$$\|w(t)\|_E^2 \le \left(C_{12}\|w(0)\|_E^2 + C_{13}(B)t \max_{s\in[\tau,\tau+t]} k(s) \right) e^{C_{13}(B)t}.$$

В силу того, что $k(s) \to 0$ при $s \to +\infty$, из этой оценки следует (21). Как легко видеть, доказанные нами утверждения (17) и (21) гарантируют выполнение условий теоремы 2.•

ЛИТЕРАТУРА

1. **Babin A.V., Vishik M.I.** Regular attractors of semi-groups and evolution equations.//J. Math. Pures Appl. 1983. Vol.62. P.441-491.
2. **Бабин А.В., Вишик М.И.** Неустойчивые инвариантные множества полугрупп нелинейных операторов и их возмущения.// УМН. 1986. Т.41, №4. С.3-34.
3. **Бабин А.В., Вишик М.И.** Аттракторы эволюционных уравнений. М., Наука, 1989.
4. **Haraux A.** Two remarks on dissipative hyperbolic problems.// College de France Seminar. Vol.VI, Pitman, Research Notes in Math. 1985.
5. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., Мир, 1972.
6. **Морозов Н.Ф.** Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., Изд-во ЛГУ, 1978.

SUMMARY

In the article we study behaviour of trajectories of nonautonomous evolution equations as $t \to +\infty$. We consider trajectories of bounded sets. The theorem on existence and propeties of maximal attractor of a family of evolution operators are proved. The result on attractor of nonautonomous dissipative hyperbolic equation are stated also.

УДК 517.936

П.П. Потапенко

Центральные характеристические множества решений вполне интегрируемых систем Пфаффа

Для изучения устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений широко используется первый метод Ляпунова, основанный на использовании характеристических чисел [1]. В работе [2] введено понятие характеристического вектора функции многих переменных для исследования вопросов устойчивости систем уравнений в полных дифференциалах. Однако прямой перенос результатов, полученных для обыкновенных дифференциальных уравнений, на системы Пфаффа оказывается затруднительным в связи с тем, что на плоскости невозможно ввести естественное отношение порядка. Поэтому представляется целесообразным при построении характеристик решений систем Пфаффа использовать теоретико-множественный подход.

О п р е д е л е н и е. Вектор $\lambda \in R^m$ назовем М-вектором для функции f: $R_+^m \to R_+$, если существует вещественное положительное D такое, что для всех $t \in R_+^m$ выполнено неравенство

$$f(t) \le D \exp(\lambda t),$$

и N-вектором, если существует $D > 0$ такое, что для всех $t \in R_+^m$ выполнено

$$f(t) \ge D \exp(\lambda t),$$

где λt – скалярное произведение векторов λ и t.

Множество М-векторов функции f назовем М-множеством и обозначим M(f). Аналогично, множество N-векторов функции f назовем N -множеством и обозначим N (f). Суммой числовых множеств M_1 и M_2 назовем множество

$$M_1 + M_2 = \{m = m_1 + m_2 : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}.$$

Справедливы следующие утверждения:

1. М- и N -множества выпуклы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех a, принадлежащих отрезку [0; 1] и λ_1, λ_2, принадлежащих M(f), имеем:

$$[f(t)]^a \le D_1 \exp[a(\lambda_1 t)],$$
$$[f(t)]^{1-a} \le D_2 \exp[(1-a)(\lambda_2 t)]$$

Перемножив эти равенства, получим

$$f(t) \le D_1 D_2 \exp[a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2)t]$$

т.е. $a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2) \in M(f)$. Для N-множества доказательство аналогично.

2. М-множество суммы функций равно пересечению М-множеств слагаемых $M(f + g) = M(f) \cap M(g)$.

3. N-множество суммы функций включает в себя объединение N – множеств всех слагаемых: $N(f + g) \supseteq N(f) \cup N(g)$.

4. $M(fg) \supseteq M(f) + M(g)$, $N(fg) \supseteq N(f) + N(g)$.

5. $M(1/f) = -N(f)$, где $-N = \{n: -n \in N\}$.

6. $M(f) \cap N(f)$ содержит не более одного элемента.

7. Пусть $M(g) \cap N(g) \ne 0$. Тогда

$$M(fg) = M(f) + M(g) \cap N(g),\ N(fg) = N(f) + M(g) \cap N(g).$$

8. Если λ -- М-вектор для f(t), то λ', $\lambda'_i \ge \lambda_i$, $i = \overline{1,m}$ -- также М-вектор.

9. Если λ -- N-вектор для f(t), то λ', $\lambda'_i \le \lambda_i$, $i = \overline{1,m}$ -- также N-вектор.

Доказательство утверждений 2-9 очевидно.

10. Для того, чтобы вектор λ был М-вектором для f(t), необходимо и достаточно существование такого $D > 0$, что $\forall a \in R$ и $\forall \mu \in R^m$ таких, что $\lambda\mu = 0$, $a\lambda + \mu \in R_+^m$, выполнено неравенство

$$f(a\lambda + \mu) \le D \exp((\lambda\lambda)a).$$

11. Для того, чтобы вектор λ был N-вектором для f(t), необходимо и достаточно существование такого $D > 0$, что $\forall a \in R$ и $\forall \mu \in R^m$ таких, что $\lambda\mu = 0$, $a\lambda + \mu \in R_+^m$, выполнено неравенство

$$f(a\lambda + \mu) \geq D\exp((\lambda\lambda)a).$$

Данные утверждения дают способ определения M- и N-векторов с заданным направлением. Докажем утверждение 10 (утверждение 11 доказывается аналогично).

Необходимость. Для всех $t \in R_+^m$ $f(t) \leq D\exp(\lambda t)$, следовательно, положив $t = a\lambda + \mu$, получим:

$$f(a\lambda + \mu) \leq D\exp(\lambda(a\lambda + \mu)) = D\exp(\lambda(a\lambda) + \lambda\mu) = D\exp((\lambda\lambda)a)$$

Достаточность. Любое $t \in R_+^m$ представимо в виде $t = a\lambda + \mu$ (разложение по вектору и ортогональному дополнению), следовательно, $\forall t \in R_+^m$ имеем:

$$f(t) = f(a\lambda + \mu) \leq D\exp((\lambda\lambda)a) = D\exp(\lambda(a\lambda) + \lambda\mu) = D\exp(\lambda(a\lambda + \mu)) = \\ = D\exp(\lambda t)$$

В дальнейшем вектор, противоположный характеристичному вектору [2] будем называть характеристическим, а все функции будем предполагать непрерывными. Пусть $\{\varphi_1(s);\varphi_2(s)\}$ - характеристическая вектор-функция для f(t), $0 \leq s \leq 1, \varphi_1(0) < \varphi_1(1)$. Расширенным характеристическим множеством назывем множество

$$\{\varphi_1(s);\varphi_2(s)\} U \{\lambda : \lambda_1 = \varphi_1(0), \lambda_2 \geq \varphi_2(0)\} U \{\lambda : \lambda_1 \geq \varphi_1(1), \lambda_2 = \varphi_2(1)\},$$

а положительной ε-окрестностью данной точки - множество точек из ε-окрестности, все координаты которых больше координат данной точки.

Теорема 1. В любой положительной ε-окрестности характеристического вектора функции f(t) лежит ***M***-вектор.

Доказательство. Для простоты изложения рассмотрим случай *m*=2. По определению характеристического вектора ([2]) для всех $\varepsilon \in R_+^m$ справедливо равенство

$$\lim_{t_1 + t_2 \to \infty} f(t)\exp(-(\varepsilon+\lambda)t) = 0.$$

Значит, существует *N* такое, что при $t_1+t_2 > N$ функция $f(t)\exp(-(\varepsilon+\lambda)t) \leq 1$

Обозначив $D = \max(\max_{t_1 + t_2 \leq N} f(t); 1)$

(max существует в силу непрерывности f) имеем для любого $t \in R_+^2$

$$f(t)\exp(-(\lambda+\varepsilon)t) \leq D, \quad f(t) \leq D\exp((\lambda+\varepsilon)t)$$

что и доказывает теорему.

Следствие. Граница *M*-множества совпадает с расширенным характеристическим множеством.

Теперь рассмотрим линейную вполне интегрируемую систему

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = A_i(t)x, i = \overline{1, m} \qquad (1)$$

и систему с возмущениями

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = A_i(t)x + f_i(t,x), i = \overline{1,m} \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $t \in R_+^m$.

Для системы (1) справедлива

Теорема 2. Для асимптотической устойчивости линейной однородной системы (1) достаточно, чтобы начало координат вместе с некоторой ε-окрестностью принадлежало М-множеству решений системы.

Доказательство аналогично доказательству теоремы из [3].

Пусть существуют функции *R(t)* (верхние функции) [1], осуществляющие оценку

$$\|X(t,s)\| \le D\frac{R(t)}{R(s)} \tag{3}$$

для любых $t,s \in R_+^m$, где X(t,s) - матрица Коши системы(1), $t_i \geq s_i$, причем D не зависит от t и s (но, вообще говоря, зависит от R). Центральным М - множеством (СМ - множеством) назовем объединение М - множеств всех функций R(t):

$$CM(X(t)) = \bigcup_i M(R_i(t)).$$

Очевидно, что центральное множество не пусто ($R(t) \equiv \exp(Mt)$, где $M_i \geq \|X(t,s)\|$) и $CM \subset M(\|x(t,x_0)\|)$ для любого x_0. Назовем ε-расширением T_ε множества Т объединение ε-окрестностей всех точек Т.

Теорема 3. СМ - множество линейной системы (1) ограничивает подвижность М-множества решений возмущенной системы (2), т.е. для любого ε>0 существует δ(ε) такое, что если $\|f_i(t,x)\| \le \delta\|x\|$, то $CM \subseteq M_\varepsilon$.

Доказательство. Без ограничения общности проведем доказательство в случае m=2. Всякое решение системы (2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = X(t;s)x(s) + \int_{s_1}^{t_1} X(t;\tau,t_2)f_1(\tau,t_2;x(\tau,t_2))d\tau + \int_{s_2}^{t_2} X(t;s_1,\tau_2)f_2(s_1,\tau;x(s_1,\tau))d\tau,$$

откуда

$$\|x(t)\| \le D\frac{R(t)}{R(s)}\|x(s)\| + \int_{s_1}^{t_1} \frac{R(t)}{R(\tau,t_2)}\delta\|x(\tau,t_2)\|d\tau + \int_{s_2}^{t_2} \frac{R(t)}{R(s_1,\tau)}\delta\|x(s_1,\tau)\|d\tau.$$

Разделив на R(t)/R(s), получим:

$$\frac{\|x(t)\|\cdot R(s)}{R(t)} \le D\|x(s)\| + \int_{s_1}^{t_1} \delta R(s)\frac{\|x(\tau,t_2)\|}{R(\tau,t_2)}d\tau + \int_{s_2}^{t_2} \delta R(s)\frac{\|x(s_1,\tau)\|}{R(s_1,\tau)}d\tau.$$

Теперь мы оказались в рамках теоремы, доказанной в [4] (неравенство (7) указанной работы), на основании которой имеем неравенство:

$$\frac{\|x(t)\|R(s)}{R(t)} \le D\|x(s)\|\exp\left(\int_{s_1}^{t_1}\delta d\tau + \int_{s_2}^{t_2}\delta d\tau\right) = D\|x(s)\|\exp\delta(t_1 + t_2 - s_1 - s_2),$$

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} \le \frac{R(t)\exp(\delta t)}{R(s)\exp(\delta s)},$$

т.е. R(t)exp(δt) - верхняя функция, откуда и следует заключение теоремы.

Следствие. Для асимптотической устойчивости системы с возмущениями (2) достаточно, чтобы начало координат вместе с некоторой окрестностью принадлежало СМ-множеству системы(1).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.*** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., Наука, 1966. - 576 с.
2. ***Грудо Э.И.*** Характеристические векторы и множества функций двух переменных и их основные свойства. - Дифференциальные уравнения, 1976, т.12, № 12. С. 2115-2128.
3. ***Демидович Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967. С.148, 472.
4. ***Грудо Э.И., Янчук Л.Ф.*** Неравенства вида Гронуолла, Бихари и Лангенхопа для систем Пфаффа. - Дифференциальные уравнения, 1977, т.13, № 4. С. 749-752.

S U M M A R Y

In this article the definitions of bounding sets of many variable functions and central characteristic set are given. The criterion of stability of perturbed system in roved also.

УДК 517.935.4+519.218.82

В.Ф. Асташонок, В.Т. Приставко, В.И. Толкачев

Технология проектирования фильтров случайных процессов

1. Введение

В настоящей работе рассматривается технология проектирования фильтров случайных процессов. Теория фильтрации случайных процессов, описываемых *стохастическими дифференциальными уравнениями и последовательностями*, бурно развивается с момента опубликования в 1960 году новых работ [1, 2] Р. Калманом. Мощным импульсом фундаментальных исследований в этом направлении послужила монография [3] А.Н. Ширяева и Р.Ш. Липцера. В работах [4,5,6] рассматривается теория аналитического конструирования оптимальных фильтров при наличии