УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПФАФФА

О.В. Храмцов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В данной работе продолжается изучение свойств управляемости вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа. В работе [1] получен критерий двухточечной полной управляемости в случае, когда заданы произвольные постоянные начальный вектор состояния и конечный вектор состояния. В работе [2] введено понятие континуум управляемости, когда конечным состоянием является произвольная ограниченная аналитическая вектор функция, и доказан критерий наличия этого свойства при двумерном векторе управления. В настоящей работе изучаются свойства континуум и максимальной управляемостей в случае, когда размерность вектора управления больше двух. В отличие от случая систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3] переход к управлению большей размерности представляет определенные трудности. Доказан ряд условий наличия свойств континуум и максимальной управляемостей. Эти условия носят ранговый характер от некоторых матриц, составленных по известным матрицам исходной системы Пфаффа.

Материал и методы. Материалом исследования является вполне интегрируемая линейная система Пфаффа. Были применены следующие методы: метод Коши отыскания общего решения системы Пфаффа, метод матричного анализа, метод проблемы моментов.

Результаты и их обсуждение. Рассматривается процесс, описываемый вполне интегрируемой линейной системой Пфаффа Θ

$$\Theta: dx = (A_1 x + B_1 u(s))ds_1 + (A_2 x + B_2 u(s))ds_2, \tag{1}$$

где $s = (s_1, s_2) \in R^2$, $x \in R^n$ – выход, состояние системы, $u \in R^r$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $r \le 2n$, A_1, A_2, B_1, B_2 – постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей. Условия полной интегрируемости системы (1) имеют вид [4, с. 44]

$$A_1 A_2 = A_2 A_1, \tag{2}$$

$$B_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} - B_2 \frac{\partial u}{\partial s_1} = Pu, \quad P \equiv A_2 B_1 - A_1 B_2. \tag{3}$$

При выполнении этих условий для заданного вектора u система (1) имеет единственное решение с начальным условием

$$x(0) = x^0. \tag{4}$$

Рассмотрим свойства управляемости систем Пфаффа (1) в смысле следующих определений.

Определение 1 [1]. *Система (1) называется вполне управляемой , если для произвольных состояний* $x^0, x^1 \in R^n$ *существуют точка* $s^1 = (s_1^1, s_2^1)$, $0 < s_1^1, s_2^1 < \infty$, *и непрерывно дифференцируемое управление* $u = u(s, x^0, x^1)$ *такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняется условие*

$$x(s^1) = x^1. \tag{5}$$

В данной работе изучается возможность управления системой (1) при конечном условии

$$x(s_1, s_2^0) = \phi(s_1), \quad s_1 \in I = (a, b), \tag{6}$$

где ϕ – ограниченная аналитическая вектор функция.

Определение 2 [2]. *Система (1) называется вполне континуум управляемой , если для произвольного состояния* $x^0 \in R^n$ *и произвольной аналитической ограниченной вектор функции* ϕ *существует интервал* I *, конечный момент* $s_2^0 > 0$ *и непрерывно дифференцируемое управление* $u = u(s, x^0, \phi)$ *такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняется условие (6).*

Пусть вектор управления u имеет размерность $r \geq 2$ $(r \leq 2n)$. Если ввести вспомогательный параметр q равенством $m+q=r$, $q \in \{0,1,...,r-1\}$, то для него возможны варианты соотношения с числом m: a) $q=0$, b) $m=q$ c) $m>q$, d) $m<q$.

Класс систем Пфаффа Θ_1 разбивается на три класса: Класс Θ_{11} в случае $q=0$, т.е. $m=r$. Класс Θ_{12} в случае $m=q$. Класс Θ_{13} в случае $m>q$. Рассмотрим свойства управляемости систем Пфаффа в каждом классе.

Предложение 1. 4 *Системы Пфаффа класса* Θ_{11} *не являются вполне континуум управляемыми ни при каких условиях.*

Теорема 1. *Система Пфаффа класса* Θ_1 *вполне управляема тогда только тогда, когда*

$$\exists \alpha \in R^1 : rankQ(\alpha) = n,$$

Здесь $$Q(\alpha) \equiv [B(\alpha), A(\alpha)B(\alpha), ..., A^{n-1}(\alpha)B(\alpha)],$$

$$B(\alpha) \equiv \alpha B_1 + (1-\alpha)B_2, \;\; A(\alpha) \equiv \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2.$$

Теорема 2. *Система Пфаффа (1) класса* Θ_{12} *вполне континуум управляема тогда и только тогда, когда*

$$\exists \alpha \in R^1 : rankQ_2(\alpha) = n, \tag{7}$$

где $Q_2(\alpha) \equiv [B, A_2(\alpha)B, ..., A_2^{n-1}(\alpha)B], \; A_2(\alpha) \equiv \alpha A_1 + A_2$.

Теорема 3. *Система Пфаффа (1) класса* Θ_{12} *вполне максимально управляема тогда и только тогда, когда выполняется условие (7).*

Теорема 4. *Для полной континуум управляемости системы Пфаффа (1) класса* Θ_{13} *достаточно существование вектора* $\beta^{(i)}$ *из спектра* Ω *линейной зависимости матрицы.* $L_2(\beta)$*, для которого выполняются условия*

$$rankQ_3(\beta^{(i)}) = n, \tag{8}$$

здесь $Q_3(\beta) \equiv [BM_i, A_2(\beta)BM_i, ..., A_2^{n-1}(\beta)BM_i], \; A_2(\beta) \equiv \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2$.

Теорема 5. *Для полной максимальной управляемости системы Пфаффа класса* Θ_{13} *достаточно существование вектора* $\beta^{(i)}$ *из спектра* Ω *линейной зависимости матрицы* $L_2(\beta)$*, для которого выполняются условие (8) и условие*

$$\exists \alpha \in R^1 : rankQ_1(\alpha) = n,$$

здесь $Q_1(\alpha) \equiv [B, A_1(\alpha)B, ..., A_1^{n-1}(\alpha)B], \;\; A_1(\alpha) \equiv A_1 + \alpha A_2$.

Все рассматриваемое множество систем Пфаффа разбито на классы. В каждом из них доказаны критерии наличия свойств полной, континуум и максимальной управляемостей. Условия носят ранговый характер и поэтому легко проверяются методами матричного анализа

Заключение. Исследование носит фундаментальный характер и может быть использовано в прикладных задачах.

Список литературы

1. Храмцов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // «Дифференц. Уравнения», 1985. – Т.21, N 11.– С. 1933 – 1939.
2. Храмцов, О.В. Задача континуум управляемости линейных стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // «Веснік ВДУ», 2010. – N 3.– С. 54–59.
3. Ройтенберг, Я.Н. Автоматическое управление / Я.Н. Ройтенберг . Москва: Наука. 1971.– 395 с.
4. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1983. –371 с.