Заключение. Поскольку, в лесопромышленном комплексе на работу различных агрегатов влияет большое количество случайных факторов и построить детерминированные математические модели чаще всего невозможно, то нужно строить и исследовать стохастические модели.

Использование математических моделей играет большую роль в современной экономике. Поэтому при преподавании высшей математики, особенно в технических и экономических университетах, больше внимания нужно уделять построению математических моделей, реальных производственных задач. Уместно вспомнить высказывание академика В.И. Арнольда, “умение составлять адекватные математические модели реальных ситуаций должно составлять неотъемлемую часть математического образования” [3.с. 28].

Список литературы

1. Игнатенко В.В., Турлай И.В., Федоренчик А.С. Моделирование и оптимизация процессов лесозаготовок. – Мн: БГТУ, 2004. – 180 с.
2. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М: Наука, 1966. – 152 с.
3. Арнольд, В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М. МЦНМО, 2000. – 32 с.

УПРАВЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ

А.А. Козлов, А.Д. Бурак
Новополоцк, ПГУ

Сегодня одной из активно развивающихся как в Республике Беларусь, так и за рубежом, областей математических исследований является теория управления асимптотическими характеристиками (инвариантами) линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Это связано с тем, что полученные в этой теории результаты позволяют для управляемой динамической системы (механической, физической, технической) строить такие управления, которые бы воздействовали на ее устойчивость. При этом устойчивость здесь понимается в самом широком смысле – это и устойчивость по Ляпунову, и асимптотическая устойчивость, и равномерная асимптотическая устойчивость, и орбитальная устойчивость и др. Все зависит лишь от выбора тех асимптотических инвариантов [1], подлежащих управлению, которые отвечают за требуемый тип устойчивости. Данная особенность рассматриваемой теории определяет ее прикладной характер, поскольку, результаты, получаемые в ней, могут находить непосредственное применение при решении различных задач стабилизации управляемого объекта, являющейся важной характеристикой физической или механической системы.

В настоящее время достаточно хорошо изучены задачи управления асимптотическими инвариантами в лишь *классе линейных систем без наблюдателя*: с гладкими или кусочно-гладкими коэффициентами (Гайшун И.В, Смирнов Е.Я., Борухов В.Т, Тонков Е.Л.), с равномерно непрерывными и кусочно-постоянными коэффициентами (Тонков Е.Л, Попова С.Н., Макаров Е.К., Зайцев В.А), а также во множестве линейных систем малых размерностей без наблюдателя с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами (А.А. Козлов, А.Д. Бурак, И.В. Инц). Поэтому результаты данной работы, посвященные решению задачам глобального управления асимптотическими инвариантами двумерных линейных систем с наблюдателем, коэффициенты которых не удовлетворяют ни условиям гладкости, ни условиям равномерной непрерывности, являются новыми и актуальными.

Материал и методы. В представленной работе объектом для изучения являются линейные управляемые системы с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами и наблюдателем. При исследовании глобальной управляемости асимптотических инвариантов таких систем применяются методы матричного и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории управления системами, а также теории управления асимптотическими инвариантами нестационарных систем.

Результаты и их обсуждение. Обозначим через R^n евклидово векторное пространство размерности n, а через M_{mn} – пространство вещественных $(m \times n)$-матриц со спектральной (операторной) нормой. Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathrm{R}^n, \quad u \in \mathrm{R}^m, \quad t \ldots 0. \qquad (1)$$

с наблюдателем

$$y = C^T(t)x, \quad y \in \mathrm{R}^k, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Будем считать, что коэффициенты $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ принадлежат классу локально интегрируемых по Лебегу и интегрально ограниченных матричных функций, т.е. таких, которые удовлетворяют соотношениям

$$\sup_{t \geq 0}\int_t^{t+1} \| A(\tau) \| d\tau < a < \infty, \quad \sup_{t \geq 0}\int_t^{t+1} \| B(\tau) \| d\tau < b < \infty, \quad \sup_{t \geq 0}\int_t^{t+1} \| C(\tau) \| d\tau < c < \infty.$$

Будем далее предполагать, что

1) система (1) является *равномерно вполне управляемой*, т.е. существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in \mathrm{R}^n$ найдется измеримое и ограниченное управление $u:[t_0, t_0 + \sigma] \to \mathrm{R}^m$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\| u(t) \| \leq \gamma \| x_0 \|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

2) система (1), (2) с нулевым управлением, т.е.

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathrm{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$y = C^T(t)x, \quad y \in \mathrm{R}^k, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

обладает *свойством равномерной полной наблюдаемости*, т.е. найдется такое $\sigma > 0$, что при любом $t_0 \geq 0$ всякое начальное состояние системы $x(t_0) \in \mathrm{R}^n$ может быть однозначно определено по наблюдению (4) на $[t_0, t_0 + \sigma]$.

Рассмотрим задачу о построении линейной обратной связи $u = U(t)x$ в системе (1), (2), позволяющей управлять асимптотическими характеристиками этой системы. Для ее решения воспользуемся подходом, основанным на построении системы асимптотической оценки состояния. Такой подход изначально был дан в работе Р. Калмана [2] для стационарных систем (1), (2), а затем успешно обобщен на нестационарные систем В.А. Зайцевым [3] и им же применен для решения задачи стабилизации линейной нестационарной управляемой системы (1), (2) с наблюдателем и локально интегрируемыми *с квадратом* матричными коэффициентами *A*, *B* и *C*.

Построим по системе (1), (2) и выходу асимптотический идентификатор

$$x = A(t)x + V(t)(y(t) - C^T(t)x) + B(t)u, \quad x \in \mathrm{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

где $x(t)$ – оценка состояния системы (1), (2). Возьмем управление в (5)

$$u = U(t)x. \tag{6}$$

Матричные управления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ в системе (5) будем считать измеримыми и ограниченными на положительной полуоси матричными функциями со значениями в пространствах M_{mn} и M_{nk} соответственно.

Подставив управление (6) в систему (1), (2), (5), получим $(2n)$-мерную линейную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)U(t) \\ V(t)C^T(t) & A(t) + B(t)U(t) - V(t)C^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Введем вектор отклонения $x(t) = x(t) - x(t)$ состояния $x(t)$ системы (1), (2) от оценки состояния $x(t)$. С помощью невырожденной замены переменных $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ систему (7) приведем к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + B(t)U(t) & -B(t)U(t) \\ 0 & A(t) - V(t)C^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \tag{8}$$

управляя асимптотическими инвариантами которой, мы, тем самым, будем управлять и асимптотическими характеристиками системы (1), (2), замкнутой линейной обратной связью $u = U(t)x$. Тогда имеет место

Теорема. *Пусть* $n = 2$. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, система* (3), (4) *равномерно вполне наблюдаема, то система* (8) *обладает свойствами*

1) глобальной управляемости верхнего центрального показателя (*а, значит, она равномерно стабилизируема*)*;*

2) глобальной управляемости характеристических показателей Ляпунова (*и поэтому, она асимптотически устойчива*)*;*

3) глобальной ляпуновской приводимости, т.е. для произвольной наперед заданной $(2n)$*-мерной линейной системы с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами найдутся такие допустимые управления* $U(\cdot)$ *и* $V(\cdot)$, *что система* (8) *с этими управлениями будет асимптотически эквивалентна выбранной системе.*

Заключение. Представленные результаты позволяют свое обобщение на случай произвольной размерности фазового пространства .

Работа выполнялась в рамках проекта БРФФИ Ф16М-006.

Список литературы

1. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариан-тов нестационарных линейных систем. – Минск: Беларус. навука, 2012.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории сис-тем. – М., 2004.
3. Зайцев В.А. Ляпуновская приводимость и стабилизация нестационарных систем с наблюдателем // Дифференц. уравнен., 2010. – Т. 46. – №3. – С. 432–442.

ВЛИЯНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ НА ПОТЕРЮ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Е.А. Корчевская
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Слоистые оболочки и конструкции широко используются в различных областях современной техники. Использование слоев со специальными свойствами позволяет создавать высокопрочные конструкции, которые обладают хорошей тепло, - электро - и звукоизоляцией, высокой стойкостью к агрессивным средам. В составе слоистой конструкции слои из высокопрочных материалов являются несущими и воспринимают основную часть нагрузки, а маложесткие слои связывают между собой несущие и работают в основном на поперечный сдвиг.

В работе предлагается использовать уравнения слоистых оболочек, учитывающие параметры поперечных сдвигов, полученные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым[1] с использованием обобщенной кинематической гипотезы Тимошенко. Для исследования свободных колебаний здесь используется асимптотический метод П.Е. Товстика[2], согласно которому, благодаря локализации форм колебаний и форм потери устойчивости в окрестности некоторой образующей $\varphi = \varphi_0$, двумерные уравнения, описывающие состояние слоистых оболочек, можно свести к последовательности одномерных краевых задач.

Целью данной работы является исследование влияния поперечных сдвигов на устойчивость слоистой оболочки при комбинированном нагружении.

Материал и методы. Рассмотрим задачу о потере устойчивости слоистой цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении, учитывая усилие сдвига T_{12}^0, внутреннее давление, наличие которого приводит к появлению растягивающих усилий T_2^0 и осевые растягивающие усилия T_1^0. Обозначим $\left(T_1^0, T_2^0, T_{12}{}^0\right) = \lambda Eh\varepsilon^5\left(\varepsilon^{-1}t_1^0, \varepsilon t_2^0, t_3^0\right)$. Края оболочки предполагаются шарнирно опертыми.

Для описания такого состояния, используем систему полубезмоментных уравнений слоистых оболочек[1], записанные в безразмерном виде: