

6. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т.43, №2. – С. 161-168.
7. Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra - 1996 - Vol.24, №6. – P. 2011-2023.
8. Воробьев, Н.Т. О проблемах структуры классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залеская, Н.Н. Воробьев // Веснік ВДУ. – 2007. – №2 (44). – С. 105-108.
9. Залеская, Е.Н. О гипотезе Локетта для классов Фиттинга конечных групп / Е.Н. Залеская, Ж.П.Макарова // Веснік ВДУ. – 2012. – №6. – С.15-19.
10. Залеская, Е.Н. Гипотеза Локетта для произведений классов Фиттинга конечных групп / Е.Н. Залеская // Веснік ВДУ. – 2016. – №1. – С. 5-8.

ПОСТРОЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЛЕСОПРОМЫШЛЕННОМ КОМПЛЕКСЕ

*В.В. Игнатенко
Минск, БГТУ*

Основой любого развитого государства является мощная экономика, но она немислима без точных наук, краеугольным камнем которых является математика. Используя математические методы, строятся математические модели для технологических процессов, технических устройств, экономических задач и т.д. Решая эти модели и проводя анализ полученных решений, принимаются производственные решения, которые позволяют вести эффективное управление тем или иным процессом. Эта задача особенно актуальна на современном этапе развития экономики.

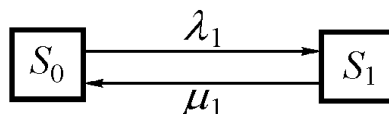
Цель работы – показать, как можно строить и использовать стохастические математические модели в лесопромышленном комплексе.

Материал и методы. В качестве объекта исследования рассматриваются лесопромышленные системы без запаса древесины. К ним могут относиться: сортировочные лесотранспортеры, окорочные станки, лесопильные рамы и другие [1, с. 96-116]. Математические модели строятся методами теории массового обслуживания с использованием дифференциальных уравнений Колмогорова для состояний системы [2].

Результаты и их обсуждение. Пусть лесопромышленная система состоит только из одного станка и к нему поступает на обработку пуассоновский поток предметов труда с интенсивностью λ_1 , зависящий, в общем случае, от времени $\lambda_1 = \lambda_1(t)$.

Обработка предмета труда осуществляется с изменяющейся продолжительностью цикла $t_{\text{ц}}$, распределенного по показательному закону с параметром $\mu_1 = \mu_1(t)$.

Запишем математическую модель задачи. Функционирование рассматриваемой системы можно представить следующей схемой (графом) состояний:



Система может находиться в следующих состояниях: S_0 – оборудование исправно и простаивает из-за отсутствия предметов обработки по организационным причинам; S_1 – оборудование осуществляет обработку предмета труда.

Обозначим вероятности состояния S_0 как $P_0(t)$, а S_1 как $P_1(t)$. Для любого времени функционирования системы t : $P_0(t) + P_1(t) = 1$.

Математическая модель функционирования системы представляет собой систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda_1 P_0 + \mu_1 P_1 \\ \frac{dP_1}{dt} = -\mu_1 P_1 + \lambda_1 P_0 \end{cases}$$

В первое уравнение системы подставим вместо P_1 его выражение $P_1=1-P_0$, тогда

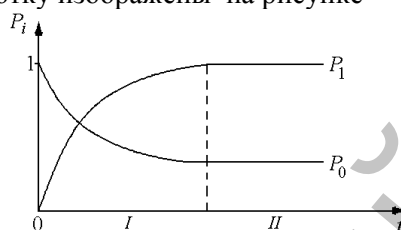
$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_1 P_0 + \mu_1 (1 - P_0), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \mu_1) P_0 + \mu_1 \end{cases}$$

При $\lambda_1 = \text{const}$ и при начальных условиях $P_0(0)=1, P_1(0)=0$ получим решение

$$P_0 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} e^{-(\lambda_1 + \mu_1)t}$$

В начале работы машина свободна и $P_0=1$. По мере вступления в работу вероятность P_0 уменьшается и в пределе достигает значения $\mu_1/(\lambda_1 + \mu_1)$.

Вероятность работы машины соответственно растет и достигает значения $\lambda_1 / (\lambda_1 + \mu_1)$. Зависимости вероятностей функционирования системы при постоянной интенсивности поступления предмета труда на обработку изображены на рисунке



Зона I представляет собой период пуска системы с отработкой режимов эксплуатации.

В установившемся режиме эксплуатации ($t \rightarrow \infty$) при $\lambda_1 = \text{const}$, $P_0 = \text{const}$, $P_1 = \text{const}$ (финальные вероятности, зона II):

$$\frac{dP_0}{dt} = 0; \frac{dP_1}{dt} = 0.$$

Система дифференциальных уравнений трансформируется в систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_1 P_0 + \mu_1 P_1, \\ 0 = -\mu_1 P_1 + \lambda_1 P_0, \\ P_0 + P_1 = 1 \end{cases}$$

Тогда расчетные формулы будут иметь следующий вид:

$$P_0 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \quad P_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \quad \lambda_1 = \frac{1}{t_n} \quad \mu_1 = \frac{1}{t_y}$$

где t_n – среднее значение времени между поступлениями предметов труда на обработку; t_y – средняя продолжительность цикла обработки предмета труда. Вероятность P_1 представляет собой коэффициент использования рабочего времени машины.

Пример. Система раскряжёвки (распиловка бревен или хлыстов на сортименты нужной длины) работает с циклом обработки $t_y=1$ мин. Интенсивность подачи можно изменять. Необходимо установить рациональную интенсивность подачи и цикл подачи хлыста. Интенсивность обработки составит $\mu_1=1$ хлыст/мин.

Зададимся различными значениями λ_1 . При интенсивности подачи 1 хлыст/мин вероятность работы системы составит 0,5. Начиная с $\lambda_1=5-6$, дальнейшее увеличение параметра существенно не повысит рабочего состояния. Рациональный цикл подачи хлыстов составит $t_n = \frac{1}{\lambda} = 0,2$ мин. Полученное значение цикла подачи хлыста позволяет выбирать подающий механизм: растаскиватель, манипулятор или другие устройства.

Если система работает в режиме $\frac{\lambda_1}{\mu_1} \geq 1$, то подающий механизм вынужден простаивать либо предметы труда накапливаются перед обрабатывающей установкой.

Заключение. Поскольку, в лесопромышленном комплексе на работу различных агрегатов влияет большое количество случайных факторов и построить детерминированные математические модели чаще всего невозможно, то нужно строить и исследовать стохастические модели.

Использование математических моделей играет большую роль в современной экономике. Поэтому при преподавании высшей математики, особенно в технических и экономических университетах, больше внимания нужно уделять построению математических моделей, реальных производственных задач. Уместно вспомнить высказывание академика В.И. Арнольда, “умение составлять адекватные математические модели реальных ситуаций должно составлять неотъемлемую часть математического образования” [3.с. 28].

Список литературы

1. Игнатенко В.В., Турлай И.В., Федоренчик А.С. Моделирование и оптимизация процессов лесозаготовок. – Мн: БГТУ, 2004. – 180 с.
2. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М: Наука, 1966. – 152 с.
3. Арнольд, В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М. МЦНМО, 2000. – 32 с.

УПРАВЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ

А.А. Козлов, А.Д. Бурак
Новополоцк, ПГУ

Сегодня одной из активно развивающихся как в Республике Беларусь, так и за рубежом, областей математических исследований является теория управления асимптотическими характеристиками (инвариантами) линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Это связано с тем, что полученные в этой теории результаты позволяют для управляемой динамической системы (механической, физической, технической) строить такие управления, которые бы воздействовали на ее устойчивость. При этом устойчивость здесь понимается в самом широком смысле – это и устойчивость по Ляпунову, и асимптотическая устойчивость, и равномерная асимптотическая устойчивость, и орбитальная устойчивость и др. Все зависит лишь от выбора тех асимптотических инвариантов [1], подлежащих управлению, которые отвечают за требуемый тип устойчивости. Данная особенность рассматриваемой теории определяет ее прикладной характер, поскольку, результаты, получаемые в ней, могут находить непосредственное применение при решении различных задач стабилизации управляемого объекта, являющейся важной характеристикой физической или механической системы.

В настоящее время достаточно хорошо изучены задачи управления асимптотическими инвариантами в лишь классе *линейных систем без наблюдателя*: с гладкими или кусочно-гладкими коэффициентами (Гайшун И.В, Смирнов Е.Я., Борухов В.Т, Тонков Е.Л.), с равномерно непрерывными и кусочно-постоянными коэффициентами (Тонков Е.Л, Попова С.Н., Макаров Е.К., Зайцев В.А), а также во множестве линейных систем малых размерностей без наблюдателя с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами (А.А. Козлов, А.Д. Бурак, И.В. Инц). Поэтому результаты данной работы, посвященные решению задач глобального управления асимптотическими инвариантами двумерных линейных систем с наблюдателем, коэффициенты которых не удовлетворяют ни условиям гладкости, ни условиям равномерной непрерывности, являются новыми и актуальными.

Материал и методы. В представленной работе объектом для изучения являются линейные управляемые системы с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами и наблюдателем. При исследовании глобальной управляемости асимптотических инвариантов таких систем применяются методы матричного и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории управления системами, а также теории управления асимптотическими инвариантами нестационарных систем.

Результаты и их обсуждение. Обозначим через R^n евклидово векторное пространство размерности n , а через M_{mn} – пространство вещественных $(m \times n)$ -матриц со спектральной (операторной) нормой. Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad t \dots 0. \quad (1)$$