

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования «Витебский государственный  
университет имени П.М. Машерова»  
Кафедра дошкольного и начального образования

**В.А. Уткевич**

# **СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПЕДАГОГИКЕ**

*Методические рекомендации*

*Витебск  
ВГУ имени П.М. Машерова  
2017*

УДК 37.012.4(075.8)  
ББК 74в631.8я73  
У84

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 28.12.2016 г.

Автор: доцент кафедры дошкольного и начального образования ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат философских наук **В.А. Уткевич**

Рецензент:  
доцент кафедры прикладной математики и механики  
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук  
*М.Г. Семенов*

**Уткевич, В.А.**  
**У84**      Статистические методы в педагогике : методические рекомендации / В.А. Уткевич. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 43 с.

Данные методические рекомендации адресованы студентам, обучающимся на педагогическом факультете, и могут быть использованы при проведении психолого-педагогических исследований, требующих применения статистических методов для обработки полученных эмпирических данных.

УДК 37.012.4(075.8)  
ББК 74в631.8я73

© Уткевич В.А., 2017  
© ВГУ имени П.М. Машерова, 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Введение</b> .....                                                   | 4  |
| <b>Тема 1.</b> Введение в теорию вероятностей .....                     | 6  |
| <b>Тема 2.</b> Комбинаторика .....                                      | 23 |
| <b>Тема 3.</b> Классификация и типологизация статистических данных .... | 29 |
| <b>Тема 4.</b> Основные положения корреляционного анализа .....         | 35 |
| <b>Литература</b> .....                                                 | 42 |

## ВВЕДЕНИЕ

Само слово «статистика» латинское по своему этимологическому происхождению. «Status» на русский язык переводится как «состояние». В настоящее время термин «статистика» используется в различных смыслах. Укажем на два основных из них. Во-первых, для обозначения науки, исследующей статистические закономерности явлений. Обычно выделяют два основных вида закономерностей: динамические и статистические. В законах динамического типа предсказание о будущем состоянии системы, на основе знаний ее настоящего (а иногда и прошлого) состояния носит точно определенный, то есть однозначный характер. Так, например, если мы знаем скорость какого-нибудь материального объекта, то можем однозначно определить, какое именно расстояние пройдет данный объект, двигаясь с указанной скоростью некоторое время. В статистических же законах предсказание о будущем состоянии объекта носит не достоверный, а всего лишь вероятностный характер. Данная характеристика во многом детерминирована очень большим числом факторов, действующих в изучаемых системах. Кроме того, статистические закономерности являются результатом взаимодействий большого числа элементов, образующих систему, а следовательно, они характеризуют в первую очередь не каждый отдельный элемент, а всю систему в целом. Можно привести примеры того, что такая характеристика как «средняя зарплата на предприятии» не совпадает ни с одной реальной зарплатой, получаемой каким-то конкретным работником данного предприятия. Вот, наверное, поэтому англичане говорят: «Есть ложь, есть большая ложь, а есть статистика!».

Большое значение в обработке статистических данных принадлежит математике. Появилась даже особая математическая дисциплина «Математическая статистика» – раздел математики, в котором изучаются специфические математические методы систематизации, обработки и использования полученных статистических результатов для научных и практических выводов. С широким распространением счетно-вычислительной техники математические методы стали широко применяться не только в естествознании, но и различных гуманитарных науках, в том числе и в педагогике. Успехи применения математики отражают одну из важнейших тенденций, проявляющихся в современном познании, – возрастания в нем роли опосредованных методов. Благодаря широкому распространению данного гносеологического феномена многие ученые стали утверждать, что любая наука становится наукой только лишь с того момента своего развития, когда она начинает использовать математику. Конечно, с приведенным утверждением нельзя полностью согласиться. Для его опровержения применительно к сфере педагогики достаточно привести несколько примеров таких педагогических теорий, которые были сформулированы без использования математического аппарата.

С другой стороны, точка зрения, согласно которой полностью исключается роль математики в педагогике, также в методологическом отношении непродуктивна. Математику, безусловно, применять в данной области человеческого знания не только можно, но и нужно. Однако очень важно определить границы ее применения. Выдающийся немецкий мыслитель XX столетия Мартин Хайдеггер выделял два основных типа человеческого мышления. Во-первых, осмысляющее мышление, с помощью которого мы понимаем смысл происходящего. А, во-вторых, вычисляющее или калькулирующее мышление, с помощью которого можно просчитывать различные варианты поведения объекта в будущем, то есть делать футурологический прогноз, совершенно не задумываясь о смысле просчитывания и прогнозирования. На первой стадии математизации какой-либо научной дисциплины (то есть на стадии чисто количественной обработки и анализа, полученных эмпирических данных) указанные типы мышления еще не находятся в органическом единстве. Данное единство возникает лишь на второй стадии этого процесса – построении математической модели изучаемого объекта или явления. Отметим, что в этой модели существует как формальная часть (уравнения, неравенства и т.д.), так и смысловая, в которой формализация получает свою содержательную интерпретацию.

Структура данных методических рекомендаций построена таким образом, что в рамках каждой темы наряду с теоретическим материалом присутствуют и задачи. При решении предложенных вам задач необходимо помнить следующее.

Во-первых, многие задачи носят проблемный характер и не имеют однозначного решения. Следовательно, правильный ответ в них зачастую зависит от того, какую именно содержательную интерпретацию вы придадите основным понятиям, используемым в условии задачи.

Во-вторых, при решении необходимо придерживаться условия и не вводить в него информации, носящей гипотетический характер.

В-третьих, иногда задача может быть сформулирована в шуточной форме. Однако для своего правильного решения она требует такого же серьезного к ней отношения, как и все остальные.

В-четвертых, задачи систематизированы таким образом, что некоторые из них возможно правильно решить только лишь при условии правильного решения предыдущих.

В-пятых, не все задачи одинаковы по своей сложности. Поэтому если вам не удалось решить какую-то из них, то не нужно сразу же падать духом. Найдите задачу попроще, и попытайтесь для начала решить ее.

**Самое важное, что данное учебное издание не является основным источником при написании дипломных и курсовых работ. Оно служит лишь вспомогательным средством.**

## Тема 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

На основе полученных в результате исследования статистических данных (в логике такие данные выполняют роль посылок), возможно получить определенные выводы (заключения). Естественно, что выводы эти необходимо делать не произвольным образом, а с помощью общепринятых (или, по крайней мере, принятых в рамках какого-то конкретного научного сообщества) в логике правил умозаключений. Причем все возможные умозаключения делятся на две группы дедуктивные и индуктивные (обратите внимание на то, что такое деление не имеет никакого отношения к тому пониманию дедукции и индукции которое принято в педагогике). В первых из них (при условии истинности исходных посылок), вывод носит гарантированно истинный характер. В качестве иллюстрирующего примера можно привести вывод, построенный по правилу простого категорического силлогизма. Так, например, из двух следующих исходных посылок:

Все слоны млекопитающие.

Все млекопитающие дышат кислородом.

Следует такой гарантированно истинный вывод: все слоны дышат кислородом.

В индуктивных же умозаключениях вывод напротив носит не гарантированный, а всего лишь вероятностный характер. Дело здесь не в том, что сами посылки могут быть не абсолютно истинными, а всего лишь гипотетическими высказываниями, истинными лишь с определенной долей вероятности. Даже если мы будем брать в качестве посылок только лишь истинные высказывания, то в случае применения «неправильных», то есть не дающих гарантированного истинного результата схем логических умозаключений, мы можем получить ложный результат. К индуктивным умозаключениям относятся умозаключения, построенные с помощью метода «популярной» индукции или умозаключения по аналогии. К ним также относятся умозаключения, построенные с помощью так называемых «неправильных» фигур простого категорического силлогизма. Так, например, из следующих исходных посылок:

Все студенты люди.

Сидорчук – человек.

Еще не следует гарантированно истинный вывод о том, что Сидорчук является студентом. Он вполне может быть школьником, обучающимся в первом классе. Таким образом, данный вывод носит всего лишь достоверный характер. Для количественной же оценки достоверности полученных индуктивных выводов необходимо иметь определенные знания по теории вероятностей.

Для начала мы остановимся на классическом понимании вероятности. Согласно этому пониманию вероятность события **a** (обозначается

$P(a)$  рассчитывается по следующей формуле  $P(a) = \frac{m}{n}$ . В этой формуле  $n$  – это число всех попарно несовместимых (то есть онтологически независимых друг от друга) и равновозможных результатов эксперимента или какого-то естественного события будущего, а  $m$  – число нужных нам попарно несовместимых и равновозможных исходов этого эксперимента. Так, например, если мы подбрасываем одновременно две монеты, то для определения вероятности того, что они обе выпадут «орлом» знаменатель в формуле необходимо взять равным четырем, так как всего возможны 4 попарно несовместимых и равновозможных варианта подбрасывания: «орел – орел»; «орел – решка»; «решка – орел»; «решка – решка». Числитель же нужно взять равным единице, так как из всех возможных вариантов нам нужен в данном случае только лишь первый «орел – орел». Таким образом, используя формулу  $P(a) = \frac{m}{n}$  и учитывая, что  $m = 1$ , а  $n = 4$ , можно подсчитать, что вероятность определяемого нами события выпадение двух «орлов» при одновременном подбрасывании двух монет будет равна 0,25. Отметим, что иногда вероятность принято записывать в виде процента. Следовательно, в нашем случае можно считать, что  $P(a) = 25\%$ .

Обратите внимание на то, что вероятность какого-то события не может быть отрицательной величиной. Самое маленькое значение вероятности – это 0. Если вероятность какого-нибудь события равна 0, то такое событие называется «неправдоподобным», то есть считается, что оно вообще не может произойти. Однако в практической деятельности зачастую принято принимать в качестве неправдоподобного и такое событие, вероятность осуществления которого пренебрежительно мала. Так, например, считается, что вероятность того, что подброшенная монета «станет на ребро» равна 0. Тем более неправдоподобным является такой исход подбрасывания монеты, когда она «зависнет в воздухе». Самое же большое значение вероятности – 1. Если  $P(a) = 1$ , то событие называется «гарантированно достоверным». Примером такого события является выпадение не более 12 и не менее 2 очков при одновременном подбрасывании двух игральных костей.

Естественно, что при анализе чисто практических результатов психологических исследований мы зачастую будем вынуждены отвечать на вопрос о том, какими именно результатами эксперимента можно пренебречь, считая вероятности осуществления этих событий пренебрежительно малыми. Однако объявляя некоторые будущие результаты экспериментов практически невозможными, а, соответственно и не учитывая их в своих расчетах, мы тем самым уже изначально заложили возможность совершения ошибки. Будем считать, что количественной мерой ошибки непринимания в расчет события  $a$  является вероятность осуществления этого события, то есть  $P(a)$ . Тогда величина  $1 - P(a)$  является количественной мерой надежности полученных нами результатов. Эта величина в статистике на-

зывается «доверительным уровнем». Отметим, что в педагогических исследованиях чаще всего используются такие стандартные доверительные уровни как 0,95; 0,99; 0,999, но не существует никаких универсальных советов относительно того, какой именно доверительный уровень необходимо взять в данной практической ситуации. Все дело в том, что доверительный уровень выбирается исходя из особенностей анализируемого нами эксперимента, а также и от той конкретной цели, которую мы ставим перед собой, проводя исследование. Таким образом, даже величину 0,95 в некоторых случаях можно считать излишне высокой. И, напротив, в отдельных ситуациях величина 0,999 может оказаться слишком малой. Так, например, если вероятность того, что подозреваемый гражданин Сидорчук совершил какое-то тяжкое преступление, за которое ему грозит высшая мера наказания, доказана с вероятностью 0,999, то крайне нежелательно на основе такой количественной надежности полученных результатов осудить гражданина Сидорчука.

Важно понимать, что вероятность ни в коем случае не является субъективным плодом наших рассуждений. Напротив, она порождена только лишь некоторой совокупностью объективных свойств изучаемого нами объекта и совершенно не зависит от нашего знания (а также и незнания) исходного состояния объекта. Так, например, если мы хотим определить вероятность того, что какая-то студентка педагогического факультета Витебского государственного университета на следующий год выйдет замуж, то нельзя пользоваться приведенной нами формулой классической вероятности  $P(a) = \frac{m}{n}$ . Дело в том, что события «данная студентка выйдет замуж в следующем году» и «данная студентка не выйдет замуж в следующем году» не являются равновероятными результатами. Поэтому о вероятности этих событий можно делать вывод с помощью совершенно иных статистических методов, о которых будет сказано в дальнейшем. Еще раз подчеркнем, что из незнания количественного соотношения вероятности выйти или не выйти студентке замуж на следующий год, ни в коем случае нельзя считать, что эти вероятности равны между собой. Впрочем, нельзя считать и то, что они не равны друг другу.

В случае же того эксперимента, когда мы подбрасывали монеты, равновероятность выпадения «орла» или «решки» являлась следствием только лишь симметричного строения самой монеты. Конечно, реальная монета полной симметрией не обладает, но мы, при решении задачи, не обращаем внимание на небольшое отклонение реального положения дел от теоретического предположения. Естественно, поступать так можно не всегда. В некоторых случаях не стоит пренебрегать существующей асимметрией. Так, например, бутерброд действительно чаще падает маслом вниз, чем маслом вверх. Объясняется такой феномен не юмористическими «законами» Паркинсона, а тем, что плотность масла выше плотности хлеба, а,

следовательно, центр тяжести бутерброда смещен в сторону, намазанную маслом.

Однако на практике встречаются такого рода ситуации, в которых необходимо принимать во внимание не онтологическое строение объекта, а особенности человеческой психики. Так, например, если участнику эксперимента предложат, не задумываясь назвать какое-то натуральное однозначное нечетное число, то, на первый взгляд, может показаться, что у принимающего участия в эксперименте существует ровно пять равновероятных вариантов выбора. Таким образом, можно не задумываясь (то есть, не тратя никаких усилий) называть любое число из последовательности 1, 3, 5, 7, 9. На самом же деле практика показывает, что число 3, называется намного чаще, чем остальные числа. Следовательно, если мы хотим с наибольшей вероятностью угадать, какое именно число будет названо в эксперименте, то нам необходимо указать именно на число 3.

А теперь решим несколько задач с использованием только лишь рассмотренной нами формулы классической теории вероятностей.

1.1. При подбрасывании одной монеты она 10 раз подряд выпала «орлом». Какова вероятность того, что результатом следующего подбрасывания данной монеты опять будет выпадение «орла»?

1.2. Подбрасываем две монеты. Необходимо рассчитать вероятность того, что одна из них выпадет «орлом», а одна из них выпадет «решкой». Студент Сидорчук считает, что в данном случае возможны три равновероятных, независимых исхода эксперимента. Обе монеты выпадут «орлом»; обе монеты выпадут «решкой»; одна из монет выпадет «орлом», а одна выпадет «решкой». Нужный же вариант всего один – третий. Совершил или не совершил данный студент какую-то ошибку в своих рассуждениях?

1.3. Какова вероятность того, что при подбрасывании трех монет одна из них выпадет «орлом», а две других решкой?

1.4. Какова вероятность того, что при подбрасывании двух костей (напомним, что каждая из костей имеет ровно 6 граней, на которых нанесены по одному из следующих чисел: 1; 2; 3; 4; 5; 6;) в сумме выпадет ровно 8 очков?

1.5. На семинарском занятии в университете присутствуют **а** девушек и **в** юношей. Какова вероятность того, что наугад выбранный студент окажется девушкой?

1.6. На столе лежат десять подписанных конвертов, в каждом из которых находится ровно по одному письму. Причем все письма должны быть доставлены точно в соответствии с адресом, написанном на конверте. Кроме того, все адреса отличаются друг от друга. Известно, что в начале письма лежали в конвертах в полном соответствии с указанным требованием. Затем все они были вытащены из конвертов и вновь совершенно случайным образом помещены в них в соответствии с правилом: одно

письмо ровно в один конверт. Какова вероятность того, что в результате проведенных «махинаций» ровно 9 писем дойдут до нужного адресата?

Конечно, для решения задач с помощью формулы классической теории вероятностей необходимо уметь правильно подсчитывать число всех возможных, а также нужных нам случаев. Для выполнения данной математической операции можно воспользоваться основными формулами комбинаторики. Анализ этих формул будет проведен нами в следующей главе. Однако они забываются, а у студентов не всегда существует возможность найти соответствующее справочное пособие или обратиться к услугам интернета. Вот почему так важно знать некоторые способы, с помощью которых можно посчитать необходимое число вариантов, не используя формулы. Для того чтобы понять, как это можно сделать, решим следующую задачу: сколько существует способов рассадить четырех студентов (двух юношей и двух девушек) на длинную студенческую скамью, если считать, что в рамках данной задачи двое юношей не отличаются друг от друга и обе девушки тоже не отличаются друг от друга? Естественно, что между юношами и девушками имеются – существенные отличия (и не только в рамках нашей задачи).

Для решения расположим вначале двух девушек на скамейке. Учитывая то, что по условию задачи они абсолютно ничем друг от друга не отличаются, мы можем выполнить данную операцию всего лишь одним единственным способом. Теперь «подсадим» к ним юношу. Это можно сделать тремя различными способами. Лучше всего записать все полученные результаты, «подсаживая» юношу к девушкам последовательно слева направо. В результате мы получим три различных варианта: «юноша – девушка – девушка»; «девушка – юноша – девушка»; «девушка – девушка – юноша». Теперь из этих трех мы возьмем для подсчетов какой-то один из полученных вариантов, например, первый. Может показаться, что посадить второго юношу можно четырьмя принципиально различными способами: на первое место, на второе место, на третье место, на четвертое место. А так как мы рассмотрели лишь один из трех описанных нами возможных вариантов размещения двух девушек и одного юноши, то полученный результат нужно умножить на три. Таким образом, окончательный ответ – 12 способов. На самом же деле мы дважды считали одинаковые варианты. Так, например, если посадить второго юношу перед первым, то, согласно условию нашей задачи, это будет тот же самый вариант, что посадить второго юношу между первым юношей и девушкой. Следовательно, полученный результат нужно поделить на два. Таким образом, окончательный ответ: 6 способов. А теперь решите следующие задачи без формул комбинаторики, опираясь только лишь на логические рассуждения.

1.7. Используя условие предыдущей задачи, определите число способов, с помощью которых можно рассадить на длинную скамью 6 студентов: трех девушек и трех юношей.

1.8. Теперь перед вами шесть студенток-девушек. Двое из них блондинки, – двое брюнетки, а оставшиеся – шатенки. Каким количеством способов их можно рассадить на длинную скамью, принимая во внимание лишь отличие в цвете волос этих студенток?

До сих пор, мы рассматривали только лишь простые события, вероятность которых можно было рассчитать с помощью формулы классической теории вероятности. Однако на практике намного чаще приходится находить вероятность сложных событий являющихся некоторой суперпозицией простых событий. Конечно и в этом случае можно использовать указанную нами формулу  $P(a) = \frac{m}{n}$ , но, зачастую, подсчет всех вариантов очень труден. Поэтому для этого случая используются особые формулы, связанные с теорией множеств. Данные формулы вы можете легко найти в различных учебниках. Мы же предлагаем вашему вниманию совершенно иной подход, построенный на логике. Для начала нам необходимо ознакомиться со следующей таблицей, которая называется «таблицей истинности».

| $a$ | $b$ | $a \wedge b$ | $a \vee b$ | $a \dot{\vee} b$ | $a \rightarrow b$ | $a \leftrightarrow b$ |
|-----|-----|--------------|------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| и   | и   | и            | и          | л                | и                 | и                     |
| и   | л   | л            | и          | и                | л                 | л                     |
| л   | и   | л            | и          | и                | и                 | л                     |
| л   | л   | л            | л          | л                | и                 | и                     |

| $a$ | $\bar{a}$ |
|-----|-----------|
| и   | л         |
| л   | и         |

В этой таблице « $a$ » и « $b$ » – исходные простые высказывания, « $\wedge$ » – конъюнкция, выражаемая в русском языке с помощью союзов «и», «а», «но» и запятой; « $\vee$ » – дизъюнкция, выражаемая в русском языке с помощью союзов «или», «либо»; « $\dot{\vee}$ » – строгая дизъюнкция, в русском языке она выражается с помощью словосочетаний «либо ... либо», «или ... или»; « $\rightarrow$ » – импликация, в русском языке она выражается с помощью слов «следует», «следовательно», а также с помощью словосочетаний «если ... то», «тогда ... когда»; « $\leftrightarrow$ » – эквиваленция, выражаемая в русском языке с помощью слов «тождественно», «равносильно», «эквивалентно», а также с помощью словосочетаний «если и только если», «тогда и только тогда, когда», «необходимо и достаточно»; « $\bar{\phantom{a}}$ » – отрицание, выражаемое в русском

языке с помощью следующих слов: «не», «нет», «ложно», «неверно». Буквами «и» и «л» мы будем обозначать соответственно истинное и ложное значение высказывания.

Будем считать, что высказыванию  $a$  соответствует событие  $a$ , а высказыванию  $b$  соответствует событие  $b$ . Причем  $a$  и  $b$  независимы между собой элементарные события. Тогда вероятность совместного осуществления событий  $a$  и  $b$  численно равна вероятности осуществления высказываний  $a$  и  $b$ , то есть сложного высказывания  $a \wedge b$ . **Поэтому в дальнейшем мы будем рассчитывать не вероятности осуществления сложных событий, а именно вероятности осуществления высказываний об исходе будущего эксперимента.** При таком подходе вероятность осуществления сложного высказывания  $a \wedge b$  можно обозначить как  $P(a \wedge b)$ . Причем данная вероятность рассчитывается по следующей формуле:  $P(a \wedge b) = P(a) \cdot P(b)$ , где  $P(a)$  – это вероятность осуществления события  $a$ ,  $P(b)$  – вероятность осуществления события  $b$ . Обратим также внимание и на то, что вероятность осуществления сложного высказывания  $a \wedge b$ , в данном случае означает ничто иное как вероятность того, что данное высказывание окажется истинным по отношению к совместному осуществлению событий  $a$  и  $b$ . Естественно, что говорить о вероятности какого-то исхода эксперимента можно лишь до того, пока эксперимент не произведен. После проведения эксперимента можно лишь рассчитывать то, с какой вероятностью мы сумеем отгадать результат уже свершившегося эксперимента.

Кроме того, будем считать, что вероятность осуществления одного и только одного из двух несовместимых между собой событий  $a$  и  $b$  численно равна вероятности осуществления одного и только одного из высказываний  $a$  и  $b$ , то есть вероятности осуществления сложного высказывания  $a \vee b$ . Такую вероятность можно обозначить как  $P(a \vee b)$ . Рассчитывается она по следующей формуле  $P(a \vee b) = P(a) + P(b)$ .

Обратим внимание на типичную студенческую ошибку, связанную с практическим применением данной формулы при решении задач. Так, например, если известно, что первая студентка может выйти замуж за время обучения в университете с вероятностью 0,8. А вторая сумеет сделать то же самое с вероятностью 0,6, то ни в коем случае нельзя считать, что ровно одна из них выйдет замуж в течение указанного промежутка времени с вероятностью  $0,6 + 0,8 = 1,4$ . Неправильность данных расчетов очевидна хотя бы потому, что вероятность любого события не может быть больше чем 1. Все дело в том, что в рамках рассматриваемой нами задачи в данном случае высказывания «первая студентка выйдет замуж» (обозначим его  $a$ ) и «вторая студентка выйдет замуж» (обозначим его  $b$ ) могут оба быть истинными.

Отметим, что вероятность  $P(a)$  осуществления какого-то одного события  $a$  из всех возможных попарно несовместимых событий, равна 1–

$P(\mathbf{в})$ , где  $\mathbf{в}$  является совокупностью всех оставшихся попарно несовместимых событий. Кроме того, вероятность события  $P(\text{не-}a)$  равна вероятности осуществления высказывания  $P(\bar{a})$ . Высказывание  $\bar{a}$  является отрицанием высказывания  $a$ . Соответственно,  $P(\bar{a})$  рассчитывается по следующей формуле  $P(\bar{a}) = 1 - P(a)$ . Таким образом, если вероятность того, что студент Сидорчук сдаст экзамен по логике равна 0,12, то вероятность того, что данный студент не сдаст экзамена по логике равна  $1 - 0,12 = 0,88$ .

Конечно, задачи могут быть сформулированы таким образом, что необходимо будет искать вероятность таких сложных высказываний как  $P(a \vee b)$  и  $P(a \rightarrow b)$ . Для их нахождения необходимо использовать три следующих формулы.

$$1). a \vee b = \overline{\bar{a} \wedge \bar{b}}$$

$$2). \bar{\bar{a}} = a \text{ (Двойное отрицание высказывания } a = a.)$$

$$3). a \rightarrow b = \bar{a} \vee b.$$

Решим теперь следующую тренировочную задачу. На занятиях по педагогике присутствует 36 студентов. Причем, 9 из них – в черных рубашках, 9 – в золотистых, 9 – в белых, а 9 – в красных. Какова вероятность того, что из четырех, выбранных наугад студентов, все четверо окажутся в рубашках различного цвета? При решении данной задачи будем считать, что выбранный нами студент будет автоматически удаляться из аудитории.

Решение. Пусть  $a$  – высказывание: «первый выбранный студент одет в рубашку нужного цвета»;  $b$  – высказывание: «второй выбранный студент одет в рубашку нужного цвета»;  $c$  – высказывание: «третий выбранный студент одет в рубашку нужного цвета»;  $d$  – высказывание: «четвертый выбранный студент одет в рубашку нужного цвета». Таким образом, сложное высказывание будет иметь следующий вид:  $a \wedge b \wedge c \wedge d$ . Соответственно,  $P(a \wedge b \wedge c \wedge d) = P(a) \cdot P(b) \cdot P(c) \cdot P(d)$ . Какого мы не выберем первого студента, вероятность истинности высказывания о том, что он будет одет в рубашку нужного нам цвета  $P(a) = \frac{36}{36} = 1$ . Вероятность истинности высказывания о том, что наугад выбранный нами второй студент будет одет в рубашку нужного нам цвета  $P(b) = \frac{27}{35}$ , так как всего осталось сидеть 35 студентов ( $36 - 1 = 35$ ), из них нужных нам студентов – 27 ( $36 - 9 = 27$ ). Рассуждая и дальше аналогичным способом мы придем к выводу о том, что  $P(c) = \frac{18}{34}$ , а  $P(d) = \frac{9}{33}$ . Таким образом, искомая нами вероятность равна следующему числовому выражению  $\frac{36}{36} \cdot \frac{27}{35} \cdot \frac{18}{34} \cdot \frac{9}{33}$ . А теперь решите наиболее оптимальным способом следующие задачи.

1.9. Бросаем две игральные кости. Какова вероятность того, что выпадет не менее 5 очков?

1.10. Бросаем три игральные кости. Какова вероятность того, что выпадет либо 4, либо 16 очков?

1.11. На учебных стрельбах в Ашулуке 3 воинских подразделения войск противовоздушной обороны Республики Беларусь запускают по одной боевой ракете в цель (все ракеты – разные). Вероятность того, что первая ракета поразит цель  $P(a) = 0,4$ . Вероятность того, что вторая ракета поразит цель  $P(b) = 0,8$ . Вероятность того, что третья ракета поразит цель  $P(c) = 0,2$ . Цель считается пораженной, если в нее попадут все три ракеты, или попадет одна третья ракета, или попадут первые две ракеты, а третья не попадет. Какова вероятность того, что цель будет поражена бойцами нашей противовоздушной обороны? Конечно, данная задача носит чисто условный характер, хотя бы потому, что если первая ракета поразит цель, то двум оставшимся уже будет некуда попадать. Однако знаниями о реальном ПВО Республики Беларусь необходимо пренебречь и решать задачу строго в соответствии с ее условием.

1.12. Световой сигнал подается четыре раза. Каждый раз испытуемый реагирует на этот сигнал с вероятностью равной 0,5. Какова вероятность того, что только лишь в одном единственном случае последовала реакция испытуемого на свет?

1.13. Условие данной задачи полностью совпадает с условием задачи 1.12. Какова вероятность того, что реакция испытуемого на световой сигнал наблюдалась ровно в половине случаев подачи данного сигнала на испытуемого?

1.14. Условие данной задачи также полностью совпадает с условием задачи 1.12. Какова вероятность того, что реакция испытуемого на световой сигнал наблюдалась в большем числе педагогических экспериментов?

1.15. В этой задаче сигнал подавался ровно два раза. Причем оба раза испытуемый реагирует на него также с вероятностью равной 0,5. Какова вероятность того, что если на первый сигнал будет реакция, то она последует и на второй?

1.16. Условие этой задачи полностью совпадает с условием предыдущей задачи. Какова вероятность того, что если на первый световой сигнал реакции со стороны испытуемого не будет, то не будет ее и на второй сигнал?

1.17. Три студента по результатам сессии должны были бы отчислены из педагогического факультета Витебского государственного университета за академическую неуспеваемость. На основании рассмотренных обстоятельств деканат факультета принял решение об отчислении только лишь двух из них. Для выбора «счастливчика» перед кандидатами на отчисление было поставлено три стаканчика, в одном из которых находится небольшой шарик, а два других стаканчика были пустые. Естественно, что студенты не знают того, в каком именно из стаканов находится шарик. Каждый из них по очереди может указать всего лишь на один стакан. Причем, тот из них, кто первым сумеет обнаружить шарик – останется в вузе. Каким по счету должен совершать свою попытку студент Сидорчук, чтобы его шансы на продолжение учебы были максимальными?

1.18. В этот раз по результатам сессии из нашего университета должны быть отчислены четверо студентов. Деканат решил и дальше проверять способности к логике у кандидатов на отчисление. Теперь перед студентами было поставлено четыре стаканчика. Причем в двух из них находилось ровно по одному шарiku. Студенты угадывают счастливый стаканчик по очереди. Естественно, что двое из них, первыми указавшие на этот стаканчик останутся в вузе. Каким по счету должен совершать свою попытку в этом случае студент Сидорчук, чтобы его шансы на продолжение учебы были максимальными?

Обратим внимание на то, что во всех предыдущих задачах мы использовали случайные величины. Отметим, что в теории вероятностей под случайной величиной понимается такая числовая функция, которая задана на пространстве всех возможных элементарных исходов эксперимента. Так, например, если мы подбрасываем монету, то, как уже отмечалось, число элементарных исходов равно двум (выпадение либо «орла», либо «решки»). Если же мы подбрасываем игральную кость, то число элементарных исходов уже равно шести. В обоих рассмотренных нами случаях случайная величина принимает конечное число значений. Она называется «дискретной». Правда дискретной называется и такая случайная величина, которая принимает бесконечное, но счетное число значений, однако на этом математическом феномене мы не будем останавливаться, так как для его адекватного объяснения потребуются специальные знания.

Если же случайная величина принимает бесконечное (но не счетное число значений), то она называется непрерывной. Возникает вполне естественный вопрос: как рассчитывать вероятность какого-нибудь события в том случае, когда мы имеем дело с непрерывной случайной величиной? Вообще-то расчеты такой вероятности может оказаться довольно таки сложной математической задачей, но мы рассмотрим ее решение для наиболее простого случая. Так, например, предположим, что все значения нашей непрерывной случайной величины полностью совпадают с множеством действительных чисел, лежащих на числовом отрезке  $[a; b]$ , причем все точки данного отрезка «равноправны» между собой в вероятностном отношении. Выберем внутри этого отрезка еще один отрезок  $[c; d]$ . Тогда вероятность того, что выбранная нами наугад точка, принадлежащая отрезку  $[a; b]$ , будет одновременно принадлежать и отрезку  $[c; d]$ , будет равна отношению длины отрезка  $[c; d]$ , к длине отрезка  $[a; b]$ .

Конечно, в реальной действительности мы практически никогда не можем найти точное значение какой-либо непрерывной величины. Так, например, время земной человеческой жизни непрерывно, но мы можем зафиксировать лишь какие-то разрывные значения этой жизни. Выражения типа Сидорчук прожил 98 лет, не означает, что он прожил ровно 98 лет. Однако при решении задач вполне возможно зачастую пользоваться продемонстрированным способом.

Во многих областях человеческой деятельности (в том числе и в педагогике) или при описании природных явлений, нам постоянно приходится иметь дело с событиями, результаты которых невозможно точно предсказать с помощью методов классической теории вероятности. Так, например, результаты выборов депутатов парламента, зависят от огромного числа факторов, адекватно учесть которые практически нереально. Дело осложняется еще и тем, что эти факторы могут достаточно быстро изменяться с течением времени. Поэтому на практике зачастую приходится прогнозировать исход какого-то события (или эксперимента) на основе либо собственного опыта, либо аналогичного опыта других людей, либо интуиции, которая также в значительной степени опирается на опытные данные.

Таким образом, классическое (иногда его еще называют арифметическим) определение вероятности не всегда можно успешно использовать на практике. В некоторых случаях намного эффективнее будет статистическое определение вероятности, согласно которому вероятностью события  $a$  называется число, относительно которого стабилизируется (устанавливается) относительная частота его появления при неограниченном увеличении числа опытов. Обозначим данную вероятность  $C(a)$ . В практических задачах за статистическую вероятность события  $a$  принимается относительная частота  $C(a)$  при достаточно большом числе испытаний. Отметим, что требование проведение достаточно большого числа испытаний очень важно. Все дело в том, что при небольшом числе проведенных экспериментов частота события носит в значительной мере случайный характер и может заметно изменяться от одной группы экспериментов к другой. Потому не нужно удивляться тому, что при подбрасывании 10 монет студент Сидорчук зафиксировал ровно 3 «орла», а студент Иванов получил результат в 2 раза больший – 6 «орлов». Однако при увеличении числа опытов частота все более теряет свой случайный характер; так как случайные обстоятельства, свойственные каждому отдельному опыту, в своей массе взаимно погашаются, и частота проявляет тенденцию стабилизироваться, приближаясь с незначительными колебаниями к некоторой средней, постоянной величине.

Конечно, возникает вполне естественный вопрос, а каким на практике должно быть минимальное количество опытов, для успешного использования их результатов, при оценке вероятности исхода будущего события с помощью статистической вероятности? В педагогических исследованиях обычно принято считать, что минимальное число таких испытаний – 300. Однако в конкретных случаях число минимальных испытаний может быть и другим. Впрочем, в данном случае, чем больше, тем точнее, а, следовательно, и лучше.

Необходимо понимать, что взаимосвязь между частотой события и его классической вероятностью имеет глубокий онтологический смысл. Дело в том, что эти два понятия по существу неразделимы. Так, например, на практике, когда мы оцениваем степень возможности какого-либо конкретного со-

бытия, мы обычно связываем данную оценку с большей или меньшей частотой появления таких же событий в результате уже проведенных достаточно многочисленных опытов. Характеризуя вероятность события каким-то числом, мы не можем придать этому числу иного реального значения и иного практического смысла, чем относительная частота появления данного события при большом числе опытов. Численная оценка степени возможности события посредством вероятности имеет практический смысл именно потому, что более вероятные события происходят в среднем чаще, чем менее вероятные. И если практика определенно указывает на то, что при увеличении числа опытов частота события имеет тенденцию выравниваться, приближаясь сквозь ряд случайных отклонений к некоторому постоянному числу, естественно предположить, что это число и есть вероятность события.

Обратим внимание на следующую особенность соотношения классической и статической вероятности. Если мы считаем, что монета «правильная», то вероятность выпадения ее «орлом» берется равной 0,5. Если же мы несколько сот раз (а лучше несколько тысяч раз) подбросим эту монету и получим частоту выпадения «орла» очень близкой, к результату, полученному с помощью классической теории вероятности, то это нас не должно удивлять. Теория успешно прошла экспериментальное подтверждение. Однако если после нескольких сотен подбрасывания монеты частота выпадения «орла» оказалась равной 0,02, то такой полученный результат не может нас не удивить. Конечно, есть очень небольшая вероятность того, что он был получен с помощью «нормальной» монеты, но этот результат настолько невелик, что автор советует студентам, в подобного рода ситуации, воспользоваться совершенно иным предположением, а именно, предположить, что монета «неправильная», то есть несимметричная, причем центр ее тяжести сдвинут в сторону орла.

Вернемся теперь к рассмотренной нами ситуации выявления вероятности того, что какая-то студентка педагогического факультета Витебского университета на следующий год выйдет замуж. Для начала необходимо найти число используемых при расчетах экспериментов, то есть число, принявших участие в социологических исследованиях студенток, обучающихся на педагогическом факультете нашего университета. Затем нужно выяснить, что конкретно означает выражение «студентка выйдет замуж». Предположим, что это выражение означает, что студентка выйдет замуж на двадцать первом году жизни. Таким образом, из всех студенток, обучающихся на данном факультете нашего университета нужно знать лишь количество тех, кто выйдет замуж именно в указанный временной промежуток: не раньше и не позже. Предположим, что мы выбрали данную студентку совершенно случайно, не имея никакой о ней дополнительной информации. Следовательно, если, например, число всех студенток на педагогическом факультете равно 10000, а число вышедших из них замуж на двадцать первом году жизни равно 128, то статистическая вероятность в данном случае равна 0,0128.

Конечно, полученный нами результат можно существенным образом улучшить. Для этого необходимо получить какую-то дополнительную информацию о выбранной чисто случайным образом нашей студентке. Так, например, можно выяснить следующее: учится ли она на заочном или на очном отделении. Дело в том, что как показывает практика, статистическая вероятность выйти замуж на заочном отделении выше, чем выйти замуж на очном отделении. Следовательно, после получения указанной информации мы с большей степени вероятности определим шансы нашей студентки на брак.

На первый взгляд, может показаться, что ограничение исходного множества можно производить достаточно долго, все время, получая улучшение окончательного варианта ответа. На самом же деле это не так. Во-первых, некоторую нужную информацию мы можем просто не найти, или, того хуже она окажется ложной, то есть на отдельные вопросы о своих планах студентки могут дать сознательно (а также несознательно) ложные ответы. А, во-вторых, если число участвующих в эксперименте станет достаточно малым, то в этом случае также произойдет уменьшение, а не увеличение правдоподобности нашего вывода.

Таким образом, вводя понятие частоты события и пользуясь связью между частотой и вероятностью, мы получаем возможность приписать определенные вероятности, заключенные между нулем и единицей, не только событиям, которые сводятся к совокупности каких-то независимых друг от друга случаев, но и тем событиям, вероятность которых может быть лишь приближенно определена по частоте события, при большом числе проведенных экспериментов.

Однако в педагогике, для определения вероятности «неклассического» события, далеко не всегда необходимо непосредственно определять из опыта его частоту. Дело в том, что теория вероятностей располагает многими другими способами, позволяющими определять вероятности некоторых событий косвенно, через вероятности других событий, онтологически с ними связанных. Правда и при таких косвенных методах исследования, в конечном счете, все же приходится обращаться к экспериментальным данным. Таким образом, необходимо всегда помнить о том, что надежность и объективная ценность всех ваших практических расчетов, выполненных с применением математического аппарата теории вероятностей, определяется качеством и количеством полученных педагогических экспериментальных данных, на базе которых этот расчет выполняется.

Кроме того, при практическом применении вероятностных методов исследования всегда необходимо отдавать себе отчет в том, действительно ли исследуемое случайное явление принадлежит к категории массовых явлений, для которых, по крайней мере, на некотором участке времени, выполняется свойство устойчивости частот. Только в этом случае имеет смысл говорить о вероятностных событиях, имея в виду не математические фикции, а реальные характеристики случайных явлений. Так, например, выра-

жение «вероятность выпадения «орла» при подбрасывании монеты имеет определенный конкретный смысл, потому что подбрасывание монеты воспринимается нами в качестве массовых экспериментов, которые будут неоднократно повторяться в приблизительно аналогичных условиях. Точно также можно воспринимать и выражение «вероятность того, что студентка на следующий год выйдет замуж». Напротив, выражение «вероятность того, что научная проблема, поставленная в дипломной работе по педагогике студентом Сидорчуком будет решена правильно, равна 0,5» лишено конкретного смысла; так как было бы методологически неправильно оценивать правдоподобие научных положений методами теории вероятностей.

В заключение теоретического анализа понятия «статистическая вероятность» необходимо отметить, что данная вероятность широко применяется на практике при экстраполяции результатов проведенных статистических исследований. Так, например, если мы провели социологический опрос нескольких тысяч граждан Республики Беларусь, старше 16 лет и считающих себя верующими, в результате которого 80% из них относят себя к православной конфессии, то можно достаточно обосновано считать, что в целом в нашем государстве из всех верующих граждан старше 16 лет, число относящих себя к православной конфессии также приблизительно равно 80%. Правда, такой вывод можно сделать лишь при условии того, что мы правильно сформировали для исследования так называемую «социологическую выборку». На вопросе о том, как именно осуществлять на практике данный процесс, мы с вами останавливаться не будем, так как это не имеет прямого отношения к тематике методического пособия.

А теперь решим еще несколько задач по данной теме.

1.19. Десять студентов педагогического факультета участвуют в каком-то эксперименте. Каждый из них выполняет один и тот же тест, состоящий из 50 заданий. Можно ли на основе данных, полученных в результате проведенного тестирования ответить на вопрос о том, какова статистическая вероятность того, что наугад выбранный студент данного факультета правильно справиться не менее чем с половиною тестовых заданий?

1.20. Частный предприниматель Сидорчук купил себе озеро и решил разводить в нем крупных рачков. Он достаточно точно знает объем своего озера. Для того чтобы приблизительно подсчитать количество рачков, проживающих в водоеме, Сидорчук собирается выкачать с помощью насоса 1 кубический метр воды, посчитать количество рачков в нем, а затем умножить полученный результат на общее число кубометров в озере. Жена Сидорчука, считает данный метод методологически неоправданным. Она предложила своему мужу взять 1000 проб по 1 литру из разных мест озера, суммировать количество рачков в каждой из проб, а затем также умножить полученный результат на общее число кубометров в озере. Чья методология, даст более правдоподобный ответ на вопрос о том, сколько именно рачков проживает в озере?

1.21. Частный предприниматель Сидорчук на честно заработанные деньги купил себе второе озеро и стал разводить в нем небольших осетров. Когда, через некоторое время, осетры в озере заметно подросли, Сидорчук решил подсчитать примерное их количество в водоеме. Для этого он достал свой любимый бредень и закинул его в озеро. Вытянув бредень, Сидорчук насчитал в нем ровно 1024 осетра. Затем частный предприниматель поставил на всех выловленных рыбах метку и отпустил их в водоем. Через три дня все осетры случайным образом перемешались между собой. Сидорчук опять закинул любимый бредень в озеро и выловил на этот раз всего лишь 512 рыб. Причем ровно 32 из них оказались помеченными. Какое наиболее вероятностное число рыб находится в озере, если за отчетный период там не появилось ни одной новой рыбы, и ни одна из них не исчезла?

1.22. Студент педагогического факультета после достаточно успешной сдачи летней сессии решил поиграть в лотерею. Пришел он к устройству данной лотереи и спросил его о вероятности своего выигрыша в ней. Честный устроитель ответил, что студент обязательно выиграет, так как в среднем выигрывает ровно один человек, приобретший лотерейный билет, а перед этим по одному билету купили 999 человек и все они не выиграли. Можно ли (и в каком именно случае) доверять утверждению устроителя лотереи?

1.23. Еще в советские времена существовали такие лотереи (они назывались лотереями «Спортлото») как «5 из 36» и «6 из 49». Очень многие любители «Спортлото» давали платные (а иногда даже и бесплатные) советы о том, каким именно образом нужно вычеркивать 5 из 36 (6 из 49) номеров в купленной карточке «Спортлото», для того чтобы существенно повысить вероятность своего выигрыша. Предположим, что все тиражи данной лотереи проводились честно, то есть выигрышные номера «появлялись» случайным образом. Необходимо ли было при этих условиях платить деньги за вышеуказанные советы?

1.24. На первый взгляд может показаться, что данная задача принципиально ничем не отличается от предыдущей, но многие специалисты по подготовке школьников к тестированию по математике в Республике Беларусь за курс средней школы не согласны с этим утверждением. Объяснить такую их точку зрения можно основываясь на некоторых особенностях психики, свойственных большинству из людей. Все дело в том, что, выполняя задания данного тестирования, приблизительно в половине из тестовых заданий абитуриенты должны указать один вариант ответа из пяти предложенных им. Предположим, что все ответы выражены какими-то конкретными действительными числами. Так же предположим, что абитуриент в принципе не знает, какой из предложенных им вариантов ответа является правильным. Существует ли в этом случае какая-то методика, позволяющая ему повысить вероятность правильного ответа?

1.25. Условие данной задачи полностью позаимствовано нами из ху-

дожественного произведения известного русского писателя Власа Дорошевича.

«Давно, давно, в незапамятные времена жил в Андижане богатый и славный купец Макам-бей-мурза-Сарафеджин. Был он так же богат деньгами, как днями прожитой жизни. Если бы вы встретили в пустыне пять верблюдов, – вы могли бы, указав на пятого, сказать: «Это верблюд Макам-бея-мурзы-Сарафеджина. И никогда бы не ошиблись». (В. Дорошевич. Призраки пустыни).

Предположим, что данное утверждение, приведенное в произведении известного русского писателя, является истинным. Выясните, сколько именно верблюдов в этой пустыне принадлежало славному купцу из Андижана?

В заключение данной темы вам предлагается решить еще четыре задачи по теории вероятности, причем какое именно определение вероятности (классическое или статистическое) вы будете использовать при их решении, зависит только от вас самих.

1.26. Студент Сидорчук собирается на экзамен по педагогике. Перед «походом» на экзамен он решил надеть на ноги носки, выбрав их из большого ящика, в котором лежат носки красного и зеленого цвета. Известно, что если из ящика наугад вытащить два носка, то вероятность того, что они оба зеленые равна 0,5. Какое минимальное количество носков находится в данном ящике?

1.27. Условие этой задачи полностью совпадает с условием предыдущей задачи. Какое минимальное количество носков лежат в ящике, если заранее известно, что число красных носков – четное, но не известно четное или нечетное число черных носков?

1.28. Сколько в среднем раз нужно бросать игральную кость до появления первой четверки?

1.29. Условие следующей задачи заимствовано автором у известного специалиста в области логики, а также популярнейшего детского писателя Льюиса Кэррола. Отметим, что данное условие носит исключительно «странный» характер. Вот почему мы советуем ее решать не всем студентам.

Предположим, что в ящике лежат два шара, каждый из которых может быть, как белым, так и черным. Добавим теперь в наш ящик еще один шар белого цвета, а затем перемешаем произвольным образом все три шара. После этого извлечем наугад из ящика один шар. Согласно известным нам формулам вероятность того, что он окажется белым, равна  $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ . Однако данный результат может быть получен лишь при условии того, что из трех лежащих в ящике шаров один – черный, а два других – белых. Следовательно, изначально в ящике лежал один белый и один черный шар.

Со всеми ли авторскими рассуждениями вы можете согласиться?

1.30. Многие бинарные отношения обладают свойством так называемой «транзитивности». Так, например, данным свойством обладает такое бинарное отношение, как «быть выше». Если А выше В, а В выше С, то из этих двух посылок следует вывод о том, что А выше С. С другой стороны, те отношения, которые нельзя выразить чисто количественно, зачастую не обладают свойством транзитивности. Однако, как бы это не показалось странным, отношение «выигрыш в вероятностной игре» даже в том случае если его можно однозначно выразить количественно, также не всегда обладает свойством транзитивности. Так, например, возьмем трех игроков, играющих в «странные» кости. У первого из них на всех шести гранях кубика стоит цифра 3. У второго на двух гранях цифра 6, а на четырех гранях цифра 2. У третьего на четырех гранях цифра 5, а на двух – цифра 1. В каждой игре принимают участие ровно 2 человека. Они подбрасывают свои кости. Выигрывает тот из них, у кого выпало больше очков. Выясните вероятности выигрыша первого участника у второго, второго у третьего и первого у третьего.

Кстати, свойством транзитивности не обладает и такое бинарное отношение как быть предпочтительнее. Так, например, если большинство студенток педагогического факультета предпочтут выбрать мужем Иванова из пары юношей Иванов и Петров, и большинство из тех же студенток предпочтут выбрать Петрова из пары юношей Петров и Сидоров, то выбирая из пары Сидоров и Иванов они, как бы это не показалось странным, вполне могут выбрать Сидорова. В данном случае нетранзитивность выбора в большей степени обусловлена психологическими особенностями студенток, а не объективными свойствами самих юношей.

1.31. Данная задача позаимствована нами у Ф. Мостеллера. Для ее решения не нужны особые математические знания, но необходимо правильное понимание термина «случайным образом».

Мервин кончает работу в случайное время между 15 и 17 часами. Его мать и его невеста живут в противоположных концах города. Мервин садится в первый, подошедший к платформе поезд, идущий в любом направлении, и обедает с той из дам, к которой приедет. Мать Мэрвина жалуется на то, что он редко у нее бывает, но юноша утверждает, что его шансы обедать с ней и невестой равны. Мэрвин обедал с матерью дважды в течение 20 рабочих дней. Объясните это явление.

1.32. Перед вами находится ящик с черными и белыми носками. Вы знаете, что в ящике лежит один черный и минимум один белый носок. Вы достаете наугад из ящика два носка и оба они оказались белыми. Можно ли на основе полученного результата утверждать, что вытащенный наугад из ящика третий носок с большей степенью вероятности окажется белым, чем черным?

## Тема 2. КОМБИНАТОРИКА

Предварительно нам необходимо получить некоторые знания из такой математической дисциплины как «теория множеств». В этой теории само понятие «множество» является первичным, неопределяемым понятием. Обычно в качестве синонима данного понятия используют такое слово как «совокупность». Для наглядности множество можно представить себе в качестве «мешка» (причем, этот «мешок» может быть даже бесконечным по объему) в котором находятся некоторые «вещи», называемые «элементами данного множества». Обычно принято обозначать множества большими буквами латинского алфавита:  $A, B, C, \dots$ , элементы же множеств принято обозначать маленькими буквами латинского алфавита:  $a, b, c, \dots$ . Отметим, что существует особое множество, в котором нет ни одного элемента. Это множество называется «пустым» и обозначается особым символом  $\emptyset$ . Наглядно пустое множество можно представить в виде такого «мешка», в котором нет ни одного элемента. То есть «мешок» то сам существует, но в нем ничего не «лежит».

Зачастую при проведении статистических исследований вам придется находить некоторые свойства, которыми обладают (или, напротив, не обладают) все без исключения элементы таких множеств, при описании которых мы используем не одно свойство, а суперпозицию нескольких свойств. Так, например, множество студентов, занимающихся спортом, но не являющихся отличниками учебы, является результатом операции, проведенной над тремя множествами «студенты»; «спортсмены»; «отличники учебы». Вот почему необходимо знать правила тех операций, которые возможно осуществлять над множествами. Обычно для двух исходных множеств выделяют четыре основные операции, совершаемые над ними.

**Объединение множеств.** Множество  $A$  является объединением множеств  $B$  и  $C$  (обозначается  $B \cup C$ ) тогда и только тогда, когда любой элемент множества  $A$  является элементом множеств  $B$  или  $C$ . Так как союз «или» мы употребляем в данном случае в качестве дизъюнкции, то в множество  $A$  входят, во-первых, такие элементы, которые входят в множество  $B$ , но не входят в множество  $C$ ; во-вторых, входят в множество  $C$ , но не входят в множество  $B$ ; и, в-третьих, входят как в множество  $B$ , так и в множество  $C$ . Например, объединением всех лысых людей и спортсменов является множество состоящее из лысых неспортсменов, нелысых спортсменов и лысых спортсменов.

**Пересечение множеств.** Множество  $A$  является пересечением множеств  $B$  и  $C$  (обозначается  $B \cap C$ ) тогда и только тогда, когда любой элемент множества  $A$  является элементом множеств  $B$  и  $C$ . Например, пересечением всех лысых людей и спортсменов являются все лысые спортсмены.

**Разность множеств.** Для двух исходных множеств  $B$  и  $C$  можно найти две разности. Множество  $A$  является разностью множеств  $B$  и  $C$

(обозначается  $B \setminus C$ ) тогда и только тогда, когда любой элемент множества  $A$  является элементом множеств  $B$ , но не является элементом множества  $C$ . Например, разностью всех лысых людей и спортсменов являются все лысые неспортсмены. Соответственно, множество  $A$  является разностью множеств  $C$  и  $B$  (обозначается  $C \setminus B$ ) тогда и только тогда, когда любой элемент множества  $A$  является элементом множеств  $C$ , но не является элементом множества  $B$ . Например, разностью всех спортсменов и лысых людей является множество всех нелысых спортсменов. На основе приведенных нами примеров видно, что разность множеств  $B$  и  $C$  ( $B \setminus C$ ) может не совпадать с разностью множеств  $C$  и  $B$  ( $C \setminus B$ ).

Кроме операций над множествами необходимо знать еще два определения. **Множества  $A$  и  $B$  равны между собой тогда и только тогда, когда любой элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ .** Важно понимать, что если мы доказали, что множества  $A$  и  $B$  равны между собой, а кроме того сумели выяснить, что все без исключения элементы множества  $A$  обладают некоторыми свойствами, то отсюда следует, что всеми этими же свойствами обладают элементы множества  $B$ . Кроме того, если мы выяснили, что все без исключения элементы множества  $A$  не обладают какими-то свойствами, то всеми этими же свойствами не обладают и все элементы множества  $B$ . Данное методологическое положение достаточно широко применяется в статистических исследованиях.

Второе определение гласит, что **множество  $B$  является подмножеством множества  $A$  тогда, когда любой элемент множества  $B$  является элементом множества  $A$ .** Обратите внимание, что в данном случае с точки зрения логики речь идет об импликации, но не об эквиваленции. Таким образом, если мы знаем, что все без исключения элементы множества  $A$  обладают каким-то свойством, то отсюда следует, что все элементы множества  $B$  также будут обладать этим свойством. Однако обратное может выполняться не всегда: некоторые свойства всех без исключения элементов множества  $B$ , могут не являться свойствами всех элементов множества  $A$ .

После приведенного теоретического вступления, попробуем теперь решить несколько задач по теории множеств.

2.1. Истинно или ложно следующее высказывание: «Если из множества всех студентов вычесть тех студентов, которые не занимаются спортом, то полученное множество будет равно множеству всех спортсменов минус множество спортсменов, не являющихся студентами?»

2.2. Равны ли между собой множество всех людей, обучающихся в Витебском государственном университете и множество всех студентов нашего университета?

2.3. Известно, что среди 75 студентов 55 выполнило, по крайней мере, первый тест по педагогике, 40 студентов выполнило, по крайней мере, второй тест по педагогике, а 5 студентов не сумело выполнить ни первого, ни

второго теста. Сколько всего студентов сумело выполнить оба предложенных им теста?

2.4. В студенческой группе насчитывается 22 человека. Из них – 10 человек умеют играть в шахматы, 8 человек умеют играть в шашки, а 3 студента умеют играть и в ту, и в другую игру. Сколько студентов из этой группы не умеют играть ни в шахматы, ни в шашки?

2.5. В студенческой группе 30 человек. Известно, что ровно 10 из них выполнено все три педагогических теста; 14 человек выполнило минимум первый и второй тесты; 16 выполнило минимум второй и третий тесты; 18 выполнило минимум третий и первый тесты. Сколько всего человек в студенческой группе выполнило не более чем один из предложенных им педагогических тестов?

2.6. В каком случае выполняется следующее равенство  $B \setminus C = C \setminus B$ ?

2.7. При каких условиях объединение двух множеств равно их пересечению?

В следующих задачах вам будут даны два множества  $A$  и  $B$ , а вы должны найти: 1) объединение этих множеств; 2) пересечение этих множеств; 3) разность  $A \setminus B$ ; 4) разность  $B \setminus A$ .

2.7.  $A$  – множество всех студентов;  $B$  – множество студентов, являющихся отличниками учебы.

2.8.  $A$  – множество всех студентов;  $B$  – множество всех тех людей, которые не являются студентами.

2.9.  $A$  – множество студентов второкурсников;  $B$  – множество студентов, являющихся отличниками учебы.

2.10.  $A$  – множество лысых студентов;  $B$  – множество тех студентов, на голове у которых отсутствуют волосы.

2.11.  $A$  – множество, состоящее из 10 элементов;  $B$  – множество, состоящее из 8 элементов.

2.12.  $A$  – произвольное непустое множество;  $B$  – множество, являющееся подмножеством множества  $A$ .

2.13.  $A$  – множества вариантов очков, которые могут получиться при подбрасывании двух игральных костей;  $B$  – множество вариантов очков, которые могут получиться при подбрасывании трех костей.

2.14.  $A$  – множество всех несобственных подмножеств, множества, состоящего из трех элементов.  $B$  – множество всех подмножеств данного исходного множества.

Теперь перейдем к рассмотрению основных формул комбинаторики, которые могут быть вами использованы не только при решении задач по теории вероятности, но и при проведении различных статистических исследований.

**Перестановки из  $n$  элементов.** Перестановкой из  $n$  элементов называется любой упорядоченный набор этих элементов. Обратим внимание на то, что в данном случае речь идет не просто о **любом** наборе элементов, а

именно об **упорядоченном**, то есть важно учитывать то, какой именно элемент будет стоять на первом месте, какой на втором, какой на третьем и т.д. Так, например, если необходимо принять экзамен по философии по очереди у трех студенток нашего университета Веры, Марии и Ольги, то сделать это возможно шестью различными способами: Вера – Мария – Ольга; Вера – Ольга – Мария; Мария – Вера – Ольга; Мария – Ольга – Вера; Ольга – Вера – Мария; Ольга – Мария – Вера. Число различных перестановок из  $n$  элементов обозначается  $P_n$  и вычисляется по формуле  $P_n = n!$ . Символ «!» читается как «факториал». Согласно определения  $n!$  – это натуральное число равное произведению всех натуральных чисел от 1 до  $n$ . То есть  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . В рассмотренном нами случае  $n = 3$ . Следовательно,  $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ . То есть полученный ответ совпал с тем результатом, который мы уже получили без использования формулы, а лишь путем перечисления всех возможных вариантов. При вычислениях вам иногда придется использовать численное значение величины  $0!$ . Необходимо помнить, что в математике (как бы это не показалось бы вам странным) принято считать, что  $0! = 1$ . Кроме того считается, что  $1! = 1$ .

Конечно, не всегда все теоретически возможные варианты перестановок могут быть реализованы на практике. Предположим вам нужно надеть майку, рубашку и свитер, одевая эти предметы на себя по очереди. Мы уже знаем, что теоретически это возможно шестью различными способами, но практически любой студент предпочтет выполнить данную операцию одним единственным способом: вначале одеть майку, затем рубашку, а затем свитер. Кроме того, необходимо помнить, что при решении некоторых задач перестановки можно осуществлять путем повторения одних и тех же элементов. Так, например, если нам необходимо выяснить сколько различных чисел можно записать с помощью цифр 1; 4; 8, то мы должны учитывать и трехзначные числа, состоящие из трех разных цифр, и трехзначные числа, состоящие из трех одинаковых цифр (например, число 111), и трехзначные числа, состоящие из двух одинаковых цифр (например, число 848). По существу, в данном случае мы можем считать, что, взяв на первое место какое-то одно из множества трех заданных нам цифр, мы затем возвращаем эту цифру в множество тех элементов, из которых можно выбрать вторую цифру числа. Такой способ выбора в комбинаторике носит название **«выборки с возвращением»**.

**Размещения без повторения.** Размещением без повторений из  $n$  элементов по  $m$  называется любой упорядоченный набор из  $m$  различных элементов, выбранных из совокупности в  $n$  элементов. Так, например, если студентка Вера должна выполнить последовательно в педагогическом эксперименте два различных теста (А; В; С) из трех предложенных ей, причем право выбора принадлежит самой студентке, то в этом случае она может выполнить эксперимент шестью различными способами: А – В; А – С; В – А; В – С; С – А; С – В. На этом примере мы видим, что на практике ре-

результаты размещения могут отличаться друг от друга, как своими элементами, так и их порядком. Дело в том, что если вначале Вера будет выполнять тест А, а вслед за ним тест В, то полученный совокупный итог в некоторых случаях (но не всегда) может существенным образом отличаться от того результата, когда она вначале будет выполнять тест В, а лишь затем тест А.

Число размещений в комбинаторике обозначается  $A_n^m$  и вычисляется по формуле:  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

В нашем случае  $n = 3$ ;  $m = 2$ . Следовательно,  $A = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ .

**Размещения с повторениями.** Вернемся теперь к нашему примеру, описывающему выборку с возвращением. Пусть в данном случае студентка Вера имеет возможность выполнять не только два различных теста из трех предложенных ей на выбор, но и два одинаковых. Таким образом, к уже выявленным нами шести способам выбора, добавляются еще три новые: А – А; В – В; С – С. Следовательно, общее число способов выбора стало равно 9 ( $6+3 = 9$ ). В этом случае число размещений вычисляется по формуле:  $A_n^m = n^m$ . Где  $n$  – это общее число элементов, из которых мы совершаем выбор, а  $m$  это число тех элементов, которые мы выбираем из  $n$ . Так как размещение мы проводим с повторениями, то  $m$  может оказаться больше  $n$ .

**Сочетания без повторений.** Сочетанием без повторений из  $n$  элементов по  $m$  в комбинаторике называется любой неупорядоченный набор из  $m$  различных элементов, выбранных из совокупности в  $n$  элементов. Обратим внимание на то, что в данном случае не имеет никакого значения то, в каком именно порядке мы выбираем эти  $m$  различных элементов. Так, например, если девушке Оле предложили взять на выбор только лишь две конфеты из трех, лежащих перед ней на столе: «Красная шапочка», «Коровка» и «Карнавальная маска», то сделать это она может всего лишь тремя принципиально различными способами. Дело в том, что в данном случае если вначале Оля возьмет себе конфету «Красная шапочка», а затем возьмет конфету «Коровка», то конечный результат окажется точно таким же если она возьмет себе вначале конфету «Коровка», а затем возьмет конфету «Красная шапочка». Этим-то как раз и отличается принципиально сочетание без повторений от размещения без повторений. Число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  обозначается  $C_n^m$  и вычисляется по следующей формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Где  $n$  – это общее число элементов, из которых мы совершаем выбор, а  $m$  это число тех элементов, которые мы без повторений выбираем из  $n$ . В нашем случае  $n = 3$ ;  $m = 2$ . Следовательно,  $C = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = 3$ .

**Сочетания с повторениями.** Пусть теперь конфеты выбирает девушка Маша. На столе в этот раз лежат уже не 3, а целых 6 конфет: две

конфеты «Красная шапочка», две конфеты «Коровка» и две конфеты «Карнавальная маска». Причем конфеты с одинаковым названием ничем друг от друга не отличаются. Маше разрешено выбрать ровно две конфеты из шести, лежащих на столе. В этом случае к числу вариантов, полученных при подсчете количества сочетаний без повторений у девушки Оли, необходимо добавит еще три варианта «Коровка–Коровка»; «Красная шапочка–Красная Шапочка»; «Карнавальная маска–Карнавальная маска». Таким образом, общее число вариантов в этом случае окажется равным 6 ( $3+3 = 6$ ).

Мы видим, что число возможных комбинаций можно посчитать по различным правилам, причем результат получится разный, так как принцип подсчета может носить разный характер. Подчеркнем, что конечный результат зависит от действия нескольких факторов одновременно. Во-первых, от того, из какого количества элементов мы можем комбинировать нужные нам наборы. Во-вторых, от того, какой величины наборы элементов нам нужны. И, в-третьих, важно знать, является ли для нас существенным порядок элементов в наборе.

В заключение данной темы вашему вниманию предлагается несколько задач по комбинаторике.

2.15. В студенческой группе 32 человека. Экзамен по философии одновременно может сдавать лишь один человек. Сколько вариантов различных последовательностей сдачи экзамена, возможно, осуществить в этом случае?

2.16. Четыре студента сдают тесты по педагогике. В каждом тесте ровно восемь заданий. За правильно решенное задание студент получает 1 балл, а за неправильно решенное задание получает 0 баллов. Сколько всего существует различных вариантов сдачи тестов студентами? Естественно, что студенты отличаются друг от друга не только в этой задаче, но и в двух последующих.

2.17 Условие данной задачи полностью совпадает с условием предыдущей задачи. В конце тестирования записывается общая сумма, полученная всеми четырьмя студентами, а индивидуальный вклад каждого студента никак не учитывается. Какое различное количество вариантов этой суммы может получиться в результате данной арифметической операции?

2.18. Начало условия данной задачи полностью совпадает с условием задачи 2.16. Однако за правильное выполненное задание студент получает 2 балла, за отказ от решения получает 1 балл, а за неправильное решение получает 0 баллов. Сколько всего существует различных количественных вариантов сдачи тестов студентами в этот раз?

2. 19. Придумайте такую задачу на число сочетаний без повторений, в результате решения которой число данных сочетаний окажется равным 5. Можно ли придумать такую задачу, в которой число перестановок также окажется равным 5?

### Тема 3. КЛАССИФИКАЦИЯ И ТИПОЛОГИЗАЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

В логике существует такая операция как деление имен. По отношению к реальным объектам, обозначаемым какими-то именами, обычно используется термин «классификация», под которой понимается разделение исходного множества на непересекающиеся подмножества. В педагогических исследованиях применяются различные системы классификаций. Рассмотрим их подробно.

**Номинативная классификация**, в результате применения которой все объекты (элементы исходного множества) делятся в соответствии со своим названием. В свою очередь номинативная классификация бывает, как дихотомической, так и по видоизменяемому признаку. Дихотомическая классификация – наиболее простая. В результате ее применения исходное множество подразделяется на два подмножества (назовем их «классами»). В первое подмножество входят все те элементы исходного множества, которые называются данным именем, а во второе подмножество все оставшиеся элементы, которые не называются данным именем. Так, например, студентов можно разделить на «лысых» и «нелысых», «высоких» и «невысоких», «трудолюбивых» и «нетрудолюбивых».

При классификации по некоторому видоизменяемому признаку (его называют «основанием классификации») множество делится на подмножества путем вариативного изменения данного признака. Например, всех студентов можно разделить по признаку обучения на каком-то курсе на первокурсников, второкурсников, третьекурсников, четверокурсников, пятикурсников и шестикурсников. Главным недостатком номинативной классификации является ее «расплывчатый» характер. Дело в том, что иногда очень трудно определить является ли данный студент лысым или не является таковым.

Существуют определенные методологические требования, применяемые к номинативной классификации.

Во-первых – требование полноты классификации. Согласно данному требованию все элементы исходного множества должны оказаться в каком-то из полученных классов. Так, например, если мы разделим всех участников психологического эксперимента на так называемых «левшей» и «правшей», то в результате произойдет нарушение данного требования. Дело в том, что существуют люди, которые одинаково хорошо владеют как левой, так и правой рукой, а, следовательно, их нельзя отнести ни к одному из указанных нами классов. Нарушение требования полноты приводит к ошибке, называемой «классификация с недостатком».

Во-вторых, требование не проводить классификацию «с избытком», то есть не допускать того, чтобы некоторые элементы исходного множества входили в два или более подмножества. В результате этой ошибки, по-

лученные при классификации подмножества, не окажутся попарно непересекающимися. Так, если мы будем классифицировать студентов по росту на низких (ростом менее 160 сантиметров), средних (ростом более 180 сантиметров, но менее 180 сантиметров) и высоких (ростом свыше 175 сантиметров), то, например, студент, имеющий рост 179 сантиметров будет отнесен как к средним, так и одновременно к высоким.

В-третьих, правило единственности основания классификации. Если мы будем выполнять это правило, то все элементы, входящие в исходное множество, будут наделены одним единственным признаком (наличие же всех остальных признаков временно игнорируются), а именно только лишь тем, который используется нами в качестве основания для классификации. Нарушение этого требования приводит к ошибке, которая называется «смешением оснований классификаций». Так, например, если мы будем разделять всех студентов, принимающих участие в педагогическом эксперименте на старшекурсников, холериков, праворуких и отличников учебы, то в этом случае как раз и произойдет нарушение правила единственности основания. Отметим, что при нарушении данного правила могут возникнуть и ошибки, (по крайней мере, одна из двух нижеперечисленных ошибок), названные нами «классификацией с избытком» и «классификации с недостатком». Именно это и произошло в вышеприведенной классификации.

После того как была произведена номинативная классификация, у нас появляется возможность поставить в некоторое соответствие полученные подмножества с его численными характеристиками. Так, например, если мы разделим, всех участвующих в педагогическом эксперименте студентов на «левой» и «правой», то для каждой из групп можно отдельно подсчитать процент студентов, реагировавших на внешний раздражитель. Конечно, нужно понимать, что в педагогике элементарным результатом эксперимента (или наблюдения) принято считать одно единственное наблюдение над единичным объектом (естественно, что в данном случае понятие «объект» употребляется в наиболее широком смысле слова).

Таким образом, единица измерения, которой пользуются в педагогике – это одно наблюдение. В нашем случае этой единицей является реакция на раздражитель студентов. Номинативная шкала позволяет нам подсчитывать так называемые «частоты» встречаемости разных вариантов наблюдений в различных подмножествах. Обычно эти «частоты» выражаются в процентах. В нашем случае число вариантов наблюдений равно двум (либо реакция существует, либо она отсутствует), но во многих экспериментах число вариантов наблюдений может быть больше двух. Так, например, если участникам педагогического эксперимента предлагается выбрать только лишь один из предложенных предметов: апельсин, шоколадку, билет в театр и сборник избранных стихотворений поэта Сидорчука, то в этом случае число вариантов наблюдений равно четырем.

Обратим внимание на то, что в педагогике термин «классификация» относится как к наблюдаемым объектам, так и к результатам наблюдения. Вот почему результаты наблюдений зачастую можно статистически оформить в виде суперпозиции указанных вариантов классификации. Так, например, в случае выбора между апельсином, шоколадкой, билетом в театр и сборником стихов поэта Сидорчука, можно всех участвующих в выборе студентов не делить на какие-то подмножества. Тогда мы будем подсчитывать частоты встречающихся выборов среди студентов в целом. Однако можно провести эксперимент и другим способом, предварительно разделив студентов на юношей и девушек. В этом случае уже будет рассчитываться частота встречаемости результатов выборов среди студентов девушек и студентов юношей, по отдельности.

**Классификация на основе порядковой шкалы.** Данная классификация осуществляется на основе чисто **нечетких** количественных показателей, по принципу «больше – меньше». Причем, все исследуемые нами объекты или результаты наблюдения разделяются на несколько групп. В том случае, когда мы проводим классификацию в «прямом» порядке, то есть начинаем ее от самого маленького значения, а затем последовательно движемся к самому большому, то в результате каждое следующее подмножество «получает» большее значение, чем предыдущее. Так, например, раньше все студенческие знания, проявленные ими на экзаменах, классифицировались с помощью порядковой шкалы на «неудовлетворительные», «удовлетворительные», хорошие» и «отличные». Традиционно принято считать, что в результате применения порядковой шкалы исходное множество должно быть разделено не менее чем на три подмножества.

Конечно, классификацию вовсе не обязательно проводит в прямом порядке. Можно осуществлять данную операцию и в «обратном» порядке, то есть от наиболее высокого значения на порядковой шкале к наиболее низкому значению. Кроме того, в этом случае мы не указываем каких-то конкретных четких количественных показателей, которые соответствуют получившимся подмножествам, то есть в примере с оценками нельзя говорить, что отличные знания выше хороших на 40%.

При применении порядковой шкалы каждое из получившихся подмножеств (в некоторых учебниках их называют «классами») можно поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральными числами. Эти числа называют «рангами», а, соответственно, сам процесс такой операции получил название «ранжирование». Обычно самый низший класс получает ранговое значение равное 1, второй ранг значение равное 2, третий ранг значение равное 3 и т. д. Полученные ранговые значения, могут применяться при математической обработки статистических данных. Важно знать, что чем больше получилось классов в ранговой шкале (а, соответственно и рангов), тем точнее будет конечный результат этой обработки.

В заключение данной темы вам предлагается решить несколько задач.

3.1. При классификации по видоизменяющемуся признаку можно допустить одновременно ошибку неполного деления (с недостатком) и ошибку деления с лишними членами (с избытком). Возможна ли такая ситуация при дихотомическом делении?

3.2. Школьник пишет сочинение на тему: «Что я увидел в лесу». Предварительно он составил такой план сочинения:

1. Что я увидел на опушке леса.
2. Животные в лесу.
3. Как я собирал грибы и ягоды.

Какие ошибки допущены школьником в плане сочинения?

3.3. Существуют ли такие множества, для которых результат классификации будет полностью совпадать с результатом мысленного расчленения целого на части?

3.4. Является ли «классификация по двум основаниям» частным случаем ошибки: «классификация по разным основаниям»?

В следующих задачах вы должны найти ошибки, допущенные при классификации исходного множества.

3.5. Все жители города Витебска делятся на юристов, студентов, спортсменов и предпринимателей.

3.6. Все студенты делятся на отличников и двоечников.

3.7. Все студенты делятся на лысых и не лысых студентов.

3.8. Все города в зависимости от численности населения делятся на:  
а) города с населением до 100 тысяч человек; б) города с населением до 1 миллиона человек; в) города с населением до 10 миллионов человек; г) города с населением свыше 10 миллионов человек.

3.9. Город Витебск делится на Октябрьский, Железнодорожный и Первомайский районы.

Может показаться, что следующая задача не имеет никакого отношения к классификации. Однако это не так. Внимательно почитав ее условие, вы сумеете понять, какая именно ошибка, допущена в приведенных ниже рассуждениях.

3.10. Выясним: сколько дней в году учатся белорусские студенты. В году 366 дней. Из них на сон (считая в среднем по 8 часов в день) уходит 122 дня. Остается на учебу 244. В году 52 воскресных дня, следовательно, на учебу остается 192. Летние и зимние каникулы составляют приблизительно 70 дней. Итак, на учебу остается 122 дня. В сессию – сдают экзамены, а, следовательно – не учатся. На две сессии уходит приблизительно 50 дней. Следовательно, на учебу остается 72 дня. Минимум 2 часа в сутки мы тратим на прием пищи, утренний и вечерний туалет, а это приблизительно 30 дней в году. Итого на учебу остается 42 дня. Еще 2 часа (если не больше) в сутки уходит на совершенно бесполезные занятия: просмотр телевизора, посещение театров, кинотеатров, дискотек и т.д. Итого на учебу остается 12 дней. В Беларуси 11 праздничных нерабочих дней. Итого

на учебу остается всего 1 единственный день в году. Почему же при такой смехотворно маленькой нагрузке белорусские студенты жалуются на усталость от учебы?

**Классификация на основе интервальной шкалы или шкалы равных интервалов.** В этом случае мы проводим классификацию, используя следующий количественный признак: «больше на определенное количество единиц – меньше на определенное количество единиц». Таким образом, можно утверждать, что каждое из возможных значений наблюдений или экспериментальных величин отстоит от другого значения на равном расстоянии.

Одним из существенных недостатков данного вида классификации является то, что количественно равные интервалы могут существенно отличаться друг от друга в качественном отношении. Так, например, если мы рассматриваем детей в возрасте от момента их рождения до десяти лет, то естественно, что изменение различных показателей физического, интеллектуального и психического их развития происшедшего за первый год жизни будет существенно отличаться от изменения данных показателей на десятый год жизни. Данный феномен можно объяснить тем, что дети развиваются неравномерно. Таким образом, классификация на основе интервальной шкалы во многих случаях может привести к методологически неверным выводам. Вот почему зачастую вместо нее применяется рассмотренная нами классификация по порядковой шкале.

**Классификация по шкале равных отношений.** При применении этой шкалы классификация происходит пропорционально степени количественной выраженности измеряемого свойства или отношения. В этом случае определенное численное значение, приписываемое каждому следующему классу, в одно и то же число раз больше (или меньше) численному значению, приписываемому предыдущему классу. Таким образом, можно утверждать, что классификация на основе интервальной шкалы строится по законам арифметической прогрессии, а классификация по шкале равных отношений строится по законам геометрической прогрессии.

Конечно, данный вид классификации также имеет свои существенные недостатки, связанные, в первую очередь, с принципиальной невозможностью придания какой-то измеряемой величине точного количественного значения. Так, например, совершенно некорректно утверждать, что студент Петров ровно в три в три раза глупее студента Иванова, а студент Сидорчук, соответственно, ровно в три раза глупее студента Петрова.

Особая ситуация при классификации по шкале равных отношений возникает в том случае, когда самому первому классу приписывается нулевое численное значение. В этом случае, по законам математики второму классу нельзя приписать никакого значения, кроме нуля. Следовательно, построение классификации на основе данной шкалы возможно лишь тогда, когда мы начинаем такое построение с первого ненулевого значения, при-

писываемого какому-то классу, а затем последовательно умножаем полученные значения на постоянное положительное число, не равное единице.

До сих пор мы использовали термин «классификация» лишь в наиболее его общем значении. Однако необходимо знать, что данный термин можно использовать и в семантически более узком значении. В этом случае под классификацией понимается такое разветвленное, многоступенчатое разбиение исходного множества на попарно непересекающиеся подмножества, при котором каждое из полученных подмножеств, подвергается процессу дальнейшего разбиения. Обычно такую классификацию принято называть особым термином «типология». Так, например, студентов можно поделить на студентов очного отделения и студентов заочного отделения. Затем их можно поделить на студентов, обучающихся на бюджетной основе и студентов, обучающихся на платной основе. Если на этом классификацию закончить, то в результате исходное множество «студенты» оказалось разбитым на четыре непересекающиеся подмножества: «студенты бюджетники очного отделения», «студенты бюджетники заочного отделения», «студенты платники очного отделения» и «студенты платники заочного отделения». Конечно, данную классификацию не обязательно заканчивать. При желании ее возможно продолжить и далее.

Приведенный нами пример типологии можно интерпретировать в несколько ином смысле. Можно считать, что мы проводим не двухступенчатую, а одноступенчатую классификацию, но разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества в этом случае происходит не по унарному, а по бинарному признаку. Кстати, благодаря такому подходу мы можем указать еще на одну ошибку в классификации, которая называется «прыжком». Данная ошибка возникает в том случае, когда на некоторых (а может быть и на всех) этапах этой онтологической операции, полученные подмножества обладают разным числом признаков, на основании которых проводилась классификация. Примером этой ошибки является классификация всех студентов на первокурсников, второкурсников, третьекурсников, четверокурсников и шестекурсников, получающих стипендию.

В заключение данной главы отметим, что в науке запрещено, в процессе различного рода рассуждений, использовать так называемые «пустые» по объему множества, то есть такие множества, в объеме которых нет ни одного элемента. Таким образом, нельзя проводить классификацию, в результате которой одно из полученных подмножеств окажется пустым множеством. Например, если мы проведем уже известную нам дихотомическую классификацию студентов на основе того на какой форме обучения (очной или заочной) они получают свое образование, то нельзя проводить классификацию второго уровня на основе того получают они стипендию или нет. Все дело в том, что студенты заочной формы обучения вообще не получают государственной стипендии.

## Тема 4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

Сам термин «корреляция» на русский язык приблизительно можно перевести как взаимная связь. В настоящее время в психологических исследованиях применяются такие достаточно семантически различные понятия как «корреляционная связь» и «корреляционная зависимость». Корреляционная связь отражает такое объективное положение дел, при котором изменение одного из признаков, приводит к изменению другого признака. Причем, если мы сумеем придать каждому из признаков какое-то конкретное арифметическое значение, то в результате сумеем и найти численные значения так называемого «коэффициента корреляции».

Подчеркнем, что корреляционная взаимосвязь может носить как функциональный (строго детерминированный), так и стохастический, то есть вероятностный характер. Так, например, сила тока в проводнике, имеющем постоянное сопротивление, прямо пропорциональна напряжению, поданному на этот проводник. В данном случае мы имеем дело с функциональной корреляционной взаимосвязью. Если же мы стреляем в какую-то неуничтожимую цель, то зависимость числа попаданий в нее от числа выстрелов носит вероятностный характер. Таким образом, вероятностная корреляционная связь существует в том случае, когда каждому из значений первой случайной величины соответствует специфическое распределение вероятностей значений второй величины. И наоборот, каждому из значений второй величины соответствует специфическое распределение первой величины.

Под корреляционной зависимостью понимают такие изменения, которые вносят значения одного признака в вероятность появления разных значений другого признака. Корреляционная взаимосвязь и корреляционная зависимость не всегда семантически совпадают. Все дело в том, что согласованные изменения признаков и отражающая это корреляционная связь между ними может свидетельствовать не о зависимости этих признаков между собой, а всего лишь о зависимости обеих этих признаков от какого-то третьего признака или сочетания нескольких различных признаков, которые вообще не учитывались в процессе исследования. Так, например, представим себе, что известный педагог-новатор Сидорчук решил выяснить существует ли корреляционная зависимость между длиной ступни у школьников и количеством математических знаний у них? Для решения поставленной научной проблемы он взял такую школу, в которой обучалось более 2000 детей. Сидорчук измерил (конечно, не один, а с братьями по педагогическому разуму) практически у всех из них длину ступни, а заодно и записал количество теорем, определений и математических формул, которые знали изучаемые школьники. В результате он получил четко прослеживаемую числовую зависимость знаний по математике

у школьников, от длины их ступни. Затем Сидорчук совершил грубейшую методологическую ошибку. Он не учел того факта, что дети постоянно растут, а ступня у них также увеличивается с увеличением возраста. Естественно, что пятиклассник в среднем имеет намного больше знаний по математике, чем первоклассник. Не приняв во внимание отмеченную возрастную специфику, Сидорчук тем самым пришел к неверному выводу об экспериментальном подтверждении своей педагогической гипотезы.

Таким образом, нам зачастую трудно утверждать о существовании корреляционной связи между какими-то измеряемыми в ходе эксперимента величинами, а, следовательно, лучше всего для начала говорить о корреляционной взаимосвязи и лишь затем, после дополнительных экспериментов можно уже будет говорить о существовании некоторой корреляционной зависимости. На практике, переход от простой взаимосвязи к зависимости означает появление возможности влиять на изменение одних показателей, путем изменения других. Так, например, в случае с педагогической гипотезой Сидорчука, нельзя сделать вывод о том, что для повышения уровня математической грамотности у школьников необходимо искусственным путем удлинять у них ступни ног. Напротив, если исследования свидетельствуют об увеличении уровня грамотности при возрастании количества часов, отводимых на математику в рамках школьной программы, то в этом случае совет по изменению школьной программы, действительно даст ожидаемый результат в случае своего практического выполнения.

В целом же можно считать, что корреляционная взаимосвязь является частным случаем корреляционной зависимости.

Из различного рода корреляционных взаимосвязей особое значение носят причинно-следственные. Педагогам приходится сталкиваться со множеством воздействий на изучаемый ими объект, приведшим к различным следствиям (или следствию). Возникает вполне очевидный вопрос какое именно причинное воздействие привело к конкретному следствию? Отметим, что идея логического нахождения причины начала развиваться еще в трудах Ф. Бэкона, но в своем законченном виде она впервые была сформирована Дж. Ст. Миллем. В настоящее время выделяют 5 основных методов, с помощью которых определяются причинно-следственные взаимосвязи между событиями.

**Метод единственного сходства.** Сущность данного метода заключается в следующем. Пусть произошло неоднократное появление какого-то события А. Запишем, те события, которые каждый раз предшествовали появлению события А. Если только лишь одно из событий (В), во всех без исключения случаях предшествовало событию А, то логично предположить, что именно В и является причиной А. Так, например, если в столовой произошло отравление и все без исключения отравившиеся пили компот (а других таких блюд, которые употребили все отравившиеся – не было), то именно компот и стал, вероятнее всего, причиной отравления.

**Метод единственного отличия.** Пусть опять произошло неоднократное появление какого-то события А. Зафиксируем теперь те ситуации, в которых событие А не произошло. Запишем, также те события, которые каждый раз отсутствовали при появлении события А. Если только лишь одно из событий (В), во всех без исключения случаях не предшествовало событию А, то логично предположить, что именно В и является причиной А. Так, например, если в столовой произошло отравление и все без исключения не отравившиеся не пили компот (а других таких блюд, которые не употребили все без исключения не отравившиеся – нет), то логично предположить, что именно компот и явился причиной отравления.

**Объединенный метод единственного отличия и единственного сходства.** Как и все индуктивные методы, методы Бэкона-Милля не дают стопроцентно гарантированного результата. Однако при их совместном применении вероятность истинности полученного вывода существенно возрастает. Таким образом, если провести одновременные исследования по методу единственного сходства и методу единственного отличия, то мы в результате повысим вероятность истинности вывода. Применительно к описанной нами ситуации в столовой (при условии использования логического союза, обозначающего «строгую дизъюнкцию») вывод имеет следующий вид: употребление компота в столовой явилось причиной отравления тогда и только тогда, когда все употребившие в столовой компот – отравились.

**Метод сопутствующих изменений.** Рассмотрим сущность применения данного метода на следующем примере. Предположим, что мы изучаем педагогический «портрет» большой группы школьников, на которую оказали четыре различных воздействия: А, В, С, Д. Выяснилось, что по сравнению с контрольной группой школьников у экспериментальной произошло четыре различных изменения О, К, Р, Т. Затем были взяты еще четыре экспериментальных групп школьников, на каждую из которых воздействия А, В, С оказывались в одинаковой степени, а воздействие Д оказывалось во всех четырех случаях в разной степени. Если выяснилось, что изменение воздействия Д, привело лишь к изменению параметра Т (а все остальные параметры О, К, Р, остались без изменения), то согласно методу сопутствующих изменений именно воздействие Д, является причиной изменения параметра Т.

**Метод остатков.** Предположим, что изучаемое нами педагогическое явление Р носит сложный характер, являясь суперпозицией простых явлений а, b, c, d. В результате проведенных исследований, было установлено, что явлению Р предшествуют по времени такие обстоятельства как А, В, С, Д. Кроме того, после дальнейших исследований, было выявлено, что обстоятельство А явилось причиной явления а, обстоятельство В – причиной явления b и обстоятельство С – причиной явления c. Согласно методу

остатков, обстоятельство D является причиной явления d. Отметим, что применение данного метода в педагогике имеет большой эвристический потенциал. Так, если нам известны все данные из предыдущего примера, но ничего не известно о наличии обстоятельства D, то согласно методу остатков, необходимо сосредоточить всю познавательную деятельность как раз именно на нахождении такого неизвестного обстоятельства, которое является причиной явления d.

Рассмотренные нами методы Бэкона-Милля носят качественный характер и не позволяют дать количественную оценку корреляционной взаимосвязи между двумя явлениями. В том же случае, когда относительно двух (или более) изучаемых нами явлений можно построить количественные шкалы их изменений, для выявления количественной степени их корреляционной взаимосвязи применяется корреляционный анализ. Окончательным результатом применения этого анализа является нахождение **коэффициента корреляции**, то есть такого числа, которое показывает степень взаимосвязи между численными значениями двух переменных, являющихся количественной характеристикой явлений. Обычно коэффициент корреляции обозначается буквой  $r$ . Обратим внимание на то, что корреляционные взаимосвязи могут носить как прямой, так и обратный характер, а, соответственно,  $r$  может быть, как положительной, так и отрицательной величиной. Например, взаимосвязь между скоростью и расстоянием, пройденным телом за определенный промежуток времени носит прямо пропорциональный характер. Взаимосвязь же между скоростью тела и временем, потраченным им на прохождение одного и того же расстояния, носит обратно пропорциональный характер.

Обычно корреляционные взаимосвязи берутся в качестве модулей полученных чисел. Причем, в педагогике принято считать, что все корреляционные взаимосвязи можно разделить на 5 групп.

- 1)  $r = 0$ . В этом случае можно утверждать отсутствие всякой корреляционной взаимосвязи.
- 2)  $0 < r < 0,3$ . Такой коэффициент свидетельствует о наличии слабой взаимосвязи.
- 3)  $0,3 \leq r < 0,7$ . В этом случае можно говорить о наличии умеренной корреляционной взаимосвязи.
- 4)  $0,7 \leq r < 1$ . Такой коэффициент свидетельствует о наличии сильной взаимосвязи.
- 5)  $r = 1$ . В данном случае мы имеем дело с совершенной (абсолютной) взаимосвязью.

Наиболее часто в психологических исследованиях используется **коэффициент ранговой корреляции Спирмена**. К достоинствам нахождения коэффициента корреляции с помощью этого метода необходимо отнести исключительно простую формулу и очень простые вычисления, кото-

рые возможно приблизительно провести даже без калькуляторов. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена рассчитывается по следующей формуле:

$$r = 1 - \frac{6\sum D^2}{n \cdot (n-1) \cdot (n+1)}$$

Где  $D$  – разница рангов событий  $A$  и  $B$ ;  $n$  – число элементов в выборке. Покажем нахождение данного коэффициента на следующем конкретном примере.

Пусть мы проводим педагогическое тестирование с 10 одинаковыми по численности и приблизительно одинаковыми по уровню подготовленности студенческими группами (то есть в данном случае  $n = 10$ ). Причем, прежде чем отвечать на вопрос теста студенты имеют право советоваться друг с другом, но выбор правильного ответа они должны осуществлять самостоятельно. В результате мы имеем два вида эмпирически измеряемых событий: количество времени в минутах, потраченных группой на обсуждение теста (событие  $A$ ) и количество студентов группы, **давших правильный ответ** (событие  $B$ ). В результате проведенного эксперимента мы имеем следующую таблицу:

| № группы | Величина $A$ | Величина $B$ | Ранг $A$ | Ранг $B$ | $D$ | $D^2$ |
|----------|--------------|--------------|----------|----------|-----|-------|
| 1        | 2            | 2            | 1        | 2        | -1  | 1     |
| 2        | 4            | 1            | 2        | 1        | 1   | 1     |
| 3        | 6            | 4            | 3        | 4        | -1  | 1     |
| 4        | 8            | 3            | 4        | 3        | 1   | 1     |
| 5        | 10           | 7            | 5        | 6        | -1  | 1     |
| 6        | 12           | 5            | 6        | 5        | 1   | 1     |
| 7        | 14           | 9            | 7        | 8        | -1  | 1     |
| 8        | 16           | 8            | 8        | 7        | 1   | 1     |
| 9        | 18           | 12           | 9        | 10       | -1  | 1     |
| 10       | 20           | 10           | 10       | 9        | 1   | 1     |

Таким образом, согласно данной таблице коэффициент ранговой корреляции Спирмена  $r = 1 - \frac{6 \cdot (1+1+1+1+1+1+1+1+1+1)}{10 \cdot (10-1) \cdot (10+1)} = 0,94$ .

В результате мы можем говорить о наличии сильной корреляционной взаимосвязи, несмотря на то, что ранг величин  $A$  и  $B$  не совпал ни для одной, из принявших в эксперименте группы. В общем-то такой ответ интуитивно многим покажется неправильным.

Изменим теперь нашу таблицу, после чего она примет следующий вид:

| № группы | Величина $A$ | Величина $B$ | Ранг $A$ | Ранг $B$ | $D$ | $D^2$ |
|----------|--------------|--------------|----------|----------|-----|-------|
| 1        | 2            | 12           | 1        | 10       | -9  | 81    |
| 2        | 4            | 2            | 2        | 2        | 0   | 0     |
| 3        | 6            | 3            | 3        | 3        | 0   | 0     |
| 4        | 8            | 4            | 4        | 4        | 0   | 0     |

|    |    |    |    |   |   |    |
|----|----|----|----|---|---|----|
| 5  | 10 | 5  | 5  | 5 | 0 | 0  |
| 6  | 12 | 7  | 6  | 6 | 0 | 0  |
| 7  | 14 | 8  | 7  | 7 | 0 | 0  |
| 8  | 16 | 9  | 8  | 8 | 0 | 0  |
| 9  | 18 | 10 | 9  | 9 | 0 | 0  |
| 10 | 20 | 1  | 10 | 1 | 9 | 81 |

В этом случае коэффициент ранговой корреляции Спирмена будет равен  $r = 1 - \frac{6 \cdot (81 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 81)}{(10) \cdot (10-1) \cdot (10+1)} = 0,02$ .

В результате мы можем говорить только лишь о наличии слабой корреляционной взаимосвязи, несмотря на то, что ранг величин *A* и *B* не совпал только лишь для двух, из 10 принявших участие в эксперименте групп.

Полученный результат многим также может показаться неправильным. Таким образом, применение метода ранговой корреляции Спирмена не всегда позволяет получить на практике хороший результат. Все дело в том, что понятие ранга в данном случае носит достаточно расплывчатый семантический характер. Вот почему при проведении статистических исследований в педагогике, зачастую его необходимо дополнить другими статистическими методами.

Получив значение коэффициента ранговой корреляции Спирмена, мы должны теперь проверить значимость полученного результата, то есть указать на вероятность нашего утверждения о наличии какой-то взаимосвязи между изучаемыми параметрами.

Обычно в педагогике (а также в психологии и в других научных дисциплинах) рассматривается либо значимость равная 0,95 (то есть такая значимость, которая соответствует вероятности 95% полученного результата), либо 0,99 (то есть соответствующая вероятности 99% полученного результата.). Кстати можно указывать не на вероятность значимости полученного результата, а на вероятность отсутствия значимости полученного результата. В нашем случае эти вероятности будут соответственно равны 5% и 1%.

Для нахождения указанных значимостей, предварительно, необходимо подсчитать так называемую «степень свободы», которая определяется по следующей формуле;  $df = n - 2$ . Так как в обоих, приведенных нами примерах  $n = 10$ , то, соответственно  $df = 10 - 2 = 8$ . Обратим внимание на то, что те случаи, в которых величина  $df$  оказалась меньше числа 5, в математической статистике вообще не принято рассматривать.

Найдя степень свободы, мы можем теперь перейти к определению значимости полученного нами результата. Делается это с помощью следующей таблицы.

## Критические значения коэффициента корреляции $r$ Пирсона

| df=n-2 | p    |      | df=n-2 | p    |      |
|--------|------|------|--------|------|------|
|        | 0,95 | 0,99 |        | 0,95 | 0,99 |
| 5      | 0,75 | 0,87 | 27     | 0,37 | 0,47 |
| 6      | 0,71 | 0,83 | 28     | 0,36 | 0,46 |
| 7      | 0,67 | 0,80 | 29     | 0,36 | 0,46 |
| 8      | 0,63 | 0,77 | 30     | 0,35 | 0,45 |
| 9      | 0,60 | 0,74 | 35     | 0,33 | 0,42 |
| 10     | 0,58 | 0,71 | 40     | 0,30 | 0,39 |
| 11     | 0,55 | 0,68 | 45     | 0,29 | 0,37 |
| 12     | 0,53 | 0,66 | 50     | 0,27 | 0,35 |
| 13     | 0,51 | 0,64 | 60     | 0,25 | 0,33 |
| 14     | 0,50 | 0,62 | 70     | 0,23 | 0,30 |
| 15     | 0,48 | 0,61 | 80     | 0,22 | 0,28 |
| 16     | 0,47 | 0,59 | 90     | 0,21 | 0,27 |
| 17     | 0,46 | 0,58 | 100    | 0,20 | 0,25 |
| 18     | 0,44 | 0,56 | 125    | 0,17 | 0,23 |
| 19     | 0,43 | 0,55 | 150    | 0,16 | 0,21 |
| 20     | 0,42 | 0,54 | 200    | 0,14 | 0,18 |
| 21     | 0,41 | 0,53 | 300    | 0,11 | 0,15 |
| 22     | 0,40 | 0,52 | 400    | 0,10 | 0,13 |
| 23     | 0,40 | 0,51 | 500    | 0,09 | 0,12 |
| 24     | 0,39 | 0,50 | 700    | 0,07 | 0,10 |
| 25     | 0,38 | 0,49 | 900    | 0,06 | 0,09 |
| 26     | 0,37 | 0,48 | 1000   | 0,06 | 0,09 |

Итак, в нашем случае  $df = 8$ . Поэтому значимость равная 0,95 достигается при коэффициенте корреляции Пирсона  $0,63 \leq r$ , а значимость равная 0,99 при коэффициенте корреляции Пирсона  $0,77 \leq r$ . Таким образом, в первом варианте, когда мы получили для коэффициента корреляции Пирсона значение 0,94 можно утверждать, что в данном случае корреляция является сильной взаимосвязью. Причем утверждать о наличии такой взаимосвязи можно с вероятностью не менее 99%. Во втором же случае гипотеза о наличии взаимосвязи не подтвердилась даже с вероятностью 95%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – М.: Глав. ред. физ.-мат. литературы, 1969. – 323 с.
2. Основы математической статистики в психологии: учеб-метод. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / сост. Н. А. Литвинова, Н. П. Радчикова. – Минск: БГПУ, 2008. – 87 с.
3. Основы математической статистики в психологии: учеб-метод. пособие: в 2 ч. / сост. Н. А. Литвинова, Н. П. Радчикова. – Минск: БГПУ, 2009. – Ч. 2. – 44 с.
4. Свинцов, В. И. Логика: учебник для вузов / В. И. Свинцов. – М.: Высшая школа, 1987. – 287 с.
5. Уткевич, В. А. Сборник задач и упражнений по логике / В. А. Уткевич. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2004. – 40 с.

Учебное издание

**УТКЕВИЧ** Владимир Анатольевич

## **СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПЕДАГОГИКЕ**

Методические рекомендации

Технический редактор

*Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн

*Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать .2017. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,49. Уч.-изд. л. 2,50. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования  
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования  
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.