Матэматыка

УДК 517.956

А. Л. Гладков

Об одном нелинейном уравнении теплопроводности со степенными нелинейностями

1. Введение. Рассматривается уравнение

$$u_t = (u^m)_{xx} + c_1 (u^n)_x - c_2 u^k \tag{1.1}$$

где $m = n = k = \alpha > 1$, c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные. Уравнение (1.1) описывает, например, процессы распространения тепла в нелинейной среде при наличии конвективного переноса и поглощения. В полуплоскости $S = R \times (0, \infty)$ переменных (x, t) изучает задача Коши с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R \tag{1.2}$$

Здесь $u_0(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, которая может расти на бесконечности.

Как известно, вследствие вырождения уравнения (1.1) при $u = 0$ задача (1.1), (1.2) может не иметь классического решения.

Определение 1. Неотрицательную непрерывную в $\overline{S}$ функцию $u(x, t)$ назовем обобщенным субрешением уравнения (1.1) в S, если выполнено интегральное неравенство

$$\iint\limits_P \left[u f_t + u^\alpha f_{xx} - c_1 u^\alpha f_x - c_2 u^\alpha f \right] dx\, dt - \int\limits_{x_1}^{x_2} uf\, dx \Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} u^\alpha f_x\, dt \Big|_{x_1}^{x_2} \ge 0 \tag{1.3}$$

для всех ограниченных прямоугольников $P \equiv [x_1, x_2] \times [t_1, t_2] \subset \overline{S}$ и любой функции $f \in C^{2,1}_{x,t}(P)$ такой, что $f(x_1, t) = f(x_2, t) = 0$ при $t \in [t_1, t_2]$.

Определение 2. Функцию $u(x, t)$ назовем обобщенным суперрешением уравнения (1.1) в S, если выполнено определение 1 с неравенством противоположного знака в (1.3).

Определение 3. Функцию $u(x, t)$ назовем обобщенным решением уравнения (1.1) в S, если она является обобщенным суб- и суперрешением уравнения (1.1) в S. Если при этом выполняется условие (1.2), то $u(x, t)$ назовем обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2).

Классы существования и единственности обобщенного решения задачи Коши для уравнения (1.1) с произвольными большими единицы значениями показателей степеней рассматривались при условии $c_1 = 0$ в [1 - 4] и при условии $c_2 = 0$ — в [5 - 7]. В настоящей работе доказываются теоремы существования и единственности растущих на бесконечности обобщенных решений задачи (1.1), (1.2) при равных показателях степеней, но при $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$.

В пункте 2 устанавливается разрешимость в классе растущих функций задачи Коши (1.1), (1.2). Для удобства через M_i и α_i условимся обозначать в дальнейшем соответственно положительные и неотрицательные постоянные. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции

$$u_s(x) = \left\{\alpha_1 \exp\left[-\left(c_1+\sqrt{c_1^2+4c_2}\right)x/2\right]+\alpha_2 \exp\left[\left(\sqrt{c_1^2+4c_2}-c_1\right)x/2\right]\right\}^{1/\alpha} \tag{1.4}$$

являются стационарными классическими решениями уравнения (1.1).

Теорема 1. Пусть при некоторых значениях α_1 и α_2 функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$u_0(x) \le u_s(x)\,. \tag{1.5}$$

Тогда задача (1.1), (1.2) имеет минимальное обобщенное решение в S, удовлетворяющее неравенствам

$$u(x, t) \le u_s(x) \text{ в } \overline{S}\,, \tag{1.6}$$

$$u(x, t) \le \left[\frac{1}{(\alpha-1)t}\right]^{1/(\alpha-1)} \text{ в } S. \tag{1.7}$$

Определим класс K неотрицательной функцией $v(x, t)$, для которых в $\overline{S}$ выполнено неравенство

$$v(x, t) \le \varepsilon(x)\, u_s(x), \tag{1.8}$$

где $\varepsilon(x) \ge 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x)=0$. Функция $\varepsilon(x)$ может зависеть от $v(x, t)$. В пункте 3 доказывается единственность решения задачи Коши в классе K.

Теорема 2. Обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) единственно в полуплоскости S в классе K.

Приводится пример, свидетельствующий о невозможности замены в (1.8) $\varepsilon(x)$ на положительную постоянную без ущерба для единственности решения задачи Коши.

2. Доказательство теоремы 1. Аналогично тому, как это сделано в [1] доказывается вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть $\phi(x, t)$ — произвольное суперрешение уравнения (1.1) в S и $u_0(x) \le \phi(x, t)$. Тогда в S существует минимальное обобщенное решение $u(x,t)$ задачи Коши (1.1), (1.2) такое, что

$$u(x, t) \le \phi(x, t) \text{ в } \overline{S}\,,\; u(x, t) \le \left[\frac{1}{(\alpha-1)t}\right]^{1/(\alpha-1)} \text{ в } S.$$

Применение леммы 1 с $\phi(x, t) = u_s(x)$ доказывает теорему 1.

Замечание 1. Как видно из оценки (1.7), минимальное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) с растущей на бесконечности начальной функцией, подчиненной условию (1.5), становится ограниченным при любом значении $t > 0$.

3. Доказательство теоремы 2. Введем обозначение $p_+ = \max(p,0)$. Установим справедливость важного вспомогательного утверждения, следствием которого является теорема 2.

Лемма 2. Пусть $\underline{u}(x, t)$ и $\overline{u}(x, t)$ — соответственно обобщенное суб- и суперрешение уравнения (1.1) в S из класса K с начальными условиями

$\underline{u}_0(x)$ и $\bar{u}_0(x)$, причем $(\underline{u}_0 - \bar{u}_0)_+$ — интегрируемая функция. Тогда для всех $\tau > 0$

$$\int_R \Big[\underline{u}(x,\tau) - \bar{u}(x,\tau) \Big]_+ dx \le \int_R \Big[\underline{u}_0(x) - \bar{u}_0(x) \Big]_+ dx \tag{3.1}$$

Доказательство. Положим $x_1 = -j$, $x_2 = j$, $t_1 = 0$, $t_2 = \tau$,

$$b(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\bar{u}^\alpha(x,t) - \underline{u}^\alpha(x,t)}{\bar{u}(x,t) - \underline{u}(x,t)} & \text{при} \quad \bar{u} \ne \underline{u} \\ \alpha\, \bar{u}^{\alpha-1}(x,t) & \text{при} \quad \bar{u} = \underline{u} \end{cases}$$

Из определений 1 и 2 получаем

$$\begin{aligned} \int_{-j}^{j} \Big[\bar{u}\,(x,\tau) - \underline{u}\,(x,\tau)\Big] f\,(x,\tau)\,dx \ \le \ & \int_{-j}^{j} \Big[\bar{u}_0\ (x) - \underline{u}_0\ (x)\Big] f\ (x,\,0)\ dx\ + \\ & \iint_{Q_{j,\tau}} (\bar{u} - \underline{u})\Big[\, f_t + b\ (f_{xx} - c_1 f_x - c_2 f)\Big] dx\ dt - \int_0^\tau (\bar{u}^\alpha - \underline{u}^\alpha) f_x\, dt \Big|_{-j}^{j} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Вследствие (1.8)

$$0 \le b(x,\,t) \le \alpha\ [\varepsilon(x)\ u_s(x)]^{\alpha-1} \tag{3.3}$$

Пусть ε, j_0 — произвольные положительные числа, $w(x) \in C_0^\infty(R)$ — произвольная функция такая, что $0 \le w(x) \le 1$ и $w(x) = 0$ при $|x| \ge j_0$, а $b_k(x,t)$ — последовательность положительных функций из пространства $C^\infty(\bar{S})$, равномерно сходящихся при $k \to \infty$ на любом ограниченном множестве к $b(x,t)$ и удовлетворяющих неравенствам (3.3) (быть может с другой $\varepsilon(x)$).При $j > j_0 + 1$ в $Q_{j,\tau} = (-j,\, j) \times (0,\, \tau)$ определенно классическое решение $f_{kj}(x,\,t)$ задачи

$$L_k f \equiv f_t + b_k(x,\,t)\ (f_{xx} - c_1 f_x - c_2 f) = 0 \tag{3.4}$$

$$f(x,\,\tau) = w(x),\ f(x,t)\Big|_{S_{j,\tau}} = 0 \tag{3.5}$$

где $S_{j,\tau} = \{\ (x,\,t) \in R^2 : |x| = j,\ 0 \le t \le \tau\ \}$. По принципу максимума в $\bar{Q}_{j,\tau}$

$$0 \ \le f_{kj}(x,\,t) \le \max_{|x| \le j} w(x) \le 1 \tag{3.6}$$

Для того, чтобы получить более точную оценку $f_{kj}(x,\,t)$ сравним ее в $Q^+_{j,\tau} = \bar{Q}_{j,\tau} \cap \{x \ge 0\}$ с вспомогательной функцией

$z_1(x) = M_1 \{\ \exp\ [\ (c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c^2}\ )\ x/2] - \exp\ [\ (c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c^2}\ )\ j/2]\ \}$. Вследствие (3.5), (3.6) $z_1 - f_{kj} \ge 0$ для значений $t = \tau$ и $|x| = j$ при достаточно большой постоянной M_1. Несложно проверить, что $L_k(z_1) = 0$. По теореме сравнения отсюда следует неравенство

$$f_{kj}(x,t) \le z_1(x) \ \text{ в } Q^+_{j,\tau} \tag{3.7}$$

Сравним $f_{kj}(x,t)$ в $Q^-_{j,\tau} = \bar{Q}_{j,\tau} \cap \{x \le 0\}$ с функцией

$z_2(x) = M_2 \{\ \exp\ [\ (c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c^2}\ )\ x/2] - \exp\ [\ (c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c^2}\ )\ j/2]\ \}$ доказывается неравенство

$$f_{kj}(x,t) \le z_2(x) \ \text{в} \ Q^-_{j,\tau} . \tag{3.8}$$

Для оценки производных $\partial f_{kj} / \partial x$ при $x = j$ ($j > j_0 + 1$) заметим, что $z_1(j) = f_{kj}(j, t)$. Таким образом, $\partial z_1(j) / \partial x \le \partial f_{kj}(j,t) / \partial x \le 0$. Отсюда получаем, что при $x = j$

$$| \partial f_{kj} / \partial x | \le M_3 \exp [(c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c^2}\ ) j/2]. \tag{3.9}$$

Аналогично выводим оценку производной при $x = -j$

$$| \partial f_{kj} / \partial x | \le M_4 \exp [- (c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c^2}\ ) j/2]. \tag{3.10}$$

Из (3.4), (3.9), (3.10) и предположений о функциях $w(x)$, $b_k(x, t)$ вытекает неравенство

$$| \partial f_{kj} / \partial x | \le M_5, \ (x, t) \in \overline{Q}_{j,\tau} . \tag{3.11}$$

Полагая в (3.2) $f = f_{kj}$ и используя (3.4), (3.5), находим

$$\int_{-j}^{j} \left[\underline{u}(x,\tau)-\overline{u}(x,\tau)\right] w(x)dx \le \int_{-j}^{j} \left[\underline{u}_0(x)-\overline{u}_0(x)\right]_+ dx - \int_0^{\tau} \left(\underline{u}^{\alpha} - \overline{u}^{\alpha}\right) f_x \, dt \Big|_{-j}^{j} +$$

$$+ \iint_{Q_{j,\tau}} (\underline{u} - \overline{u})(b_k - b)\left[f_{xx} - c_1 f_x - c_2 f \right] dx\, dt . \tag{3.12}$$

Для упрощения записи в (3.12) и в дальнейшем индексы у функции $f_{kj}(x,t)$ не указываются. Обозначим интегралы в правой части (3.12) соответственно через I_i ($i = \overline{1,3}$). Оценим по модулю I_2 и I_3. Из (1.8), (3.9), (3.10) следует, что

$$| I_2 | \le \varepsilon \tag{3.13}$$

при достаточно больших значениях j. Зафиксируем выбранное значение j. После умножения уравнения (3.4) на f_{xx} и интегрирования по $Q_{j,\tau}$ приходим к неравенству

$$\iint_{Q_{j,\tau}} b_k f_{xx}^2 \, dx\, dt \le M_6 , \tag{3.14}$$

где постоянная M_6 может зависеть от j. Применяя неравенство Коши-Буняковского и соотношения (1.8), (3.3), (3.11), (3.14), получаем

$$\begin{gathered} |I_3| \le \left\{ \iint_{Q_{j,\tau}} (\underline{u} - \overline{u})^2 (b_k - b)^2 / b_k \, dx dt \right\}^{1/2} \left\{ \iint_{Q_{j,\tau}} b_k f_{xx}^2 \, dx dt \right\}^{1/2} + \\ + \sup_{Q_{j,\tau}} |b_k - b| \iint_{Q_{j,\tau}} |\underline{u} - \overline{u}| (c_1 |f_x| + c_2 f) \, dx dt \le \varepsilon \end{gathered} \tag{3.15}$$

при фиксированных значениях j, τ и достаточно большом k. Из (3.12), (3.13), (3.15) в силу произвольности ε и $w(x)$ следует неравенство

$$\int_{-j}^{j} [\underline{u}(x,\tau) - \overline{u}(x,\tau)]_+ dx \le \int_{-j}^{j} [\underline{u}_0(x) - \overline{u}_0(x)]_+ dx . \tag{3.16}$$

Переходя в (3.16) к пределу при $j \to \infty$, приходим к неравенству (3.1). Лемма 2 доказана.

Замечание 2. Очевидно, что в случае, когда $\underline{u}(x, t)$ и $\overline{u}(x, t)$ являются обобщенными решениями уравнения (1.1), лемма 2 справедлива при замене $(\underline{u} - \overline{u})_+$ на $(\overline{u} - \underline{u})_+$. Таким образом, при $\tau > 0$ получаем неравенство

$$\| \underline{u}(x, \tau) - \overline{u}(x, \tau) \|_1 \le \| \underline{u}_0(x) - \overline{u}_0(x) \|_1 . \tag{3.17}$$

Здесь $\| \ \|_1$ — норма функций в пространстве $L^1(R)$.

Справедливость теоремы 2 вытекает из (3.17).

Замечание 3. Покажем, что теорема 2 является точной. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(x, 0) = u_s(x). \tag{3.18}$$

Тогда задача (1.1), (3.18) имеет классическое решение $u_s(x)$ и ограниченное при любом $t > 0$ обобщенное решение, удовлетворяющее оценке (1.7). Таким образом, при замене в (1.8) $\varepsilon(x)$ на положительную постоянную единственности задачи Коши может не быть.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Kamin S., Peletier L.A., Vazquez J.L.*** A nonlinear diffusion — absorption equation with unbounded initial data. // Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States. 1992. V.3. P.243-263.
2. ***McLeod J.B., Peletier L.A., Vazquez J.L.*** Solutions of a nonlinear ODE appearing in the theory of diffusion and absorption. // Differ. and Integral Equat. 1991. V.4. P.1-14.
3. ***Гладков А.Л.*** Задача Коши для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с поглощением. // Сибирский матем. журнал. 1993. Т.34. № 1. С. 47-64.
4. ***Vazquez J.L., Walias M.*** Existence and uniqueness of solutions of diffusion — absorption equations with general data. // Differ. and Integral Equat. 1994. V.7. № 1. P.15-36.
5. ***Gladkov A.L.*** Cauchy problem for equations of nonlinear heat conductibility with convection in classes of growing functions. // Pitman Research Notes in Mathematics Series. 1995. V. 325. P.106-119.
6. ***Гладков А.Л.*** О задаче Коши в классах растущих функций для уравнения фильтрации с конвекцией. // Матем.сборник. 1995. Т.186. № 6.
7. ***Гладков А.Л.*** О неограниченных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с силовой конвекцией на бесконечности. // Журнал вычислит. математики и матем. физики. 1996. Т. 36. № 10. С.35-56.

S U M M A R Y

The existence and uniqueness theorems of the solution of the Cauchy problem in the classes of growing at an infinity functions for the equations of nonlinear heat conductibility with convection and absorption terms are proved. The exactness of the obtained results is showed too.

УДК 519.44

В.Г.Сементовский

Дисперсивные инъекторы конечных групп

Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений. Подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-инъектором группы G, если для любой нормальной в G подгруппы N $V \cap N$ будет максимальной в N $\mathfrak{F}$-подгруппой.