УСЕЧЕННАЯ ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ТИПА МАРШО–АДАМАРА

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования является операция дробного дифференцирования Римана–Лиувилля [1], которой на полуоси можно придать качественно иной вид. Эту форму представления называют дробной производной Маршо [1]. В работе [5] рассматривалась конструкция дробной производной Маршо применительно к дробной производной Адамара [3] и называлась она дробной производной Маршо–Адамара. Естественным образом видится задача построения обобщающей её конструкции. Настоящая работа посвящена этому аспекту.

Целью исследования является построение более общей формы дробной производной Маршо–Адамара [4] в весовых пространствах суммируемых функций.

Материал и методы. Материалом исследования является конструкция дробной производной Маршо–Адамара [4]. В работе используются методы функционального анализа, а также методы дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. Дробная производная Маршо–Адамара [4], в случае $0<\alpha<1$ имеет вид

$$\left(\mathbf{D}^{\alpha}_{0+} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} \frac{f(x)-f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}}dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x} \frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha+1}}\frac{dt}{t}, \qquad (1)$$

где $\Gamma(z)=\int\limits_0^{\infty} x^{z-1}e^{x}dx$ – гамма-функция.

Рассмотрим дробную производную типа Адамара порядка $\alpha>0$ на полуоси $R_+=(0,\infty)$:

$$\left(D^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) = x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{x}\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t},$$
$$x>0,\ \mu\in R,\ \delta = x\frac{d}{dx}. \qquad (2)$$

При $0<\alpha<1$ формула (2) принимает вид

$$\left(D^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) = x^{1-\mu}\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{-\alpha} f(t)\frac{dt}{t^{1-\mu}}. \qquad (3)$$

Вместо дробной конструкции (3) нам удобнее рассматривать её модификацию вида

$$\left(\mathbf{D}^{\alpha}_{0+,\mu} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-\mu t}\,\frac{f(x)-f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}}dt + \mu^{\alpha} f(x) =$$
$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x}\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{-\alpha-1}\left[f(x)-f(t)\right]\frac{dt}{t} + \mu^{\alpha} f(x), \qquad (4)$$

которую будем называть дробной производной типа Маршо–Адамара по аналогии с дробной производной Маршо. Дробные производные (4) являются более естественными на полуоси R_+ нежели дробные производные (3). Будем рассматривать дробную производную типа Маршо–Адамара (4) в весовом пространстве суммируемых функций $X^p_c(a,b)$ [2]:

$$X^p_c(a,b) = \left\{ h(t): \int_a^b \left|t^c h(t)\right|^p \frac{dt}{t} < +\infty,\ 0\le a<b\le\infty,\ c\in R,\ 1\le p<\infty \right\},$$

$$\|h\|_{X^p_c} = \left(\int_a^b \left|t^c h(t)\right|^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

Для функций $f(x) \in X_c^p(R_+)$ мы будем понимать производные типа Маршо–Адамара как сходящиеся интегралы. Именно, пусть

$$\left(\mathbf{D}_{0+,\mu,\varepsilon}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\mu t} \, \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt + \mu^{\alpha} f(x), \;\; \varepsilon > 0, 0 < \alpha < 1. \quad (5)$$

Тогда по определению $\mathbf{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbf{D}_{0+,\mu,\varepsilon}^{\alpha} f$ по норме пространства X_c^p. Выражение (5) называется усечённой дробной производной типа Маршо–Адамара.

Следующее утверждение дает интегральное представление формулы (5).

Теорема. Пусть $f(x) = \Im_{0+,\mu}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \varphi(t) \frac{dt}{t} \;\; (x > 0), \;\; \varphi \in X_c^p(R_+)$, где числа α, p, μ, c таковы, что $0 < \alpha < 1, 1 \le p < \infty, \mu \ge 0, c \in R, \mu > c.$ Тогда усечённая дробная производная $\mathbf{D}_{0+,\mu,\varepsilon}^{\alpha} f \;\; (\varepsilon > 0)$ имеет следующее интегральное представление:

$$\left(\mathbf{D}_{0+,\mu,\varepsilon}^{\alpha} f\right)(x) = \int_0^{\infty} K(t) \varphi\left(xe^{-\varepsilon t}\right) dt,$$

где

$$K(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{e^{-\mu\varepsilon t}}{t} \left[\left(\alpha\Gamma(-\alpha, \mu\varepsilon) + \Gamma(1-\alpha)\right)\left(\mu\varepsilon\right)^{\alpha} t_+^{\alpha} - (t-1)_+^{\alpha}\right],$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \; \alpha \in R, x > 0, \quad y_+^{\alpha} = \begin{cases} y^{\alpha}, \; y > 0, \\ 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

При этом ядро $K(t) \in L_1(R_+)$ является усредняющим: $\int_0^{\infty} K(t) dt = 1, \quad K(t) > 0$ при t>0.

Заключение. Значимость исследования свойств операторов дробного интегрирования и дифференцирования обусловлена их применением при отыскании ответов на разнообразные вопросы физики и механики в теории колебаний, теории теплопроводности, теории упругости. В работе построено обобщение так называемой дробной производной Маршо–Адамара, рассмотрено интегральное представление так называемой усечённой дробной производной типа Маршо–Адамара.

Список литературы

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С.А. Шлапаков // Веснік ВДУ.–2009. Т. 53, №3.– С. 132-135.
3. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 16–17 марта 2011 г. – Витебск, 2011.– Т. 1. С. 71-73.
4. Шлапаков, С.А. Производные Маршо–Адамара дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XX (67) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 12–13 марта 2015 г. – Витебск, 2015.– Т. 1. – С. 27-28.
5. Шлапаков, С.А. Дробные производные типа Адамара и типа Маршо–Адамара на полуоси / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXI (68) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 11–12 февраля 2016 г. – Витебск, 2016.– Т. 1. С. 37-38.