Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Е.А. Витько

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2017

УДК 510.6(075.8)+519.854(075.8)
ББК 22.122я73+22.174я73
В54

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 28.12.2016 г.

Автор: доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **Е.А. Витько**

Р е ц е н з е н т :
доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук,
доцент *М.И. Наумик*

Витько, Е.А.

В54 Математическая логика и дискретная математика : методические рекомендации / Е.А. Витько. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 50 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с учебными программами специальностей факультета математики и информационных технологий. Приводятся перечень задач и основные теоретические сведения, необходимые для их решения.

УДК 510.6(075.8)+519.854(075.8)
ББК 22.122я73+22.174я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ 5
Алгебра высказываний 5
Алгебра предикатов 11
Приложение алгебры высказываний и алгебры предикатов к логико-математической практике 16
БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ 20
Нормальные формы 20
Минимизация булевых функций 24
Применение булевых функций к анализу и синтезу дискретных устройств 27
РАЗБИЕНИЯ ЧИСЕЛ И РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ 29
Рекуррентные соотношения 29
Задача разбиения 32
ГРАФЫ 34
Основные понятия. Матрицы смежности и инцидентности 34
Связность. Расстояния на графах 39
Эйлеровы и гамильтоновы графы 44
Деревья. Планарные графы 46
ЛИТЕРАТУРА 50

ВВЕДЕНИЕ

Изучение основ математической логики и дискретной математики вооружает студентов знаниями основополагающего характера, которые найдут применение в их дальнейшей учебной и практической деятельности. Содержание учебной дисциплины сочетает в себе классические направления теоретического характера с ориентацией на практическое решение задач посредством моделирования ситуаций. В данном издании подобраны практические задания по следующим разделам дисциплины:

- элементы математической логики;
- булевы функции;
- разбиения чисел и рекуррентные соотношения;
- графы.

Среди представленных задач имеются предназначенные для первоначальной проработки и освоения методов дискретной математики и математической логики, а также задачи для углубленного изучения предмета.

Данное учебное издание составлено в соответствии с программой дисциплины «Математическая логика и дискретная математика» и предназначено для студентов специальности «Математика и информатика», а также для организации самостоятельной работы студентов всех специальностей факультета математики и информационных технологий.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Алгебра высказываний

Для обозначения высказываний будем использовать малые буквы латинского алфавита (возможно, с индексами), которые будем называть пропозициональными переменными или элементарными формулами или атомами. Существуют разные варианты обозначения истинности и ложности высказываний:

Истина	И	True	T	1
Ложь	Л	False	F	0

Мы будем использовать пару 1 и 0. Если высказывание x принимает значение истины, то будем обозначать $x = 1$, если x – ложно, то $x = 0$.

Таблицы истинности логических операций

		отрицание	*конъюнкция*	*дизъюнкция*	*импликация*	*эквиваленция*
x	y	$\overline{x}$	$x \wedge y$ xy	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Формулы алгебры высказываний (АВ)

Определение 1) элементарные формулы – формулы АВ;

2) если некоторое выражение N есть формула АВ, то $(\overline{N})$ – формула АВ;

3) если некоторые выражения M и N есть формулы АВ, то выражения $(N \vee M)$, $(N \wedge M)$, $(N \Rightarrow M)$, $(N \Leftrightarrow M)$ – формулы АВ;

4) других формул, кроме построенных по п.п.1), 2), 3), нет.

При построении формул используют скобки, которые определяют порядок выполнения операций. Для удобства принимают соглашение об опускании скобок.

1. Опускать внешние скобки.

2. Опускать те скобки, которые становятся необязательными, если принять следующий порядок выполнения операций:

1) отрицание,

2) конъюнкция,

3) дизъюнкция,

4) импликация,

5) эквиваленция.

Виды формул АВ

Формула АВ называется **тождественно истинной (общезначимой, тавтологией)**, если она при всех наборах значений переменных принимает значение истина.

Обозначение: $\vDash M$ – формула M тождественно истинна.

Формула алгебры высказываний называется **тождественно ложной (противоречием)**, если она при всех наборах значений переменных принимает значение ложь.

Формула алгебры высказываний называется **выполнимой**, если она при некоторых наборах значений переменных принимает значение истина.

На множестве формул АВ рассматривают следующие отношения: отношение равносильности формул и отношение логического следования.

Отношение равносильности формул АВ

Определение. Две формулы N и M называются **равносильными**, если они принимают одинаковые значения при любых наборах значений переменных.

Обозначение: $N \equiv M$ – формулы N и M равносильны.

Признак равносильности формул:

$$N \equiv M \text{ тогда и только тогда, когда } \vDash N \Leftrightarrow M .$$

Законы алгебры высказываний

1) $x \equiv x$ – закон тождества;
2) $x \wedge \bar{x} \equiv 0$ – закон противоречия;
3) $x \vee \bar{x} \equiv 1$ – закон исключенного третьего;
4) $\bar{\bar{x}} \equiv x$ – закон двойного отрицания;
5) $xx \equiv x$,
   $x \vee x \equiv x$ – законы идемпотентности;
6) $xy \equiv yx$,
   $x \vee y \equiv y \vee x$ – законы коммутативности;
7) $x \vee yz \equiv (x \vee y)(x \vee z)$,
   $x(y \vee x) \equiv xy \vee xz$ – законы дистрибутивности;
8) $x(yz) \equiv (xy)z$,
   $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – законы ассоциативности;
9) $\overline{xy} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$,
   $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x}\,\bar{y}$ – законы де Моргана;
10) $x \wedge 1 \equiv x$,
   $x \vee 0 \equiv x$;

11) $x \wedge 0 \equiv 0$,
$x \vee 1 \equiv 1$;

12) $x(x \vee y) \equiv x$,
$x \vee xy \equiv x$ – законы поглощения;

13) $(x \vee y)(\bar{x} \vee y) \equiv y$,
$xy \vee \bar{x}y \equiv y$ – законы склеивания;

14) $x \Rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y$ – закон замены импликации;

15) $x \Leftrightarrow y \equiv (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x)$,
$x \Leftrightarrow y \equiv (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$ – законы замены эквиваленции;

16) $x \Rightarrow y \equiv \bar{y} \Rightarrow \bar{x}$ – закон контрпозиции.

Отношение логического следования формул АВ

Определение. Формула B называется **логическим следствием** из формул $A_1, A_2, ..., A_k$, если B принимает значение истины всякий раз, когда формулы $A_1, A_2, ..., A_k$ принимают значение истины.

Другими словами, из формул $A_1, A_2, ..., A_k$, логически следует формула B, если она принимает значение истины *по крайней мере* на тех наборах значений переменных, при которых формулы $A_1, A_2, ..., A_k$ истинны одновременно.

Обозначение: $A_1, A_2, ..., A_k \vDash B$ – формула B является логическим следствием из формул $A_1, A_2, ..., A_k$. Формулы $A_1, A_2, ..., A_k$ называются посылками, формула B – заключением или выводом.

Теорема. Формула B является логическим следствием из формул $A_1, A_2, ..., A_k$ тогда и только тогда, когда формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$ – тождественно истинна, т.е.

$A_1, A_2, ..., A_k \vDash B$ тогда и только тогда, когда $\vDash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$.

В частности, $A \vDash B$ тогда и только тогда, когда $A \Rightarrow B \equiv 1$.

Теорема. Формула B является логическим следствием из формул $A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k$ тогда и только тогда, когда формула $A_k \Rightarrow B$ является логическим следствием из формул $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$, т.е.

$A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k \vDash B$ тогда и только тогда,

когда $A_1, A_2, ..., A_{k-1} \vDash A_k \Rightarrow B$.

Следствие. $A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k \vDash B$ тогда и только тогда, когда $\vDash (A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \ldots (A_{k-1} \Rightarrow (A_k \Rightarrow B))\ldots))$.

1. Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями. Для каждого высказывания установите истинно оно или ложно и сформулируйте отрицание.

1) Луна – это спутник Марса;

2) студент факультета математики и информационных технологий;

3) $2 \cdot 3 = 7$;

4) $2 < 3$;

5) $2 \geq 2$;

6) $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$;

7) существует такое действительное число x, для которого

$$x^2 + 1 < 2x - 1;$$

8) для любого натурального числа n число $n^2 + n + 41$ является простым;

9) для любых действительных чисел a и b выполняется равенство

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab;$$

10) для любого действительного числа x выполняется равенство

$$\sqrt{x^2} = x;$$

11) 600 делится на 6 и на 14;

12) 600 делится на 6 или на 14;

13) среди тригонометрических функций есть четные и нечетные;

14) если 10 делится на 2, то 10 делится на 4;

15) если некоторый элемент принадлежит множеству A, то данный элемент принадлежит множеству $A \cup B$;

16) если некоторый элемент принадлежит множеству A, то данный элемент принадлежит множеству $A \cap B$.

2. 1) Известно, что импликация $x \Rightarrow y$ истинна, а эквиваленция $x \Leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \Rightarrow x$?

2) Известно, что эквиваленция $x \Leftrightarrow y$ истинна. Что можно сказать о значениях $\bar{x} \Leftrightarrow y$ и $x \Leftrightarrow \bar{y}$?

3) Известно, что импликация $x \Rightarrow y$ истинна. Что можно сказать о значении импликации $\bar{y} \Rightarrow \bar{x}$?

4) Известно, что конъюнкция $\bar{x} \wedge y$ истинна. Что можно сказать о значениях $x \vee y$ и $x \Rightarrow y$?

5) Известно, что x – истинное высказывание. Что можно сказать о значениях $\bar{x} \wedge y \Rightarrow z$, $\bar{x} \Rightarrow (y \vee z)$ и $\bar{x} \vee y$?

6) Известно, что $x \Rightarrow y$ имеет значение 1. Что можно сказать о значениях $z \Rightarrow (x \Rightarrow y)$, $\overline{x \Rightarrow y} \Rightarrow y$, $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$?

3. Составьте таблицы истинности для следующих формул

1) $(x \wedge y \vee \bar{z}) \Leftrightarrow (\bar{y} \Rightarrow z)$;

2) $(x \Rightarrow y \Rightarrow \bar{z}) \Leftrightarrow (x \wedge \bar{y})$;

3) $(xy\bar{z} \vee \bar{x}\,\overline{y}) \Rightarrow (y \Rightarrow \bar{z})$;

4) $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (x \vee y\bar{z})$;

5) $(x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow \bar{y}) \Rightarrow \bar{x}$;

6) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$;

7) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (y \Rightarrow x)$;

8) $\overline{(x \Leftrightarrow \bar{y}) \vee z} \wedge y$.

4. Применяя законы алгебры высказываний (дистрибутивности, противоречия, исключенного третьего, нейтральных элементов, идемпотентности, де Моргана), преобразуйте формулы

1) $x \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$;

2) $x \wedge \overline{\bar{x} \wedge y \wedge z}$;

3) $x \wedge (x \wedge y \vee \bar{x} \wedge z)$;

4) $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)$;

5) $x \vee \bar{x}yz \vee y \vee \bar{z}$;

6) $xy \vee \bar{x}y\bar{z}$.

5. Без построения таблицы истинности докажите, что следующие формулы тождественно истинны

1) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$;

2) $(x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow \bar{y}) \Rightarrow \bar{x}$;

3) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$;

4) $(x \Rightarrow z) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow ((x \vee y) \Rightarrow z))$.

6. Решить уравнения

1) $x \vee \bar{y} \vee z = 0$;

2) $xy \Rightarrow x \wedge \bar{z} = 0$;

3) $\bar{x} \vee y = 1$;

4) $x \Rightarrow \overline{xy} = 1$;

5) $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee z) = 0$;

6) $x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xz = 1$;

7) $x\bar{y} \Rightarrow x \vee \bar{z} = 0$;

8) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = 0$;

9) $xy \vee (y \Rightarrow x) \vee (x \Leftrightarrow z) = 0$;

10) $x(x \Rightarrow y)(\bar{y} \Rightarrow z) = 1$

11) $x \Leftrightarrow z\bar{y} = x$;

12) $x \Rightarrow y = \bar{x}y\bar{z}$;

13) $x \vee \overline{yz} = \bar{x}z \vee \bar{x}y$;

14) $x \Rightarrow y \Rightarrow z = (x \vee z)(\bar{y} \vee z)$.

7. Без построения таблицы истинности докажите, что следующие формулы

i) выполнимы ii) не тождественно истинны

1) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (y \Rightarrow x)$;

2) $\overline{(x \Leftrightarrow \bar{y}) \vee z} \wedge y$;

3) $x \wedge y \Rightarrow (z \vee y \Rightarrow \bar{z})$;

4) $(x \Rightarrow y) \vee (x \Leftrightarrow z)$.

8. Равносильны ли формулы

1) $x \wedge y$ и $\overline{x \Rightarrow \bar{y}}$;

1) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$ и $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$;

3) $x \Rightarrow y$ и $\bar{x} \Rightarrow \bar{y}$;

4) $x \wedge y \Rightarrow z$ и $x \Rightarrow y \Rightarrow z$;

5) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$ и $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$;

6) $\overline{x \Leftrightarrow y}$ и $x \Leftrightarrow \bar{y}$;

7) $(x \vee y)(\bar{x} \vee z)$ и $\bar{x}y \vee xz$;

8) $(x \Rightarrow y)z$ и $\bar{x}yz \vee \bar{x}z\bar{y} \vee yz$;

9) $x \Rightarrow (xy \Rightarrow (x \Rightarrow y \Rightarrow y)z)$ и $y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$;

10) $(x \Rightarrow (y \vee z))(\bar{y} \Rightarrow t)(xt \Rightarrow \bar{z}) \Rightarrow y$ и $x \vee y \vee \bar{t}$.

9. Проверьте (9.1 *по определению с помощью таблицы истинности;* 9.2 *по определению с помощью системы уравнений,* 9.3 *по теореме*), является ли формула

1) $\bar{x}$ логическим следствием из формул $x \Rightarrow y$ и $\bar{y}$;

2) y логическим следствием из формул $x \Rightarrow y$ и x;

3) z логическим следствием из формул $x \wedge y \Rightarrow z$ и $x \Rightarrow y$;

4) z логическим следствием из формул $x \Rightarrow y$, $y \Rightarrow z$ и $x \vee y$.

10. Найдите недостающую не тождественно ложную посылку, такую, чтобы было верно логическое следование.

1) $x \vee y \vee z$, $\bar{y} \wedge t$, $F(z,t) \vDash x \wedge t$;

2) $x \Rightarrow z$, $y \Leftrightarrow \bar{t}$, $F(z,t) \vDash \bar{x} \vee \bar{y}$.

Алгебра предикатов

Определение. Пусть n – натуральное число, тогда n-местным (n-арным) предикатом, заданным на множестве M, называется отображение

$$P : M^n \to \{0,\ 1\}.$$

n-местный предикат при $n = 1$ называется унарным, при $n = 2$ – бинарным.

По определению полагают, что высказывание – 0-местный предикат.

Определение. Пусть $P(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ – предикат, заданный на множестве M. Областью истинности предиката $P(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ называется множество всех тех наборов $(\alpha_1\alpha_2,...,\alpha_n) \in M^n$, для которых $P(\alpha_1\alpha_2,...,\alpha_n) = 1$.

Обозначение: P^+ – область истинности предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Таким образом,

$$P^+ = \{(\alpha_1\alpha_2,...,\alpha_n) \in M^n \mid P(\alpha_1\alpha_2,...,\alpha_n) = 1\}.$$

Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на множестве M, называется

1) тождественно истинным предикатом на M, если при любых наборах значений переменных он принимает значение истина, т.е.

$$P^+ = M^n;$$

2) тождественно ложным предикатом на M, если при любых наборах значений переменных он принимает значение ложь, т.е.

$$P^+ = \varnothing;$$

3) выполнимым предикатом на M, если при некотором наборе значений переменных он принимает значение истина, т.е.

$$P^+ \neq \varnothing.$$

Предикаты $P(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ и $Q(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, заданные на множестве M, называются равносильными на M, если $P^+ = Q^+$.

Обозначение: $P(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \equiv Q(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ – предикаты $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ равносильны.

Определение. Пусть $P(x)$ – предикат, заданный на множестве M. Операцией квантор общности по переменной x называется операция $\forall x$, которая одноместному предикату $P(x)$ ставит в соответствие высказывание

$$\forall x P(x) = \begin{cases} 1, \text{если } P(x) = 1 \text{ для всех } x \in M, \\ 0, \text{если } P(x_0) = 0 \text{ для некоторого } x_0 \in M. \end{cases}$$

Таким образом, высказывание $\forall x P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ – тождественно истинный предикат.

Определение. Пусть $P(x)$ – предикат, заданный на множестве M. Операцией квантор существования по переменной x называется операция $\exists x$, которая одноместному предикату $P(x)$ ставит в соответствие высказывание

$$\exists x P(x) = \begin{cases} 1, \text{если } P(x_0) = 1 \text{ для некоторого } x_0 \in M, \\ 0, P(x) = 0 \text{ для всех } x \in M. \end{cases}$$

Таким образом, высказывание $\exists x P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ – выполнимый предикат.

Определение. Пусть n – натуральное число, $n > 1$ и $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – n-местный предикат, заданный на множестве M. Операцией квантор общности по переменной x_1 называется операция $\forall x_1$, которая n-местному предикату $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ ставит в соответствие $(n-1)$-местный предикат $\forall x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящий от переменных $x_2, ..., x_n$, который при $x_2 = a_2$, ..., $x_n = a_n$ принимает следующие значения:

$$\forall x_1 P(x_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1, \text{если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) = 1 \text{ для всех } x_1 \in M, \\ 0, \text{если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \text{ для некоторого } x_1 \in M. \end{cases}$$

Определение. Пусть n – натуральное число, $n > 1$ и $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – n-местный предикат, заданный на множестве M. Операцией квантор существования по переменной x_1 называется операция $\exists x_1$, которая n-местному предикату $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ ставит в соответствие $(n-1)$-местный предикат $\exists x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящий от переменных $x_2, ..., x_n$, который при $x_2 = a_2$, ..., $x_n = a_n$ принимает следующие значения:

$$\exists x_1 P(x_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1, \text{если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) = 1 \text{ для некоторого } x_1 \in M, \\ 0, \text{если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \text{ для всех } x_1 \in M. \end{cases}$$

Законы де Моргана для кванторов

Пусть $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – предикат, заданный на множестве M. Тогда

1) $\overline{\forall x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \exists x_1 \overline{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$;

2) $\overline{\exists x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \forall x_1 \overline{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

1. Какие из следующих выражений являются предикатами:

1) x делится на 5 ($x \in N$);

2) река x впадает в озеро Байкал (x пробегает множество названий всевозможных рек);

3) $x^2 + 2x + 4$ ($x \in R$);

4) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ($x, y \in R$);

5) x есть брат y (x, y пробегают множество всех людей);

6) x и y лежат по разные стороны от z (x, y пробегают множество всех точек, а z – всех прямых одной плоскости);

7) x перпендикулярна y (x, y пробегают множество всех прямых одной плоскости);

8) $x^2 + x - 6 = 0$ ($x \in R$);

9) для всех действительных чисел x выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$;

10) для любого натурального числа n число $n(n+1) \vdots 2$.

2. Пусть x, y, a, b – действительные числа. Сформулируйте отрицания следующих высказываний:

1) $\forall x(2x - 4 < x + 5)$;

2) $\forall x(-x < 0)$;

3) $\exists x(x - 5 \geq 2)$;

4) $\exists x \forall y(x > y)$;

5) $\forall x \exists y(x + y = 7)$;

6) $\exists y \forall x(x + y = 7)$;

7) $\exists b \forall a \exists x(x^2 + ax + b = 0)$.

3. Из следующих предикатов с помощью кванторов постройте всевозможные высказывания и определите их значения, считая, что x и y – действительные числа.

1) $x + 1 = 10$;

2) $x^2 + y^2 > 0$;

3) $x + y = 4$;

4) $x^2 + 2x + 5 < 0$.

4. Пусть $P(x, y, z): x + y = z$. Определите истинность высказываний на N и на Z.

1) $\forall x \forall z \exists y P(x, y, z)$;

2) $\forall z \exists x \exists y P(x, y, z)$;

3) $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$.

5. Выяснить местность и тип (тождественно истинный, тождественно ложный или выполнимый) предиката, заданного на множестве *M*; с помощью кванторов из данного предиката получить высказывание (0-местный предикат) и выяснить является оно истинным или ложным.

1) $M = Z$, $\forall x(x + y - z > 2)$;

2) $M = N$, $\exists x(x < y + z)$;

3) $M = R$, $\exists x \forall y(xy = z - x)$;

4) $M = R$, $\forall x \forall y(x^2 + |xyz| > 0)$;

5) $M = N$, $\forall x(1 + x^4 \geq xy)$;

6) $M = R$, $\exists x \forall y(xyz \leq y^2 + z^2)$;

7) $M = Z$, $\exists x(xz + yx = 1)$;

8) $M = R$, $\forall x \forall y(|x + y + z| \leq |x| + |y|)$;

9) $M = R$, $\forall x \exists z(yx + yz < 0)$.

6. Пусть *P*(*x*), *Q*(*x*), *R*(*x*) – предикаты, заданные на множестве *M*, область истинности которых P^+, Q^+ и R^+ соответственно. Изобразите область истинности следующих предикатов с помощью диаграмм Эйлера-Венна

1) $P(x) \wedge Q(x)$;

2) $P(x) \vee Q(x)$;

3) $\overline{P(x)}$;

4) $P(x) \Rightarrow Q(x)$;

5) $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$;

6) $\overline{P(x)} \Rightarrow Q(x)$;

7) $P(x) \Leftrightarrow \overline{Q(x)}$;

8) $\left(P(x) \Leftrightarrow \overline{Q(x)}\right) \vee Q(x)$.

7. Найдите область истинности унарного предиката *P*(*x*), заданного на множестве *M*, если

1) *P*(*x*) : *x* кратно 3, *M* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12};

2) $P(x): x^2 - 4 = 0$, *M* = *R*;

3) $P(x): x^2 < 0$, *M* = *R*;

4) $P(x): x^2 \geq 0$, *M* = *R*;

5) $P(x): \lg x^2 = 2\lg(-x)$, *M* = *R*;

6) $P(x): |x - 3| = 3 - x$, *M* = *R*;

7) $P(x): x < 2 \Rightarrow x = 1$, *M* = *N*;

8) $P(x): x^2 < 100 \Rightarrow x < 10$, *M* = *R*;

9) $P(x): (x^2 - 4 > 0) \vee (x > 1)$;

10) $P(x): (x^2 - 4 > 0) \Leftrightarrow (x > 1)$;

11) $P(x): (|x - 4| > 2) \wedge (x \leq 5)$;

12) $P(x): (|x - 1| \geq 7) \Rightarrow (x > 7)$.

8. Изобразите на координатной плоскости область истинности предиката $P(x,y)$, заданного на множестве R, если

1) $P(x, y): x = y$;
2) $P(x, y): |x| = |y|$;
3) $P(x, y): x^2 < y$;
4) $P(x, y): x + 3y < 6$;
5) $P(x, y): \dfrac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y$;
6) $P(x, y): x \geq 0 \Rightarrow y \leq 0$;
7) $P(x, y): (x^2 + y^2 > 1) \Leftrightarrow (xy < 0)$;
8) $P(x, y): (x > y) \Rightarrow (|x| > |y|)$;
9) $P(x, y): (y \geq x^2 + 4) \Rightarrow (y < 5)$;
10) $P(x, y): (y^2 + x^2 > 9) \Rightarrow (y < 1)$.

9. Предикат $P(x)$ задан на множестве $M = \{2; 3; 5; 8; 10\}$. Найдите значение $P(x)$ для всех $x \in M$. Запишите высказывания, равносильные высказываниям $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$, не содержащие кванторов.

1) $P(x)$: x – простое число;
2) $P(x)$: числа x и 7 – взаимно просты.

10. Постройте n-местные предикаты P и Q на множестве M такие, что выполнено условие α, если

1) $n = 2$, $M = R \times R$, $\alpha: P(x, y)$ – выполнимый предикат на M, $P(x, \sqrt{2}) \Leftrightarrow Q(x, y)$ – тождественно ложный на M;

2) $n = 2$, $M = R \times R$, $\alpha: P(10, y)$ – выполнимый предикат на R, $\overline{P(x, y)} \Leftrightarrow Q(20, y)$ – тождественно истинный на M;

3) $n = 3$, $M = N \times R \times R$, $\alpha: P(x, 1, z)$ – тождественно ложный на $N \times R$, $\overline{P(x, y, z)} \wedge Q(1, y, z)$ – выполнимый на M;

4) $n = 3$, $M = R \times N \times Z$, $\alpha: P(2, 1, z)$ – тождественно ложный на Z, $P(x, y, -1) \Leftrightarrow \overline{Q(\pi, 2, 3)}$ – выполнимый на $R \times N$;

5) $n = 3$, $M = Z \times Z \times R$, $\alpha: P(-1, 2, z)$ – тождественно истинный на R, $P(x, y, \sqrt{3}) \Rightarrow \overline{Q(0, y, z)}$ – выполнимый на $Z \times R$;

6) $n = 3$, $M = N \times N \times N$, $\alpha: P(2, y, 4)$ – выполнимый на N, $\overline{P(x, y, z)} \Leftrightarrow Q(2, 3, z)$ – тождественно истинный на M;

7) $n = 3$, $M = R \times R \times N$, $\alpha: P(x, y, 3)$ – тождественно истинный на $R \times R$, $P(x, y, z) \wedge Q(x, y, 3)$ – выполнимый на M;

8) $n = 3$, $M = N \times R \times Z$, $\alpha: P(x, 0, z)$ – выполнимый на $N \times Z$, $P(x, y, -4) \Rightarrow \overline{Q(x, 3, z)}$ – тождественно ложный на M.

Приложение алгебры высказываний и алгебры предикатов к логико-математической практике

В математике теорему можно сформулировать с помощью слов «если …, то …», т.е. записать в виде импликации: $A \Rightarrow B$. Если доказана теорема $A \Rightarrow B$, то A называется достаточным условием для *B*, *B* – необходимым условием для *A*.

Назовем импликацию $A \Rightarrow B$ прямой, тогда
$B \Rightarrow A$ называется обратной импликацией;
$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – противоположной импликацией;
$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – импликацией обратной противоположной (или импликацией противоположной обратной).

Если истинны прямая $A \Rightarrow B$ и обратная $B \Rightarrow A$ импликации, то истинна их эквиваленция $A \Leftrightarrow B$, которую формулируют с помощью слов «тогда и только тогда … » или «необходимо и достаточно» и называют критерием.

Применение языка алгебры предикатов для записи математических предложений

В математических теориях рассматриваются объекты различной природы: числа, множества, функции и т.п. Они составляют некоторую предметную область. Если некоторый квантор должен относиться только к части этой области, то на переменную, по которой он применяется, накладывают ограничение. Например, записывают $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in N\, (1/n < \varepsilon)$. Ограниченные кванторы не являются новыми логическими операциями; они сводятся к обычным кванторам следующим образом:

$$\forall P(x)(Q(x)) \stackrel{df}{=} \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),$$

$$\exists P(x)(Q(x)) \stackrel{df}{=} \exists x(P(x) \wedge Q(x)).$$

1. Общеутвердительные предложения.

Для всех *P* выполняется *Q*:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),$$

или с ограниченным квантором: $\forall P(x)(Q(x))$.

2. Частноутвердительные предложения.

Для некоторых *P* выполняется *Q*:

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

или с ограниченным квантором: $\exists P(x)(Q(x))$.

3. Общеотрицательные предложения.

Ни для одного *P* не выполняется *Q*: $\forall x(P(x) \Rightarrow \overline{Q(x)})$.

4. Частноотрицательные предложения.

Для некоторых *P* не выполняется *Q*: $\exists x(P(x) \wedge \overline{Q(x)})$

1. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» так, чтобы получились истинные высказывания.

1) Для того чтобы стороны четырехугольника были равны, ... чтобы он был квадратом.

2) Для того чтобы квадрат числа был меньше 100, ... чтобы число было меньше 10.

3) Для того чтобы площадь прямоугольника была равна 4 см^2, ... чтобы длины обеих его сторон были равны 2 см.

4) Для того чтобы разность двух целых чисел была четной, ... чтобы эти числа имели одинаковую четность.

5) Для того чтобы одно из целых чисел было кратно 6, а другое – кратно 4, ... чтобы их произведение было кратно 12.

6) Для того чтобы целое число было кратно 4 и кратно 15, ... чтобы оно было кратно 60.

7) Для того, чтобы произведение двух целых чисел было кратно 11, ... чтобы оба сомножителя были кратны 11.

8) Для того чтобы у параллелограмма диагонали были равны, ... чтобы он был квадратом.

2. а) Сформулируйте достаточное условие делимости на 3, которое не является необходимым.

б) Сформулируйте необходимое условие делимости на 4, которое не является достаточным.

3. Пользуясь законом контрпозиции, докажите следующие теоремы.

1) Пусть $t \in R$. Если значение выражения $\frac{2t}{t^2+1}$ – иррациональное число, то t – иррациональное число.

2) Пусть $x, y \in R$. Если $x^2 + y^2 \neq 0$, то $x \neq 0$ или $y \neq 0$.

3) Пусть $m, n \in N$. Если mn – нечетное число, то m и n нечетны.

4. Запишите следующие теоремы в виде импликаций. Сформулируйте обратную, противоположную и противоположную обратной импликации. Какие из них являются теоремами?

1) Если $a = 0$ и $b = 0$, то $a^2 + b^2 = 0$ (a, b – действительные числа).

2) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$ (a, b – действительные числа).

3) Если сумма двух чисел не делится на 3, то хотя бы одно из них не делится на 3.

4) Если четырехугольник можно вписать в окружность, то суммы его противоположных углов равны.

5. С помощью логических законов докажите, что для любых множеств A, B и C

1) $A \setminus B \subseteq A$;

2) $A \subseteq A \bigcup B$;

3) $A \bigcap (A \bigcup B) = A$;

4) $A \bigcap (B \setminus (A \bigcap C)) = (A \bigcap B) \setminus C$;

5) если $A \bigcap B \subseteq C$, то $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \bigcup C$;

6) если $A \subseteq B \bigcup C$, то $(A \setminus B) \bigcup (A \bigcap C) \subseteq C$;

7) если $A \subseteq B \bigcup C$, то $(A \setminus C) \bigcup (B \setminus C) \subseteq B$;

8) если $A \bigcup B \subseteq C$, то $A \bigcap B \subseteq (B \bigcap C) \bigcup (A \bigcap C)$;

9) если $A \bigcup B \subseteq C$, то $(B \setminus C) \bigcup (A \setminus B) \subseteq A \bigcap C$;

10) если $B \subseteq C \setminus A$, то $(A \setminus B) \bigcup ((B \setminus C) \setminus A) \subseteq A$.

6. Четыре друга Антонов (А), Вехов (В), Сомов (С), Деев (Д) решили провести свой отпуск в четырех различных городах Москве, Ленинграде, Киеве и Ташкенте. В какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения: (i) если А не едет в Москву, то С не едет в Ленинград; (ii) если В не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то А едет в Москву; (iii) если С не едет в Ташкент, то В едет в Киев; (iv) если Д не едет в Москву, то В едет в Москву; (v) если Д не едет в Ленинград, то В не едет в Москву?

7. 1) По определению, подмножество X множества R называется ограниченным сверху, если существует такое действительное число M, что для всех элементов x множества X выполняется неравенство $x \leq M$. Сформулируйте утверждение, что множество $X \subseteq R$ не является ограниченным сверху.

2) Бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$ называется монотонно возрастающей, если $\forall n \in N (a_{n+1} > a_n)$. Сформулируйте утверждение, что последовательность не является монотонно возрастающей.

8. Запишите предложения, используя язык алгебры предикатов.

1) Любое натуральное число делится на 1.

2) Всякое натуральное число, которое делится на 12, делится на 2 и 3.

3) Существует *по крайней мере один* предмет x такой, что $P(x)$.

4) Существует *не более, чем один* предмет x такой, что $P(x)$.

5) ... *более, чем один* ...

6) ... *единственный* ...

7) ... *по крайней мере два* ...

8) ... *не более двух* ...

9) ... *ровно два* ...

9. Проверьте правильность рассуждений (*используя понятие логического следствия*).

1) Если завтра будет холодно (x), то я надену теплую куртку (y), если рукав будет починен (z). Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следует ли отсюда, что я не надену теплую куртку?

2) Если 2 – простое число (x), то 2 – наименьшее простое число (y). Если 2 – наименьшее простое число, то 1 не является простым числом (z). Число 1 не является простым числом. Следует ли отсюда, что 2 – наименьшее простое число? Следует ли отсюда, что 2 – простое число?

3) Он сказал, что придет (x), если будет хорошая погода (y). Но погода плохая. Следует ли отсюда, что он не придет?

10. Запишите на русском языке следующие высказывания:
1) $\forall a \forall b \exists x\big((x = a + b) \wedge (\forall y)\big(\big(y = a + b\big) \Rightarrow (y = x)\big)\big)$,

где x, y, a, b – действительные числа.
2) $\forall M \forall a((M \notin a) \Rightarrow \exists b((M \in b) \wedge (b \parallel a) \wedge \forall c((M \in c) \wedge (c \parallel a) \Rightarrow (c = b))))$,

где M – точка на плоскости, a, b, c – прямые на этой плоскости.

11. Запишите с помощью кванторов высказывание α, составьте высказывание «не α» (*преобразуйте полученное высказывание таким образом, чтобы оно не содержало операцию отрицания*), приведите пример доказательства на основании высказывания «не α».

1) α: бинарное отношение ρ, заданное на множестве A, является *рефлексивным*;

2) α: … является *антирефлексивным*;

3) α: … является *симметричным*;

4) α: … является *антисимметричным*;

5) α: … является *транзитивным*;

6) α: … является *полным*;

7) отображение $f: X \to Y$ является инъективным;

8) отображение $f: X \to Y$ является сюръективным;

9) множество A является подмножеством множества B;

10) множество A является собственным подмножеством множества B.

11) уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень;

12) число c является наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$;

13) функция $f(x)$ с областью определения $D(f)$ является четной;

14) функция $f(x)$ с областью определения R – периодическая;

15) функция $f(x)$ стремится к a при $x \to x_0$;

16) функция $f(x)$ стремится к a при $x \to \infty$.

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Нормальные формы

Определение. Булевой функцией $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется функция, принимающая значения 1, 0 и аргументы которой также принимают значения 1, 0.

Таким образом, булева функция от n переменных – это отображение из $\{0, 1\}^n$ в $\{0, 1\}$.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}.$$

Из определения булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ следует, что для ее задания достаточно указать, какое значение функции соответствует каждому из 2^n наборов значений аргументов, т.е. записать таблицу следующего вида:

x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	…	0	0	f (0,0,…,0,0)
0	0	…	0	1	f (0,0,…,0,1)
0	0	…	1	0	f (0,0,…,1,0)
…	…	…	…	…	…
1	1	…	1	1	f (1,1,…,1,1)

Стандартным принято считать следующее расположение наборов в таблице: если набор рассматривать как запись числа в двоичном исчислении, то наборы записываются в порядке возрастания соответствующих им двоичных чисел 0, 1, 2, … , $2^n - 1$. Имея в виду такое стандартное расположение наборов, булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ удобно задавать вектором ее значений:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^n-1}),$$

где α_i – значение функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ на наборе, которому соответствует номер i. Таким образом, если функция записана в виде $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^n-1})$, то $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^n-1})$ – последний столбец таблицы истинности, в которой наборы значений переменных расположены в стандартном порядке.

Следующие булевы функции называют элементарными:

1) $f_1(x) = 0$ – константа 0;
2) $f_2(x) = 1$ – константа 1;
3) $f_3(x) = x$ – тождественная функция;
4) $f_4(x) = \bar{x}$ – отрицание x;
5) $f_5(x, y) = xy$ – конъюнкция x и y;
6) $f_6(x, y) = x \vee y$ – дизъюнкция x и y;
7) $f_7(x, y) = x \Rightarrow y$ – импликация x и y;
8) $f_8(x, y) = x \Leftrightarrow y$ – эквиваленция x и y;

9) $f_9(x,y)=x+y$ – сложение по модулю 2 (исключающее или), обозначается также $x\oplus y$;

10) $f_{10}(x,y)=x\,|\,y$ – штрих Шеффера (не и);

11) $f_{11}(x,y)=x\downarrow y$ – стрелка Пирса (не или).

Последние три функции задаются следующими таблицами истинности:

x	y	$x+y$	$x\,\|\,y$	$x\downarrow y$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
		$\overline{x\Leftrightarrow y}$	$\overline{x\wedge y}$	$\overline{x\vee y}$

Пусть G – параметр, равный 0 или 1. Введем обозначение:

$$x^G=\begin{cases} x, если\, G=1 \\ \bar{x}, если\, G=0 \end{cases}$$

Формулу вида $x_{i_1}^{G_1}x_{i_2}^{G_2}\ldots x_{i_k}^{G_k}$, где $G_i\in\{0,\ 1\}$, $i=1,2,\ldots,k$, будем называть элементарной конъюнкцией.

Определение. Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

ДНФ – это формула вида

$$Д=K_1\vee K_2\vee\ldots\vee K_t,$$

где K_i – элементарные конъюнкции $i=1,2,\ldots,t$.

Алгоритм построения СДНФ (совершенной ДНФ) по таблице истинности.

1) в таблице истинности отмечаем все наборы $(G_1,G_2,\ldots,G_n)$ такие, что $f(G_1,G_2,\ldots,G_n)=1$,

2) для каждого выбранного набора строим конъюнкцию

$$x_1^{G_1}x_2^{G_2}\ldots x_n^{G_n},$$

3) из полученных в п.2 конъюнкций составляем дизъюнкцию.

Формулу вида $x_{i_1}^{G_1}\vee x_{i_2}^{G_2}\vee\ldots\vee x_{i_k}^{G_k}$, где $G_i\in\{0,\ 1\}$, $i=1,2,\ldots,k$, будем называть элементарной дизъюнкцией.

Определение. Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

КНФ – это формула вида

$$K=D_1D_2\ldots D_t,$$

где D_i – элементарные дизъюнкции $i=1,2,\ldots,t$.

Алгоритм построения СКНФ (совершенной КНФ) по таблице истинности.

1) в таблице истинности отмечаем все наборы $(G_1, G_2, ..., G_n)$ такие, что $f(G_1, G_2, ..., G_n) = 0$,

2) для каждого выбранного набора строим дизъюнкцию

$$x_1^{\overline{G_1}} \vee x_2^{\overline{G_2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{G_n}},$$

3) из полученных в п.2 дизъюнкций составляем конъюнкцию.

Теорема. Формула алгебры высказываний тогда и только тогда является тождественно ложной, когда каждая конъюнкция в ее дизъюнктивной нормальной форме содержит некоторую переменную вместе с ее отрицанием.

Теорема. Формула алгебры высказываний тогда и только тогда является тождественно истинной, когда каждая дизъюнкция в ее конъюнктивной нормальной форме содержит некоторую переменную вместе с ее отрицанием.

Алгебра Жегалкина

Множество булевых функций, рассматриваемое вместе с операциями конъюнкции и сложения по модулю два, будем называть алгеброй Жегалкина.

В алгебре Жегалкина роль совершенных нормальных форм булевой алгебры играют полиномы Жегалкина.

Определение. Полиномом Жегалкина называется выражение вида $\Sigma x_{i_1} x_{i_2} .. x_{i_k} + a$ причем в каждом наборе $(i_1, i_2, ..., i_k)$ все компоненты различны, а суммирование ведется по некоторому множеству таких не совпадающих наборов, *a* – константа 0 или 1.

Методы построения полинома Жегалкина

1. Метод неопределенных коэффициентов (*табличный метод*).

Для булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ используют общий вид полинома Жегалкина, в котором все возможные слагаемые записаны с неопределенным коэффициентом. Например, для функции от 2-х переменных

$$f(x, y) = a_1 xy + a_2 x + a_3 y + a_4$$

для функции от 3-х переменных

$$f(x, y, z) = a_1 xyz + a_2 xy + a_3 xz + a_4 yz + a_5 x + a_6 y + a_7 z + a_8.$$

Подставляя поочередно все наборы из таблицы истинности и приравнивая соответствующему значению функции, находят все неопределенные коэффициенты.

2. Метод равносильных преобразований. Посредством равносильных преобразований приводят исходную формулу к формуле, соответствующей определению полинома Жегалкина.

1. Постройте СДНФ и СКНФ (*примеры* 1 *и* 2 *– по таблице истинности, остальные – по таблице истинности и равносильными преобразованиями*)

1) $f(x,y,z)=(01101100)$;

2) $f(x,y,z)=(00011101)$;

3) $(x\vee y)z$;

4) $(\bar{x}\vee y)(x\vee z)$;

5) $\bar{x}y\vee xz$;

6) $x\bar{y}\vee z$;

7) $(\bar{x}\Rightarrow\bar{y})\Rightarrow(yz\Rightarrow xz)$;

8) $((x\Rightarrow y)\Rightarrow\bar{x})\Rightarrow(x\Rightarrow yx)$;

9) $(x\Rightarrow y)\Rightarrow(\overline{z\vee x}\Rightarrow y)$;

10) $(x+y)\Rightarrow yz$;

11) $(x+y+z)\Leftrightarrow(x\downarrow y)$;

12) $((xy+z)\Rightarrow x\,|\,y)\Rightarrow z$.

2. Применяя ДНФ или КНФ, проверить:

1) $xy\bar{z}\vee\bar{x}y\equiv 0$;

2) $(x\vee\bar{y})(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\equiv 1$;

3) $x\Rightarrow(y\Rightarrow x)\equiv 1$;

4) $x\bar{y}(\bar{x}\vee y)\equiv 0$;

5) $x\Rightarrow y\equiv y\Rightarrow x$;

6) $\overline{\bar{x}\Rightarrow y}\vee xz\equiv\bar{x}\,\bar{y}\vee x\bar{y}\vee yz$.

3. Найти полином Жегалкина для формул из задания 1.

4. Постройте булеву функцию от трех переменных, которая принимает то же значение, что и большинство аргументов.

5. Найдите формулу $F(x,y)\not\equiv 1$ такую, что

1) $(x\Rightarrow F)\wedge(\bar{x}\wedge y\Rightarrow F)\equiv 1$;

2) $(F\wedge y\Rightarrow\bar{x})\Rightarrow((x\Rightarrow\bar{y})\Rightarrow F)\equiv 1$.

Обозначим $E^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Тогда E^n – множество всех вершин единичного *n*-мерного куба.

Сопоставим каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подмножество N_f из E^n, определенное следующим образом:

$$N_f = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1\}.$$

Определение. Пусть $N_{K_1}, N_{K_2}, \ldots, N_{K_m}$ – все максимальные интервалы подмножества N_f, тогда ДНФ

$$K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m,$$

булевой функции *f*, соответствующая покрытию подмножества N_f всеми максимальными интервалами

$$N_f = N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \ldots \cup N_{K_m},$$

называется **сокращенной ДНФ (СкДНФ)** функции *f*.

Методы построения СкДНФ

1. Геометрический метод основан на выделении максимальных интервалов по *n*-мерному кубу.

2. Метод Блейка.

Теорема. Если в произвольной ДНФ булевой функции *f* произвести все возможные обобщенные склеивания и устранить затем все элементарные поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ функции *f*.

3. Метод Нельсона.

Теорема. Если в произвольной КНФ булевой функции раскрыть все скобки в соответствии с дистрибутивным законом и устранить все элементарные поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ этой функции.

4. Метод минимизирующих карт основан на составлении таблиц и выделении максимальных интервалов по таким таблицам. Минимизирующие карты для булевых функций от трех и от четырех переменных изображены в следующих таблицах:

xy \ z	0	1
00		
01		
11		
10		

z / t / xy	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

Объединяя соседние клетки, соответствующие единичным значениям булевой функции f в максимальные интервалы, и сопоставляя им элементарные конъюнкции, получим сокращенную ДНФ. Отметим, что клетки, расположенные по краям таблицы, также считаются соседними.

Определение. Дизъюнктивная нормальная форма называется минимальной, если она содержит наименьшее число вхождений переменных по сравнению со всеми другими равносильными ей ДНФ.

Теорема. Всякая минимальная ДНФ является тупиковой.

Схема решения задачи минимизации булевых функций.

1. Выделяются все максимальные интервалы и строится сокращенная ДНФ.

2. Строятся все тупиковые ДНФ.

3. Среди всех тупиковых ДНФ выделяются все минимальные по количеству вхождений переменных.

Алгоритм построения всех тупиковых ДНФ. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – булева функция и $N_f = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_k\}$.

1) для булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ строим СкДНФ;

2) для каждого набора $\tilde{a}_i \in N_f$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ выделяем в сокращенной ДНФ функции f все такие элементарные конъюнкции

$$K_{i1}, K_{i2}, \ldots, K_{it_i},$$

что $K_{ij}(\tilde{a}_i) = 1$, для всех $j = 1,2,\ldots,t_i$;

3) из выбранных в п. 2 конъюнкций составляем выражение следующего вида:

$$(K_{11} \vee K_{12} \vee \ldots \vee K_{1t_1})(K_{21} \vee K_{22} \vee \ldots \vee K_{2t_2})\ldots(K_{k1} \vee K_{k2} \vee \ldots \vee K_{kt_k})$$

4) применяем к выражению, составленному в п.3 законы дистрибутивности и поглощения, получаем $\vee K_{l1}K_{l2}\ldots K_{lm}$.

5) каждая ДНФ $K_{l1} \vee K_{l2} \vee \ldots \vee K_{lm}$ является тупиковой ДНФ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. Найти сокращенную ДНФ (СкДНФ) геометрическим методом

1) $f(x,y,z)=(01101010)$;

2) $f(x,y,z)=(01110110)$;

3) $f(x,y,z)=(11110001)$;

4) $f(x,y,z)=(10100110)$.

2. Найти СкДНФ методом Блейка

1) $\bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y}t \vee y\bar{z}t$;

2) $xy\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}y$;

3) $xy \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt$;

4) $xyz \vee x\bar{v} \vee xyz \vee xt \vee x\bar{y}z \vee x\bar{z}$.

3. Найти СкДНФ методом Нельсона

1) $(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})$;

2) $(x \vee \bar{y} \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{t})(x \vee y \vee z)$;

3) $(x \vee t)(y \vee \bar{z} \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

4) $(x \vee y \vee \bar{t})(x \vee z)(x \vee \bar{y})(x \vee t)$.

4. Найти СкДНФ методом минимизирующих карт

1) $f(x,y,z,t)$ = (0011101110001101);

2) $f(x,y,z,t)$ = (1001011100111001);

3) $f(x,y,z,t)$ = (0011101100110011);

4) $f(x,y,z,t)$ = (1101011000011110).

5. Найти СкДНФ, используя три метода

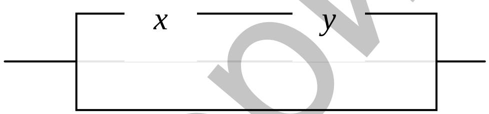
$$f(x,y,z)=((x \vee z) \Rightarrow \bar{y}) \vee y\bar{z}.$$

6. Найти min ДНФ для функций из предыдущих заданий.

Применение булевых функций к анализу и синтезу дискретных устройств

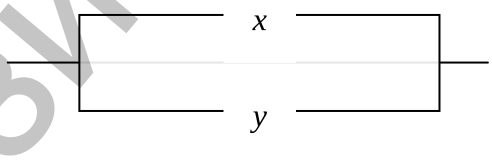
Вначале прошлого века известный физик П. Эренфест впервые указал на возможность применения аппарата булевых функций в технике. Эта идея нашла свое воплощение в работах советского физика В.И. Шестакова, американского математика К. Шеннона и японского инженера А. Какасима. Первыми объектами применения были контактные схемы. Под контактными схемами мы будем понимать электрические цепи, содержащие только контакты. Каждый контакт может находиться в двух состояниях – разомкнут (0) и замкнут (1). Такие цепи мы будем изображать диаграммой, на которой возле контактов пишется x_i или $\overline{x_i}$. Причем значение 1 этих переменных соответствует прохождению через данный контакт, а значения 0 нет.

Если контакты x и у соединены последовательно, то цепь замкнута, когда оба контакта замкнуты и разомкнута, когда хотя бы один из контактов разомкнут. Ясно, что такой схеме



соответствует булева функция xy.

Если контакты x и у соединены параллельно, то цепь замкнута, когда хотя бы один контакт замкнут и разомкнута, когда оба контакта разомкнуты. Ясно, что такой схеме



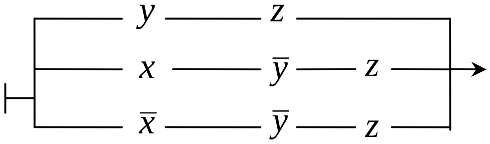
соответствует булева функция $x \vee y$.

Указанное соответствие позволяет любую булеву функцию представить в виде контактной схемы. С другой стороны, любая контактная схема с последовательно или параллельно соединенными контактами реализуется булевой функцией. Задача анализа контактной схемы и состоит в построении соответствующей ей булевой функции.

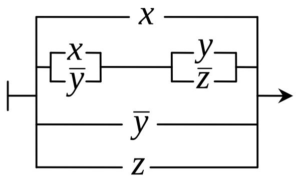
Задача синтеза контактной схемы состоит в построении контактной схемы по заданной булевой функции. Центральной проблемой синтеза контактных схем является построение для данной булевой функции более простой схемы. Часто эта проблема сводится к минимизации булевых функций, т.е. к такому их представлению, в котором соответствующие формулы содержат минимальное количество вхождений переменных.

1. Упростить схемы

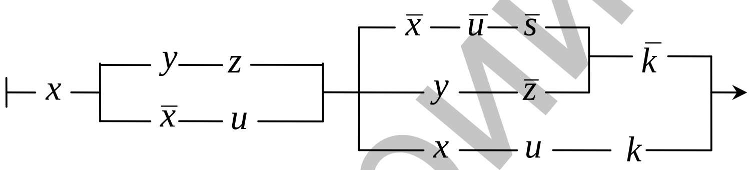
1)



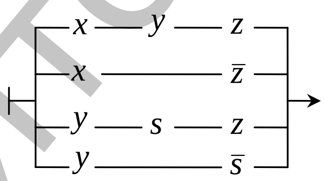
2)



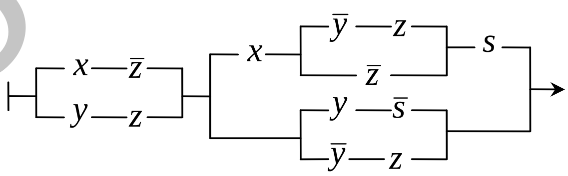
3)



4)



5)



2. 1) Нужно, чтобы включение света в комнате осуществлялось с помощью трех различных переключателей так, чтобы нажатие на любой из них приводило к включению света, если он перед этим был включен, и к его выключению, если он включен. Постройте простую цепь, удовлетворяющую этому условию.

2) Пусть каждый из пяти членов комитета голосует «за», нажимая кнопку. Постройте простейшую цепь, через которую ток проходил бы тогда и только тогда, когда большинство членов комитета голосует «за».

РАЗБИЕНИЯ ЧИСЕЛ И РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения

Если каждому числу $n \in N \cup \{0\}$ поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорят, что задана последовательность $\{a_n\}$. При этом числа a_n называются элементами последовательности $\{a_n\}$.

Если все числа a_n – натуральные, целые, рациональные, действительные или комплексные, то говорят о соответствующих последовательностях натуральных, целых, рациональных, действительных или комплексных чисел.

Линейным рекуррентным уравнением порядка k называется соотношение вида

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = f(n) \qquad (1)$$

где p_i – некоторые числа, называемые коэффициентами рекуррентного соотношения, $f(n)$ – некоторая функция, натурального аргумента. При $f = 0$ уравнение называется линейным однородным рекуррентным уравнением (ЛОРУ), в противном случае – линейным неоднородным рекуррентным уравнением (ЛНРУ).

Если последовательность задается линейным уравнением порядка k, то она однозначно определяется своими первыми k элементами. Эти первые k элементов называются начальными значениями последовательности или начальными условиями.

Решить рекуррентное уравнение – значит найти все такие последовательности, при подстановке которых в уравнение (1) получается верное равенство (тождество). При этом множество всех таких последовательностей называется общим решением рекуррентного уравнения, а каждая из последовательностей этого множества – частным решением рекуррентного уравнения.

Многочлен

$$\varphi(x) = x^k + p_{k-1}x^{k-1} + p_{k-2}x^{k-2} + \ldots + p_1 x + p_0,$$

называется характеристическим многочленом рекуррентного уравнения (1).

Теорема 1. Пусть λ_1, λ_2, …, λ_k – различные корни характеристического многочлена $\varphi(x)$ ЛОРУ

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0.$$

Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$\{C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n\}$$

где C_1, C_2, … , C_k – произвольные (комплексные) числа.

Теорема 2. Пусть λ_1, λ_2, …, λ_s – все различные корни характеристического многочлена $\varphi(x)$ ЛОРУ

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0,$$

причем кратность корня λ_j равна r_j и $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = k$. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$\left\{ \sum_{j=1}^{s} (C_{j,0} + C_{j,1}n + \ldots + C_{j,r_j-1}n^{r_j-1})\lambda_j^n \right\}$$

где $C_{j,0}, C_{j,1}, .., C_{j,r_j-1}$ – произвольные (комплексные) числа, $j = 1, \ldots, s$.

Если в ЛНРУ

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = f(n) \tag{2}$$

правую часть заменить на 0, то мы получим ЛОРУ

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0. \tag{3}$$

ЛОРУ (3) называется соответствующим ЛНРУ (2).

Теорема 3. Общим решением ЛНРУ является сумма какого-то его частного решения и общего решения соответствующего ему ЛОРУ.

В общем случае, нельзя предложить универсальный метод нахождения частного решения ЛНРУ. Рассмотрим метод нахождения частного решения ЛНРУ (2) в случае, когда

$$f(n) = \left(d_0 + d_1 n + \ldots + d_m n^m\right) \cdot \lambda^n,$$

где d_0, d_1, …, d_m, λ – некоторые числа.

Теорема 4. Для ЛНРУ

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = \left(d_0 + d_1 n + \ldots + d_m n^m\right) \cdot \lambda^n$$

существует частное решение вида

1) $\left\{\left(c_0 + c_1 n + \ldots + c_m n^m\right) \cdot \lambda^n\right\}$, где c_0, c_1, …, c_m – некоторые числа, если λ не является корнем характеристического многочлена соответствующего ЛОРУ.

2) $\left\{n^r \left(c_0 + c_1 n + \ldots + c_m n^m\right) \cdot \lambda^n\right\}$, где c_0, c_1, …, c_m – некоторые числа, если λ – корень кратности r характеристического многочлена соответствующего ЛОРУ.

1. Решить рекуррентные уравнения

1) $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 15a_n = 0,$

2) $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0,$

3) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0,$ $\quad a_1 = 8,$ $\quad a_2 = 28,$

4) $a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0,$ $\quad a_1 = 1,$ $\quad a_2 = 2,$ $\quad a_3 = 3,$

5) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0,$ $\quad a_1 = 1,$ $\quad a_2 = 2,$

6) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 3 \cdot 2^{n-1},$

7) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2n - 9,$ $\quad a_1 = 9,$ $\quad a_2 = 31,$

8) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n,$ $\quad a_1 = 1,$ $\quad a_2 = 2,$

9) $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n + 2^{-n},$ $\quad a_1 = 1,$ $\quad a_2 = \frac{3}{2}.$

2. Вычислить определители

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$$

3. Сколько кусков пиццы можно получить, делая n прямолинейных разрезов ножом?

Задача разбиения

Пусть n – натуральное число. Будем рассматривать следующие задачи.

Задача 1. Найти $T(n,k)$ – число способов представления числа n в виде суммы k неотрицательных целых слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются различными.

Задача 2. Найти $T^*(n,k)$ – число способов представления числа n в виде суммы k натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются различными.

Задача 3. Найти $W(n,k)$ – число способов представления числа n в виде суммы k неотрицательных целых слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются одинаковыми.

Задача 4. Найти $W^*(n,k)$ – число способов представления числа n в виде суммы k натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются одинаковыми.

Задача 5. Найти $r(n)$ – число способов представления числа n в виде суммы натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются различными.

Задача 6. Найти $s(n)$ – число способов представления числа n в виде суммы не менее двух натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются одинаковыми.

Задача 7. Найти $p(n)$ – число способов представления числа n в виде суммы не менее двух различных натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются одинаковыми.

При решении задач 3 и 4 составляют таблицу значений $W^*(i,j)$ и $W(i,j)$ для $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le n$, пользуясь следующими свойствами:

1) $W(n,1) = W^*(n,1) = W^*(n, n) = 1$;

2) $W^*(n,k) = 0$, если $n < k$;

3) $W^*(n,k) = W(n-k,k)$,

4) $W(n,k) = \sum_{i=1}^{k} W^*(n,i)$.

Для решения задачи 7 можно воспользоваться следующим рекуррентным соотношением, которое было открыто Леонардом Эйлером.

Теорема (Эйлера). Для любого натурального числа n справедливо равенство

$$p(n) = \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q+1} \left(p\left(n - \frac{3q^2 - q}{2} \right) + p\left(n - \frac{3q^2 + q}{2} \right) \right)$$

где $p(0) = 1$, $p(n) = 0$ при $n < 0$.

1. Непосредственным перебором найти
1) $T(5,1)$, $T(5,2)$, $T(5,3)$, $T(5,4)$, $T(5,5)$;
2) $T^*(5,1)$, $T^*(5,2)$, $T^*(5,3)$, $T^*(5,4)$, $T^*(5,5)$;
3) $r(5)$.

2. Непосредственным перебором найти
1) $T(7,1)$, $T(7,2)$, $T(7,3)$, $T(7,4)$, $T(7,5)$, $T(7,6)$, $T(7,7)$;
2) $T^*(7,1)$, $T^*(7,2)$, $T^*(7,3)$, $T^*(7,4)$, $T^*(7,5)$, $T^*(7,6)$, $T^*(7,7)$;
3) $r(5)$.

3. Найти $T(n,k)$, $T^*(n,k)$, $r(n)$.

4. Найти $W(7,5)$, $W^*(7,5)$, $s(7)$.

5. Найти $W(13,4)$, $W^*(13,4)$, $s(13)$.

6. Найти $p(7)$, $p(8)$.

7. Найти количество слагаемых в выражение P^n после возведения в степень и приведения подобных слагаемых, если
1) $P = x + y + z$, $n = 4$;
2) $P = x + y + z$, $n = 7$;
3) $P = x + y + z + t$, $n = 6$;
4) $P = x + y + z + t + u$, $n = 11$.

ГРАФЫ

Основные понятия. Матрицы смежности и инцидентности

Графом называется пара $G = (V, E)$, где V – произвольное конечное множество элементов, E – произвольное семейство пар из V. Множество $V = V(G)$ при этом называется множеством ***вершин*** графа G, а его элементы – вершинами; множество $E = E(G)$ называется множеством ***ребер*** графа G, а его элементы – ребрами.

Графы удобно изображать в виде рисунков, на которых вершинам соответствуют отмеченные точки (или кружочки), а ребрам – непрерывные линии, соединяющие соответствующие вершины.

Если $e = \{u, v\}$ – ребро графа G (пишут также $e = uv$), то вершины u и v называются концами ребра e.

Вершины u и v графа G называются ***смежными,*** если $\{u, v\} \in E(G)$, т.е. если они соединены ребром. Два ребра, в свою очередь, называются ***смежными,*** если они имеют общий конец. Если вершина v является концом ребра e, то v и e называются ***инцидентными.***

Мощность $|V(G)|$ множества вершин $V(G)$ называется ***порядком графа G*** и обозначается $|G|$. Если $|V(G)| = n$ и $|E(G)| = m$, то граф G называется ***(n,m)-графом.***

Существуют задачи, когда необходимо допускать существование нескольких ребер между одной и той же парой вершин. Такие ребра называются ***кратными.*** Граф с кратными ребрами называется ***мультиграфом***. Графы, соответствующие исходному определению (в тех случаях, когда нужно подчеркнуть, что в них отсутствуют кратные ребра), называются ***простыми графами***. Кроме того, приходится рассматривать ребра вида $e = vv$, соединяющие вершину v саму с собой. Такие ребра называются ***петлями.*** Мультиграф с петлями называется ***псевдографом***.

Пара (V, E), где V – непустое множество, а $E \subseteq V^2$, называется ***ориентированным графом*** (или кратко: ***орграфом).*** Ребра такого графа представляют собой ориентированные (т.е. упорядоченные) пары вида (u, v). При этом, вершина u называется ***началом ребра,*** а вершина v – ***концом.*** Ориентированные ребра называются ***дугами*** и изображаются в виде линий со стрелками, указывающими направление от начала ребра к концу.

Если не оговорено противное, то везде далее "граф" будет означать "простой граф".

Определение. Два графа G и H называются ***изоморфными,*** если существует биекция $f: V(G) \to V(H)$, сохраняющая смежность, т.е. такое биективное отображение, при котором образы вершин v и u графа G смежны в H тогда и только тогда, когда u и v смежны в графе G. Отображение f, обладающее указанным свойством, называется ***изоморфизмом***.

Если графы G и H изоморфны, то пишут $G \cong H$.

Степенью вершины v графа G называется число инцидентных ей рёбер, т.е. число рёбер, выходящих из данной вершины. В случае псевдографов каждая петля учитывается дважды при подсчете степени вершины. Обозначается степень вершины v графа G: $\deg_G(v)$ или просто $\deg(v)$, если ясно, о каком графе G идет речь.

Пусть G – граф порядка n, $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$. ***Матрицей смежности*** графа G называется $n \times n$-матрица $M(G) = (m_{ij})$ такая, что

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если } v_i \textit{ и } v_j \textit{ смежны} \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

Для мульти- и псевдографов матрица смежности определяется следующим образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} \textit{число ребер, соединяющих вершины } v_i \textit{ и } v_j, \textit{ если } i \neq j \\ 2 \cdot (\textit{число петель, инцидентных вершине } i), \textit{ если } i = j. \end{cases}$$

Для ориентированного графа G:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если } (v_i, v_j) \textit{ является дугой } (v_i - \textit{начало}, v_j - \textit{конец}); \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть G – (n, m)-граф,

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\},$$
$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_m\}.$$

Матрицей инцидентности графа G называется $n \times m$-матрица $I(G) = (I_{ij})$ такая, что

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если вершина } v_i \textit{ инцидентна ребру } e_j; \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

Для ориентированного графа:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если вершина } v_i - \textit{конец дуги } e_j, \\ -1, \textit{ если вершина } v_i - \textit{начало дуги } e_j, \\ 0, \textit{ если вершина } v_i \textit{ и дуга } e_j \textit{ не инцидентны} \end{cases}$$

1. Построить рисунок графа $G = (V,E)$, записать матрицы инцидентности и смежности графа G, вычислить степени всех вершин, если $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ и

1) $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$;

2) $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}\}$.

2. Построить рисунок орграфа $G = (V,E)$, записать матрицы инцидентности и смежности графа G, если $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

1) $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_4, v_2), (v_3, v_4)\}$;

2) $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_5, v_1)\}$.

3. Построить рисунок графа с матрицей смежности

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Построить рисунок графа с матрицей инцидентности

1) $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Построить рисунок графа со степенной последовательностью d, если такой граф существует.

1) d = (2, 2, 2, 2, 2);

2) d = (5, 2, 2, 3, 2, 2);

3) d = (5, 2, 3, 3, 2);

4) d = (4, 4, 4, 4, 4);

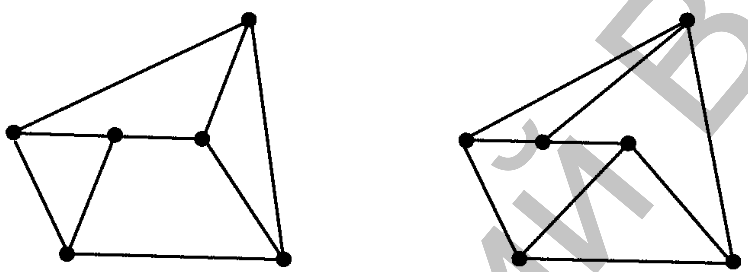
5) d = (3, 1, 1, 1, 0);

6) d = (1, 0, 2, 3, 4).

6. В группе 20 студентов. Может ли так быть, что 7 из них имеют по 3 друга, 8 – по 2 друга и 5 – по одному?

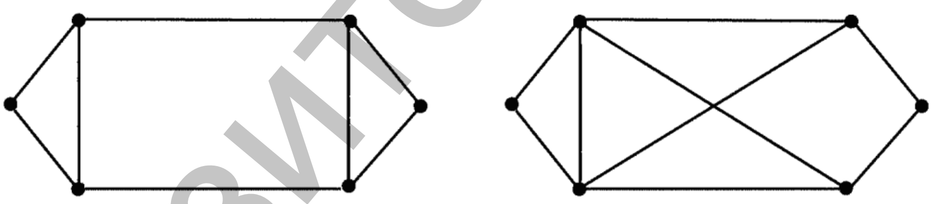
7. Спортивное соревнование проводится по круговой системе, т.е. каждый игрок играет с каждым и ровно один раз. Всегда ли найдутся два игрока, проведшие одинаковое число встреч?

8. Среди пар графов, изображенных на рис. 1–6, указать пары изоморфных и пары неизоморфных графов.



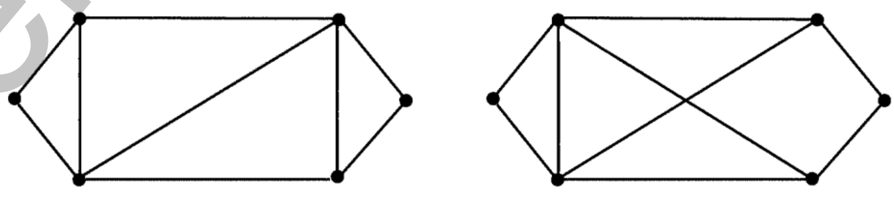
а *б*

Рис. 1



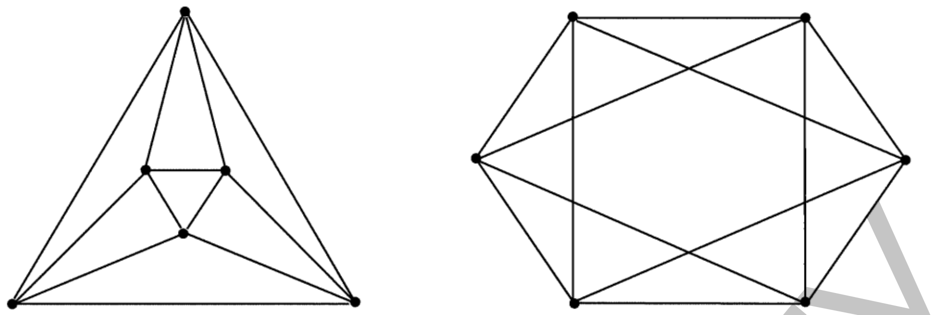
а *б*

Рис. 2



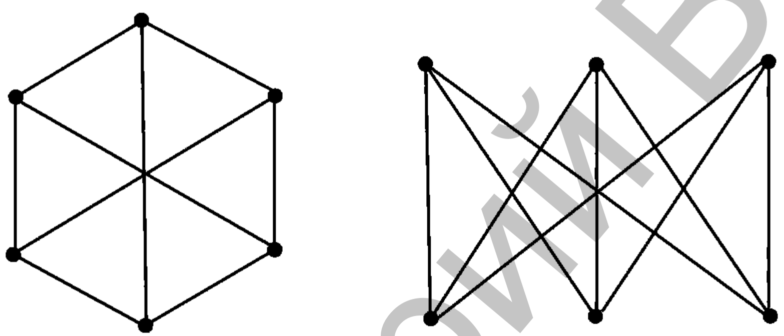
а *б*

Рис. 3



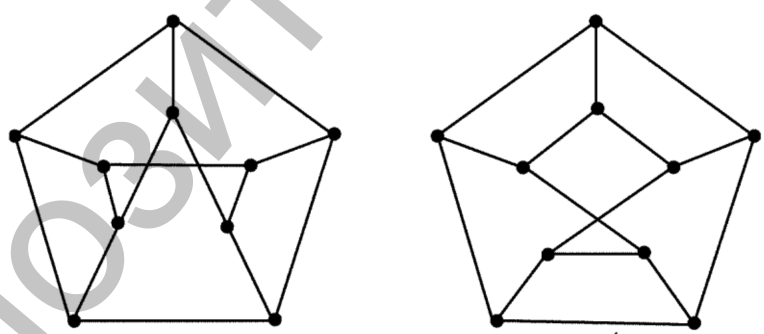
а *б*

Рис. 4



а *б*

Рис. 5



а *б*

Рис. 6

9. Изобразить все попарно неизоморфные 4-вершинные графы без петель и кратных ребер.

10. Сколько существует попарно неизоморфных 6-вершинных графов без петель и кратных ребер со следующей степенной последовательностью (2, 2, 3, 3, 3, 5)?

Связность. Расстояния на графах

Пусть G – мульти- или псевдограф. Последовательность вершин и рёбер вида

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_n, v_{n+1})$$

такая, что $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ – ребро в графе G, соединяющее v_i, с v_{i+1} называется (v_1, v_{n+1})-***маршрутом***. Вершина v_1 при этом называется началом маршрута, а v_{n+1} – концом маршрута. Число рёбер n в маршруте называется ***длиной маршрута.***

В простом графе, когда смежные вершины соединены только одним ребром, для задания маршрута достаточно указать только последовательность вершин (разумеется, любые две соседние вершины в этой последовательности должны быть смежными). В этом случае (v_1, v_{n+1})-маршрут обозначается: $(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$.

Граф G называется ***связным,*** если в нем для любых двух вершин u и v существует (u, v)-маршрут.

Пусть G – связный граф и u, v – его вершины. Длина кратчайшего (u, v)-маршрута (понятно, что он является простой цепью) называется расстоянием между u и v и обозначается $d(u, v)$. По определению полагают, что $d(u,u) = 0$ для всякой вершины u.

Удалённостью (или, по-другому, ***эксцентриситетом)*** вершины v графа G называется наибольшее из расстояний от данной вершины до других вершин графа G:

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(v,u).$$

Радиусом графа G называется наименьшая из удалённостей его вершин:

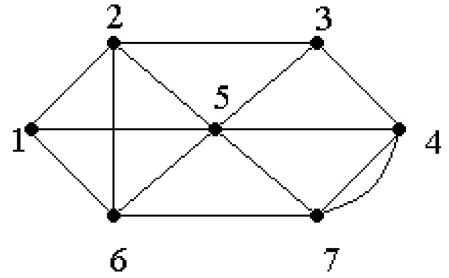
$$R(G) = \min_{v \in V(G)} e(v) = \min_{v \in V(G)} \max_{u \in V(G)} d(v,u).$$

Диаметром графа G называется наибольшая из удалённостей его вершин:

$$D(G) = \max_{v \in V(G)} e(v) = \max_{v \in V(G)} \max_{u \in V(G)} d(v,u)$$

Вершина v графа G, удалённость которой минимальная (и значит, равна радиусу), называется ***центром*** графа G. Вершина, удалённость которой максимальная в графе (и значит, равна диаметру), называется ***периферийным центром.***

1. Приведите примеры маршрутов, цепей, простых цепей, циклов, простых циклов.



2. Укажите в графе K_5 маршруты длиной 4, 5, 6, 10. Какие из них являются простыми?

3. Постройте связный (n, m)-граф, если:

1) $n = 6, m = 7$;
2) $n = 5, m = 4$.

4. Постройте граф с n вершинами m ребрами и k компонентами связности, если:

1) $n = 6, m = 6, k = 2$;
2) $n = 10, m = 8, k = 3$;
3) $n = 8, m = 15, k = 3$;
4) $n = 8, m = 5, k = 3$.

5. Приведите пример графа, у которого значения диаметра и радиуса совпадают.

6. Постройте граф, центром которого является

1) ровно одна вершина;
2) ровно три вершины, граф содержит более трех вершин;
3) все вершины графа.

7. Граф G задан матрицей смежности.

1) Построить рисунок графа G.
2) Записать степенную последовательность графа G.
3) Осуществить поиск в ширину из первой вершины.
4) Определить, является ли данный граф связным.
5) Найти удаленности всех вершин.
6) Найти расстояния $d(v_3, v_5)$, $d(v_3, v_8)$, $d(v_9, v_2)$.
7) Найти радиус и диаметр графа G; указать центры и периферийные центры.
8) Является ли граф G двудольным?

1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13) $$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

14) $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

15) $$\begin{bmatrix} 0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&1&1&0 \end{bmatrix}$$

16) $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&1&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

17) $$\begin{bmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

18) $$\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Гамильтонова цепь (*цикл*) – простая цепь (цикл), проходящая через все вершины графа.

Эйлерова цепь (*цикл*) – цепь (цикл), содержащая все ребра графа по одному разу.

***Утверждение* 1.** Для того чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными.

***Утверждение* 2.** Для того чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно 2 вершины нечетной степени.

Алгоритм выделения эйлерова цикла в связном мультиграфе с четными степенями вершин

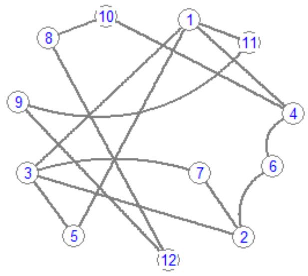
1) Выделим из G цикл μ_1. (так как степени вершин четны, то висячие вершины отсутствуют). Положим $l = 1$, $G' = G$.

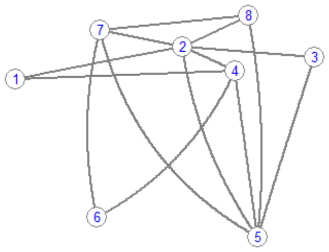
2) Удаляем из G' ребра, принадлежащие выделенному циклу μ_1. Полученный псевдограф снова обозначаем как G'. Если в G' отсутствуют ребра, то переходим к шагу 4. Если ребра есть, то выделяем из G' цикл μ_{l+1} и переходим к шагу 3.

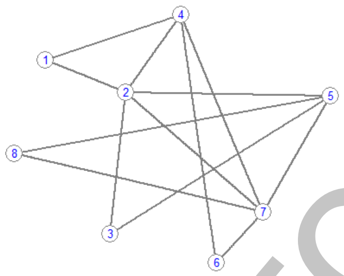
3) Присваиваем $l := l + 1$ и переходим к шагу 2.

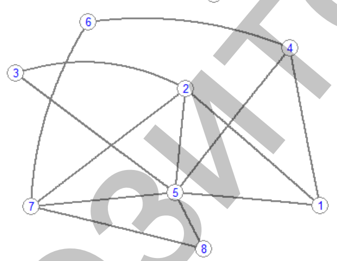
4) По построению выделенные циклы содержат все ребра по одному разу. Если $l = 1$, то искомый эйлеров цикл найден (конец работы алгоритма). В противном случае находим циклы, содержащие хотя бы по одной общей вершине (в силу связности графа это всегда можно сделать). Склеиваем эти циклы. Повторяем эти операции, пока не останется один цикл, который является искомым.

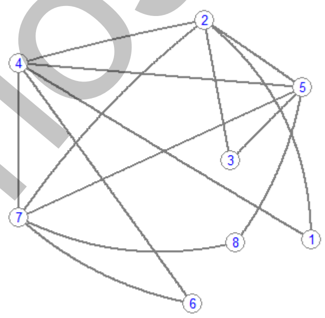
1. В графах, представленных на рисунках, найдите эйлеров цикл или эйлерову цепь, если они существуют.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

2. Являются ли гамильтоновыми графами графы K_n, $K_{m,n}$, C_n?

3. Приведите примеры:

1) гамильтонова, но не эйлерова графа

2) эйлерова, но не гамильтонова графа;

3) эйлерова и гамильтонова графа.

Деревья. Планарные графы

Определение. *Деревом* называется связный граф без циклов.

Для представления деревьев можно использовать те же приёмы, что и для представления графов общего вида – матрицы смежности и инцидентности. Но используя особенные свойства деревьев, можно предложить более эффективный способ – так называемый код Прюфера.

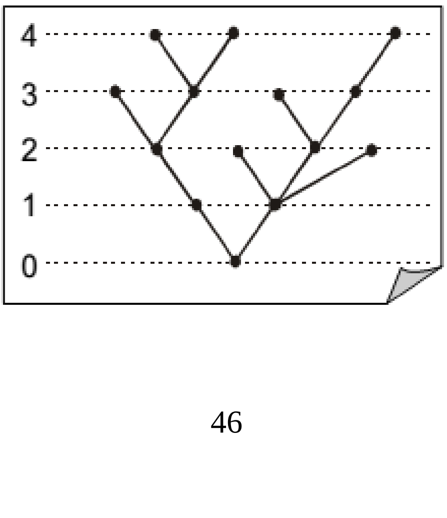
Пусть $T = (V,E)$ – дерево, вершины которого занумерованы числами $1,\ldots,n$. Пусть a_1 – вершина степени 1 с наименьшим номером, b_1 – смежная с ней вершина. Удалив из T вершину a_1 и ребро $e_1 = a_1b_1$, получим граф T_1, к которому также применим описанную процедуру. Повторяем ее до тех пор, пока после удаления вершины a_{n-2} и ребра $e_{n-2} = a_{n-2}b_{n-2}$ не получим дерево T_{n-2}, состоящее из одного ребра $e_{n-1} = a_{n-1}b_{n-1}$. Дереву Т ставим в соответствие упорядоченный набор чисел $p(T) = (b_1,\ldots,b_{n-2})$, который называется кодом Прюфера.

Опишем процедуру восстановления дерева T с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ по коду Прюфера $p(T) = (b_1,\ldots,b_{n-2})$. Находим наименьший элемент a_1 множества V, не содержащийся в $p(T)$, и восстанавливаем ребро $e_1 = a_1b_1$ дерева T. Далее удаляем a_1 из множества V и первую компоненту b_1 из последовательности $p(T)$. Продолжаем процедуру для оставшихся чисел, пока не будут удалены все компоненты последовательности $p(T)$. Два оставшихся элемента множества V – есть последнее ребро дерева T.

Теорема (Кэли). Число различных деревьев с n (пронумерованными) вершинами равно n^{n-2}.

Определение. Любое дерево, в котором выделена одна вершина, называется корневым деревом. При этом выделенная вершина называется корнем.

Для корневого дерево есть специальный способ представления (изображения) дерева. При изображении все вершины располагают по ярусам следующим образом. На нулевом ярусе располагается корень дерева. На 1-м ярусе располагают все вершины дерева, смежные с корнем; затем на 2 ярусе – все вершины, смежные с вершинами 1-го яруса; на 3-ем – вершины, смежные с вершинами 2-го яруса и так далее.



Каждому корневому дереву ставится в соответствие бинарный код, который строится в процессе полного обхода дерева. Обход начинается с корня и заканчивается корнем. Обход осуществляется слева направо, т.е. сначала проходится левая ветвь, затем следующая и так далее, в конце – самая правая. При обходе необходимо подниматься по ветви до тех пор, пока это возможно. Затем по ветви опускаются до тех пор, пока не появится возможность продолжить подъем по еще не пройденной ветви. При подъеме с одного яруса на следующий в код дерева записывается 1, при опускании с яруса на ярус записывается 0. Так дерево на рисунке имеет код (1110110100001101101100010 0).

Определение. Говорят, что граф вкладывается в данное пространство, если он изоморфен некоторому графу в этом пространстве (все вершины и ребра которого состоят из точек данного пространства), причем кривые, изображающие ребра, не пересекаются.

Определение. Граф называется *плоским*, если он вкладывается в плоскость.

Определение. Граф называется *планарным*, если он изоморфен некоторому плоскому графу.

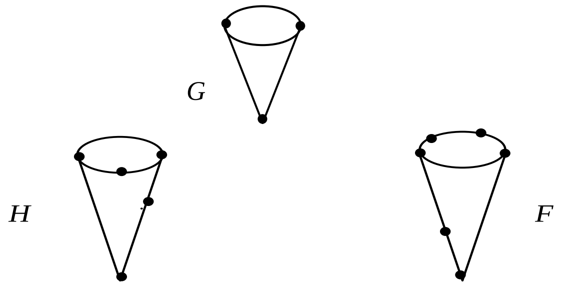
Если плоский граф «разрезать» по ребрам, то плоскость распадётся на части, которые называются гранями (одна из граней бесконечна, она называется внешней гранью).

Теорема (формула Эйлера). Для плоского связного графа G с p вершинами, q рёбрами и r гранями выполняется равенство:

$$p - q + r = 2.$$

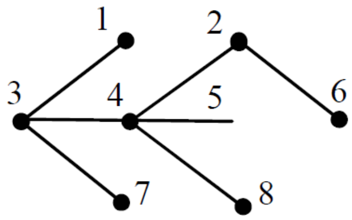
Подразбиением ребра $\{u,v\}$ графа G называется операция удаления ребра $\{u,v\}$ с добавлением новой вершины w и двух ребер $\{u,w\}$ и $\{w,v\}$. Два графа называются ***гомеоморфными***, если они могут быть получены из некоторого графа подразбиениями его ребер.

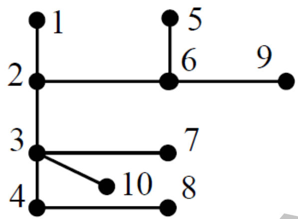
Пример. Подразбиением ребер графа G получим гомеоморфные графы H и F.



Теорема (*Понтрягина-Куратовского, критерий планарности*). Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит ни одного подграфа, гомеоморфного графам K_5 или $K_{3,3}$.

1. Для деревьев найти центральные вершины и радиус.





2. Для деревьев из задания 1 построить код: а) код Прюфера; б) бинарный код корневого дерева, выбрав в качестве корня центральную вершину.

3. Построить дерево по коду Прюфера

1) $p(T)$ = {1,3,3,2,2,3};

2) $p(T)$ = {1,4,4,5,5,3,3};

3) $p(T)$ = {1,6,2,3,5,5,2,3}.

4. Известно, что дерево T имеет три вершины степени 3 и четыре вершины степени 2. Остальные вершины имеют степень 1. Найдите $|V(T)|$.

5. Сколько существует деревьев с n пронумерованными вершинами, если

1) $n = 3$;

2) $n = 4$;

3) $n = 5$;

4) $n = 7$.

6. Сколько существует попарно неизоморфных деревьев с n вершинами, если

1) $n = 3$;

2) $n = 4$;

3) $n = 5$;

4) $n = 7$.

Изобразить их.

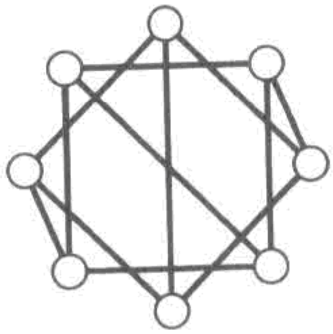
7. Сколько остовных деревьев имеют графы K_4, K_5, K_n, $K_{1,n}$, $K_{2,n}$?

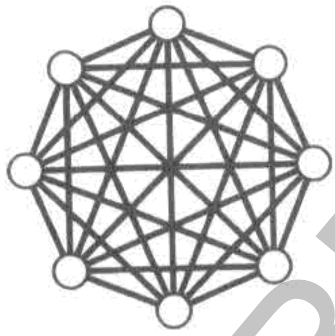
8. Докажите, что любое дерево является двудольным графом.

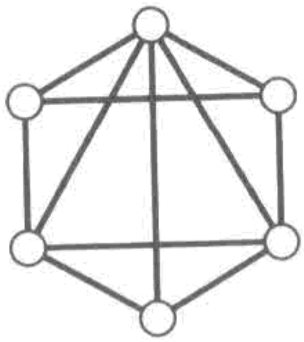
9. Изобразить произвольный планарный граф, найти число граней, подставить в формулу Эйлера.

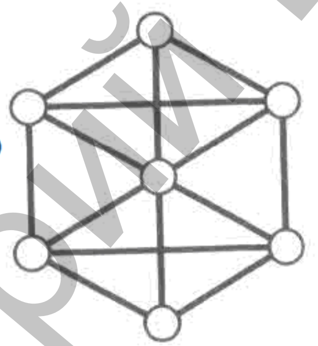
10. Степенная последовательность планарного графа (2,2,2,3,3,3,4,4,4,5). Сколько у него граней?

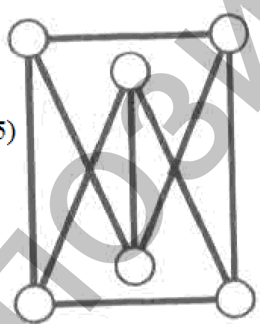
11. Проверить на планарность графы, изображенные на рисунках.

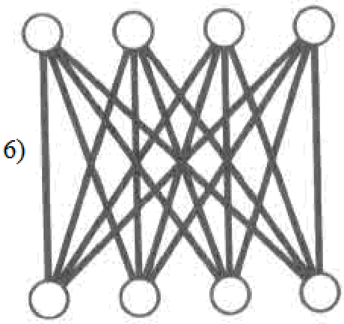
1) 

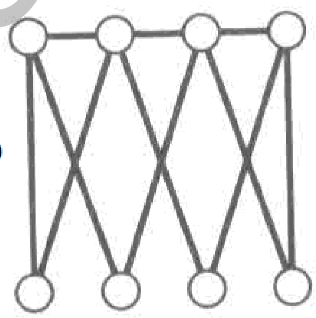
2) 

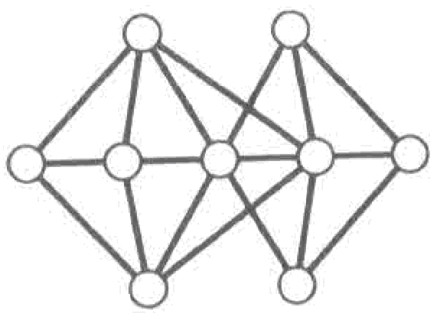
3) 

4) 

5) 

6) 

7) 

8) 

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев, В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. – М., 1990. – 384 с.

2. Ершов, Ю.Л. Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1987. – 336 с.

3. Иванов, Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы / Б.Н. Иванов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 288 с.

4. Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин. – 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 304 с.

5. Канцедал, С.А. Дискретная математика: учеб. пособие / С.А. Канцедал. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2017. – 224 с.

6. Новиков, П.С. Элементы математической логики / П.С. Новиков. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

7. Новиков, Ф.А. Дискретная математика: для бакалавров и магистров / Ф.А. Новиков. – 3-е изд. – СПб. [и др.]: Питер, 2017. – 496 с.

8. Оре, О. Теория графов / О. Оре. – М.: Наука, 1980. – 328 с.

9. Хаггарти, Дж. Дискретная математика для программистов / Дж. Хаггарти. – 2-е изд. – М.: Техносфера, 2014. – 400 с.

10. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: Мир, 1973. – 301 с.

Учебное издание

ВИТЬКО Елена Анатольевна

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА**

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать .2017. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,96. Уч.-изд. л. 3,31. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.