О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА F(X)=AX+XB

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Матричное уравнение Ляпунова $AX + XB = Y$ возникает естественным образом [1] в процессе исследования асимптотических свойств дифференциальных уравнений, а также в ряде задач теории управления. Представляют интерес как различные представления для решения X, так и свойства оператора $F(X) = AX + XB$. Целью данной работы является установление связи между спектрами операторов A и B и оператором F преобразованном к виду $F : C^4 \to C^4$, где C – множество комплексных чисел.

Материал и методы. Материалом исследования послужили линейные операторы в банаховых пространствах, линейные матричные уравнения. Были применены аналитические с использованием пакета компьютерной математики *Maple* 18.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим в пространстве всех матриц размерности [2 x 2] с комплексными элементами уравнение (1)

$$AX + XB = Y \tag{1}$$

с заданными матрицами A, B, Y. Для уравнения (1), рассматриваемого в пространстве всех линейных ограниченных операторов, действующих в произвольном банаховом пространстве, имеет место [2, с. 37] следующий факт: пусть $(\lambda, \mu) \in \sigma(A) \times \sigma(B)$, где $\sigma(A), \sigma(B)$ – спектры операторов A, B; тогда если $\lambda + \mu \neq 0$, то уравнение (1) имеет единственное решение, и оно находится по формуле (2)

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_A} \int_{\Gamma_B} \frac{1}{\lambda + \mu} (A - \lambda I)^{-1} Y (B - \mu I)^{-1} d\lambda \, d\mu, \tag{2}$$

где Γ_A, Γ_B – контуры, охватывающие спектры операторов A, B;

Однако даже в случае матриц небольшой размерности требуется явная формула выражения (2) в терминах элементов матриц A, B, Y и структура спектра оператора $F(X) \equiv AX + XB$.

Для этого проведём следующие построения. Упорядочим элементы матриц X, Y следующим образом:

$x_{11} = x_1$, $x_{12} = x_2$, $x_{21} = x_3$, $x_{22} = x_4$; $y_{11} = y_1$, $y_{12} = y_2$, $y_{21} = y_3$, $y_{22} = y_4$.

Тогда уравнение (1) можно рассматривать как уравнение вида (3)

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & b_{21} & a_{12} & 0 \\ b_{12} & a_{11} + b_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} + b_{11} & b_{21} \\ 0 & a_{21} & b_{12} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

в комплексном пространстве C^4 с матрицей

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & b_{21} & a_{12} & 0 \\ b_{12} & a_{11} + b_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} + b_{11} & b_{21} \\ 0 & a_{21} & b_{12} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Собственными значениями матрицы F являются суммы

Репозиторий ВГУ

$$\lambda+\mu \quad \left((\lambda,\mu)\in\sigma(A)\times\sigma(B)\right).$$

Доказательство. Собственными значениями матриц A и B являются числа:

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}\pm\left(\left(a_{11}-a_{22}\right)^2+4a_{12}a_{21}\right)^{1/2}\right], \tag{4}$$

$$\mu_{1,2}=\frac{1}{2}\left[b_{11}+b_{22}\pm\left(\left(b_{11}-b_{22}\right)^2+4b_{12}b_{21}\right)^{1/2}\right]. \tag{5}$$

Заметим, что характеристический многочлен матрицы F имеет вид

$$t^4+f_3t^3+f_2t^2+f_1t+f_0, \tag{6}$$

где

$$f_1=-\left(a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}\right)(-2b_{12}b_{21}+a_{22}b_{11}+2a_{22}a_{11}+a_{22}b_{22}+2b_{11}b_{22}-$$
$$-2a_{21}a_{12}+a_{11}b_{22}+a_{11}b_{11});$$
$$f_2=-2a_{12}a_{21}-2b_{12}b_{21}+a_{22}^2+3a_{22}b_{11}+4a_{11}a_{22}+3a_{22}b_{22}+4b_{11}b_{22}+3a_{11}b_{22}+$$
$$+b_{22}^2+3a_{11}b_{11}+b_{11}^2+a_{11}^2;$$
$$f_3=-2(a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22});$$
$$f_0=-2a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}+2a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}-a_{22}b_{11}b_{12}b_{21}-a_{11}b_{11}b_{12}b_{21}-a_{11}a_{12}a_{21}b_{11}-$$
$$-a_{11}a_{12}a_{21}b_{22}-a_{11}b_{12}b_{21}b_{22}-2b_{11}b_{12}b_{21}b_{22}-a_{22}^2b_{12}b_{21}+a_{22}^2b_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}b_{22}^2-$$
$$-a_{12}a_{21}b_{22}^2-a_{12}a_{21}b_{11}^2+a_{11}^2a_{22}b_{11}+a_{11}^2a_{22}b_{22}+b_{11}^2b_{22}^2+b_{12}^2b_{21}^2+a_{12}^2a_{21}^2+a_{11}a_{22}b_{11}^2+$$
$$+a_{22}b_{11}^2b_{22}+a_{11}^2b_{11}b_{22}+a_{11}b_{11}^2b_{22}-a_{11}^2b_{12}b_{21}+b_{22}^2a_{11}b_{11}-a_{12}a_{21}a_{22}b_{22}-a_{12}a_{21}a_{22}b_{11}-$$
$$-a_{22}b_{12}b_{21}b_{22}+a_{11}^2a_{22}^2-2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}+a_{11}a_{22}^2b_{11}+a_{11}a_{22}^2b_{22}+a_{11}a_{22}b_{22}^2.$$

Подставляя суммы $\lambda_j+\mu_k$ $(j,k=1,2)$ в характеристический многочлен матрицы F (6), убеждаемся, что эти числа являются его корнями.

Если же в уравнении (1) матрицы A и B совпадают, то есть уравнение (1) имеет вид (7)

$$AX+XA=Y, \tag{7}$$

то тогда формулы для нахождения собственных значений матрицы F (суммы $\lambda_j+\lambda_k$ $(j,k=1,2)$) становятся существенно проще и имеют вид (8).

$$\psi_{1,2}=2\lambda_{1,2}=a_{11}+a_{22}\pm\left(\left(a_{11}-a_{22}\right)^2+4a_{12}a_{21}\right)^{1/2},$$
$$\psi_{3,4}=\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22},\ \left(\psi\in\sigma(F)\right) \tag{8}$$

Значительно упрощается в данном случае и вид характеристического многочлена матрицы F (9).

$$(t-a_{11}-a_{22})^2(t^2-2(a_{11}+a_{22})t+4a_{11}a_{22}-4a_{12}a_{21}) \ . \tag{9}$$

Заключение. Таким образом, в данной работе доказано, что собственными значениями матричного оператора $F(X)\equiv AX+XB$ с матрицами размера $[2\times 2]$ являются суммы

$$\lambda_j+\mu_k \ (j,k=1,2),\left((\lambda,\mu)\in\sigma(A)\times\sigma(B)\right),$$

что является важным фактом для дальнейшего построения новых алгоритмов решения матричных уравнений.

Список литературы

1. Трубников Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю.В. Трубников, А.И. Перов. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 199 с.
2. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

Репозиторий ВГУ