

Определение 1. Фиттингов $\mathcal{U}$ -функтор f назовем (X, Y) -фиттинговым функтором, если выполняется следующее условие: если $G \in \mathcal{U}$, K – нормальная подгруппа группы G , $K \in X$, M – подгруппа группы G такая, что $K \leq M \leq G$ и $M/K \in Y$ и некоторая подгруппа $X \in f(G)$ покрывает M/K , то

$$f(M) = \{Z \cap M \mid Z \in f(G) \text{ и } Z \text{ покрывает } M/K\}.$$

Определение 2. Класс Фиттинга F назовем (X, Y) -классом Фиттинга, если выполняется следующее условие: если $G \in F$, K – нормальная подгруппа группы G , $K \in X$, M – подгруппа группы G такая, что $K \leq M \leq G$ и $M/K \in Y$, то $M \in F$.

Пусть F – непустой класс Фиттинга, обозначим $f = \text{Inj}_F$ и $g = \text{Rad}_F$ – отображения, сопоставляющие группе G множества $\text{Inj}_F(G)$ ее F -инъекторов и $\text{Rad}_F(G)$ ее F -радикалов соответственно.

Доказана

Теорема. Пусть X и Y – непустые классы групп, F – класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\mathcal{U} = E$, F – (X, Y) -класс Фиттинга и $S_n X = X$, то Rad_F – (X, Y) -фиттингов функтор;
- 2) если $\pi = \pi(F)$, $\mathcal{U} = FS^\pi$, F – (X, Y) -класс Фиттинга и $SX = X$, то Inj_F – (X, Y) -фиттингов функтор.

Список литературы

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ L-КОМПОЗИЦИОННЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

*Н.Н. Воробьев, А.Р. Кузнецова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–4].

Напомним, что класс групп F называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из F .

Символом I обозначают класс всех простых групп. Пусть L – произвольный непустой класс простых групп. Тогда L^+ – совокупность всех абелевых групп из L , а L^- – совокупность всех простых неабелевых групп из L . Символом L' обозначают множество $I \setminus L$.

Пусть X – непустая совокупность групп. Тогда (X) обозначает класс групп, порожденный X ; в частности, (G) – класс всех групп, изоморфных группе G ; $\mathcal{K}(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G . Если $\mathcal{K}(G) \subseteq L$, то G называется L -группой. Через G_L обозначают множество всех L -групп и полагают, что $1 \in G_L$. Пусть $A \in I$. Тогда $G_A = G_{(A)}$, $A' = I \setminus (A)$. Главный фактор H/K группы G называется главным A -фактором, если $\mathcal{K}(H/K) = (A)$. Пусть G_{cA} – класс всех конечных групп, у которых каждый главный A -фактор централен. Если A – неабелева простая группа, то $G_{cA} = G_{A'}$.

Напомним, что для произвольного класса групп $F \supseteq (1)$, где (1) – класс всех единичных групп, символ G^F обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N , что $G/N \in F$, а символ G_F – произведение всех нормальных F -подгрупп группы G . Полагают $O^L(G) = G^{G_L}$, $C_A(G) = G^{G_{cA}}$.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f: L \cup \{L'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}. \quad (1)$$

Функции f сопоставляют класс групп

$$CR_L(f) = \{G \mid O^L(G) \in f(L') \text{ и } C_A(G) \in f(A) \\ \text{для всех } A \in L \cap \mathcal{K}(G)\}.$$

Если класс Фиттинга таков, что $F = CR_L(f)$ для некоторой функции f вида (1), то F называют L -композиционным классом Фиттинга с L -композиционной H -функцией f (см. [5]).

Основной результат представляет следующая

Теорема. Пусть F – класс Фиттинга и $F = CR_L(f)$, где $f(A) = F$ для всех $A \in L^- \cup \{L'\}$ и $G \notin F$. Тогда либо $G^{G_L} \notin G_F$, либо найдется $A \in L \cap \mathcal{K}(G/G_F)$, такая, что $G^{G_{cA}} \notin f(A)$.

Список литературы

1. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Воробьев, Н. Н. Алгебра классов конечных групп / Н. Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2012. – 322 с.
3. Скиба, А. Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Скиба, А. Н. Кратно L -композиционные формации конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Ведерников, В. А. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 125–144.

О КЛАССАХ СОПРЯЖЕННЫХ ИНЪЕКТОРОВ π -РАЗДЕЛИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н.Т. Воробьев, Т.Б. Василевич
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все группы, рассматриваемые в данной работе, конечны. В теории конечных разрешимых групп известна теорема Гашюца-Фишера-Хартли [1] о том, что для любого класса Фиттинга F в любой конечной разрешимой группе существуют F -инъекторы и любые два из них сопряжены в этой группе. Данная теорема является обобщением фундаментальных теорем Силова и Холла.

Развитию и обобщению указанной теоремы были посвящены работы Л. А. Шеметкова [2], Н. Т. Воробьева и Го Вэньбиня [3], в которых найдены инъекторы и описано их строение, а также доказана сопряженность инъекторов в частично разрешимых (в частности π -разрешимых) группах.

В настоящей работе мы находим канонические классы сопряженных инъекторов в группах, которые в общем случае не являются π -разрешимыми. Напомним, что конечная группа G называется π -разделимой, если каждый ее главный фактор является либо π -группой, либо π' -группой.

Основная цель настоящей работы – нахождение классов сопряженных F -инъекторов в любой π -разделимой группе.

Материал и методы. Напомним, что *классом групп* [4] является множество групп, которое вместе с каждой своей группой содержит все изоморфные ей группы. *Классом Фиттинга* [4] называют класс групп F , замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных F -подгрупп.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, а π – некоторое подмножество множества $\mathbb{P}$. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначим через π' , то есть $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Подгруппу H группы G называют *холловой π -подгруппой* G , если порядок группы G является π -числом, а ее индекс в G – π' -число, индекс такой π -подгруппы не делится на простые числа из множества π .

Если F – непустой класс Фиттинга, то F -*радикалом* G_F группы G называют наибольшую среди нормальных подгрупп группы G , принадлежащих F . Произведением классов Фиттинга F и H , обозначаемым FH , называется класс всех таких групп G , что $G/G_F \in H$, то есть

$$FH = \{G \mid G/G_F \in H\}.$$

Для каждого непустого класса групп F , подгруппа V группы G называется F -*максимальной*, если $V \in F$ и $V=U$ всякий раз, когда $V \leq U \leq G$ и $U \in F$. Подгруппа V группы G называется F -*инъектором* G , если $V \cap K$ является F -максимальной подгруппой K для всякой субнормальной подгруппы K группы G [4].

Характеристика класса X определяется следующим образом

$$\text{Char}(X) = \{p \mid p \in \mathbb{P} \text{ и } Z_p \in X\}.$$

Заметим, что максимальная нормальная π -подгруппа (максимальная нормальная π' -подгруппа) G называется π -радикалом группы G и обозначается G_{E_π} или $O_\pi(G)$ (π' -радикалом G и обозначается $G_{E_{\pi'}}$ или $O_{\pi'}(G)$ соответственно), где E_π и $E_{\pi'}$ – классы Фиттинга всех π -групп и всех π' -групп.

Результаты и их обсуждение.