УДК 512.542

Н.Н.Воробьев, В.Г.Сементовский

Формации, определяемые подгруппами Холла

Ряд известных результатов теории групп был посвящен построению новых классов конечных разрешимых групп, определяемых свойством вложения подгрупп Холла в их аналоги — $\mathfrak{X}$-инъекторы и $\mathfrak{Y}$-проекторы, где $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга и формация, соответственно.

В 1973 г. Локкет [1] определяет и описывает строение инъекторов групп для класса $L_\pi(\mathfrak{X})$ всех групп, $\mathfrak{X}$-инъекторы которых содержат некоторую холловскую π-подгруппу этих групп. Дёрком и Хоуксом [2] была построена новая формация $\overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{X})$, состоящая из всех тех групп G, в которых каждый $\mathfrak{X}$-проектор группы G содержит некоторую холловскую π-подгруппу из G. Галледжи [3] исследует класс групп $L'_\pi(\mathfrak{X})$, в которых каждый $\mathfrak{X}$-инъектор группы содержит в качестве нормальной подгруппы некоторую холловскую π-подгруппу этой группы. Для специального случая локальной формации $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ всех разрешимых групп, $L'_\pi(\mathfrak{X})$ - класс всех π-замкнутых групп. Заметим, что систематическое изучение π-замкнутых групп было начато академиком С.А.Чунихиным (см., например, [4]). Хорошо известным в теории формаций является тот факт, что $L'_\pi(\mathfrak{S})$ является локальной формацией [5]. В связи с этим естественен поиск новых семейств локальных формаций, являющихся аналогами формации π-замкнутых групп.

Пусть $\mathfrak{X}$ — локальная формация. Обозначим через $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{X})$ — класс всех тех конечных разрешимых групп G, $\mathfrak{X}$-проектор которых содержит в качестве нормальной подгруппы некоторую холловскую π-подгруппу группы G. Заметим,что в случае $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}$, класс $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{X}) = L'_\pi(\mathfrak{X})$ — формация π-замкнутых групп.

Доказательство того, что класс $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{X})$ является локальной формацией для любой локальной формации $\mathfrak{X}$ — основной результат

настоящей работы. При этом также получено явное описание локального экрана формации $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{X})$.

Все рассматриваемые в работе группы конечны и разрешимы. Определения и обозначения — общеприняты и их можно найти в [5] и [6].

Определение 1. Пусть $\mathfrak{X}$—локальная формация. Определим класс групп $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{X})$ следующим образом:

$G \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{X})$ тогда и только тогда, когда каждый $\mathfrak{X}$-проектор группы G содержит в качестве нормальной подгруппы некоторую холловскую π-подгруппу группы G.

Доказательство следующих пяти лемм осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — локальная формация. Тогда класс $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{X})$ — формация, и $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$, $\mathfrak{S}_{\pi'}$ — ее подформации.

Лемма 2. Непустая формация $\mathfrak{F}$ является подформацией формации $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда для любой группы G справедливо $G^{\mathfrak{H}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая подформация формации $\mathfrak{H}$, G — произвольная группа, H — $\mathfrak{H}$-проектор группы G и $H \in \mathfrak{F}$. Тогда H является $\mathfrak{F}$-проектором группы G.

Лемма 4. Для любой локальной формации $\mathfrak{X}$ справедливо равенство:

$$\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}) = \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}).$$

Определение 2. Пусть $\mathfrak{X}$ — локальная формация. Определим класс групп $\overset{\vee}{C}^*_\pi(\mathfrak{X})$ так: $G \in \overset{\vee}{C}^*_\pi(\mathfrak{X})$ тогда и только тогда, когда индекс каждого $\mathfrak{X}$-проектора группы G в G является π'-числом.

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{X}$ - локальная формация. Тогда справедливы следующие утверждения: 1) $\overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{X}) = \overset{\vee}{C}^*_\pi(\mathfrak{X})$;

2) $\mathfrak{S}_{\pi'} \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{X}) = \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{X})$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:* 1) $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F}) = \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'})$;

2) $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$ — *локальная формация, определя-*

емая локальным экраном f таким, что

$$f(p) = \begin{cases} \left\{ G \mid \mathrm{Proj}_{\mathfrak{H}} G \subseteq h(p) \right\}, & \text{если } p \in \pi \\ \mathfrak{S} & , \text{если } p \in \pi', \end{cases}$$

где $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$ *— формация с максимальным внутренним локальным экраном h .*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$.Так как по лемме 4 справедливо равенство $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{H}) = \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$, то для доказательства включения $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$ достаточно показать выполнимость включения $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{H})$.

Пусть $G \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$ и F - некоторый $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Тогда существует холловская π-подгруппа G_π группы G, такая, что $G_\pi \trianglelefteq F$. Так как $F_\pi \subseteq G_\pi$ и из $G_\pi \subseteq F$ следует $G_\pi \subseteq F_\pi$, то $F_\pi = G_\pi$. Но так как $G_\pi \trianglelefteq F$, то $F_\pi \trianglelefteq F$, то есть $F \in \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$. Следовательно, $F \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'} = \mathfrak{H}$.

Согласно определению $\mathfrak{F}$-проектора группы G, для любой подгруппы U из G, содержащей F,имеет место равенство $FU^{\mathfrak{F}} = U$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то по лемме 2 $U^{\mathfrak{F}} \subseteq U^{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $FU^{\mathfrak{H}} = U$, и F является $\mathfrak{H}$-проектором группы G. Тогда $G \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{H})$, и имеет место включение $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{H})$.

Докажем обратное включение: $\overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$. Аналогично приведенному выше, ввиду леммы 4, достаточно показать, что $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$. Докажем, что $\mathfrak{H}$-проектор группы G является $\mathfrak{F}$-проектором в G. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Для единичной группы включение тривиально.

Пусть G — группа минимального порядка среди всех, для которых утверждение неверно, то есть $G \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{H}) \setminus \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть K —

минимальная нормальная подгруппа группы G. Если K_1 — минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от K, то $K \cap K_1 = 1$. Кроме того, по индукции $G/K \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$ и $G/K_1 \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$. Но тогда $G/K \cap K_1 = G \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$ и мы приходим к противоречию. Итак, K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Пусть V — $\mathfrak{F}$-проектор группы G и H — $\mathfrak{h}$-проектор в G. Тогда по лемме 15.1 [5] VK/K будет $\mathfrak{F}$-проектором, а HK/K — $\mathfrak{h}$-проектором группы G / K. По индукции $G/K \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$, то есть $G_\pi K/K \trianglelefteq VK/K$, где G_π – некоторая холловская π - подгруппа группы G. Кроме того, $G_\pi K/K = V_\pi K/K$, где V_π — некоторая холловская π-подгруппа группы V. Тогда $V_\pi K/K \trianglelefteq VK/K$, следовательно, $VK/K \in \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$ и поэтому $VK/K \in \mathfrak{h}$. Кроме того, $\mathfrak{h}$ — подформация формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, по лемме 3 подгруппа VK/K является $\mathfrak{h}$-проектором группы G/K. Так как VK/K и HK/K — $\mathfrak{h}$-проекторы группы G/K, то по теореме 15.3 [5] они сопряжены, то есть $V^x K/K = HK/K$, где $x \in G$. Тогда $V^x K = HK$ и HK/K — $\mathfrak{F}$-проектор группы G/K.

Рассмотрим два возможных случая: $HK \subset G$ и $HK = G$.

1) Пусть $HK \subset G$. Так как H — $\mathfrak{h}$-проектор группы G и по условию $G \in \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{h})$, то имеет место включение $(HK)_\pi \subseteq G_\pi \subseteq H$, где $(HK)_\pi$ — холловская π-подгруппа из HK. Но по лемме 3 H будет $\mathfrak{h}$-проектором в HK. Тогда $HK \in \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{h})$. Так как по лемме 4 $\overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{h}) = \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{h})$, то $HK \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{h})$. Ввиду $|HK| < |G|$ по индукции $HK \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, если V_1 — некоторый $\mathfrak{F}$-проектор подгруппы HK, то из $HK \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$ по доказанному выше, V_1 является $\mathfrak{h}$-проектором в HK. Кроме того, H тоже будет $\mathfrak{h}$-проектором в HK. Тогда V_1 и H сопряжены в HK, то есть $V_1^y = H$, где $y \in HK$. Итак, H — $\mathfrak{F}$-проектор подгруппы HK. Из того, что HK/K — $\mathfrak{F}$-проектор группы G/K, а H — $\mathfrak{F}$-проектор в HK следует по лемме 15.1 2) [5], что H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Но тогда $G \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$ и мы приходим к противоречию. Рассмотрим случай:

2) $HK = G$. В этом случае $G / K \in \mathfrak{F}$ и G / K совпадает со своим $\mathfrak{F}$-проектором. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K$, то ввиду минимальности K, получаем $G^{\mathfrak{F}} = K$.

Представляются следующие возможности: либо $K \subseteq \Phi(G)$, либо $K \not\subseteq \Phi(G)$.

Пусть $K \subseteq \Phi(G)$. Тогда из $G / \Phi(G) \cong G / K / \Phi(G) / K$ и $G / K \in \mathfrak{F}$ следует $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — локальная, а, следовательно, по теореме 4.3 [5] и насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Аналогично, из $G/K = HK/K \in \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$ и локальности формации π-замкнутых групп следует $G \in \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$. Тогда $G \in \mathfrak{H}$. Но так как по лемме 1 $\mathfrak{H}$ является подформацией формации $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$, то $G \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$, и мы пришли к противоречию.

Остается случай $K \not\subseteq \Phi(G)$. Так как K — минимальная нормальная подгруппа разрешимой группы и $K = G^{\mathfrak{F}}$, то $G^{\mathfrak{F}}$ — абелева подгруппа. Тогда по теореме 21.10 [5] существует дополнение H к $G^{\mathfrak{F}}$ в G, которое является $\mathfrak{F}$-проектором группы G. Но так как H — $\mathfrak{H}$-проектор группы G и $G \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{H})$, получаем $G_\pi \trianglelefteq H$. Следовательно, $G \in \overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F})$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения воспользуемся тем, что согласно первому утверждению теоремы $\overset{\vee}{C}'_\pi(\mathfrak{F}) = \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$. Докажем локальность $\overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$. Формация $\mathfrak{H}$ имеет максимальный внутренний локальный экран h такой, что $\mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$.

Построим теперь локальный экран f, для которого

$$f(p) = \begin{cases} \{G \mid \mathrm{Proj}_{\mathfrak{H}} G \subseteq h(p)\}, & \text{если } p \in \pi \\ \mathfrak{S}, & \text{если } p \in \pi'. \end{cases}$$

Для доказательства локальности формации $\overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$ покажем, что $\overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H}) = \langle f \rangle$, где $\langle f \rangle$ — класс всех групп, обладающих f-центральными главными рядами.

Пусть G — группа минимального порядка из класса $\langle f \rangle \setminus \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$ и K — минимальная нормальная подгруппа группы G. Очевидно, K —

единственна. Тогда, ввиду $|G/K|<|G|$, по индукции $G/K \in \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$. Поэтому, если F — $\mathfrak{H}$-проектор группы G и H — ее холловская π-подгруппа, то по определению класса будет $HK/K \subseteq FK/K$. Тогда $HK \subseteq FK$. Из разрешимости группы G следует, что подгруппа K будет абелевой p-группой. Тогда возможны случаи: либо $p \in \pi$, либо $p \in \pi'$.

Пусть $p \in \pi$. Так как $G \in \langle f \rangle$, то по определению f-центрального фактора:

$$G/C_G(K) \in f(p) = \left\{ G \mid \mathrm{Proj}_{\mathfrak{H}} G \subseteq h(p) \right\} = h^*(p).$$

По теореме IV.5.19 c) [6] $\mathfrak{H}$-проектор F покрывает всякий h^*- центральный главный фактор. Следовательно, $K \subseteq F$ и $F = FK = HK \supseteq H$, а это означает, что $G \in \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$. Противоречие.

Итак, $p \in \pi'$. Так как $K \in \mathfrak{S}_\pi$, то $G \in \mathfrak{S}_\pi \cdot \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$. Вместе с тем по лемме 5 имеем $\mathfrak{S}_\pi \cdot \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H}) = \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$. Отсюда $G \in \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$. Полученное противоречие доказывает включение $\langle f \rangle \subseteq \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$.

Докажем обратное, то есть, что $\overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \langle f \rangle$. Пусть L — группа минимального порядка среди всех, содержащихся в $\overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H}) \setminus \langle f \rangle$ и R — единственная минимальная нормальная подгруппа из L. По индукции $L/R \in \langle f \rangle$. Ввиду разрешимости группы L подгруппа R будет абелевой p-группой. Тогда возможны два случая: либо $p \in \pi$, либо $p \in \pi'$.

Пусть $p \in \pi'$. Так как $L / R \in \langle f \rangle$, то на участке главного ряда $L \supset \ldots \supset R$ все факторы f-центральны. Из определения экрана f следует $L/C_L(R) \in \mathfrak{S} = f(p)$ и поэтому R также будет f-центральным главным фактором. Тогда $L \in \langle f \rangle$, и мы приходим к противоречию.

Остается рассмотреть случай $p \in \pi$. Пусть H^* — холловская π-подгруппа из L, F^* — $\mathfrak{H}$-проектор подгруппы L. Так как $R \in \mathfrak{S}_\pi$, то $R \subseteq H^*$. Ввиду $L \in \overset{\vee}{C}_\pi(\mathfrak{H})$, получим $H^* \subseteq F^*$. Следовательно, $R \subseteq F^*$, то есть F^* покрывает R. Тогда по теореме IV.5.19 c) [6] R — h^*-центральный главный фактор группы G. Значит, главный ряд $L \supset \ldots \supset R \supset 1$ будет f-центральным и $L \in \langle f \rangle$. Полученное противоречие заканчивает доказательство второго утверждения. Теорема доказана.

Заметим, что с учетом теоремы Брюстера о существовании и сопряженности $\mathfrak{F}$-проекторов в π-разрешимых группах (см.[7]) полученный

результат верен и в классе $\mathfrak{S}^{\pi}$ всех π-разрешимых групп в предположении, что формация $\mathfrak{F}$ будет π-насыщенной.

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда Сороса - Беларусь.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Lockett P.*** On the theory of Fitting classes. // Math. Z. 1973.Bd.131,№3.P.103-115.
2. ***Doerk K.*** and ***Hawkes T.*** Ein Beispiel aus der Theorie der Schunckklassen. // Arch. Math. 1978. Vol.31. P.539-544.
3. ***Gallego M.*** A note on Hall operators for Fitting classes. // Bull. London Math. Soc. 1985. Vol.17. P.248-252.
4. ***Чунихин С.А.*** Подгруппы конечных групп. Мн., Наука и техника, 1964.
5. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. М., Наука, 1978.
6. ***Doerk K.*** and ***Hawkes T.*** Finite soluble groups. W. de Gruyter. Berlin-N.Y., 1992.
7. ***Brewster B.*** $\mathfrak{F}$-projectors in finite π–solvable groups. // Arch. Math. 1972. Vol.23, №2. P.133-138.

SUMMARY

In a present paper it is proved that a class of all those solvable groups in which every $\mathfrak{F}$-projector contains some normal (into $\mathfrak{F}$-projector) Hall's π-subgroup is a local formation. Besides a local screen of such formation is described.

УДК 517.97+519.21+612+616

А.А.Чиркин, В.Т. Приставко,
И.В. Солдатенко, А.А. Чиркина

К математической теории липидных систем

Рассмотрим основы математической теории липидных систем на примере радиационно-экологических дислипопротеинемий, исследования которых послужили началом синтеза математических моделей липидных систем.

Анализ медицинской ситуации в постчернобыльский период показал, что среди нестохастических последствий аварии на ЧАЭС видное место будут занимать клинические проявления атеросклероза [1, с.144-145; 2, с.170-186]. В 1994 году была сформулирована концепция ускоренного развития атеросклероза при действии комплекса неблагоприятных факторов аварии на ЧАЭС [3, с.89]. В патогенезе этого патологического состояния ведущую роль играют нарушения липидтранспортной системы (ЛТС), так называемые радиационно-экологические дислипопротеинемии — ДЛП [4, с.108; 5, с.93-96]. В эксперименте показано, что изолированный радиационный фактор (внешнее гамма-облучение) способен вызывать транзиторную ДЛП [6, с.24-28; 7, с.46-50]. Дислипопротеинемия отражает сложные взаимоотношения в функционировании ЛТС, включающей механизмы прямого и обратного транспорта холестерина. Существующий аппарат математико-статистических методов анализа