два.

Можно показать, что никаких других наибольших общих делителей быть не может.

3.3 Замечание. Выясним, всякие ли два числа имеют НОД. Ответ на этот вопрос мы получим с помощью алгоритма Евклида.

Пусть a и b ($b \ne 0$) – целые числа

$$\begin{cases} a = bs_0 + r_1, & 0 \le r_1 < |b|; \\ b = r_1 s_1 + r_2, & 0 \le r_2 < r_1; \\ r_1 = r_2 s_2 + r_3, & 0 \le r_3 < r_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \\ r_{n-2} = r_{n-1} s_{n-1} + r_n, & 0 \le r_n < r_{n-1}; \\ r_{n-1} = r_n \cdot s_n \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку $|b| > r_1 > r_2 > \dots \; r_{n-2} > r_{n-1} > r_n > \dots$ и все эти числа неотрицательные, то этот процесс имеет конец, т.е. на каком-то шаге остаток станет равен нулю.

3.4 Определение. Систему равенств (1) назовем последовательностью Евклида чисел a и b ($b \neq 0$).

3.5 Теорема. *Пусть* a *и* b ($b \neq 0$) *– целые числа. Последний отличный от нуля остаток последовательности Евклида для чисел* a *и* b *является их наибольший общий делитель.*

3.6 Пример. Найти НОД(1734; 822).

Решение. Составим последовательность Евклида

$$\begin{cases} 1734 = 822 \cdot 2 + 90; \\ 822 = 90 \cdot 9 + 12; \\ 90 = 12 \cdot 7 + 6; \\ 12 = 6 \cdot 2. \end{cases}$$

Итак, НОД(1734; 822) = 6.

Другая схема:

1734	822	90	12	6	0
	2	9	7	2	

3.7 Теорема (о линейном представлении наибольшего общего делителя).

Пусть d = НОД(a; b). *Тогда найдутся такие целые числа* u *и* υ, *что* $d = ua + \upsilon b$.

3.8 Определение. Пусть d = НОД(a; b). Линейным представлением d называется выражение $d = ua + \upsilon b$.

3.9 Пример. Найти линейное представление для НОД(1734; 822).

Решение. Из примера 3.6 следует, что d = НОД(1734; 822) = 6. Имеем последовательность Евклидовых чисел 1734 и 822:

$$\begin{cases} 1734 = 822 \cdot 2 + 90; \\ 822 = 90 \cdot 9 + 12; \\ 90 = 12 \cdot 7 + 6; \\ 12 = 6 \cdot 2, \end{cases} \quad \text{т.е} \quad \begin{cases} a = 2b + r_1; \\ b = 9r_1 + r_2; \\ r_1 = 7r_2 + r_3. \end{cases}$$

Тогда, $6 = r_3 = r_1 - 7r_2 = r_1 - 7(b - 9r_1) = r_1 - 7b + 63r_1 = -7b + 64r_1 = -7b + 64(a - 2b) = 64a - 135b = 64 \cdot a + (-135)b$.

Имеем, $6 = 64 \cdot 1734 + (-135) \cdot 822$.

Ответ: НОД(1734; 822) $= 6 = 64 \cdot 1734 + (-135) \cdot 822$.

3.10 Следствие. 1. НОД(a; b) $= 1 \Leftrightarrow (\exists\, u, \upsilon \in Z)\ ua + \upsilon b = 1$.

2. $ua + \upsilon b = 1$, *тогда каждый общий делитель чисел* a *и* b *в том числе и наибольший общий делитель является делителем единицы.*

4 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ

4.1 Теорема. 1. *Наибольший среди положительных общих делителей чисел* a *и* b *является наибольшим общим делителем* a *и* b.

2. НОД(a; b) = $d \Rightarrow$ НОД($a \cdot k$; $b \cdot k$) = $d \cdot k$.

4.2 Следствие. 1. $a \vdots c \wedge b \vdots c \Rightarrow \text{НОД}\left(\frac{a}{c};\frac{b}{c}\right)=\frac{\text{НОД}(a,b)}{c}$.

2. НОД (a; b) = $d \Rightarrow \text{НОД}\left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right)=1.$

4.3 Теорема. *Пусть* $a_1, a_2,\ldots a_n$ *– целые числа отличные от* 0. *Тогда* НОД($a_1, a_2,\ldots a_{n-1}, a_n$) = НОД(НОД($a_1, a_2,\ldots a_{n-1}$), a_n).

4.4 Следствие. *Наибольший общий делитель чисел* a_1, $a_2,\ldots$ a_n *можно искать следующим образом. Сначала* d_1 = НОД(a_1; a_2). Затем d_2 = НОД(d_1; a_3), d_3 = НОД(d_2; a_4), … , $d_{n\text{-}1}$ = НОД($d_{n\text{-}2}$; a_n)

4.5 Пример. Вычислить НОД(588, 2058, 2849).

Решение. Применяя следствие 4.4 и алгоритм Евклида к числам 2058 и 588 получим $\begin{cases} 2058=588\cdot 3+294; \\ 588=294\cdot 2, \end{cases}$ т.е. НОД(2058, 588) = 294. Применяя алгоритм Евклида к числам 2849 и 294:

$$\begin{cases} 2849=294\cdot 9+203; \\ 294=203\cdot 1+91; \\ 203=91\cdot 2+21; \\ 91=21\cdot 4+7; \\ 21=7\cdot 3, \end{cases}$$

т.е. НОД(2849, 294) = 7.

Ответ: НОД(588, 2058, 2849) = 7.

5 ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

5.1 Определение. Числа $a_1, a_2,\ldots a_n$ называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

Числа $a_1, a_2,\ldots a_n$ называются попарно взаимно простыми, если каждые два из них взаимно простые.

5.2 Пример. Числа 6, 15, 35 – взаимно простые, но не попарно взаимно простые.

5.3 Пример. Числа 6, 25, 77, 169 – попарно взаимно простые.

Ясно, что если числа попарно взаимно простые, то они и взаимно простые.

Для двух чисел понятие взаимно простые и попарно взаимно простые совпадают.

1.5.4 Теорема. 1. НОД(a; b) = 1 $\wedge$ НОД(a; c) = 1 $\Rightarrow$ НОД(a; bc) = 1.
2. НОД(a; b) = 1 $\wedge$ $bc \vdots a \Rightarrow c \vdots a$;
3. НОД(a; b) = 1 $\wedge$ $c \vdots a \wedge c \vdots b \Rightarrow c \vdots ab$.

6 НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

6.1 Определение. Общим кратным чисел $a_1, a_2,\dots a_n$ называется такое число m, которое делится на все эти числа.

Наименьшим общим кратным (сокращенно НОК[$a_1, a_2,\dots a_n$]) называется такое их общее кратное на которое делится любое общее кратное.

Обозначение НОК[$a_1, a_2,\dots a_n$] или [$a_1, a_2,\dots a_n$] – наименьшее общее кратное чисел $a_1, a_2,\dots a_n$.

6.2 Теорема. *Пусть* d = НОК(a, b). *Тогда число* $m=\dfrac{ab}{d}$ *является наименьшим общим кратным* a *и* b.

6.3 Следствие. 1. $[a\cdot k; b\cdot k]$ = НОК$[a;b]\cdot k$;

2. $a \vdots c \wedge b \vdots c \Rightarrow \text{НОК}\left[\dfrac{a}{c};\dfrac{b}{c}\right]=\dfrac{\text{НОК}[a;b]}{c}$;

3. *Если* m *– наименьшее общее кратное чисел* a *и* b, *то* $-m$ *– тоже наименьшее кратное этих чисел. Два различных наименьших общих кратных отличаются лишь знаком;*

4. *Наименьшее по величине положительное общее кратное чисел* a *и* b *является их наименьшим общим кратным.*

5. *Наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению.*

6.4 Пример. Найти натуральные числа a и b, если НОД(a, b) = 15, НОК[a, b] = 420.

Решение. $a\cdot b$ = 6300. Из формулы $\text{НОК}[a;b]=\dfrac{a\cdot b}{\text{НОД}(a;b)}$ имеем

$$\frac{\text{НОК}[a;b]}{\text{НОД}(a,b)}=\frac{a}{\text{НОД}(a,b)}\cdot\frac{b}{\text{НОД}(a,b)},$$ т.е. $28=\dfrac{a}{15}\cdot\dfrac{b}{15}$ и $\text{НОД}\left(\dfrac{a}{15}\cdot\dfrac{b}{15}\right)=1.$

Из $\frac{a}{15}\cdot\frac{b}{15}=28$ имеем 1 · 28 = 4 · 7, т.е. $a_1 = 15$, $b_1 = 420$; $a_2 = 60$, $b_2 = 105$.

Ответ: $a_1 = 15$, $b_1 = 420$, $a_2 = 60$, $b_2 = 105$.

6.5 Теорема (о наименьшем общем кратном).

$$\text{НОК}[a_1, a_2, \ldots a_n] = \text{НОК}\,[\text{НОК}[a_1, a_2, \ldots a_{n-1}]a_n].$$

6.6 Замечание. Наименьшее общее кратное чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ можно искать следующим образом. Сначала $m_1 = \text{НОК}[a_1; a_2]$. Затем $m_2 = \text{НОК}[m_1; a_3]$, затем $m_3 = \text{НОК}[m_2; a_4]$ и т.д.

6.7 Пример. Вычислить НОК[2058; 588; 2849].

Решение. Найдем $m_1 = \text{НОК}[2058; 588]$ по формуле

$$m_1 = \frac{2058\cdot 588}{\text{НОД}(2058, 588)}.$$

Из примера 4.5 имеем НОД(2058, 588) = 294. Получаем $m_1 = 2058 \cdot 2 = 4116$. По формуле $m_2 = \text{НОК}[m_1; a_3]$ у нас $n = 3$, $m_1 = 4116$, $a_3 = 2849$.

Имеем

$$\begin{cases} 4116 = 2849\cdot 1 + 1267 \\ 2849 = 1267\cdot 2 + 315 \\ 1267 = 315\cdot 4 + 7 \\ 315 = 7\cdot 45 \end{cases}$$

И $m_2 = \text{НОК}[4116; 2849] = \frac{4116\cdot 2849}{\text{НОД}(4116; 2849)} = \frac{4116\cdot 2849}{7} =$

$$= \frac{4116\cdot 407}{1} = 4116\cdot 407 = 1675212.$$

Ответ: НОК(2058; 588) = 1675212.

7 КОНЕЧНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

7.1 Определение. Конечной цепной дробью называется рациональное число α,

$$\alpha = g_0 + \cfrac{1}{g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \cdots + \cfrac{1}{g_{s-1} + \cfrac{1}{g_s}}}} \qquad (2)$$

где все g_i – целые числа такие, что $g_1, g_2, \ldots, g_{s-1} \geq 1$, $g_s > 1$.

Другая запись $\alpha = [g_0; g_1, g_2, \ldots, g_s]$.

7.2 Теорема. *Любое рациональное число можно представить в виде конечной цепной дроби.*

7.3 Пример. Разложить в конечную цепную дробь $\frac{1734}{822}$.

Решение. Составим последовательность Евклида для чисел 1734 и 822.

$$\begin{cases} 1734 = 822 \cdot 2 + 90, \\ 822 = 90 \cdot 9 + 12, \\ 90 = 12 \cdot 7 + 6, \\ 12 = 6 \cdot 2. \end{cases}$$

Имеем $\frac{1734}{822} = 2 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2}}}$ или $\frac{1734}{822} = [2;9,7,2]$.

Ответ: $\frac{1734}{822} = [2;9,7,2]$.

7.4 Определение. k-ой подходящей дробью конечной цепной дроби (2) называется рациональное число

$$\alpha_k = g_0 + \cfrac{1}{g_1 + \cfrac{1}{g_2 \qquad \ldots + \cfrac{1}{g_k}}},$$

где $0 \le k \le s$.

7.5 Теорема. *Пусть* $\alpha = [g_0; g_1, g_2, \ldots, g_s]$ *– конечная цепная дробь* $P_0, P_1, \ldots, P_s$ *и* $Q_0, Q_1, \ldots Q_s$ *– две последовательности чисел, удовлетворяющие следующим соотношениям:* $P_0 = g_0$, $P_1 = g_1 g_0 + 1$, …, $P_k = P_{k-1}\, g_k + P_{k+2}$; $Q_0 = 1$, $Q_1 = g_1$, … , $Q_k = Q_{k-1}\, g_k + Q_{k+2}$ ($k = 2, 3, \ldots, s$). Тогда $\alpha_k = \frac{P_k}{Q_k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, s$).

7.6 Пример. Для числа $\frac{1734}{822}$ вычислить все подходящие дроби.

Решение. Разложим это число в конечную цепную дробь (см. пример 7.3): $\frac{1734}{822} = [2; 9,7,2]$. Вычисления удобно проводить по следующей схеме.

g_k		g_0	g_1	g_2	g_3	…	g_s
P_k	1	g_0	P_1	P_2	P_3	…	P_s
Q_k	0	1	Q_1	Q_2	Q_3	…	Q_s

$\alpha_0 = g_0$; $\quad \alpha_1 = \frac{P_1}{Q_1}$; $\quad \alpha_2 = \frac{P_2}{Q_2}$; $\quad \alpha_3 = \frac{P_3}{Q_3}$, …, $\alpha_s \frac{P_s}{Q_s}$

Для нашего случая,

g_k		2	9	7	2
P_k	1	2	19	135	289
Q_k	0	1	9	64	137

$$\alpha_0 = 2;\ \ \alpha_1 = \frac{19}{9};\ \ \alpha_2 = \frac{135}{64};\ \ \alpha_3 = \frac{289}{137}.$$

Ответ: $\alpha_0 = 2$; $\alpha_1 = \frac{19}{9}$; $\alpha_2 = \frac{135}{64}$; $\alpha_3 = \frac{289}{137}$.

7.7 Теорема (о свойствах подходящих дробей).

1. *Для* $k = 1, 2, \ldots, s$ *выполняется равенство* $P_{k-1}Q_k - Q_{k-1}P_k = (-1)^k$.

2. *Подходящая дробь* $\frac{P_k}{Q_k}$ *несократима, т.е. числители и знаменатели дроби взаимно простые.*

7.8 Следствие. 1. Числа P_k и Q_k взаимно простые, т.е. каждая дробь $\frac{P_k}{Q_k}$ несократима.

2. Для $k = 1, 2, \ldots, s$ выполняется равенство $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k-1}}$.

7.9 Пример. Сократить дробь $\frac{2227}{9911}$.

Решение. Составим последовательность Евклида для $a = 2227$ и $b = 9911$:

$$\begin{cases} 2227 = 9911 \cdot 0 + 2227, \\ 9911 = 2227 \cdot 4 + 1003, \\ 2227 = 1003 \cdot 2 + 221, \\ 1003 = 221 \cdot 4 + 119, \\ 221 = 119 \cdot 1 + 102, \\ 119 = 102 \cdot 1 + 17 \\ 102 = 17 \cdot 6. \end{cases}$$

Имеем $\frac{2227}{9911} = [0; 4, 2, 1, 1, 6]$.

Составляем таблицу

g_k		0	4	2	4	1	1	6
P_k	1	0	1	2	9	11	20	131
Q_k	0	1	4	9	40	49	89	583

Имеем $\frac{2227}{9911}=\frac{131}{583}$, где $\frac{131}{583}$ уже несократимая дробь.

Ответ: $\frac{131}{583}$.

8 ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

8.1 Замечание. Среди натуральных чисел единица выделяется тем свойством, что она имеет единственный натуральный делитель. Любое другое натуральное число a имеет по крайне мере два делителя 1 и a.

8.2 Определение. Натуральное число $p \neq 1$ называется простым, если оно не имеет никаких натуральных делителей кроме 1 и самого себя.

8.3 Определение. Натуральное число *не равное* единице и не простое называется составным.

8.4 Теорема. *Пусть a – натуральное число $a \neq 1$, p – наименьший натуральный делитель числа a и $p \neq 1$. Тогда p – простое число.*

8.5 Теорема Евклида. *Множество простых чисел бесконечно.*

8.6 Замечание. Для нахождения простых чисел больших единицы и не превосходящих n применяется метод который называется «Решето Эратосфена». Выпишем все натуральные числа от 2 до n. Вычеркнем каждое второе число после двойки. Первое оставшееся число три будет простым. Вычеркнем каждое третье число после тройки. Первое оставшееся число пять будет простым и т.д.

8.7 Замечание. Можно выписать не все натуральные числа от 2 до n, а только двойку и нечетные.

8.8 Замечание. Вычеркивание следует продолжать до первого простого числа $p \geq \sqrt{n}$.

8.9 Пример. Выписать все простые числа в пределах первой сотни.

Решение. 2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~25~~, ~~27~~, 29, 31, ~~33~~, ~~35~~, 37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47, ~~49~~, ~~51~~, 53, ~~55~~, ~~57~~, 59, 61, ~~63~~, ~~65~~, 67, ~~69~~, 71, 73, ~~75~~, ~~77~~, 79, ~~81~~, 83, ~~85~~, ~~87~~, 89, ~~91~~, ~~93~~, ~~95~~, 97, ~~99~~.

Ответ: 2, 3, 5, ,7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

8.10 Пример. Найти множество всех простых чисел p, $650 \le p \le 725$.

Решение. Выпишем все нечетные натуральные числа x, $650 \le p \le 725$. Четные писать не будем, так как они заведомо не простые

651, 653, 655, 657, 659, 661, 663, 665, 667, 669,
671, 673, 675, 677, 679, 681, 683, 685, 687, 679,
691, 693, 695, 697, 699, 701, 703, 705, 707, 709,
711, 713, 715, 717, 719, 721, 723, 725.

Выпишем все простые числа p, $2 < p \le \sqrt{725} < 27$, то есть 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Для каждого выписанного простого числа p найдем наименьшее x, $x \ge 650$, делящееся на p.

Для этого: а) сначала найдем остатки от деления числа 651 на каждое выписанное простое p: $651 \equiv 0 \pmod 3$, $651 \equiv 1 \pmod 5$, $651 \equiv 0 \pmod 7$, $651 \equiv 2 \pmod{11}$, $651 \equiv 1 \pmod{13}$, $651 \equiv 5 \pmod{17}$, $651 \equiv 5 \pmod{19}$, $651 \equiv 7 \pmod{23}$;

б) укажем наименьшее x, $x \ge 650$, делящееся на каждое p. Из а) следует, что $651 \vdots 3$, $655 \vdots 5$, $651 \vdots 7$, $660 \vdots 11$, $663 \vdots 13$, $663 \vdots 17$, $665 \vdots 19$, $667 \vdots 23$.

Вычеркнем все числа, кратные 3: 651, 657, 663, 669, 675, 681, 687, 693, 699, 705, 711, 717, 723.

Вычеркнем числа, которые кратные 5: 655, 665, 675, 685, 695, 705, 715, 725.

Вычеркнем числа, которые кратные 7: 651, 665, 679, 693, 707, 721

Вычеркнем числа, которые кратные 11: 671, 693, 715.

Вычеркнем числа, которые кратные 13: 663, 689, 715.

Вычеркнем числа, которые кратные 17: 663, 697.

Вычеркнем числа, которые кратные 19: 665,703.

Вычеркнем числа, которые кратные 23: 667, 713.

Получим в итоге:

$\underline{651}$, 653, $\underline{655}$, $\underline{657}$, 659, 661, $\underline{663}$, $\underline{665}$, $\underline{667}$, $\underline{669}$.
$\underline{671}$, 673, $\underline{675}$, 677, $\underline{679}$, $\underline{681}$, 683, $\underline{785}$, $\underline{685}$, $\underline{689}$.
691, $\underline{693}$, $\underline{695}$, $\underline{697}$, $\underline{699}$, 701, $\underline{703}$, $\underline{705}$, $\underline{707}$, 709.
$\underline{711}$, $\underline{713}$, $\underline{715}$, $\underline{717}$, 719, $\underline{721}$, $\underline{723}$, $\underline{725}$.

Итак, на отрезке [650, 725] точно 10 простых чисел: p: 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719.

Ответ: 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719.

8.11 Пример. Является ли число 197 простым?

Решение. Число 197 не делится на простые числа 2, 5, 7, 11, 13. Так как других простых чисел ≤ 15 нет и $\sqrt{197} < 15$, то число 197 простое.

Ответ: является.

9 РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

9.1 Теорема. 1. *Пусть a – целое число, p – простое число. Тогда или* $a \vdots p$ *или* НОД(a, p) = 1.

2. *Если произведение целых чисел* $a_1, a_2, \dots a_n$ *делится на* p*, то хотя бы один из множителей делится на* p*.*

9.2 Определение. Разложением целого числа a на простые множители называется представление a в виде $a = \pm p_1\ p_2 \dots p_n$, где все p_i – простые.

9.3 Определение. Каноническим разложением целого числа a называется представление a в виде $a = \pm p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1,\ p_2, \dots\ p_s$ – попарно различные простые числа.

9.4 Теорема (основная теорема арифметики). *Для любого целого числа* $a \neq 0, \pm 1$, *существует разложение на простые множители. Это разложение единственное с точностью до порядка следования сомножителей.*

9.5 Пример. Найти каноническое разложение числа 74592.

Решение.

74592	2
37296	2
18648	2
9324	2
4662	2
2331	3
777	3
259	7
37	37
1	

Имеем $74592 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 37$.

Ответ: $74592 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 37$.

10 ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ, РАЗЛОЖЕННЫХ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

10.1 Терема. *Пусть* $a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, где все p_i *попарно различные и* $\alpha_i \geq 0$ k *– целое число. Тогда* $a \vdots x$ *в том и только в том случае, если* $x = \pm p_1^{\xi_1} p_2^{\xi_2} \dots p_s^{\xi_s}$, где $0 \leq \xi_i \leq \alpha_i$.

10.2 Теорема. *Пусть* $a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ *где все* p_i *попарно различные и* $\alpha_i \geq 0$, $b = \pm p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s}$, $\beta_i \geq 0$. *Тогда*

1. НОД(a, b) = $p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_s^{\gamma_s}$, где $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$.
2. НОК[a, b] = $p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_s^{\delta_s}$ где $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$.

10.3 Пример. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 74592 и 21708 используя их канонические разложение.

Решение. Найдем каноническое разложение чисел 74592 и 21708:

74592	2	21708	2
37296	2	10854	2
18648	2	5427	3
9324	2	1809	3
4662	2	603	3
2331	3	201	3
777	3	67	67
259	7	1	
37	37		
1			

Имеем $74592 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 37$ и $21708 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 67$. Получим

НОД(74592; 21708) = $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$,

НОК[74592; 21708] = $2^5 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 67 = 32 \cdot 81 \cdot 259 \cdot 67 = 2592 \cdot 17353 =$ $= 44978976$.

Ответ: НОД(74592; 21708) = 36, НОК[74592; 21708] = 44978976.

11 ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

11.1 Определение. Функция f, область определения которой содержит множество натуральных чисел, называется числовой.

11.2 Пример. Рассмотри некоторые конкретные числовые функции $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = [x]$, $f(x) = [x]$, $f(x) = [x] = x - [x]$;
$\tau\,(a)$ – число натуральных делителей натурального числа a;
$\sigma\,(a)$ – сумма натуральных делителей натурального числа a.

11.3 Пример. $[5,8] = 5$; $[3] = 3$; $[3,4] = 3$; $[-7,39] = -8$; $[-e] = -3$; $\{4\} = 0$; $\left\{-\dfrac{23}{7}\right\}=\dfrac{5}{7}$; $\tau(20) = 6$, так как $20\,\vdots\,1,2,4,5,10,20$ $\sigma(20) = 42$.

11.4 Теорема. Пусть $a=p_1^{\alpha_1}\,p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$ – *каноническое разложение числа* a. *Тогда*

1. $\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ \ldots\ (\alpha_s + 1)$.

2. $\sigma(a) = \dfrac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\dfrac{p_2^{\alpha_1+1}-1}{p_2-1}\cdots\dfrac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}$.

11.5 Теорема. *Показатель, с которым данное простое* p *входит в произведение* n!, *равен* $\left[\dfrac{n}{p}\right]+\left[\dfrac{n}{p^2}\right]+\left[\dfrac{n}{p^3}\right]+\ldots$

11.6 Пример. Найти $\tau(720)$ и $\sigma(720)$.

Решение. Имеем $720 = 2^4\cdot 3^2\cdot 5$. Поэтому $\tau(720) = (4 + 1)(2 + 1)(1 +1) = 30$, $\sigma(720) = \dfrac{2^{4+1}-1}{2-1}\cdot\dfrac{3^{4+1}-1}{3-1}\cdot\dfrac{5^{4+1}-1}{5-1}=2418$.

Ответ: $\tau(720) = 30$, $\sigma(720) = 2418$.

11.7 Пример. Найти наибольшее α, такое что $1000!\,\vdots\,3^{\alpha}$.

Решение. Имеем

$$\alpha=\left[\frac{1000}{3}\right]+\left[\frac{1000}{9}\right]+\left[\frac{1000}{27}\right]+\left[\frac{1000}{81}\right]+\left[\frac{1000}{243}\right]+\left[\frac{1000}{729}\right]=497.$$

Так что $1000!\,\vdots\,3^{497}$, но $1000!\,\not\vdots\,3^{498}$.

Ответ: $\alpha = 497$.

11.8 Пример. Решить уравнение $\left[\dfrac{x+2}{2}\right]=x-1$.

Решение. Так как $\left[\dfrac{x+2}{2}\right]$ – целое число, то $x - 1$ – целое число, а, значит x – целое. Из свойства целой части следует, что $x-1\le\left[\dfrac{x+2}{2}\right]<(x-1)+1$. решая эти неравенства, получим: $2<x\le 4$, т.е. $x_1 = 3$ или $x_2 = 4$. Теперь убедимся, что оба значения являются решениями.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

11.9 Пример. Решить уравнение $[x-1]=\left[\dfrac{x+2}{2}\right]$.

Решение. Обозначим $[x - 1] = k$, где k – целое число. Из свойств целой части получим систему неравенств:

$$\begin{cases} k \le \dfrac{x+2}{2} < k+1 \\ k \le x-1 < k+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k-2 \le x < 2k \\ k+1 \le x < k+2. \end{cases}$$ Отсюда следует $2k-2 \le x < k+2$

и $k+1 \le x < 2k$, то будем иметь $1 < k < 4$. Поскольку k – целое, то $k = 2$ или $k = 3$.

Если $k = 2$, то $\begin{cases} 2 \le x < 4, \\ 3 \le x < 4, \end{cases}$ и $3 \le x < 4$.

Если $k = 3$, то $\begin{cases} 4 \le x < 6, \\ 4 \le x < 5, \end{cases}$ и $4 \le x < 5$.

Ответ: $4 \le x < 5$.

11.10 Пример. Решить уравнение $x^2 - 10[x] + 9 = 0$.

Решение. Пусть $[x] = k$. Из равенства $x^2 = 10k - 9$ следует, что $10k - 9 \ge 0$ и $k \ge \dfrac{9}{10} > 0$, т.е. k – натуральное число. Поскольку $x \ge k$, то $x^2 + 9 = 10k \le 10x$ и $x^2 - 10x + 9 = 10k \le 0$. Отсюда следует, что $1 \le x \le 9$, но тогда $1 \le k \le 9$. Подставляя вместо k значения 1, 2, …, 9 в уравнение $x^2 = 10k - 9$ и учитывая, что x – положительное число, получим: $x \in \{1, \sqrt{11}, \sqrt{21}, \ldots \sqrt{81}\}$. Но из этих значение x исходному уравнению удовлетворяют только числа $1, \sqrt{61}, \sqrt{71}, 9$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{61}$, $x_3 = \sqrt{71}$, $x_4 = 9$.

11.11 Пример. Решить уравнение $\{(x+1)^2\} = x^2$.

Решение. Из определения дробной части следует, что $0 \le x^2 < 1$, т.е. $x \in (-1, 1)$. Кроме того, по свойствам дробной части равенства $\{x^2 + 2x + 1\} = x^2 = \{x^2\}$ выполняется тогда и тогда и только тогда, когда $x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1 \in \subseteq$. Поэтому в исходном уравнении значение $2x$ должно быть целым числом. Ясно, что $x \in (-1, 1)$ значение $2x$ целое в точности тогда, когда $x \in \{-0{,}5;\ 0;\ 0{,}5\}$. Проверка показывает, что все три значения являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0{,}5$.

11.12 Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=2, \\ y+[z]+3\{x\}=2{,}5, \\ z+[x]+\{y\}=1{,}5. \end{cases}$$

Решение. Будем пользоваться равенством $a = [a] + \{a\}$, которое верно для всех $a \in$ ❶. Складывая уравнения системы, получим: $2x + 2y + 2z + 2\{x\} =$ $= 6$, т.е. $x + y + z + \{x\} = 3$. Вычитая из полученного уравнения последовательно первое, второе и третье уравнение исходной системы, получим

$$\begin{cases} \{x\}+\{y\}+[z]=1, \\ [x]+\{z\}-\{x\}=0{,}5, \\ [y]+2\{x\}=1{,}5. \end{cases}$$

Из последнего уравнения следует, что возможны только два случая: $[y] = 1$, $\{x\} = 0{,}25$, либо $[y] =0$, $\{x\} =0{,}75$.

Если $[y] = 1$, $\{x\} = 0{,}25$, то второе уравнение последней системы примет вид: $[x] + \{z\} = 0{,}75$, поэтому $[x] = 0$, $\{z\} = 0{,}75$. Первое уравнение последней системы примет вид: $\{y\} + [z] = 0{,}75$, поэтому $[z] = 0$, $\{y\} = 0{,}75$. Таким образом, $x = [x] + \{x\} = 0{,}25$, $y = [y] + \{y\} = 1{,}75$, $z = [z] + \{y\} = 0{,}75$. Проверка показывает, что эти значения являются решениям исходной системы.

При $[y] = 0$, $\{x\} = 0{,}75$, рассуждая аналогично, получим, что $x = 1{,}75$, $y = 0{,}25$, $z = 0{,}25$ – решение системы.

Ответ: $x_1 = 0{,}25$, $y_1 = 1{,}75$, $z_1 = 0{,}75$; $x_2 = 1{,}75$, $y_2 = 0{,}25$, $z_2 = 0{,}25$.

11.13 Пример. Найдите каноническое разложение числа 100! Сколькими нулями оканчивается его десятичная запись?

Решение. Так как $100! = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}\ldots 97^{\alpha_{97}}$, то

$$\alpha_2=\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\left[\frac{100}{2^4}\right]+\left[\frac{100}{2^5}\right]+\left[\frac{100}{2^6}\right]=97,$$

$$\alpha_3=\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]=48, \qquad \alpha_5=\left[\frac{100}{5}\right]+\left[\frac{100}{5^2}\right]=24,$$

$$\alpha_7=\left[\frac{100}{7}\right]+\left[\frac{100}{7^2}\right]=16, \quad \alpha_{11}=\left[\frac{100}{11}\right]=9, \quad \alpha_{13}=\left[\frac{100}{13}\right]=7, \quad \alpha_{17}=\left[\frac{100}{17}\right]=5,$$

$$\alpha_{19}=\left[\frac{100}{19}\right]=5, \qquad \alpha_{23}=4, \qquad \alpha_{29}=\alpha_{31}=3, \qquad \alpha_{37}=\alpha_{41}=\alpha_{43}=\alpha_{47}=2,$$

$$\alpha_{53}=\alpha_{59}=\alpha_{61}=\alpha_{67}=\alpha_{71}=\alpha_{73}=\alpha_{79}=\alpha_{83}=\alpha_{89}=\alpha_{97}=1.$$

Таким образом,

$100! = 2^{97} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{16} \cdot 11^{9} \cdot 13^{7} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23^{4} \cdot 29^{3} \cdot 31^{3} \cdot 37^{2} \cdot 41^{2} \cdot 43^{2} \cdot 47^{2} \cdot$

$\cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97.$

В десятичной записи числа 100! Нулей будет столько, сколько пар чисел 2 и 5 в каноническом решении этого числа. Так как $\alpha_2 = 97, \alpha_3 = 24$, число 100! Оканчивается 24 нулями.

Ответ: $100! = \begin{matrix} 2^{97} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{16} \cdot 11^{9} \cdot 13^{7} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23^{4} \cdot 29^{3} \cdot 31^{3} \cdot 37^{2} \cdot 41^{2} \cdot \\ \cdot 43^{2} \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 97; \end{matrix}$ 24 нуля.

12 ЦЕЛЫЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

12.1 Определение. Произвольное фиксированное натуральное число $g > 1$ называется основанием позиционной системы счисления. Числа 0, 1, 2, …, $g - 1$, а также записи которыми они обозначаются называются цифрами g-ичной позиционной системы счисления. k-значным систематическим числом при основании g, называется натуральное число $a = a_{k-1}g^{k-1} + a_{k-2}g^{k-2} + \ldots + a_1 g + a_0$, где все a_i – цифры, $a_{k-1} \neq 0$.

Это представление записывается сокращенно в виде $(\overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_1 a_0})_g$.

12.2 Пример. $2795 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 5$.

12.3 Теорема. *При любом фиксированном основании g каждое натуральное число можно записать в виде систематического числа и притом единственным образом.*

12.4 Пример. 153_{10} записать в системе счисления с основанием 7.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
-153 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{14} & \begin{array}{r|l} -21 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{21} & \begin{array}{r|l} -3 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{0} & 0 \end{array} \\ 0 & \end{array} \\
-13 & \\
\underline{7} & \\
6 & \\
\end{array}$$

Получаем $153_{10} = (306)_7$.

$153 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3$.

$(306)_7 = 3 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 3$.

Ответ: $(306)_7$.

13 АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ЦЕЛЫМИ СИСТЕМАТИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

13.1 Пример. Для того чтобы складывать систематические числа нужно уметь складывать однозначные числа (цифры)

g =2

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$2 = 1\cdot g + 0$ (если $g = 2$)

$g = 6$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

$g = 1 \cdot g + 0$, $7 = 1 \cdot 6 + 1$, $7 = (11)_6$.

Можно показать, что сложение систематических чисел сводится к сложению однозначных, причем , если a k-значное число, b n-значное число и $k \geq n$, то $a + b$ либо k-значное число, либо $k + 1$-значное число с первой цифрой единица.

13.2 Пример. Таблица умножения при основании $g = 6$.

x	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

1.13.3 Пример. Сложить числа $a = (4253)_6$ и $b = (2542)_6$ в шестиричной системе счисления.

Решение.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}(4253)_6\\(2542)_6\end{array}\\ \hline (11235^3)_6\end{array}$$

Ответ: $(11235)_6$.

13.4 Пример. Из числа $a = (42044)_5$ вычесть $b = (13141)_5$ в пятиричной системе счисления.

Решение.

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{r}(42044)_5\\ (13141)_5\end{array}\\ \hline
(23403)_5
\end{array}
$$

Ответ: $(23403)_5$.

13.5 Пример. Записать в троичной позиционной системе число 3625. Сделать проверку.

Решение. Следующее равенство очевидно:

$$a_4g^4 + a_3g^3 + a_2g^2 + a_1g + a_0 = (((a_4g + a_3)\,g + a_2)\,g + a_1)\,g + a_0 \qquad (3)$$

Оно верно для любого натурального показателя, а не только для $n = 4$. Левая часть равенства (3) позволяет компактно записывать натуральное число в g-ичной позиционной системе, используя цифры $0 \le a_i < g$, т.е. $(\overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_1a_0})$. Правая часть равенства (3) подсказывает удобные вычислительные методы перевода записи из одной системы счисления в другую: деление s на g дает a_0 в остатке, затем деление частного на g дает a_1 в остатке и т.д. Последним частным будет a_n, т.е. натуральное число, меньше g. Отсюда же выводится метод перевода в десятичную систему: первая цифра умножается на g, прибавляется следующая цифра, опять результат умножается на g и опять прибавляется следующая цифра и т.д. Этот метод экономнее вычисления линейной комбинации степеней g, стоящей в левой части равенства (3).

Делим 3625 на три и продолжаем делить получающиеся частные;

```
_3625 | 3
 3624 |_1208 | 3
    1  1206  |_402 | 3
          2    402 |_134 | 3
                 0   132 |_44 | 3
                       2   42 |_14 | 3
                             2  12 |_4 | 3
                                  2  3 | 1
                                     1
```

Таким образом, для получения троичной записи данного числа следуют записать в обратном порядке полученные при делении остатки в качестве троичных цифры.

Ответ: $3625 = (11222021)_6$.

Проверка состоит в вычислении выражения

$$((((((1 \cdot 3 + 1)3 + 2)3 + 2)3 + 2)3 + 0)\,3 + 2)3 + 1 = 3625.$$

13.6 Пример. Перевести 3265 в одиннадцатиричную систему счисления.

Решение. Возможно потребуется новая цифра для обозначения числа 10. Обозначим ее так: (10). Выполним деление:

```
 3265 | 11
 106  | 296 | 11
   75    76 | 26 | 11
    9    10    4 |  2
```

Ответ: $3625 = 24(10)9_{11}$.

13.7 Пример. Число 2201_5 записать в четверичной системе без использования десятичной как промежуточной.

Решение. Последовательно будем делить 2201_5 на 4, пользуясь пятеричными таблицами сложения и умножения:

```
 2201 | 4
 22   | 300 | 4
   01    22 | 33 | 4
    0    30   31 | 4 | 4
    1    22    2   4 | 1
          3        0
```

Итак, $2201_5 = 10231_4$. Проверка: $2201_5 = 301$, $10231_4 = 301$.

Ответ: $2201_5 = 10231_4$.

13.8 Пример. Перевести в двоичную систему через восьмеричную число 159.

Решение. Будем делить число 159 на 8:

```
 159 | 8
   8 | 19 | 8
  79   16 | 2
  72    3
   7
```

Получили $159 = 237_8$. Так как $8 = 2^3$, то восьмеричную цифру заменяем ее двоичной записью в виде тройки двоичных цифр: $2 = 010_2$, $3 = 011_2$, $7 = 111_2$. Итак, $159 = 237_8 = 10011111_2$.

Ответ: $159 = 237_8 = 10011111_2$.

14 ЗАДАЧИ

Найти неполное частное g и остаток r от деления a на b:

1. $a = 7440$, $b = 37$.
2. $a = -2696$, $b = 156$.
3. $a = 8266$, $b = 42$.
4. $a = -3069$, $b = 152$.
5. $a = 8801$, $b = 48$.
6. $a = -3345$, $b = 145$.
7. $a = 9299$, $b = 53$.
8. $a = -4231$, $b = 141$.
9. $a = 9826$, $b = 59$.
10. $a = -4948$, $b = 137$.
11. $a = 9901$, $b = 64$.
12. $a = -4948$, $b = 129$.
13. $a = 9928$, $b = 69$.
14. $a = -5433$, $b = 125$.
15. $a = 9197$, $b = 73$.
16. $a = -6368$, $b = 121$.
17. $a = 8877$, $b = 78$.
18. $a = -7103$, $b = 117$.
19. $a = 8831$, $b = 82$.
20. $a = -5307$, $b = 111$.
21. $a = 8233$, $b = 88$.
22. $a = -6182$, $b = 105$.
23. $a = 8029$, $b = 93$.
24. $a = -6329$, $b = 99$.
25. $a = 7006$, $b = 97$.
26. $a = -6861$, $b = 94$.
27. $a = 6374$, $b = 101$.
28. $a = -7888$, $b = 191$.
29. $a = 6208$, $b = 107$.
30. $a = -8048$, $b = 86$.
31. $a = 5345$, $b = 113$.
32. $a = -8487$, $b = 79$.
33. $a = 7093$, $b = 119$.
34. $a = -8603$, $b = 76$.
35. $a = 6491$, $b = 123$.
36. $a = -8876$, $b = 71$.
37. $a = 5578$, $b = 127$.
38. $a = -9597$, $b = 62$.
39. $a = 5107$, $b = 131$.
40. $a = -9592$, $b = 62$.
41. $a = 5142$, $b = 139$.
42. $a = -9508$, $b = 57$.
43. $a = 4261$, $b = 143$.
44. $a = -8916$, $b = 51$.
45. $a = 3464$, $b = 147$.
46. $a = -8462$ $b = 46$.
47. $a = 2962$, $b = 154$.
48. $a = -7463$, $b = 39$.
49. $a = 2693$, $b = 158$.
50. $a = -6885$, $b = 34$.

Найти наибольшее число a, для которого неполное частное от деления на число b равно g.

51. $b = 61$, $g = 33$.
52. $b = 67$, $g = 36$.
53. $b = 74$, $g = 39$.
54. $b = 73$, $g = 42$.
55. $b = 79$, $g = 48$.
56. $b = 83$, $g = 52$.
57. $b = 87$, $g = 57$.
58. $b = 98$, $g = 61$.
59. $b = 93$, $g = 65$.
60. $b = 97$, $g = 74$.
61. $b = 101$, $g = 82$.
62. $b = 108$, $g = 73$.
63. $b = 107$, $g = 68$.
64. $b = 113$, $g = 62$.
65. $b = 119$, $g = 58$.
66. $b = 128$, $g = 54$.
67. $b = 129$, $g = 49$.
68. $b = 135$, $g = 46$.
69. $b = 147$, $g = 41$.
70. $b = 158$, $g = 43$.
71. $b = 176$, $g = 38$.
72. $b = 192$, $g = 36$.

73. $b = 212$, $g = 34$.
74. $b = 243$, $g = 29$.
75. $b = 265$, $g = 26$.

При делении целого числа a на натуральное число b получены неполное частное g и остаток r. Найти наименьшее из возможных значений для a:

76. $g = 278$, $r = 18$.
77. $g = 261$, $r = 23$.
78. $g = 243$, $r = 27$.
79. $g = 221$, $r = 33$.
80. $g = 218$, $r = 38$.
81. $g = 212$, $r = 45$.
82. $g = 192$, $r = 23$.
83. $g = 173$, $r = 12$.
84. $g = 152$, $r = 13$.
85. $g = 141$, $r = 16$.
86. $g = 122$, $r = 17$.
87. $g = 115$, $r = 19$.
88. $g = 108$, $r = 23$.
89. $g = 101$, $r = 25$.
90. $g = 93$, $r = 27$.
91. $g = 87$, $r = 31$.
92. $g = 83$, $r = 34$.
93. $g = 78$, $r = 37$.
94. $g = 72$, $r = 39$.
95. $g = 62$, $r = 41$.
96. $g = 58$, $r = 43$.
97. $g = 53$, $r = 47$.
98. $g = 49$, $r = 51$.
99. $g = 43$, $r = 58$.
100. $g = 37$, $r = 63$.

Найти наименьшее натуральное число b, для которого остаток от деления числа a на b равен r:

101. $a = 415$, $r = 19$.
102. $a = 666$, $r = 21$.
103. $a = 227$, $r = 23$.
104. $a = 261$, $r = 27$.
105. $a = 307$, $r = 17$.
106. $a = 185$, $r = 29$.
107. $a = 204$, $r = 18$.
108. $a = 306$, $r = 16$.
109. $a = 469$, $r = 19$.
110. $a = 167$, $r = 17$.
111. $a = 500$, $r = 20$.
112. $a = 156$, $r = 18$.
113. $a = 132$, $r = 16$.
114. $a = 356$, $r = 14$.
115. $a = 411$, $r = 12$.
116. $a = 244$, $r = 10$.
117. $a = 241$, $r = 16$.
118. $a = 193$, $r = 5$.
119. $a = 152$, $r = 4$.
120. $a = 144$, $r = 6$.
121.. $a = 155$, $r = 7$.
122. $a = 201$, $r = 11$.
123. $a = 426$, $r = 12$.
124. $a = 310$, $r = 13$.
125. $a = 139$, $r = 15$.

При делении числа a на натуральное число b получены неполное частное g и остаток r. Найти наибольшее из возможных значений r для и соответствующее значение b:

126. $a = 10650$, $g = 27$.
127. $a = 10231$, $g = 28$.
128. $a = 9667$, $g = 29$.
129. $a = 9050$, $g = 30$.
130. $a = 8453$, $g = 31$.
131. $a = 7798$, $g = 32$.
132. $a = 7118$, $g = 33$.
133. $a = 6178$, $g = 34$.

134. $a = 5485$, $g = 35$.
135. $a = 4670$, $g = 36$.
136. $a = 9469$, $g = 11$.
137. $a = 9991$, $g = 12$.
138. $a = 10420$, $g = 13$.
139. $a = 10786$, $g = 14$.
140. $a = 11090$, $g = 15$.
141. $a = 11332$, $g = 16$.
142. $a = 11563$, $g = 17$.
143. $a = 11666$, $g = 18$.
144. $a = 11800$, $g = 19$.
145. $a = 11819$, $g = 20$.
146. $a = 11820$, $g = 21$.
147. $a = 11699$, $g = 22$.
148. $a = 11815$, $g = 23$.
149. $a = 11583$, $g = 24$.
150. $a = 11289$, $g = 25$.

Найти линейную форму линейное представление наибольшего общего делителя чисел a и b : $d=ax+by$

151. $a = 215$, $b = 150$.
152. $a = 320$, $b = 116$.
153. $a = 680$, $b = 300$.
154. $a = 278$, $b = 216$.
155. $a = 327$, $b = 141$.
156. $a = 377$, $b = 260$.
157. $a = 508$, $b = 148$.
158. $a = 295$, $b = 40$.
159. $a = 451$, $b = 187$
160. $a = 348$, $b = 144$.
161. $a = 186$, $b = 141$.
162. $a = 721$, $b = 210$.
163. $a = 633$, $b = 93$.
164. $a = 404$, $b = 124$.
165. $a = 329$, $b = 98$.
166. $a = 384$, $b = 174$.
167. $a = 407$, $b = 110$.
168. $a = 288$, $b = 30$.
169. $a = 232$, $b = 68$.
170. $a = 310$, $b = 95$.
171. $a = 314$, $b = 136$.
172.. $a = 583$, $b = 264$.
173. $a = 637$, $b = 169$.
174. $a = 329$, $b = 70$.
175. $a = 637$, $b = 112$.

Известно, что НОК$[a,b] = c$, НОД$(a,b) = d$, причем $a, b \in N$, $a \le b$. Найти:
а) наименьшее из возможных значений a;
б) значение b, соответствующее наименьшему значению a;
в) второе значение a;
г) значение b, соответствующее второму значению a.

176. $c = 870$, $d = 15$.
177. $c = 429$, $d = 3$.
178. $c = 370$, $d = 5$.
179. $c = 138$, $d = 3$.
180. $c = 230$, $d = 5$.
181. $c = 322$, $d = 7$.
182. $c = 174$, $d = 3$.
183. $c = 290$, $d = 5$.
184. $c = 406$, $d = 7$.
185. $c = 682$, $d = 2$.
186. $c = 1023$, $d = 3$.
187. $c = 1705$, $d = 5$.
188. $c = 2387$, $d = 7$.
189. $c = 286$, $d = 2$.
190. $c = 600$, $d = 30$.
191. $c = 715$, $d = 5$.
192. $c = 1001$, $d = 7$.
193. $c = 222$, $d = 3$.
194. $c = 370$, $d = 5$.
195. $c = 518$, $d = 7$.

196. $c = 328$, $d = 4$.

197. $c = 290$, $d = 5$.

198. $c = 406$, $d = 7$.

199. $c = 154$, $d = 2$.

200. $c = 1305$, $d = 15$.

Найти наименьшее общее кратное чисел a и b:

201. $a = 924$, $b = 360$.

202. $a = 450$, $b = 4900$.

203. $a = 180$, $b = 504$.

204. $a = 315$, $b = 525$.

205. $a = 1188$, $b = 630$.

206. $a = 1010$, $b = 72$.

207. $a = 1890$, $b = 540$.

208. $a = 180$, $b = 1510$.

209. $a = 630$, $b = 924$.

210. $a = 600$, $b = 180$.

211. $a = 630$, $b = 780$.

212. $a = 525$, $b = 300$.

213. $a = 315$, $b = 1188$.

214. $a = 315$, $b = 70$.

215. $a = 60$, $b = 126$.

216. $a = 720$, $b = 252$.

217. $a = 504$, $b = 180$.

218 $a = 756$, $b = 90$.

219. $a = 360$, $b = 210$.

220. $a = 756$, $b = 360$.

221. $a = 1230$, $b = 660$.

222. $a = 4900$, $b = 450$.

223. $a = 2250$, $b = 945$.

224. $a = 396$, $b = 1080$.

225. $a = 2520$, $b = 756$.

Найти наибольший общий делитель чисел a, b и c:

226. $a = 2520$, $b = 84$, $c = 1400$.

227. $a = 540$, $b = 840$, $c = 7350$.

228. $a = 3150$, $b = 3780$, $c = 1386$.

229. $a = 9450$, $b = 2772$, $c = 5460$.

230. $a = 1008$, $b = 2376$, $c = 3276$.

231. $a = 33075$, $b = 15750$, $c = 11025$.

232. $a = 9900$, $b = 26460$, $c = 59976$.

233. $a = 23716$, $b = 47432$, $c = 4356$.

234. $a = 61347$, $b = 53361$, $c = 184041$.

235. $a = 140777$, $b = 184093$, $c = 41405$.

236. $a = 20825$, $b = 70805$, $c = 15925$.

237. $a = 3724$, $b = 10108$, $c = 35378$.

238. $a = 14157$, $b = 16731$, $c = 61347$.

239. $a = 25857$, $b = 33813$, $c = 146523$.

240. $a = 21964$, $b = 24548$, $c = 208658$.

241. $a = 49419$, $b = 55233$, $c = 312987$.

242. $a = 33212$, $b = 40204$, $c = 381938$.

243. $a = 28899$, $b = 183027$, $c = 42237$.

244. $a = 34983$, $b = 61893$, $c = 268203$.

245. $a = 59823$, $b = 458643$, $c = 80937$.

246. $a = 41876$, $b = 607202$, $c = 63916$.

247. $a = 74727$, $b = 572907$, $c = 90456$.

248. $a = 138069$, $b = 58029$, $c = 174087$.

249. $a = 104284$, $b = 808201$, $c = 111476$.
250 $a = 15548$, $b = 27508$, $c = 178802$.

Найти наименьшее общее кратное чисел a, b и c:

251. $a = 2156$, $b = 126$, $c = 66$.
252. $a = 700$, $b = 2450$, $c = 17150$.
253. $a = 11858$, $b = 2156$, $c = 15092$.
254. $a = 17787$, $b = 4851$, $c = 33957$.
255. $a = 29645$, $b = 13475$, $c = 21175$.
256. $a = 40898$, $b = 7436$, $c = 6292$.
257.. $a = 12584$, $b = 7436$, $c = 40898$.
258. $a = 14157$, $b = 16731$, $c = 61347$.
259. $a = 42471$, $b = 16731$, $c = 61347$.
260. $a = 11492$, $b = 15028$, $c = 97682$.
261. $a = 33813$, $b = 25857$, $c = 146523$.
262. $a = 8228$, $b = 12716$, $c = 69938$.
263. $a = 18513$, $b = 28611$, $c = 104907$.
264. $a = 22984$, $b = 97682$, $c = 15028$.
265. $a = 7436$, $b = 40898$, $c = 12584$.
266. $a = 77077$, $b = 91091$, $c = 143143$.
267. $a = 51425$, $b = 79475$, $c = 174845$.
268. $a = 9196$, $b = 15884$, $c = 87362$.
269 $a = 20691$, $b = 35739$, $c = 131043$.
270. $a = 31768$, $b = 18392$, $c = 87362$.
271. $a = 1122$, $b = 374$, $c = 1683$.
272. $a = 429$, $b = 715$, $c = 1001$.
273. $a = 374$, $b = 715$, $c = 130$.
274. $a = 132$, $b = 1881$, $c = 627$.
275. $a = 2548$, $b = 598$, $c = 2093$.

Найти наименьшее и наибольшее простые числа, заключенные между числами a и b:

276. $a = 1000$, $b = 1018$.
277. $a = 1152$, $b = 1170$.
278. $a = 1434$, $b = 1450$.
279. $a = 1698$, $b = 1720$.
280. $a = 1998$, $b = 2010$.
281. $a = 2288$, $b = 2308$.
282. $a = 2594$, $b = 2620$.
283. $a = 2852$, $b = 2878$.
284. $a = 3024$, $b = 3048$.
294. $a = 4622$, $b = 4642$.

285. $a = 3204$, $b = 3220$.
286. $a = 3372$, $b = 3390$.
287. $a = 3518$, $b = 3532$.
288. $a = 3678$, $b = 3700$.
289. $a = 3798$, $b = 3822$.
290. $a = 3990$, $b = 4006$.
291. $a = 4100$, $b = 4128$.
292. $a = 4272$, $b = 4288$.
293. $a = 4424$, $b = 4450$.
298. $a = 5298$, $b = 5322$.

295. $a = 4784$, $b = 4792$.
296. $a = 4970$, $b = 4992$.
297. $a = 5082$, $b = 5100$.
299. $a = 5478$, $b = 5500$.
300. $a = 5868$, $b = 5880$.

Сколько натуральных чисел, кратных a заключено между 10^5 и 10^6 ?

301. $a = 532$.
302. $a = 541$.
303. $a = 530$.
304. $a = 521$.
305. $a = 512$.
306. $a = 501$.
307. $a = 499$.
308. $a = 490$.
309. $a = 481$.
310. $a = 472$.
311. $a = 465$.
312. $a = 444$.
313. $a = 831$.
314. $a = 538$.
315. $a = 641$.
316. $a = 582$.
317. $a = 399$.
318. $a = 418$.
319. $a = 345$.
320. $a = 972$.
321. $a = 794$.
322. $a = 479$.
323. $a = 358$.
324. $a = 812$.
325. $a = 732$.

Каково число натуральных чисел, не превосходящих a и взаимно простых с b ?

326. $a = 120$, $b = 12$.
327. $a = 132$, $b = 14$.
328. $a = 144$, $b = 15$.
329. $a = 202$, $b = 18$.
330. $a = 312$, $b = 21$.
331. $a = 320$, $b = 25$.
332. $a = 402$, $b = 22$.
333. $a = 444$, $b = 72$.
334. $a = 500$, $b = 24$.
335. $a = 705$, $b = 45$.
336. $a = 802$, $b = 225$.
337. $a = 666$, $b = 55$.
338. $a = 747$, $b = 54$.
339. $a = 700$, $b = 77$.
340. $a = 700$, $b = 539$.
341. $a = 120$, $b = 24$.
342. $a = 132$, $b = 28$.
343. $a = 144$, $b = 75$.
344. $a = 202$, $b = 36$.
345. $a = 312$, $b = 63$.
346. $a = 320$, $b = 125$.
347. $a = 402$, $b = 88$.
348. $a = 444$, $b = 144$.
349. $a = 500$, $b = 48$.
350. $a = 705$, $b = 135$.

Найти наибольшее k, для которого $n!$ делится на a^k.

351. $a = 10$, $n = 99$.
352. $a = 14$, $n = 100$.
353. $a = 22$, $n = 121$.
354. $a = 55$, $n = 550$.
355. $a = 25$, $n = 238$.
356. $a = 77$, $n = 621$.
357. $a = 65$, $n = 692$.
358. $a = 91$, $n = 100$.
359. $a = 121$, $n = 1000$.
360. $a = 36$, $n = 120$.
361. $a = 81$, $n = 90$.
362. $a = 33$, $n = 330$.
363. $a = 225$, $n = 1000$.
364. $a = 20$, $n = 100$.
365. $a = 99$, $n = 207$.
366. $a = 30$, $n = 222$.
367. $a = 42$, $n = 420$.
368. $a = 66$, $n = 500$.
369. $a = 78$, $n = 641$.
370. $a = 102$, $n = 1000$.
371. $a = 105$, $n = 210$.
372. $a = 165$, $n = 300$.
373. $a = 110$, $n = 122$.
374. $a = 195$, $n = 400$.
375. $a = 75$, $n = 281$.

Чему равно число делителей числа *a*?

376. $a = 121500$.
377. $a = 810000$.
378. $a = 49000$.
379. $a = 121000$.
380. $a = 14000$.
381. $a = 196000$.
382. $a = 28350$.
383. $a = 1575$.
384. $a = 2310$.
385. $a = 23100$.
386. $a = 15015$.
387. $a = 1326$.
388. $a = 1274$.
389. $a = 1768$.
390. $a = 1518$.
391. $a = 1825$.
392. $a = 9361$.
393. $a = 10373$.
394. $a = 11891$.
395. $a = 15433$.
396. $a = 11687$.
397. $a = 20499$.
398. $a = 3751$.
399. $a = 6020$.
400. $a = 9971$.
401. $a = 1400$.

Какова сумма делителей числа *a*?

402 $a = 675$.
403. $a = 200$.
404. $a = 1125$.
405. $a = 1400$.
406. $a = 1925$.
407. $a = 1001$.
408. $a = 385$.
409. $a = 693$.
410. $a = 143$.
411. $a = 299$.
412. $a = 667$.
413. $a = 899$.
414. $a = 1147$.
415. $a = 989$.
416. $a = 1517$.
417. $a = 9361$.
418. $a = 4026$
419. $a = 1081$.
420. $a = 1219$.
421. $a = 1363$.
422 $a = 1537$.
423. $a = 1711$.
424. $a = 2581$.
425. $a = 2291$.
426. $a = 3161$.

Чему равно натуральное число, произведение всех делителей которого равно *a*?

427. $a = 800$.
428. $a = 91125$.
429. $a = 1225$.
430. $a = 3025$.
431. $a = 4225$.
432. $a = 7225$.
433. $a = 9025$.
434. $a = 13225$.
435. $a = 21025$.
436. $a = 24025$.
437. $a = 34225$.
438. $a = 42025$.
439. $a = 5832$.
440. $a = 15625$.
441. $a = 6724$.
442. $a = 7396$.
443. $a = 1521$.
444. $a = 4761$.
445. $a = 7569$.
446. $a = 8649$.
447. $a = 12312$.
448. $a = 85184$.
449. $a = 21952$.
450 $a = 1728$.
451. $a = 140608$.

Определить натуральное число, зная, что оно имеет два различных простых делителя, всего *a* делителей, сумма которых равна *b*:

452. $a = 9$, $b = 91$.
453. $a = 12$, $b = 195$.
454. $a = 15$, $b = 403$.
455. $a = 18$, $b = 819$.
456. $a = 12$, $b = 280$.
457. $a = 15$, $b = 847$.
458. $a = 6$, $b = 42$.
459. $a = 6$, $b = 56$.
460. $a = 6$, $b = 84$.
461. $a = 6$, $b = 98$.
462. $a = 6$, $b = 78$.
463. $a = 6$, $b = 104$.
464. $a = 6$, $b = 156$.
465. $a = 6$, $b = 182$.
466. $a = 6$, $b = 93$.
467. $a = 6$, $b = 124$.
468. $a = 6$, $b = 248$.
469. $a = 6$, $b = 171$.
470. $a = 6$, $b = 228$.
471. $a = 8$, $b = 60$.
472. $a = 10$, $b = 124$.
473. $a = 12$, $b = 252$.
474. $a = 8$, $b = 90$.
475. $a = 8$, $b = 120$.
476. $a = 8$, $b = 180$.

Найти число делителей a:

477. $a = 11!$

478. $a = 12!$

479. $a = 13!$

480. $a = 14!$

481. $a = 15!$

482. $a = 16!$

483. $a = 17!$

484. $a = 18!$

485. $a = 19!$

486. $a = 20!$

487. $a = 21!$

488. $a = 10!$

489. $a = \dfrac{20!}{10!\,8!}$

490. $a = \dfrac{20!}{10!}$

491. $a = \dfrac{22!}{10!}$

492. $a = \dfrac{23!}{11!}$

493. $a = \dfrac{24!}{12!}$

494. $a = \dfrac{25!}{13!\,10!}$

495. $a = \dfrac{26!}{14!\,10!}$

496. $a = \dfrac{27!}{15!\,10!}$

497. $a = \dfrac{28!}{16!\,10!}$

498. $a = \dfrac{29!}{17!\,10!}$

499. $a = \dfrac{29!}{17!\,11!}$

500. $a = \dfrac{29!}{17!\,12!}$

501. $a = \dfrac{29!}{17!\,13!}$

Найти наименьшее натуральное число с a делителями:

502. $a = 8$.
503. $a = 10$.
504. $a = 12$.
505. $a = 16$.
506. $a = 5$.
507. $a = 6$.
508. $a = 7$.
509. $a = 9$.
510. $a = 15$.
511. $a = 18$.
512. $a = 11$.
513. $a = 4$.
514. $a = 21$.
515 $a = 22$.
516. $a = 30$.
517. $a = 36$.
518. $a = 20$.
519. $a = 13$.
520. $a = 14$.
521. $a = 40$.
522. $a = 25$.
523. $a = 24$.
524. $a = 26$.
525. $a = 27$.
526. $a = 28$.

Получить десятичную запись для числа a:

527. $a = 2(11)64_{12}$.
528. $a = 20(12)6_{15}$.
529. $a = 12404_{7}$.
530. $a = 7306_{8}$.
531. $a = 13451_{8}$.
532. $a = 54(11)7_{12}$.
533. $a = (18)97_{20}$.
534. $a = 5408_{9}$.
535. $a = 7056_{8}$.
536. $a = 212012_{3}$.
537. $a = 51465_{7}$.
538. $a = 16034_{7}$.
539. $a = 2112031_{4}$.
540. $a = 34211_{5}$.
541. $a = 101231_{4}$.
542. $a = (10)(11)\,7_{12}$.
543. $a = 70653_{8}$.
544. $a = 121031_{4}$.
545. $a = 152(10)_{12}$.
546. $a = 2536_{8}$.
547. $a = 1(10)93_{13}$.
548. $a = 20412_{5}$.
549. $a = 4573_{9}$.
550. $a = 4(10)82_{12}$.
551. $a = 4107_{8}$.

Получить g-ичную запись для числа:

552. $g = 8$, $a_{10} = 65421$.
553. $g = 7$, $a_{10} = 64512$.
554. $g = 12$, $a_{10} = 287922$.
555. $g = 11$, $a_{10} = 378413$.
556. $g = 9$, $a_{10} = 781444$.
557. $g = 8$, $a_{10} = 72448$.
558. $g = 7$, $a_{10} = 10312$.
559. $g = 14$, $a_{10} = 982448$.
560. $g = 6$, $a_{10} = 24651$.
561. $g = 12$, $a_{10} = 124361$.
562. $g = 13$, $a_{10} = 455172$.
563. $g = 19$, $a_{10} = 652304$.
564. $g = 20$, $a_{10} = 714212$.
565. $g = 18$, $a_{10} = 916233$.
566. $g = 7$, $a_{10} = 92612$.
567. $g = 5$, $a_{10} = 20271$.
568. $g = 30$, $a_{10} = 404837$.
569. $g = 25$, $a_{10} = 925109$.
570. $g = 7$, $a_{10} = 24822$.
571. $g = 18$, $a_{10} = 283116$.
572. $g = 21$, $a_{10} = 171842$.
573. $g = 40$, $a_{10} = 874201$.
574. $g = 32$, $a_{10} = 102179$.
575. $g = 33$, $a_{10} = 141527$.
576. $g = 9$, $a_{10} = 67142$.

Перевести число a в g-ичную систему счисления:

577. $a = (11)264_{12}$, $g = 7$.
578. $a = 67(10)6_{15}$, $g = 8$.
579. $a = 4(10)82_{12}$, $g = 8$.
580. $a = 21022_{5}$, $g = 7$.
581. $a = 44573_{9}$, $g = 21$.
582. $a = 5(11)5(10)_{15}$, $g = 6$.
583. $a = (12)(10)93_{13}$, $g = 5$.
584. $a = 521_{12}$, $g = 4$.
585. $a = 21031_{4}$, $g = 12$.
586. $a = 7653_{8}$, $g = 11$.
587. $a = (10)(11)7_{12}$, $g = 5$.
588. $a = 101231_{4}$, $g = 7$.
589. $a = 34211_{5}$, $g = 14$.
590. $a = 102031_{4}$, $g = 15$.
591. $a = 16034_{7}$, $g = 9$.
592. $a = 51465_{7}$, $g = 11$.
593. $a = 212012_{3}$, $g = 7$.
594. $a = 47056_{8}$, $g = 5$.
595. $a = 65408_{9}$, $g = 4$.
596. $a = (18)97_{20}$, $g = 3$.
597. $a = 54(11)1_{12}$, $g = 11$.
598. $a = 3451_{8}$, $g = 3$.
599. $a = 7306_{8}$, $g = 6$.
600. $a = 12406_{7}$, $g = 12$.
601. $a = 4107_{8}$, $g = 9$.

Числа a и b заданы в системе счисления. Найти $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $\dfrac{a}{b}$ если:

602. $a = 12514_{6}$, $b = 345_{6}$.
603. $a = 2445_{6}$, $b = 131_{6}$.
604. $a = 23012_{6}$, $b = 312_{6}$.
605. $a = 4416_{8}$, $b = 172_{8}$.
606. $a = 15530_{8}$, $b = 214_{8}$.
607. $a = 10054_{8}$, $b = 317_{8}$.
608. $a = 3713_{8}$, $b = 137_{8}$.
609. $a = 10030_{8}$, $b = 316_{8}$.
610. $a = 4730_{8}$, $b = 176_{8}$.
611. $a = 5005_{8}$, $b = 253_{8}$.
612. $a = 6344_{8}$, $b = 113_{8}$.
613. $a = 23111_{7}$, $b = 514_{7}$.
614. $a = 14443_{7}$, $b = 316_{7}$.
615. $a = 13315_{7}$, $b = 166_{7}$.
616. $a = 4462_{7}$, $b = 235_{7}$.
617. $a = 13332_{7}$, $b = 441_{7}$.
618. $a = 5264_{7}$, $b = 263_{7}$.
619. $a = 12066_{7}$, $b = 324_{7}$.
620. $a = 24550_{6}$, $b = 353_{6}$.
621. $a = 14313_{6}$, $b = 243_{6}$.

622. $a = 3504_6$, $b = 124_6$.
623. $a = 11010_6$, $b = 114_6$.
624. $a = 23204_5$, $b = 243_5$.
625. $a = 4242_5$, $b = 134_5$.
626. $a = 10322_5$, $b = 324_5$.

Решить уравнение

627. $231_x = 123_7$.
628. $652_x = 237_{12}$.
629. $233_x = 104_8$.
630. $247_x = 541_6$.
631. $614_x = 234_{15}$.
632. $713_x = 388_{11}$.
633. $224_x = 144_6$.
634. $516_x = 316_9$.
635. $215_x = 313_5$.
636. $221_x = 131_5$.
637. $535 = 313_8$.
638. $145_x = 122_7$.
639. $141_x = 116_8$.
640. $532_x = 327_9$.
641. $452_x = 150_{11}$.
642. $122_x = 230_5$.
643. $121_x = 264_7$.
644. $325_x = 236_7$.
645. $513_x = 2001_6$.
646. $218_x = 522_7$.
647. $138_x = 426_8$.
648. $184_x = 624_7$.
649. $443_x = 102_{11}$.
650. $292_x = 321_{12}$.
651. $153_x = 234_5$.

В какой системе счисления возможно равенство ?

652. 762 + 231 = 1213.
653. 362 + 231 = 613.
654. 682 + 115 = 807.
655. 321 + 301 = 1122.
656. 246 + 328 = 575.
657. 321 + 202 = 1123.
658. 542 + 313 = 1255.
659. 321 + 142 = 503.
660. 362 + 166 = 561.
661. 651 + 131 = 1112.
662. 156 + 360 = 546.
663. 352 + 145 = 541.
664. 134 + 257 = 413.
665. 144 + 233 = 432.
666. 232 + 311 = 1203.
667. 113 + 123 = 302.
668. 732 + 654 = 1606.
669. 822 + 173 = 1105.
670. 287 + 321 = 618.
671. 651 + 125 = 1106.
672. 125 + 334 = 503.
673. 223 + 143 = 421.
674. 133 + 121 = 320.
675. 176 + 357 = 555.
676. 285 + 376 = 672.

Найти двузначное число a_g, которое в системах счисления с основаниями g и p записывается одними и теми же числами, но в обратном порядке:

677. $g = 10$, $p = 4$.
678. $g = 11$, $p = 9$.
689. $g = 7$, $p = 10$.
680. $g = 13$, $p = 5$.
681. $g = 9$, $p = 7$.
682. $g = 16$, $p = 6$.
683. $g = 17$, $p = 9$.
684. $g = 15$, $p = 8$.
685. $g = 11$, $p = 7$.
686. $g = 11$, $p = 16$.
687. $g = 17$, $p = 13$.
688. $g = 13$, $p = 21$.
689. $g = 15$, $p = 9$.
690. $g = 4$, $p = 10$.
691. $g = 11$, $p = 41$.
692. $g = 15$, $p = 43$.
693. $g = 8$, $p = 36$.
694. $g = 9$, $p = 21$.
695. $g = 10$, $p = 19$.
696. $g = 13$, $p = 31$.
697. $g = 23$, $p = 78$.
698. $g = 15$, $p = 8$.
699. $g = 27$, $p = 29$.
700. $g = 53$, $p = 29$.
701. $g = 16$, $p = 40$.

Найти частное g_k – в разложении дроби $\frac{a}{b}$ в цепную:

702. $a = 250$, $b = 263$, $k = 4$.
703. $a = 241$, $b = 258$, $k = 5$.
704. $a = 261$, $b = 283$, $k = 3$.
705. $a = 301$, $b = 322$, $k = 3$.
706. $a = 233$, $b = 242$, $k = 3$.
707. $a = 311$, $b = 331$, $k = 5$.
708. $a = 334$, $b = 343$, $k = 3$.
709. $a = 783$, $b = 712$, $k = 2$.
710. $a = 410$, $b = 421$, $k = 4$.
711. $a = 423$, $b = 441$, $k = 3$.
712. $a = 431$, $b = 450$, $k = 5$.
713. $a = 448$, $b = 471$, $k = 4$.
714. $a = 483$, $b = 499$, $k = 4$.
715. $a = 512$, $b = 489$, $k = 4$.
716. $a = 531$, $b = 499$, $k = 5$.
717. $a = 542$, $b = 501$, $k = 5$.
718. $a = 582$, $b = 543$, $k = 3$.
719. $a = 599$, $b = 553$, $k = 2$.
720. $a = 621$, $b = 581$, $k = 4$.
721. $a = 644$, $b = 661$, $k = 5$.
722. $a = 699$, $b = 661$, $k = 3$.
723. $a = 499$, $b = 312$, $k = 3$.
724. $a = 712$, $b = 683$, $k = 4$.
725. $a = 741$, $b = 690$, $k = 4$.
726. $a = 712$ $b = 499$ $k = 2$.

Чему равен числитель третьей подходящей дроби для дроби $\frac{a}{b}$?

727. $a = 423$, $b = 441$.
728. $a = 431$, $b = 450$.
729. $a = 241$, $b = 258$.
730. $a = 483$, $b = 499$.
731. $a = 512$, $b = 489$.
732. $a = 531$, $b = 499$.
733. $a = 542$, $b = 501$.
734. $a = 410$, $b = 421$.
735. $a = 599$, $b = 552$.
736. $a = 621$, $b = 581$.
737. $a = 644$, $b = 603$.
738. $a = 662$, $b = 621$.
739. $a = 699$, $b = 661$.
740. $a = 712$, $b = 683$.
741. $a = 741$, $b = 690$.
742. $a = 783$, $b = 712$.
743. $a = 250$, $b = 263$.
744. $a = 241$, $b = 258$.
745. $a = 233$, $b = 242$.
746. $a = 261$, $b = 283$.
747. $a = 311$, $b = 331$.
748. $a = 334$, $b = 343$.
749. $a = 301$, $b = 322$.
750. $a = 361$, $b = 393$.
751. $a = 410$, $b = 421$.

По данной цепной дроби найти несократимую обыкновенную дробь:

752. $c = (0, 1, 30, 5, 3)$.
753. $c = (1, 21, 3, 1, 5)$.
754. $c = (1, 15, 1, 1, 2, 6)$.
755. $c = (1, 13, 1, 12)$.
756. $c = (1, 12, 46)$.
757. $c = (1, 12, 1, 1, 4)$.
758. $c = (1, 14, 1, 1, 9, 2)$.
759. $c = (0, 1, 19, 2, 11)$.
760. $c = (1, 15, 6, 1, 5)$.
761. $c = (1, 17, 2, 1, 1, 7)$.
762. $c = (1, 23, 1, 1, 4, 3)$.
763. $c = (1, 13, 1, 1, 8)$.
764. $c = (1, 10, 35, 2)$.
765. $c = (0, 1, 19, 4, 3)$.
766. $c = (0, 1, 14, 5, 1, 2)$.
767. $c = (0, 1, 25, 1, 8)$.
768. $c = (0, 1, 11, 1, 6, 3)$.
769. $c = (0, 1, 14, 3)$.
770. $c = (0, 15, 1, 1, 4, 2)$.
771. $c = (0, 1, 37, 9)$.
772. $c = (0, 1, 11, 3, 1, 1, 4)$.
773. $c = (0, 1, 37, 3, 2, 2)$.
774. $c = (0, 1, 23, 2)$.
775. $c = (0, 1, 22, 1, 2, 6)$.
776. $c = (0, 1, 19, 2, 11)$.

Заменить $\frac{a}{b}$ подходящей дробью с наименьшим знаменателем и погрешностью, не превосходящей числа α:

777. $a = 599$, $b = 553$, $\alpha = 0{,}0001$.
778. $a = 621$, $b = 581$, $\alpha = 0{,}001$.
779. $a = 644$, $b = 603$, $\alpha = 0{,}0001$.
780. $a = 662$, $b = 621$, $\alpha = 0{,}0001$.
781. $a = 669$, $b = 661$, $\alpha = 0{,}001$.
782. $a = 712$, $b = 683$, $\alpha = 0{,}001$.
783. $a = 741$, $b = 690$, $\alpha = \frac{1}{625}$.
784. $a = 582$, $b = 543$, $\alpha = \frac{1}{200}$.
785. $a = 250$, $b = 263$, $\alpha = 0{,}0001$.
786. $a = 241$, $b = 258$, $\alpha = \frac{1}{8100}$.
787. $a = 243$, $b = 242$, $\alpha = \frac{1}{700}$ 1/700.
788. $a = 261$, $b = 283$, $\alpha = \frac{1}{150}$ 1/150.
789. $a = 301$, $b = 322$, $\alpha = \frac{1}{250}$.
790. $a = 311$, $b = 242$ $\alpha = 0{,}001$.
791. $a = 334$, $b = 343$, $\alpha = \frac{1}{1600}$.
792. $a = 361$, $b = 399$, $\alpha = \frac{1}{1600}$.
793. $a = 410$, $b = 421$, $\alpha = \frac{1}{15000}$.
794. $a = 423$, $b = 441$, $\alpha = \frac{1}{1700}$.
795. $a = 431$, $b = 450$, $\alpha = \frac{1}{1700}$.
796. $a = 448$, $b = 471$, $\alpha = 0{,}001$.
797. $a = 483$, $b = 499$, $\alpha = 0{,}0001$.
798. $a = 512$, $b = 489$, $\alpha = \frac{1}{5000}$.
799. $a = 531$, $b = 499$, $\alpha = 0{,}001$.

800. $a = 542$, $b = 501$, $\alpha = \dfrac{1}{4000}$.

801. $a = 589$, $b = 543$, $\alpha = \dfrac{1}{200}$.

С помощью разложения в цепную дробь сократить дробь $\dfrac{a}{b}$:

802. $a = 437$, $b = 511$.
803. $a = 589$, $b = 703$.
804. $a = 779$, $b = 817$.
805. $a = 893$, $b = 1007$.
806. $a = 1121$, $b = 1159$.
807. $a = 1273$, $b = 1349$.
808. $a = 1387$, $b = 1501$.
809. $a = 1363$, $b = 1537$.
810. $a = 1691$, $b = 1843$.
811. $a = 493$, $b = 527$.
812. $a = 629$, $b = 697$.
813. $a = 731$, $b = 799$.
814. $a = 901$, $b = 1003$.
815. $a = 1037$, $b = 1139$.
816. $a = 1207$, $b = 1241$.
817. $a = 1363$, $b = 1537$.
818. $a = 1513$ $b = 1649$.
819. $a = 667$, $b = 713$.
820. $a = 851$, $b = 943$.
821. $a = 989$, $b = 1081$.
822. $a = 1219$, $b = 1357$.
823. $a = 1403$, $b = 1541$.
824. $a = 899$, $b = 1073$.
825. $a = 1189$, $b = 1247$.
826. $a = 1363$, $b = 1537$.

Решите уравнение.

827. $\left[\dfrac{5+6}{x}\right] = \dfrac{15x-7}{5}$.

828. $\left[\dfrac{8x+19}{7}\right] = \dfrac{16(x+1)}{11}$.

829. $\left[\dfrac{3x+5}{4}\right] = \dfrac{2x-1}{2}$.

830. $\left[\dfrac{x+7}{3}\right] = \dfrac{x-2}{5}$.

831. $\left[\dfrac{2x+8}{5}\right] = \dfrac{x+3}{2}$.

832. $\left[\dfrac{5x-4}{7}\right] = \dfrac{3x+1}{2}$.

833. $\left[\dfrac{6x+1}{5}\right] = \dfrac{4x-3}{7}$.

834. $\left[\dfrac{3x-5}{4}\right] = \dfrac{2x+1}{2}$.

835. $\left[\dfrac{x-7}{3}\right] = \dfrac{x+2}{5}$.

836. $\left[\dfrac{x+8}{7}\right] = \dfrac{3x+5}{2}$.

837. $\left[\dfrac{5x+3}{4}\right] = \dfrac{2x-3}{5}$.

838. $\left[\dfrac{2x+5}{3}\right] = \dfrac{7x-3}{4}$.

839. $\left[\dfrac{4x-7}{8}\right] = \dfrac{2x+5}{3}$.

840. $\left[\dfrac{2x+3}{3}\right] = \dfrac{3x+4}{7}$.

841. $\left[\dfrac{5x+4}{7}\right] = \dfrac{3x-1}{2}$.

Решите уравнение.

842. $[x+1]=\left[\frac{x-2}{3}\right]$.

843. $\left[\frac{x-6}{5}\right]=[x+3]$.

844. $\left[\frac{x-3}{2}\right]=\left[\frac{x-2}{3}\right]$.

845. $\left[\frac{x-2}{3}\right]=\left[\frac{x+3}{2}\right]$.

846. $[x+2]=\left[\frac{x-1}{2}\right]$.

847. $\left[\frac{x+3}{3}\right]=\left[\frac{x+2}{5}\right]$.

848. $\left[\frac{x+5}{3}\right]=[x-1]$.

849. $\left[\frac{x-1}{4}\right]=[x+5]$.

850. $[x+3]=\left[\frac{x+2}{5}\right]$.

851. $\left[\frac{x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+5}{2}\right]$.

852. $\left[\frac{x-2}{5}\right]=\left[\frac{x+3}{3}\right]$.

853. $[x-1]=\left[\frac{x+2}{3}\right]$.

854. $\left[\frac{x+3}{2}\right]=\left[\frac{x-7}{3}\right]$.

855. $\left[\frac{x-7}{2}\right]=\left[\frac{x-3}{3}\right]$.

856. $\left[\frac{x+6}{5}\right]=[x-3]$.

Решите уравнение.

857. $x^2-[x]-30=0$.

858. $2x^2-5[x]+2=0$.

859. $x^2-5[x]+6=0$.

860. $3x^2-8[x]+5=0$.

861. $5x^2+3[x]-2=0$.

862. $5x^2-3[x]-2=0$.

863. $x^2+3[x]+2=0$.

864. $2x^2+7[x]+5=0$.

865. $2x^2+5[x]+2=0$.

866. $3x^2+5[x]+2=0$.

867. $2x^2-7[x]+5=0$.

868. $3x^2+8[x]+5=0$.

869. $2x^2+3[x]+1=0$.

870. $3x^2-5[x]+2=0$.

871. $2x^2-[x]-6=0$.

Решите уравнение.

872. $\{(x+1)^3\}=x^3$.

873. $\{(x-1)^3\}=8x^3$.

874. $\{(2x+1)^3\}=8x^3$.

875. $\{(x-1)^3\}=x^3$.

876. $\{(1-2x)^3\}=-8x^3$.

877. $\{(1-x)^3\}=-x^3$.

878. $\{(x-2)^2(x+2)\}=x^3$.

879. $\{(x-2)^3\}=x^3$.

880. $\{(x+2)^2(x-2)\}=x^3$.

881. $\{(x+2)^2(x-1)\}=x^3$.

882. $\{(x-1)^2(x+1)\}=x^3.$

883. $\{(x-1)^2(x+2)\}=x^3.$

884. $\{(x+1)^2(x-2)\}=x^3.$

885. $\{(x-2)^2(x+1)\}=x^3.$

886. $\{(x+2)^2(x-1)\}=x^3.$

Решите систему уравнений.

887. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}1 \\ y+[z]+\{x\}=2{,}2 \\ z+[x]+\{y\}=3{,}3. \end{cases}$

888. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3{,}9 \\ y+[z]+\{x\}=3{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=23. \end{cases}$

889. $\begin{cases} 2x+2[y]+2\{z\}=1{,}3 \\ y+2[z]+\{x\}=2{,}5 \\ z+[x]+2\{y\}=0{,}7. \end{cases}$

890. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}5 \\ y+3[z]+\{x\}=1{,}2 \\ z+[x]+\{y\}=0{,}3. \end{cases}$

891. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=4 \\ y+[z]+3\{x\}=1{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=2{,}5. \end{cases}$

892. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=4 \\ y+[z]+3\{x\}=3{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=1{,}5. \end{cases}$

893. $\begin{cases} x+[y]+5\{z\}=3 \\ y+[z]+\{x\}=3{,}4 \\ z+[x]+\{y\}=1{,}6. \end{cases}$

894. $\begin{cases} x+[y]+7\{z\}=4 \\ y+[z]+\{x\}=1{,}6 \\ z+[x]+\{y\}=2{,}5. \end{cases}$

895. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}5 \\ y+[z]+\{x\}=2{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=3{,}4. \end{cases}$

896. $\begin{cases} x+[y]+2\{z\}=3 \\ 2y+2[z]+2\{x\}=1{,}7 \\ z+2[x]+\{y\}=1{,}3. \end{cases}$

897. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=2 \\ y+[z]+\{x\}=4{,}4 \\ z+[x]+\{y\}=1{,}6. \end{cases}$

898. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3 \\ y+[z]+\{x\}=2{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=3{,}5. \end{cases}$

899. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=2 \\ y+[z]+\{x\}=2{,}8 \\ z+[x]+\{y\}=2{,}6. \end{cases}$

900. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=2{,}9 \\ y+[z]+2\{x\}=2 \\ 2z+2[x]+2\{y\}=1{,}1. \end{cases}$

901. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1 \\ y+[z]+5\{x\}=4{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=2{,}5. \end{cases}$

Найдите каноническое разложение числа $n!$. Сколькими нулями оканчивается его десятичная запись?

902. $n = 16$.	**907.** $n = 27$.	**912.** $n = 22$.
903. $n = 18$.	**908.** $n = 30$.	**913.** $n = 29$.
904. $n = 23$.	**909.** $n = 25$.	**914.** $n = 31$.
905. $n = 20$.	**910.** $n = 24$.	**915.** $n = 33$.
906. $n = 28$.	**911.** $n = 32$.	**916.** $n = 21$.

По указанному каноническому разложению $n!$. Восстановите числа n и α_i.

917. $n! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^{\alpha_{13}} \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}} \cdot 23^{\alpha_{23}}$.

918. $n! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^{\alpha_{13}} \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}}$.

919. $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^{\alpha_{13}}$.

920. $n! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^4 \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^{\alpha_{13}} \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}} \cdot 23^{\alpha_{23}}$.

921. $n! = 2^{31} \cdot 3^{14} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^{\alpha_{13}} \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}} \cdot 23^{\alpha_{23}} \cdot 31^{\alpha_{31}}$.

922. $n! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{10} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^2 \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}} \cdot 23^{\alpha_{23}}$.

923. $n! = 2^{31} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^3 \cdot 13^{\alpha_{13}} \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}} \cdot 23^{\alpha_{23}} \cdot 31^{\alpha_{31}}$.

924. $n! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^{\alpha_{13}} \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}} \cdot 23^{\alpha_{23}}$.

925. $n! = 2^{32} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^8 \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^{\alpha_{13}} \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}} \cdot 23^{\alpha_{23}} \cdot 31^{\alpha_{31}}$.

926. $n! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{15} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^5 \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^{\alpha_{13}} \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}} \cdot 23^{\alpha_{23}} \cdot 31^{\alpha_{31}}$.

927. $n! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^8 \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^3 \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}} \cdot 23^{\alpha_{23}} \cdot 31^{\alpha_{31}} \cdot 37^{\alpha_{37}}$.

928. $n! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^9 \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^2 \cdot 13^{\alpha_{13}} \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}}$.

929. $n! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{17} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^3 \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^2 \cdot 23^{\alpha_{23}} \cdot 31^{\alpha_{31}} \cdot 37^{\alpha_{37}}$.

930. $n! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{15} \cdot 5^8 \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^{\alpha_{13}} \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^2 \cdot 23^{\alpha_{23}} \cdot 31^{\alpha_{31}}$.

931. $n! = 2^{35} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^{\alpha_{11}} \cdot 13^3 \cdot 17^{\alpha_{17}} \cdot 19^{\alpha_{19}} \cdot 23^{\alpha_{23}} \cdot 31^{\alpha_{31}} \cdot 37^{\alpha_{37}}$.

Перечислите все натуральные трехзначные числа n такие, что количество натуральных чисел, не превышающих n и не делящихся на 5, принадлежит промежутку $[a, b]$.

932. $b = 79$, $c = 85$.	**940.** $b = 77$, $c = 87$.
933. $b = 80$, $c = 86$.	**941.** $b = 97$, $c = 105$.
934. $b = 90$, $c = 98$.	**942.** $b = 86$, $c = 91$.
935. $b = 95$, $c = 100$.	**943.** $b = 90$, $c = 95$.
936. $b = 70$, $c = 81$.	**944.** $b = 80$, $c = 90$.
937. $b = 76$, $c = 85$.	**945.** $b = 91$, $c = 105$.
938. $b = 95$, $c = 101$.	**946.** $b = 91$, $c = 105$.
939. $b = 70$, $c = 82$.	

Вычислите значения функции Эйлера. α и τ от числа a.

947. $a = 142560$.
948. $a = 421200$.
949. $a = 539000$.
950. $a = 476000$.
951. $a = 105840$.
952. $a = 273000$.
953. $a = 853776$.
954. $a = 794976$.
955. $a = 702702$.
956. $a = 343035$.
957. $a = 798525$.
958. $a = 606375$.
959. $a = 268125$.
960. $a = 523908$.
961. $a = 548856$.

Сколькими нулями заканчивается десятичная запись числа $\varphi(a!)$?

962. $a = 92$.
963. $a = 72$.
964. $a = 88$.
965. $a = 104$.
966. $a = 64$.
967. $a = 90$.
968. $a = 69$.
969. $a = 80$.
970. $a = 100$.
971. $a = 60$.
972. $a = 85$.
973. $a = 70$.
974. $a = 98$.
975. $a = 109$.
976. $a = 79$.

Пусть $a! = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} \ldots$ каноническое разложение $a!$. Вычислите $\tau(2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5})$.

977. $a = 23$.
978. $a = 16$.
979. $a = 18$.
980. $a = 27$.
981. $a = 20$.
982. $a = 28$.
983. $a = 24$.
984. $a = 30$.
985. $a = 25$.
986. $a = 29$.
987. $a = 33$.
988. $a = 22$.
989. $a = 21$.
990. $a = 31$.
991. $a = 33$.

Пусть $a! = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} \ldots$ каноническое разложение $a!$. Вычислите $\sigma(5^{\alpha_5} 7^{\alpha_7} 11^{\alpha_{11}})$.

992. $a = 21$.
993. $a = 31$.
994. $a = 33$.
995. $a = 23$.
996. $a = 16$.
997. $a = 18$.
998. $a = 27$.
999. $a = 20$.
1000. $a = 28$.
1001. $a = 24$.
1002. $a = 30$.
1003. $a = 25$.
1004. $a = 29$.
1005. $a = 32$.
1006. $a = 22$.

Решите уравнение.

1007. $\varphi(x) = 8$.
1008. $\varphi(x) = 12$.
1009. $\varphi(x) = 24$.
1010. $\varphi(x) = 16$.
1015. $\varphi(x) = 56$.
1017. $\varphi(x) = 84$.
1019. $\varphi(x) = 100$.
1021. $\varphi(x) = 112$.
1011. $\varphi(x) = 18$.
1012. $\varphi(x) = 36$.
1013. $\varphi(x) = 40$.
1014. $\varphi(x) = 42$.
1016. $\varphi(x) = 60$.
1018. $\varphi(x) = 88$.
1020. $\varphi(x) = 108$.

Найдите все простые делители числа x из уравнения.

1022. $11\varphi(x) = 4x$.
1023. $35\varphi(x) = 12x$.
1024. $31\varphi(x) = 12x$.
1025. $19\varphi(x) = 9x$.
1026. $65\varphi(x) = 24x$.
1027. $13\varphi(x) = 4x$.
1028. $77\varphi(x) = 30x$.
1029. $15\varphi(x) = 4x$.
1030. $23\varphi(x) = 20x$.
1031. $29\varphi(x) = 12x$.
1032. $33\varphi(x) = 16x$.
1033. $51\varphi(x) = 16x$.
1034. $31\varphi(x) = 8x$.
1035. $37\varphi(x) = 12x$.
1036. $41\varphi(x) = 16x$.

Решите уравнение.

1037. $\varphi(3^x5^y7^z) = 720$.
1038. $\varphi(3^x13^y) = 12168$.
1039. $\varphi(3^x5^y) = 600$.
1040. $\varphi(5^x7^y) = 600$.
1041. $\varphi(3^x5^y7^z) = 25200$.
1042. $\varphi(5^x7^y11^z) = 18480$.
1043. $\varphi(5^x7^y11^z) = 4200$.
1044. $\varphi(5^x11^y) = 2200$.
1045. $\varphi(2^x13^y) = 1248$.
1046. $\varphi(3^x7^y) = 4896$.
1047. $\varphi(3^x5^y11^z) = 1980$.
1048. $\varphi(2^x17^y) = 2176$.
1049. $\varphi(3^x5^y) = 5400$.
1050. $\varphi(5^y7^z) = 5880$.
1051. $\varphi(3^x5^y13^z) = 4056$.

Найдите n, если известен его делитель m и значение $\tau(n)$.

1052. $m = 135,\ \tau(n) = 21$.
1053. $m = 104,\ \tau(n) = 15$.
1054. $m = 88,\ \tau(n) = 21$.
1055. $m = 75,\ \tau(n) = 14$.
1056. $m = 99,\ \tau(n) = 10$.
1057. $m = 40,\ \tau(n) = 33$.
1058. $m = 36,\ \tau(n) = 21$.
1059. $m = 56,\ \tau(n) = 22$.
1060. $m = 52,\ \tau(n) = 26$.
1061. $m = 68,\ \tau(n) = 22$.
1062. $m = 175,\ \tau(n) = 10$.
1063. $m = 98,\ \tau(n) = 15$.
1064. $m = 117,\ \tau(n) = 14$.
1065. $m = 80,\ \tau(n) = 15$.
1066. $m = 45,\ \tau(n) = 14$.

Пусть $n = p^{\alpha}g^{\beta}$, где p и g – различные простые числа, p и g – натуральные числа. Найдите $\tau(n^3)$, если известно значение $\tau(n^2)$.

1067. $\tau(n^2) = 77$.
1068. $\tau(n^2) = 75$.
1069. $\tau(n^2) = 85$.
1070. $\tau(n^2) = 91$.
1071. $\tau(n^2) = 93$.
1072. $\tau(n^2) = 95$.
1073. $\tau(n^2) = 99$.
1074. $\tau(n^2) = 105$.
1075. $\tau(n^2) = 111$.
1076. $\tau(n^2) = 115$.
1077. $\tau(n^2) = 117$.
1078. $\tau(n^2) = 119$.
1079. $\tau(n^2) = 121$.
1080. $\tau(n^2) = 133$.
1081. $\tau(n^2) = 135$.

Перечислите все натуральные числа a такие, что количество натуральных чисел не превышающих a и имеющих с a наибольший общий делитель 15, равно b.

1082. $b = 16$.
1083. $b = 18$.
1084. $b = 36$.
1085. $b = 40$.
1086. $b = 42$.
1087. $b = 56$.
1088. $b = 60$.
1089. $b = 84$.
1090. $b = 88$.
1091. $b = 100$.
1092. $b = 108$.
1093. $b = 112$.
1094. $b = 8$.
1095. $b = 12$.
1096. $b = 24$.

Методом математической индукции докажите, что для любого натурального числа n число a делится на b.

1097. $a = n(n+1)(2n+1)$, $b = 6$.
1098. $a = 6^{2^n} - 1$, $b = 35$.
1099. $a = n(n^2+1)$, $b = 6$.
1100. $a = 4^n + 15 - 1)$, $b = 9$.
1101. $a = n(n^3 + 2n^2 - n + 22)$, $b = 24$.
1102. $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$, $b = 16$.
1103. $a = (n+2)(n^2+4n+9)$, $b = 6$.
1104. $a = 3^{2n+1} + 40n - 67$, $b = 64$.
1105. $a = (n-1)(n^2+n+12)$, $b = 6$.
1106. $a = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$, $b = 24$.
1107. $a = n^3 + 5n + 12$, $b = 6$
1108. $a = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, $b = 11$.
1109. $a = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$, $b = 19$.
1110. $a = 3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$, $b = 25$.
1111. $a = 2^{n+2} \cdot 3^n + 5 - 4$.

Известны НОД(a, b) и НОК(a, b). Найдите натуральные числа a, b.

1112. НОД(a, b) = 16, НОК(a, b) = 1584.
1113. НОД(a, b) = 15, НОК(a, b) = 630.
1114. НОД(a, b) = 22, НОК(a, b) = 3630.
1115. НОД(a, b) = 19, НОК(a, b) = 5187.
1116. НОД(a, b) = 14, НОК(a, b) = 2856.
1117. НОД(a, b) = 15, НОК(a, b) = 6900.
1118. НОД(a, b) = 30, НОК(a, b) = 15660.
1119. НОД(a, b) = 27, НОК(a, b) = 5589.
1120. НОД(a, b) = 36, НОК(a, b) = 6480.
1121. НОД(a, b) = 12, НОК(a, b) = 1872.
1122. НОД(a, b) = 21, НОК(a, b) = 756.
1123. НОД(a, b) = 26, НОК(a, b) = 4914.
1124. НОД(a, b) = 35, НОК(a, b) = 8925.
1125. НОД(a, b) = 14, НОК(a, b) = 4410.

15 КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

В середине XVIII века великий французский математик Пьер Ферма[11] заинтересовался поиском четверок положительных целых чисел a, b, c, n, для которых выполняется равенство $a^n + b^n = c^n$. Скорее всего этот интерес возник при чтении книги «Арифметика» древнегреческого математика Диофанта[12], изданной в 1621 году. в Париже на двух языках – греческом и латинском. Кстати, Ферма был по образованию юристом, и его служебные обязанности состояли в заведовании отделом петиций Тулузского парламента. Можно сказать, что занятия математикой, а заодно и оптикой, для него были не более чем хобби. Тем не менее, именно внеслужебные увлечения принесли Ферма мировую известность.

При $n = 2$ можно указать бесконечное множество троек чисел a, b, c, для которых выполнено равенство $a^2 + b^2 = c^2$. Все такие числа образуют так называемые *пифагоровы тройки*: (3, 4, 5); (5, 12, 13); (8, 15, 17); (7, 24, 25) и т.д. С давних времен известен способ, позволяющий получить все пифагоровы тройки. Заметим, что любая пифагорова тройка a, b, c порождает бесконечное семейство пифагоровых троек ka, kb, kc для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Можно ли привести примеры таких положительных целых чисел a, b, c, чтобы равенство $a^n + b^n = c^n$ выполнялось для $n = 3$, или для $n = 5$ и т.д.? Другими словами, существуют ли четверки положительных целых чисел a, b, c, n при $n > 2$, для которых выполнено равенство $a^n + b^n = c^n$?

Пьер Ферма пришел к убеждению, что таких четверок не существует. Теорему о несуществовании четверок положительных целых чисел a, b, c, n при $n > 2$, для которых выполнено равенство $a^n + b^n = c^n$, принято называть *Великой теоремой Ферма.*

Итак, Великая теорема Ферма утверждает, что

> Для любого целого положительного $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет положительных целых решений a, b, c.

До момента ее полного доказательства Великую теорему Ферма следовало бы назвать *гипотезой Ферма*, поскольку автор утверждения не оставил его доказательства, и доказательства не было еще более 350 лет. Теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 году на полях «Арифметики» Диофанта. Дело в том, что Ферма на полях читаемых математических трактатов делал свои пометки и тут же формулировал пришедшие на ум задачи и теоремы. Теорему, о которой идет речь, он записал с припиской, что найденное им остроумное доказательство этой теоремы слишком длинно, чтобы его можно было поместить на полях книги.

Вот как он сформулировал свою теорему: «Невозможно куб разложить на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем».

---

[11] Пьер Ферма (Pierre Fermat) [17.08.1601, Бомон-де-Ломань, – 12.01.1665, Кастр] – французский математик. Автор ряда выдающихся работ, оказавших большое влияние на дальнейшее развитие математики. При жизни Ферма полученные им результаты становились известны ученым благодаря переписке и личному общению. Большинство его работ было издано после смерти его сыном под названием «Разные математические сочинения» в Тулузе в 1679 году.

[12] Диофант (Ωιόφαντοζ) [вероятно, 3 в.] – древнегреческий математик из Александрии. В его математических трактатах дается решение задач, приводящихся к неопределенным уравнениям, решения которых ищутся в множестве неотрицательных рациональных чисел. Позже такие уравнения стали называться *диофантовыми.* Сочинения Диофанта послужили отправной точкой для исследований П. Ферма, Л. Эйлера, К. Гаусса и др.

В бумагах Ферма было найдено доказательство частного случая Великой теоремы для показателя n = 4. Это доказательство добавляет сомнение в том, что у него было доказательство общего случая, о котором он написал на полях книги.

Формулировка теоремы стала известна широкой математической общественности только в 1670 году, когда старший сын Ферма переиздал в Тулузе Диофантову «Арифметику», включив в издание и 48 примечаний, сделанных его отцом на полях. Простота формулировки, заявление о существовании поистине удивительного доказательства – сразу привлекли внимание к гипотезе Ферма многих и многих математиков – профессионалов и любителей. Однако многочисленные попытки доказать сразу общий случай были тщетны.

Лишь спустя 100 лет, в 1770 году великий математик Эйлер[13] доказал частный случай Великой теоремы для показателя n = 3. Через 55 лет в 1825 году немецкий математик Дирихле[14] и французский математик Лежандр[15] доказали частный случай Великой теоремы для показателя n = 5, а затем Ламе[16] в 1839 году – доказал частный случай Великой теоремы для показателя n = 7. Немецкий математик Куммер[17] начал заниматься проблемой Ферма в 1837 году и в 1844 году доказал, что теорема верна для всех простых n < 100, за возможным исключением n = 37, 59, 67.

Над полным доказательством Великой теоремы работало немало выдающихся математиков и множество дилетантов-любителей; считается, что теорема стоит на первом месте по количеству некорректных «доказательств». Тем не менее, важность гипотезы Ферма отметил Давид Гильберт в своем знаменитом докладе «Математические проблемы» на II Международном конгрессе математиков (1900 г.) следующими словами: «Великая теорема Ферма являет разительный пример того, какое побуждающее влияние науке может оказать специальная и на первый взгляд малозначительная проблема».

Многочисленные неудачные попытки решить положительно гипотезу Ферма в общем виде вызвали определенный пессимизм в среде математиков-профессионалов. Предпринимались даже попытки опровергнуть эту гипотезу, но также безуспешные. Заниматься этой проблемой среди профессионалов сделалось дурным тоном, и если кто из них всерьез доказывал или опровергал гипотезу Ферма, то делал это в тайне.

Проблема Ферма вдруг стала популярной среди дилетантов и просто душевно неустойчивых людей. Всех, кто предлагал то или иное решение (и всегда ошибочное) проблемы Ферма стали называть *ферматистами.* Все началось с того, что немецкий любитель математики и ферматист Пауль Вольфскель в 1905 году завещал 100 000 немецких марок научному обществу в Геттингене для награждения того, кто первым докажет Великую теорему Ферма. Пауль Вольфскель умер в 1906 году, а 13 сентября 1908 году Королевское научное общество в Геттигене обнародовало условия конкурса из девяти пунктов. В частности, пункт 5 гласил, что премия присуждается не ранее чем через два года после опубликования правильного решения, а пункт 9 ограничивал прием заявок на премию 13 сентября 2007 года.

---

[13] Леонард Эйлер (Leonhard Euler) [04.04.1707, Базель – 07(18).09.1783, Петербург] – математик, механик и физик. В Петербурге жил с 1727 г. по 1741 г. и с 1766 г. до конца жизни. Изучил русский язык, был членом Петербургской и Берлинской академии наук. По выражению Лапласа, Эйлер явился общим учителем математиков второй половины XVIII века.

[14] Петер Густав Дирихле (Peter Gustav Dirichlet) [13.02.1805, Дюрен – 05.05.1859, Геттинген] – немецкий математик. Основные труды по теории чисел и математическому анализу.

[15] Адриент Мари Лежандр (Adrien Marie Legendre) [18.09.1752, Париж – 10.01.1833, Париж] – французский математик. Основные труды в теории чисел, математическом анализе и вариационном исчислении.

[16] Габриэль Ламе (Gabriel Lame) [22.07.1795, Тур – 01.05.1870, Париж] – французский математик и инженер. В 1820–32 работал в России. Основные труды по математической физике и теории упругости.

[17] Эрнст Эдуард Куммер (Ernst Eduard Kummer) [29.01.1810, Зорау – 14.05.1893, Берлин] – немецкий математик. Основные труды по математическому анализу, алгебре и теории чисел.

Среди многочисленных ферматистов неожиданно оказался известный математик Фердинанд Линдеман[18]. Говорят, что по настоянию жены, которая соблазнилась возможностью получить премию Вольфскеля, в 1908 году Линдеман опубликовал 66-страничную работу, посвященную решению проблемы Ферма. Его доказательство содержало фатальную ошибку, которая могла возникнуть только в результате гонки за премией.

Интерес к проблеме Ферма возник вновь в 1980-х годах, когда немецкий математик Фалтингс[19] доказал, что уравнение $a^n + b^n = c^n$ при $n > 3$ может иметь лишь конечное число взаимно простых[20] решений. Последний, но самый важный шаг в доказательстве теоремы Ферма сделал английский математик Эндрю Уайлс[21].

Эндрю Уайлс заинтересовался проблемой Ферма, когда он был школьником в возрасте 10 лет. В книге Саймона Сингха[22] «Великая теорема Ферма» приводится рассказ Эндрю о тех эмоциях, которые он испытал при первом знакомстве с проблемой Ферма: «Она выглядела такой простой, и все же великие умы в истории математики не смогли доказать ее. Передо мной была проблема, понятная мне, десятилетнему мальчику, и я почувствовал, что с того самого момента никогда не смогу от нее отступиться. Я должен был решить ее».

Заниматься всерьез проблемой Ферма Уайлс начал в 1986 году. В это время он уже работал в Принстонском университете, и, зная отношение окружающих к ферматистам, делал это в тайне от всех. Напряженная работа над проблемой продолжалась семь лет. Он использовал новейшие методы и теоремы, которые могли бы привести к желанному результату. В январе 1993 года Уайлсу показалось, что он доказал теорему Ферма. Он поделился полученным доказательством с коллегой по Принстонскому университету Ником Катцем[233]. Спустя три месяца Уайлс изложил основные идеи доказательства в трех лекциях, которые состоялись в Кембриджском университете 21, 22 и 23 июня 1993 года. Математический мир был восхищен успехом Уайлса, и все с нетерпением ждали публикации текста доказательства. Комиссия в Геттингене была оповещена о возможном лауреате ее премии.

Однако публикация затягивалась. Как оказалось Уайлс направил 200-страничное доказательство в журнал «Inventiones Mathematicae», где работу отдали на проверку сразу шести рецензентам. Одним из рецензентов был Ник Катц – он и обнаружил пробел в доказательстве. Это скрывалось до тех пор, пока 4 декабря 1993 года Уайлс не признал возникшие пробелы в доказательстве. Это еще не было очередным поражением в решении проблемы Ферма, но в тот момент никто не был, включая Уайлса, уверен в обратном.

В январе 1994 года Уайлс пригласил для совместной работы своего ученика Ричарда Тэйлора[24]. В результате совместной работы, как пишет сам Уайлс, 19 сентября 1994 года

---

[18] Карл Луис Фердинанд Линдеман (Carl Louis Ferdinand Lindemann) [12.04.1852, Ганновер – 01.05.1939, Мюнхен] – немецкий математик. Основные труды по теории чисел, доказал в 1882 году трансцендентность числа π и тем самым неразрешимость задачи квадратуры круга.

[19] Герд Фалтингс (Gerd Faltings) [р. 28.07.1954, Гельзенкирхен] – немецкий математик. С 1985 г. работает в Принстонском университете. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1986).

[20] Два натуральных числа a и b называются взаимно простыми, если их единственный общий делитель равен 1.

[21] Эндрю Уайлс (Andrew JohnWiles) [р. 11.04.1953, Кембридж] – английский математик, работает в Принстонском ун-те. Награжден призом Ферма (Prix Fermat) (1995).

[22] Singh S., Fermat’s Last Theorem. http://ega-math.narod.ru/Singh/FLT.htm.

[23] Ник Катц (Nicholas Michael Katz) [р. 07.12.1943, Балтимор] – американский математик, работает в Оксфордском университете. Труды в области алгебраической геометрии и теории чисел.

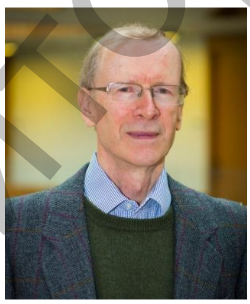
[24] Ричард Тэйлор (Richard Lawrence Taylor) [р. 19.04.1962, Кембридж] – английский математик, ученик и соавтор Эндрю Уайлса. В настоящее время работает в Гарвардском университете.

он понял, что наконец теорема Ферма окончательно доказана. В мае 1995 года в журнале «Annals of Mathematics» были опубликованы две статьи общим объемом в 130 страниц. Первой шла статья Уайлса «Modular elliptic curvesand Fermat's Last Theorem», поступившая в редакцию 14 октября 1994 года, второй – совместная статья Уайлса и Тэйлора «Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras», поступившая в редакцию 7 октября 1994 года. В совокупности они давали доказательство гипотезы Таниямы-Симуры-Вейля, из которого следует доказательство Великой теоремы Ферма.

Так счастливо завершилась 357-летняя история Великой теоремы Ферма. 27 октября 1995 года Уайлс был награжден призом Ферма в Тулузе, посетил городок Бомон-де-Ломань, где родился Ферма, и его могилу, на надгробии которой высечена в виде формулы великая теорема Ферма. Так как условия конкурса на премию Вольфскеля были выполнены Уайлсом полностью, то он через два года после публикации – 27 июня 1997 года получил награду. К этому времени Королевское научное общество было переименовано в Геттингенскую академию наук, а премия составила 75000 немецких марок.

Кроме внимания со стороны мировых СМИ, Уайлс получил множество наград. Среди них Премия Рольфа Шока, Премия Островски, Премия Вольфа, Королевская медаль, Премия национальной академии наук США в области математики и Премия Шоу. Международный математический союз наградил его Серебряной тарелкой, что стало беспрецедентным случаем в истории союза. Также он получил ежегодную Премию Математического института Клэя. В 2000 году Уайлс был посвящен в рыцари Британской Империи.

С 1982-го по 2010-ый год Уайлс находился в Принстоне, за исключением коротких периодов отпусков. В 2010 году он вернулся в Оксфорд в качестве профессора-исследователя Королевского общества. Его офис в Математическом институте расположен в Корпусе Эндрю Уайлса, который был открыт в 2013 году и назван в его честь.



В 2016 году за доказательство Великой теоремы Ферма Эндрю Уайлс получил Абелевскую премию.

Источники:

1. Сингх С. Великая теорема Ферма [71].
2. http:/math.ivanovo.ac.ru/schoo//solon/history_ferma.pdf.
3. Википедия.
4. Архив Американского математического общества.
5. Shawprize.org.
6. BBC Horizon.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азовская Т.В., Севостьянова В.В. Задачи по теории чисел: учеб. пособие. – Самара: Издательство «Самарский университет», 2009. – 72.
2. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. – М.: Мир, 1987. – 416 с.
3. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для студентов-заочников II курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1974. – Ч. 3. – 200 с.
4. Александров В.А. Задачник-практикум по теории чисел. Для студентов-заочников физико-математ. факультетов педагогических институтов. – М.: Учпедгиз, 1960.
5. Александров, В.А. Горшенин С.М. Задачник-практикум по теории чисел. – М.: Просвещение, 1972. – 81 с.
6. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. – М.: МЦНМО, 2002. – 264 с.
7. Арнольд В.И. Цепные дроби. – М.: МЦПМО, 2000. – 40 с.
8. Арнольд И.В. Теория чисел. Пособие для пединститутов. – М.: Учпедгиз, 1939.
9. Аршинов М.Н., Садовский Л.Е. Коды и математика (рассказы о кодировании). – М.: Наука. Гл. ред. ф-м лит. 1983. – 144 с. (Библиотечка «Квант»).
10. Башмакова И.Т. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972. – 68 с.
11. Бейкер А. Введение в теорию чисел. – Мн.: Вышэйшая школа, 1995.
12. Бельский А.А., Калужнин Л.А. Деление с остатком. – Киев: Вища школа, 1977. – 72 с.
13. Бескин Н.М. Занимательные дроби. – Мн.: Вышэйшая школа, 1980. – 128 с.
14. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
15. Бородін О.І. Теорія чисел. – Кіїв: Радянська школа, 1965. – 263 с.
16. Босс В. Лекции по математике: учебное пособие. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – Т. 14. – 216 с.
17. Бузланов А.В., Монахов В.С. Лабораторные работы по курсу «Алгебра и теория чисел» – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 1991.
18. Булавко И.Г. Методическое руководство для самостоятельной работы студентов по математике (Делимость чисел. Тождества. Уравнения. Неравенства). – Мн.: Вышэйшая школа, 1976. – 112 с.
19. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и геометрии. – Мн.: Университетское, 1999.
20. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
21. Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С. Алгебра. – М.: Просвещение, 1974. – 160 с.

22. Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С., Стеллецкий И.В. Алгебра. – М.: Просвещение, 1978. – 144 с.
23. Вейль А. Основы теории чисел. – М.: Мир, 1972. – 408 с.
24. Вейль Г. Алгебраическая теория чисел. – М.: Гос. изд. иностр. литературы, 1947. – 226 с.
25. Виленкин Н.Я., Кочева А.А., Стеллецкий И.В. Задачник-практикум по элементарной алгебре. – М.: Просвещение, 1969. – 192 с.
26. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981.
27. Витов В.Ф., Неустроев Н.В., Рыбакова В.Е. Задачи по теории чисел. – Новгород: НГПИ,1989. – 50 с.
28. Воробьев Н.Н. Признаки делимости. – М.: Наука, 1974.
29. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1992.
30. Воробьев Н.Н., Воробьев С.Н., Наумик М.И. Алгебра: группы, кольца, поля. Комплексные числа: методические рекомендации. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – 56 с.
31. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. – М.: МГУ, 1984. – 152 с.
32. Гашков С.Б. Алгоритм Евклида, цепные дроби, числа Фибоначчи и квадрирование прямоугольников. – Математическое просвещение, сер. 3, вып. 6, 2002 (93–115).
33. Гашков С.Б., Чубариков В.Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. Учебное пособие для вузов / под ред. В.А. Садовничего. – 2-е изд. перераб. – М.: Высшая школа, 2000. – 320 с.
34. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел, ГТТИ, 1940.
35. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. – М.: Наука, 1983.
36. Гельфонд А.О., Линник Ю.В. Элементарные методы аналитической теории чисел. – М.: Физматгиз, 1962. – 272 с.
37. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел. – М.: Просвещение, 1964. – 143 с.
38. Дринфельд Г.И., Трансцендентность чисел π и *e,* вид. Харківського ун-ту, 1952.
39. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. – М.: Наука, 1965.
40. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. – М.: Наука, 1971. – 200 с.
41. Жмулева А.В., Степанова Л.Л. Арифметика. – М., МГПИ, 1986.
42. Казачек Н.А. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для студентов-заочников II курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А.И. Казачек, Г.Н. Перлатов, Н.Я. Виленкин, А.И. Бородин. – М.: Просвещение, 1984. – 192 с.
43. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983. – 240 с.
44. Кострикин, А. И. Введение в алгебру: в 3 ч. / А.И. Кострикин. – М.: Физматлит, 2001.

45. Коутинхо С. Введение в теорию чисел. Алгоритм RSA. – М.: Постмаркет, 2001. – 328 с.
46. Кочева А.А. Задачник-практикум по теории чисел; под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1984. – Ч. III. – 41 с.
47. Крючков Н.И., Крючкова В.В. Сборник заданий по алгебре: учеб. пособие для студ. высш. учеб заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 192 с.
48. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел. – М.: Просвещение, 1970. – 128 с.
49. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высш. шк., 1979.
50. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – М.: Просвещение, 1993.
51. Лельчук М.П., Полевченко И.И., Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д.. Практические занятия по алгебре и теории чисел. – Минск: Вышэйш. шк., 1986.
52. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. – М.: Просвещение. – 1974. – Ч. I. – 384 с.; 1976. – Ч. 2. – 448 с.
53. Марчевский М.Н. Теория чисел. Краткий курс. – Харьков: Издательство Харьковского Ордена Трудового Красного Знамени государственного университета имени А.М. Горького, 1958. – 144 с.
54. Михелович Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высш. шк., 1967. – 335 с.
55. Монахов В.С. Числа и многочлены: тексты лекций по курсу «Алгебра и теория чисел». – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 1992.
56. Неустроев Н.В., Рыбакова В.Е. Задачи повышенной трудности по теории чисел и алгебре многочленов. – Новгород: НГПИ, 1990 – 93 с.
57. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1966. – 336 с.
58. Окунев Л.Я., Краткий курс теории чисел: учебное пособие для пединститутов. – М., 1956.
59. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Просвещение, 1964. – 183.
60. Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К. Старинные занимательные задачи. – М.: Дрофа, 2002.
61. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – М.: Наука, 1980. – 128 с.
62. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1962.
63. Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д. Алгебра и теория чисел. – Минск: Вышэйш. шк., 1992.
64. Рибенбойм П. Последняя теорема Ферма для любителей / пер. с англ. – М.: Мир, 2003. – 429 с.
65. Сборник задач по алгебре / под ред. А.И. Кострикина. – М.: Физматлит, 2001.
66. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. – М.: Просвещение, 1968.

67. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. – М.: ГИФМЛ, 1961.
68. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. – М.: Учпедгиз., 1959.
69. Серр Ж.-П. Курс арифметики; пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 184 с.
70. Сизый С.В. Лекции по теории чисел. – Екатеринбург: Уральский гос. ун-т, 1999.
71. Сингх С. Великая теорема Ферма; пер. с англ. – М.: Изд. МЦНМО, 2000.
72. Степанова, Л.Л., Жулева А.В., Деза Е.И. Практикум по элементарной математике: Арифметика. – М.: МЦНМО, 2008. – 2008. – 207 с.
73. Сушкевич, А.К. Теория чисел. Элементарный курс. – Харьков: Издательство Харьковского государственного университета имени А.М. Горького, 1956. – 204 с.
74. Трост Э. Простые числа. – М.: ГИФМЛ, 1959.
75. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
76. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977.
77. Хассе Г. Лекции по теории чисел. – М.: И.Л., 1953..
78. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.
79. Хинчин А.Я. Три жемчужины теории чисел. – М.: Наука, 1979. – 64 с.
80. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. – М.: Мир, 1974.
81. Чебышев П.Л. Теория сравнений. – С.-П.: Общественная польза, 1879.
82. Школа в «Кванте»: Арифметика и алгебра / под ред. А.А. Егорова. – М.: Бюро квантум, 1994. – 128 с. (Приложение к журналу «Квант»).
83. Шнеперман Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: в 2 ч. – Минск: Вышэйш. шк., 1986–1987.
84. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – Минск: Вышэйш. шк., 1982.
85. Эдварде Г. Последняя теорема Ферма. – М.: Мир, 1980.

Учебное издание

ВОРОБЬЕВ Николай Николаевич

ВОРОБЬЕВ Сергей Николаевич

НАУМИК Михаил Иванович

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ: ДЕЛИМОСТЬ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать .2017. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,19. Уч.-изд. л. 3,57. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.